ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ Ι. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κλασικος ορισμος της πιθανοτητας

1.1. Σε μιά πόλη $n+1$ ατόμων ένα άτομο επιλέγει τυχαία ένα από τα υπόλοιπα και λέει μια φημολογία. Το δεύτερο άτομο κάνει το ίδιο, και η διαδικασία συνεχίζεται όμοια. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α) η φημολογία να ειπωθεί r φορές χωρίς να γυρίσει σε αυτόν που την άρχισε.

(β) η φημολογία να ειπωθεί $r \leq n$ φορές χωρίς να ακουστεί απο κάποιο άτομο που την ξέρει ήδη.

1.2. (Πρόβλημα Γαλιλαίου) Ρίχνουμε 3 συνηθισμένα ζάρια. (α) Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 9? (β) Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των ενδείξεών τους να ισούται με 10?

1.3. Ένα λεωφορείο ξεκινάει απο την αφετηρία με k φοιτητές και περνάει απο n στάσεις.

(α) Να κατασκευαστεί κατάλληλος δειγματικός χώρος για τις δυνατές αποβιβάσεις των φοιτητών.

(β) Να υπολογισθεί ο αριθμός των δυνατών αυτών αποβιβάσεων.

(γ) Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον σε μια στάση να αποβιβαστούν περισσότεροι από ένας φοιτητές.

1.4. Σε μια τάξη k μαθητών $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ποιά είναι η πιθανότητα ο a_1 να έχει γενέθλια την ίδια μέρα με κάποιον από τους υπόλοιπους $k-1$ μαθητές?

1.5. Σε ένα ράφι τοποθετούνται με τυχαία σειρά 6 βιβλία μαθηματικών, 4 βιβλία φυσικής, 3 βιβλία ιστορίας, 7 βιβλία ξένων γλωσσών, και 10 λεξικά. Ποιά είναι η πιθανότητα όλα τα βιβλία του ίδιου είδους να τοποθετηθούν μαζί?

1.6. Έχουμε μία Βασιλόπιτα με n κοματια, και μιά ουρά n ατόμων. Σε ένα ακριβώς κομμάτι υπάρχει ένα νόμισμα. Ένα άτομο (εκτός της ουράς) μοιράζει τα κομμάτια ένα προς ένα επιλέγοντας κάθε φορά ένα στην τύχη. Για δεδομένο $r \in \{1, \ldots, n\}$, ποιές είναι οι πιθανότητες

(α) Το νόμισμα να βρεθεί στην r-οστή δοκιμή.

(β) Το νόμισμα να μην βρεθεί ως την r-οστή δοκιμή.

1.7. Έχουμε r δοχεία, και κάθε φορά επιλέγουμε ένα στην τύχη και τοποθετούμε ένα βώλο σε αυτό. Η διαδικασία σταματάει όταν ένα δοχείο έχει δύο βώλους. Ποια είναι η πιθανότητα αυτό να συμβεί με τον n-οστο βώλο?

1.8. Μία κάλπη περιέχει 100 μαύρα 200 άσπρα σφαιρίδια. Βγάζουμε τυχαία 100 σφαιρίδια. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ακριβώς 10 μαύρα?

1.9. Μια κάλπη περιέχει 1000 σφαιρίδια απο τα οποία τα 25 είναι μαύρα, τα 30 άσπρα, τα 945 κόκκινα. Επιλέγουμε τυχαία 15 σφαιρίδια απο την κάλπη. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει

(α) ακριβώς 3 κόκκινα σφαιρίδια?

(β) ακριβώς 2 μαύρα και 3 άσπρα?

(γ) ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον 2 μάυρα?

1.10. Σε ένα διαγωνισμό παίρνουν μέρος n παντρεμένα ζευγάρια. Αν πρόκειται να απονεμηθούν τυχαία στους $2n$ διαγωνιζόμενους n βραβεία, ποιά είναι η πιθανότητα να πάρει βραβείο ακριβώς ένα από τα δύο άτομα σε κάθε ένα από τα ζευγάρια?

1.11. Από n ανδρόγυνα κατασκόπων ($2n$ συνολικά άτομα) διαλέγουμε στην τύχη k άτομα για να τα συμπεριλάβουμε σε μία μυστική αποστολή. Ποιές είναι οι πιθανότητες

(α) Να συμπεριληφθούν ακριβώς j άνδρες στην αποστολή?

