Α ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟΣ, ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2006

Θέμα 1. Υποθέτουμε ότι το ποσοστό Y των ατόμων που εμπλέκονται σε τροχαία ατυχήματα στη διάρκεια ενός έτους είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 19/50]$. Η οικονομική ζημιά X (σε εκατ. Ευρώ) που επέρχεται στο κράτος είναι συνάρτηση του ποσοστού Y των ατόμων που εμπλέκονται στα τροχαία, και συγκεκριμένα,

$$X = g(Y) = \begin{cases} 0, & \text{αν} \quad 0 \le Y \le 1/50, \\ Y - 1/50, & \text{αν} \quad 1/50 \le Y \le 19/50. \end{cases}$$

Το διαθέσιμο αποθεματικό κεφάλαιο του κράτους για ασφαλιστική κάλυψη τροχαίων ατυχημάτων είναι $w = 1$ (εκατ. Ευρώ), και η ωφελιμοσυνάρτηση των πολιτών $u(w) = \sqrt{w}$.

(α) Προσδιορίστε το μέγιστο ασφάλιστρο $G_{\max}$ που μπορεί να δεχθεί το κράτος για ολική κάλυψη της ζημιάς X.

(β) Αν η ασφαλιστική εταιρεία έχει κεφάλαιο $w_0 = 2$ (εκατ. Ευρώ) και ωφελιμοσυνάρτηση $u_I(w_0) = 1 - e^{-w_0/2}$, ποιο είναι το ελάχιστο ασφάλιστρο $H_{\min}$ που θα απαιτήσει από το κράτος για ολική κάλυψη της παραπάνω ζημιάς; Υπάρχει ασφαλιστική πολιτική;

(γ) Αν το κράτος προχωρήσει στην ολική κάλυψη του κινδύνου με ασφάλιστρο $G = G_{\max}$ (όπως υπολογίστηκε στο ερώτημα (α)), υπολογίστε το μέσο κέρδος της εταιρείας, καθώς και την πιθανότητα να ζημιωθεί η εταιρεία.

Θέμα 2. Μια εταιρεία έχει αναλάβει να καλύψει τις ζημιές από ν ΙΧ επιβατικά αυτοκίνητα στη διάρκεια του επόμενου έτους. Κάθε αυτοκίνητο (από τα ν) έχει πιθανότητα $p_\nu = 2/\nu$ να εμπλακεί σε ατύχημα, και για κάθε αυτοκίνητο που θα εμπλακεί σε ατύχημα είναι γνωστό ότι το ύψος της ατομικής ζημιάς X_i ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 2]$. Έτσι, η $S_\nu = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_\nu}$ παριστάνει τη συνολική αποζημίωση που θα κληθεί να καλύψει ο κλάδος της εταιρείας στη διάρκεια του έτους, όπου N_ν είναι η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το πλήθος των ζημιών που θα συμβούν.

(α) Βρείτε τη ροπογεννήτρια $M_{S_\nu}(t)$ της S_ν.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή, $\mathbb{E}[S_\nu]$, και τη διασπορά, $\mathrm{Var}[S_\nu]$, της S_ν.

(γ) Να δείξετε ότι, καθώς $\nu \to \infty$, η S_ν συγκλίνει κατά κατανομή προς μία σύνθετη $\mathrm{Poisson}(\lambda, Y)$, και να προσδιορίσετε τη σταθερά λ και την κατανομή της Y.

Θέμα 3. (α) Οι (τυχαίες) ετήσιες εντάσεις ανατοκισμού $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ για τα επόμενα n έτη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμιά με πυκνότητα

$$g(\delta) = 50\delta, \quad 0 < \delta < 1/5.$$

Να υπολογισθούν (i) η πυκνότητα $f(i)$ των αντιστοίχων ετήσιων επιτοκίων $I_j = e^{\Delta_j} - 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, (ii) η μέση τιμή και η διασπορά της μέλλουσας (συσσωρευμένης) αξίας της μονάδας μετά από n έτη, και (iii) η μέση συσσωρευμένη αξία της ληξιπρόθεσμης ράντας n περιόδων.

(β) Η θνησιμότητα ατόμου ηλικίας x είναι

$$\mu_x = \frac{x}{35(x + 35)}, \quad x \ge 0.$$

Για τυχόν $x \ge 0$, συμβολίζουμε με T_x την τυχαία μεταβλητή που παριστάνει την υπόλοιπη ζωή ατόμου ηλικίας x, δηλαδή του (x). Υπολογίστε (i) τη συνάρτηση επιβίωσης $s(x)$, (ii) την πιθανότητα ${}_tp_x$ όπως ο (x) επιβιώσει για t ακόμη έτη, και (iii) τη μέση υπόλοιπη ζωή, $\mathbb{E}[T_x]$, του (x).

ΔΙΑΡΚΕΙΑ $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!