(β) Να μην συμπεριληφθούν άτομα του ίδιου ανδρόγυνου στη αποστολή?

1.12. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με 13 φοιτητές και περνάει από 4 στάσεις. Να υπολογιστεί η πιθανότητα στην πρώτη στάση να αποβιβαστούν 3 φοιτητές, στην δεύτερη 4, στην τρίτη 4, και στην τέταρτη 2 φοιτητές.

1.13. Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία με $k \geq 3$ φοιτητές και περνάει από n στάσεις $(n \geq k-2)$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε ακριβώς μία στάση να αποβιβαστούν ακριβώς 3 φοιτητές ενώ σε καθεμία από τις υπόλοιπες στάσεις να αποβιβαστεί το πολύ ένας φοιτητής.

1.14. Επιλέγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση 5 σφαιρίδια απο μιά κάλπη με 60 σφαιρίδια αριθμημένα 1, 2,..., 60. Έστω ότι οι ενδείξεις τους είναι $k_1, k_2, \ldots, k_5$, με την σειρά με την οποία εξάγονται.

(α) Ποιά η πιθανότητα να ισχύει $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < k_5$?

(β) Ποιά η πιθανότητα να ισχύει $k_5 > \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$?

1.15. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο ζάρι n φορές $(n \geq 2)$. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α) Να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6 και

(β) Να εμφανιστεί τουλάχιστον δύο φορές ο αριθμός 6 και να μην εμφανιστεί καθόλου ο αριθμός 1.

1.16. Ρίχνουμε n συνηθισμένα ζάρια. Για $k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ να υπολογιστούν οι πιθανότητες

(α) Η μεγαλύτερη ένδειξη (από τις n) να ισούται με k.

(β) Η μικρότερη ένδειξη (από τις n) να ισούται με k.

1.17.[1] Απο μια κληρωτίδα που περιέχει n λαχνούς αριθμημένους $1, 2, \ldots, n$ εξάγεται ένα λαχνός, καταγράφουμε το νούμερο του, και τον επιστρέφουμε. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία $k \geq 3$ φορές. Να βρεθούν οι πιθανότητες

(α) Να επιλεγεί ο λαχνός 1 τουλάχιστον μια φορά.

(β) Να επιλεγούν οι λαχνοί 1, 2, 3 τουλάχιστον μια φορά ο καθένας.

1.18. Από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 1050$ διαλέγουμε έναν στην τύχη. (α) Ποια η πιθανότητα ο επιλεγμένος αριθμός να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς 3 ή 5? (β) Ποια η πιθανότητα ο επιλεγμένος αριθμός να διαιρείται με τουλάχιστον έναν από τους αριθμούς 3 ή 5 ή 7?

1.19. Ρίχνουμε n φορές δύο συνηθισμένα ζάρια. Ποια η πιθανότητα να εμφανιστούν όλες οι διπλές ζαριές $(1,1), (2,2), \ldots, (6,6)$ από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία?

1.20. Για n διαφορετικές επιστολές ετοιμάζουμε τους αντίστοιχους φακέλους. Σε κάθε επιστολή αντιστοιχεί ένας συγκεκριμένος φάκελος. Τοποθετούμε τυχαία τις επιστολές στους φακέλους (δηλαδή κάθε μία απο τις $n!$ τοποθετησεις ειναι ισοπιθανη). Ποιά είναι η πιθανότητα καμία επιστολή να μην έχει τοποθετηθεί στον φάκελο που της αντιστοιχεί?

1.21. (Κατανομές σφαιριδίων σε κελιά). Έχουμε n κελιά στα οποία κατανέμουμε k σφαιρίδια.
(α) Θεωρούμε ότι τα σφαιρίδια είναι διαφορετικά. Για παράδειγμα, τα αριθμούμε. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών κατανομών των σφαιριδίων στα κελιά σε καθένα από τα εξής σενάρια

(i) κάθε κελί είναι απεριόριστης χωρητικότητας,

(ii) κάθε κελί χωράει μόνο ένα σφαιρίδιο,

(iii) σε κάθε κελί πρέπει να τοποθετήσουμε τουλάχιστον ένα σφαιρίδιο.

[1] Οι ασκήσεις 17-20 είναι εφαρμογές της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού

(β) Θεωρούμε ότι τα σφαιρίδια είναι όμοια. Δηλαδή μιά κατανομή χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ όπου r_i είναι το πλήθος των σφαιριδίων που περιέχονται στο κελί i. Δεν έχει σημασία ποιά σφαρίδια είναι σε κάθε κελί, μόνο το πλήθος τους. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών κατανομών των όμοιων σφαιριδίων στα κελιά σε καθένα από τα σενάρια (i), (ii), (iii) πιό πάνω.
Και στις δύο περιπτώσεις, για το (ii) υποθέτουμε ότι $k \leq n$, ενώ για το (iii) υποθέτουμε ότι $k \geq n$.

1.22. Να βρεθεί το πλήθος των συναρτήσεων $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ που είναι
(α) οτιδήποτε
(β) 1-1
(γ) γνησίως αύξουσες
(δ) αύξουσες
(ε) αύξουσες και επί
*(ζ) επί
Στα (β), (γ) υποθέτουμε ότι $k \leq n$ ενώ στα (ε), (ζ) ότι $k \geq n$.

1.23. Έχουμε ένα πεπερασμένο σύνολο $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ με s στοιχεία, $n \in \mathbb{N}$, και φυσικούς $r_1, r_2, \ldots, r_s$ με $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$. Φτιάχνουμε διατεταγμένες n-αδες ώστε κάθε μία να περιέχει r_1 φορές το a_1, r_2 φορές το a_2, ..., r_s φορές το a_s. Να δειχθεί ότι το πλήθος των διαφορετικών τέτοιων n-αδων είναι

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_s!}$$

1.24. Ανελκυστήρας ξεκινάει με k άτομα από το ισόγειο n-όροφης οικοδομής. Υποθέτοντας ότι όλες οι αποβιβάσεις είναι εξίσου πιθανές, να υπολογισθούν οι πιθανότητές
(α) όλα τα άτομα αποβιβασθούν σε διαφορετικούς ορόφους.
(β) ακριβώς k_1 άτομα αποβιβασθούν στον πρώτο όροφο, ακριβώς k_2 άτομα αποβιβασθούν στον δεύτερο όροφο, …, ακριβώς k_n άτομα αποβιβασθούν στον n-οστό όροφο (εδώ $k_1 + \cdots + k_n = k$).

1.25. *(α) Ζευγάρωμα των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ λέμε κάθε σύνολο της μορφής[2]

$$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \ldots \{a_{2n-1}, a_{2n}\}\},$$

όπου $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ είναι τα στοιχεία του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Να βρεθεί το πλήθος των διαφορετικών ζευγαρωμάτων του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$.
(β) Καθένα από n ξυλάκια τα σπάμε σε ένα μικρό και ένα μεγάλο κομμάτι. Τα $2n$ κομμάτια που προκύπτουν ζευγαρώνονται τυχαία και δημιουργούνται n ξυλάκια. Να βρεθούν οι πιθανότητες:
(i) Κάθε κομμάτι ζευγαρώνεται με εκείνο με το οποίο ήταν πριν συγκολλημένο.
(ii) Κάθε μεγάλο κομμάτι ζευγαρώνεται με μικρό κομμάτι.

[2] Σε ένα ζευγάρωμα, δεν έχει σημασία η σειρά των ζευγαριών, ούτε υπάρχει σειρά μέσα σε κάθε ζευγάρι, για αυτό και χρησιμοποιούμε άγκιστρα και όχι παρενθέσεις

2. Δεσμευμενη πιθανοτητα και ανεξαρτησια

2.1. Να λυθεί η Άσκηση 6 της προηγούμενης παραγράφου με χρήση του πολλαπλασιαστικού τύπου.

2.2. r φοιτητές s και φοιτήτριες βρίσκονται έξω από την γραμματεία του Μαθηματικού περιμένοντας να εγγραφούν. Κάθε φορά επιλέγεται ένα ατομο στην τύχη, εγγράφεται, και φεύγει απο την αναμονή. Ποιά η πιθανότητα στις πρώτες $2k$ εγγραφές να έχουμε συνεχή εναλλαγή φύλου. Υποθέτουμε ότι $r, s \geq k \geq 1$.

2.3. Ένας μπασκετμπολίστας πρόκειται να εκτελέσει 100 βολές. Στην προθέρμανση εκτελεί δύο βολές απο τις οποίες η μία είναι επιτυχημένη και η άλλη όχι. Για καθεμία από τις μετέπειτα 100 βολές, η πιθανότητα επιτυχίας ισούται με το ποσοστό επιτυχίας του ως τότε μετρώντας και τις δύο βολές της προθέρμανσης. Για παράδειγμα, στην πρώτη βολή έχει πιθανότητα επιτυχίας $1/2$, και αν είναι επιτυχία, θα έχει για την δεύτερη βολή πιθανότητα επιτυχίας $2/3$.

(α) Ποιά η πιθανότητα οι πρώτες k βολές να είναι επιτυχίες και οι υπόλοιπες αποτυχίες?
(β) Ποιά η πιθανότητα k επιτυχίες να συμβούν στις θέσεις $11, 12, 13, \ldots, 10 + k$ ενώ οι υπόλοιπες βολές να είναι αποτυχίες?
(γ) Ποιά η πιθανότητα να έχει k ακριβώς επιτυχίες?

Στο (β) υποθέτουμε ότι $k \leq 90$, ενώ στα (α), (γ) ότι $k \in \{0, 1, \ldots, 100\}$.

2.4. Μιά κάλπη περιέχει 5 άσπρα και 7 μαύρα σφαιρίδια ενώ μια δεύτερη κάλπη περιέχει 3 άσπρα και 5 μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο από την πρώτη και το τοποθετούμε στην δεύτερη. Έπειτα επιλέγουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο απο την δεύτερη κάλπη. Ποιά είναι η πιθανότητα το δεύτερο σφαιρίδιο να είναι άσπρο?

2.5. Ρίχνουμε ένα ζάρι μιά φορά και αν η ένδειξη είναι i διαλέγουμε ένα σφαιρίδιο από μιά κάλπη που περιέχει $2i$ άσπρα και $14 - 2i$ μαύρα σφαιρίδια. Σε μιά πραγματοποίηση αυτού του πειράματος, ποιά είναι η πιθανότητα το σφαιρίδιο που επιλέγουμε να είναι άσπρο?

2.6. Μιά κάλπη περιέχει k άσπρα και $n - k$ μαύρα σφαιρίδια. Εξάγουμε διαδοχικά 3 σφαιρίδια ως εξής. Μετά από κάθε εξαγωγή, αν το σφαιρίδιο είναι άσπρο, το επιστρέφουμε στην κάλπη, ενώ αν είναι μαύρο, το αντικαθιστούμε με άσπρο. Ποιά είναι η πιθανότητα το τρίτο σφαιρίδιο να είναι άσπρο?

2.7. Θεωρούμε δύο κάλπες X, Y με την εξής σύνθεση:
X: 5 μαύρα και 5 άσπρα σφαιρίδια,
Y: 1 μαύρο και 9 άσπρα σφαιρίδια.
Ένα άτομο επιλέγει τυχαία (με ίση πιθανότητα) μιά από τις δύο κάλπες, και εξάγει απο αυτήν το ένα μετά το άλλο με επανάθεση 4 σφαιρίδια (δηλαδή μετά απο κάθε εξαγωγή, επιστρέφει το σφαιρίδιο στην κάλπη). Σε εμάς, απο όλη την διαδικασία, φανερώνεται μόνο ότι και τα τέσσερα σφαιρίδια είναι άσπρα. Δεδομένου αυτού, ποιά είναι η πιθανότητα να είχε επιλεγεί στην αρχή η κάλπη X?

2.8. Σε έναν πληθυσμό, το 0.1 % πάσχει απο μιά ασθένεια X. Ένα τεστ κάνει λάθος διάγνωση στο 5% των περιπτώσεων που το άτομο που κάνει το τεστ έχει την ασθένεια, ενώ κάνει λάθος στο 1% των περιπτώσεων που το άτομο είναι υγιές. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο απο τον πληθυσμό, και το τεστ δηλώνει ότι το άτομο έχει την ασθένεια. Δεδομένου αυτού, ποιά είναι η πιθανότητα το άτομο όντως να έχει την ασθένεια?

2.9. Έχουμε τρία χαρτιά τα οποία καλούμε ΑΑ, ΜΜ, ΑΜ. Το ΑΑ έχει και τις δύο πλευρές χρωματισμένες άσπρες, το ΜΜ και τις δύο μαύρες, ενώ το ΑΜ έχει την μία πλευρά χρωματισμένη άσπρη και την άλλη μάυρη. Ένας φίλος μας επιλέγει ένα χαρτί στην τύχη και μας δείχνει μόνο ότι η μιά πλευρά του είναι άσπρη. Για το ποιά πλευρά της κάρτας επιλέγει να μας δείξει, θεωρούμε δύο εκδοχές.

(α) Επιλέγει στην τύχη[3] μία από τις δύο πλευρές.

(β) Επιλέγει πάντοτε άσπρη πλευρά αν υπάρχει διαθέσιμη.

Για κάθε μία από αυτές τις δύο εκδοχές, να υπολογιστεί η πιθανότητα η άλλη πλευρά του χαρτιού που είδαμε να είναι μαύρη.

2.10. Το συρτάρι Σ_1 περιέχει 3 χρυσά και 3 αργυρά νομίσματα ενώ το συρτάρι Σ_2 περιέχει 3 χρυσά και 6 αργυρά. Κλέφτης (στα σκοτεινά) ανοίγει ένα συρτάρι στην τύχη και αρπάζει δύο νομίσματα στην τύχη.

(α) Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο χρυσά?

(β) Αν διαπιστωθεί (κατά την σύλληψή του) ότι έχει κλέψει δύο χρυσά νομίσματα, ποια είναι η πιθανότητα να είχε ανοίξει το συρτάρι Σ_1?

2.11. Οι ασφαλιστικές εταιρείες κατατάσσουν τους οδηγούς σε 10 κατηγορίες, $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$, ανάλογα με την πιθανότητα να κάνουν ατύχημα στη διάρκεια του έτους. Συγκεκριμένα, ένας οδηγός της κατηγορίας A_k ($k \in \{1, 2, \ldots, 10\}$) έχει πιθανότητα $k/100$ όπως πραγματοποιήσει ατύχημα στη διάρκεια του έτους. Υποθέτουμε ότι στη συγκεκριμένη ασφαλιστική εταιρεία τα $k/55$ των οδηγών που ασφαλίζει ανήκουν στην κατηγορία A_k, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Αν ένας οδηγός, ασφαλισμένος στη συγκεκριμένη εταιρεία, αναφέρει ατύχημα στη διάρκεια του έτους, ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κατηγορία k?

2.12. Δύο ενδεχόμενα A, B με $P(A), P(B) > 0$ λέγονται θετικά συσχετισμένα αν $P(A \,|\, B) > P(A)$, ενώ αρνητικά συσχετισμένα αν $P(A \,|\, B) < P(A)$.

(α) Να δειχθεί ότι αν τα A, B είναι θετικά συσχετισμένα, τότε $P(B \,|\, A) > P(B)$ και $P(A \cap B) > P(A)P(B)$ (προφανώς και οι τρείς περιορισμοί είναι ισοδύναμοι εφόσον $P(A), P(B) > 0$).

(β) Ρίχνουμε ένα ζάρι δυό φορές και ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Εμφανίζεται 1 τουλάχιστον μια φορά}\}, \\ B &:= \{\text{Οι δύο ενδείξεις είναι διαφορετικές}\}, \\ C &:= \{\text{Η πρώτη ένδειξη δεν είναι 1}\}. \end{aligned}$$

Είναι τα A, B θετικά ή αρνητικά συσχετισμένα? Τα A, C?

2.13. (Δέσμευση δεσμευμένης πιθανότητας) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας, και $\Gamma \in \mathcal{A}$ με $P(\Gamma) > 0$. Η συνάρτηση $p_\Gamma : \mathcal{A} \to [0, 1]$ με $p_\Gamma(A) = P(A \,|\, \Gamma)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ είναι συνάρτηση πιθανότητας[4]. Αν $p_\Gamma(B) > 0$, τότε για $A \in \mathcal{A}$ ορίζεται κατά τα γνωστά η δεσμευμένη πιθανότητα $p_\Gamma(A \,|\, B)$. Να δειχθεί ότι

$$p_\Gamma(A \,|\, B) = P(A \,|\, B \cap \Gamma).$$

Δηλαδή στην πληροφορία ότι το Γ συνέβη προστίθεται η πληροφορία ότι και το B συνέβη.

2.14. (Θεώρημα ολικής πιθανότητας για δεσμευμένη πιθανότητα) Έστω ενδεχόμενα A, Γ, B_1, B_2, με $\{B_1, B_2\}$ διαμέριση του δειγματικού χώρου, και $P(\Gamma \cap B_1), P(\Gamma \cap B_2) > 0$. Να δειχθεί ότι

$$P(A \,|\, \Gamma) = P(B_1 \,|\, \Gamma)P(A \,|\, \Gamma \cap B_1) + P(B_2 \,|\, \Gamma)P(A \,|\, \Gamma \cap B_2).$$

2.15. Εστω ενδεχόμενα A, B με $P(A) > 0$. Να δειχθεί ότι

(α) $P(A \cap B \,|\, A \cup B) \leq P(A \cap B \,|\, A)$.

(β) $P(B \,|\, B \cup A) \geq P(B \,|\, A)$.

---

[3] Δηλαδή πιθανότητα 1/2 για κάθε πλευρά. Γενικά όταν έχουμε πεπερασμένο πλήθος επιλογών και λέμε ότι επιλέγουμε στην τύχη, εννούμε ότι οι επιλογές όλες είναι ισοπίθανες.

[4] Δηλαδή ικανοποιεί τα αξιώματα του Kolmogorov, σελ. 48 στο βιβλίο του κ. Κούτρα.

2.16. Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα να δειχθεί ότι καθένα απο τα ακόλουθα ζεύγη είναι ανεξάρτητα (α) A, B^c, (β) A^c, B, (γ) A^c, B^c.

2.17. Θεωρούμε $k \geq 1$ ρίψεις ενός αμερόληπτου νομίσματος και τα ενδεχόμενα

$$A: \text{ και οι δυό όψεις εμφανίζεται τουλάχιστον μιά φορά.}$$
$$B: \text{ η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται το πολύ μια φορά.}$$

Για ποιές τιμές του k είναι τα A, B ανεξάρτητα;

2.18. Διαθέτουμε δύο φαινομενικά όμοια νομίσματα N_1, N_2, πλην όμως, το ένα φέρνει «Κ» με πιθανότητα $p_1 = 1/2$ (δίκαιο) ενώ το άλλο με πιθανότητα $p_2 = 3/4$ (κίβδηλο) . Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη, και το ρίχνουμε δύο ανεξάρτητες φορές. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_1 := \{ \text{ η πρώτη ρίψη είναι Κ} \},$$
$$A_2 := \{ \text{ η δεύτερη ρίψη είναι Κ} \}.$$

Είναι τα A_1, A_2 ανεξάρτητα;

2.19. Για δυό παθήσεις α, β, είναι γνωστό ότι το ποσοστό των ατόμων του πληθυσμού που πάσχουν μόνο από την α είναι 0.6%, αυτών που πάσχουν μόνο απο την β είναι 0.5%, και αυτών που πάσχουν και απο τις δύο είναι 0.2%. Είναι οι δυό παθήσεις ανεξάρτητες?

2.20. Ένα πείραμα έχει πιθανότητα επιτυχίας $p \in (0, 1)$. Εκτελούμε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών του πειράματος.

(α) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα να έχουμε k επιτυχίες στις πρώτες n δοκιμές είναι

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Θεωρούμε ότι $0 \leq k \leq n$.

(β) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα σε όλες τις δοκιμές της ακολουθίας να έχουμε αποτυχία είναι 0.

(γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η πρώτη επιτυχία να συμβαίνει στην k δοκιμή. $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(δ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον k δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία. $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

***21.** Τρεις παίκτες, οι a_1, a_2, a_3, παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν διαδοχικά ένα συνηθισμένο νόμισμα με τη σειρά $a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3$ κ.ο.κ., και κερδίζει αυτός που θα φέρει πρώτος κορώνα. Έστω p_j η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο παίκτης j. Να δείξετε ότι $p_2 = p_1/2$ και $p_3 = p_2/2$, και να συμπεράνετε ότι $p_1 = 4/7$, $p_2 = 2/7$ και $p_3 = 1/7$.

2.22. (Διαγωνίσματα πολλαπλής επιλογής) Ένας διαγωνιζόμενος απαντάει σε n ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Σε κάθε ερώτηση υπάρχουν j διαφορετικές απαντήσεις από τις οποίες μία είναι η σωστή. Ο διαγωνιζόμενος επιλέγει μία απάντηση στην τύχη αν δεν γνωρίζει τη σωστή απάντηση – προφανώς επιλέγει την σωστή απάντηση όταν την γνωρίζει. Υποθέτουμε ότι η προετοιμασία του εξεταζόμενου καθορίζει μία πιθανότητα $p \in (0, 1)$ όπως γνωρίζει την σωστή απάντηση σε οποιαδήποτε ερώτηση. Υποθέτουμε επίσης ότι ένας συγκεκριμένος εξεταζόμενος έχει προετοιμαστεί έτσι ώστε $p = 1/2$.

(α) Ποια η πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε k (από τις n) ερωτήσεις?

(β) Δεδομένου ότι απάντησε σωστά σε k ερωτήσεις, ποιά η πιθανότητα να γνώριζε στην πραγματικότητα ακριβώς s ερωτήσεις? ($s \in \{0, 1, \ldots, k\}$)

***23.** (Απροσδόκητη ανεξαρτησία) Απο μία κάλπη που περιέχει n σφαιρίδια αριθμημένα $1, 2, ..., n$ εξάγουμε το ένα μετά το άλλο τυχαία τα n σφαιρίδια. Έστω k_i η ένδειξη του σφαιριδίου παίρνουμε στην i εξαγωγή. Λέμε ότι στην i εξαγωγή έχουμε ρεκόρ αν το σφαιρίδιο της έχει μεγαλύτερη ένδειξη απο τα προηγούμενα σφαιρίδια, δηλαδή αν $i = 1$ ή αν $i > 1$ και $k_i > \max\{k_1, \dots, k_{i-1}\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_i := \{\text{Στην } i \text{ εξαγωγή έχουμε ρεκόρ}\},$$

για $i = 1, 2, \dots, n$.

(α) Να δειχθεί ότι $P(A_j) = 1/j$ για $j = 1, \dots, n$.
(β) Να δειχθεί ότι τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ανά δύο ανεξάρτητα.
(γ) Να δειχθεί ότι τα $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι πλήρως ανεξάρτητα.

3. Συναρτηση κατανομησ, μεση τιμη για διακριτεσ τυχαιεσ μεταβλητεσ

3.1. Έστω τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 0, \\ 1 - e^{-t^2} & \text{αν } t \geq 0. \end{cases}$$

Ποιά η συνάρτηση κατανομής για την τυχαία μεταβλητή $Y := e^X$;

3.2. Έστω $f(x) = c/2^{|x|}$ για $x \in \mathbb{Z}$ και $f(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, όπου η c είναι μιά σταθερά.

(α) Για ποιά τιμή της c είναι η f συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής;

(β) Για την τιμή της c του ερωτήματος (α), ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής που αντιστοιχεί στην f;

3.3. Να εξεταστεί αν ορίζεται η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X αν αυτή έχει συνάρτηση πιθανότητας

(α) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2}\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$ (β) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi^2}\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \in \mathbb{Z}, x < 0, \\ \frac{1}{2^{x+1}} & \text{αν } x \in \mathbb{Z}, x > 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$

3.4. Από μια κάλπη που περιέχει n κλήρους αριθμημένους $1, 2, \ldots, n$ εξάγονται διαδοχικά χωρίς επανάθεση k κλήροι ($1 \leq k \leq n$). Έστω X ο μεγαλύτερος αριθμός που εξάγεται. Να υπολογιστούν

(α)* Η συνάρτηση πιθανότητας της X.

(β) Η μέση τιμή της X.

3.5. Δυό παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ρίχνουν συνεχώς ένα ζάρι μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά η ένδειξη 1 ή 2. Έστω X ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται. Αν ο X είναι περιττός τότε ο Α κερδίζει και παίρνει β Ευρώ από τον Β, ενώ αν ο X είναι άρτιος τότε ο Α χάνει και δίνει α Ευρώ στον Β.

(α) Ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X;

(β) Ποιά είναι η πιθανότητα να κερδίσει το παιχνίδι ο Α;

(γ) Ποιά πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ α και β ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο;

3.6. (Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης) Παίζουμε το εξής παιχνίδι. Ένα αμερόληπτο νόμισμα ρίχνεται διαδοχικά, και αν η ένδειξη κορώνα εμφανίζεται για πρώτη φορά στην k ρίψη τότε κερδίζουμε 2^k Ευρώ. Ποιό είναι το μέσο κέρδος του παιχνιδιού; Θα έδινες 50 Ευρώ για να παίξεις το παιχνίδι;

3.7. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} & x \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

Για ποιά $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $E(X^a) < \infty$;

4. Ειδικες διακριτες κατανομες

4.1. Κατασκευάζουμε έναν αριθμό στο $[0, 1)$ με 80 δεκαδικά ψηφία επιλέγοντας καθένα απο αυτά απο το $\{0, 1, \dots, 9\}$ ομοιόμορφα (δηλαδή, όλα τα ψηφία έχουν την ίδια πιθανότητα επιλογής). Ποιά είναι η κατανομή του αριθμού των εμφανίσεων του 3, και ποιά η μέση της τιμή;

4.2. Δύο ζάρια Α και Β ρίχονται 90 φορές. Ποιά είναι η συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού των ρίψεων που η ένδειξη του Α ξεπερνάει την ένδειξη του Β κατά δύο μονάδες τουλάχιστον;

4.3. Ένας σκοπευτής ρίχνει 10 βολές προς ένα στοχο. Η πιθανότητα να πετύχει 4 φορές είναι τριπλάσια της πιθανότητας να τον πετύχει τρείς. Να υπολογιστεί η ευστοχία του σκοπευτή, δηλαδή η πιθανότητα να πετύχει το στόχο σε μία δεδομένη βολή. Έπειτα να υπολογιστούν οι πιθανότητες σε 5 βολές να πετύχει το στόχο

(α) Δύο τουλάχιστον φορές.

(β) Ή όλες ή καμία φορά.

(γ) Το πολύ 4 φορές αν είναι γνωστό ότι πέτυχε τουλάχιστον δύο φορές.

4.4. Άν η X ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p με $p \in (0, 1)$, να δειχθεί ότι

$$E(t^X) = (pt + q)^n,\ E\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p},$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, όπου $q = 1 - p$.

4.5. Ο αριθμός των ληστειών που γίνονται σε όλα τα καταστήματα της Eurobank σε ένα μήνα ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν η πιθανότητα να συμβεί το πολύ μια ληστεία σε ένα μήνα ισούται με 12 φορές την πιθανότητα να συμβούν ακριβώς 2 ληστείες, να βρεθεί η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον μία ληστεία σε ένα μήνα.

4.6. Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 100 οδηγούς για μια χρονιά. Καθένας από τους οδηγούς προκαλεί ατύχημα την δεδομένη χρονιά με πιθανότητα $p = 1/1000$. Έστω X ο αριθμός των οδηγών που προκαλούν ατύχημα εκείνη την χρονιά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X \leq 1), P(X = 3), P(X = 10)$, και έπειτα οι προσεγγίσεις τους χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της κατανομής της X απο κατάλληλη κατανομή Poisson.

4.7. (α) Αν η τυχαία μεταβητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, να δειχθεί ότι

$$E(Xh(X)) = \lambda E(h(X+1)) \tag{1}$$

για κάθε $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

(β) Αν η τυχαία μεταβλητή X παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές, και υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε η X να ικανοποιεί την (1) για κάθε $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, να δειχθεί ότι η X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$.

4.8. Μία κάλπη περιέχει 20 μαύρα και 60 άσπρα σφαιρίδια. Εξάγουμε σφαιρίδια το ένα μετά το άλλο με επανάθεση. (α) Ποιά είναι η πιθανότητα το 7ο σφαιρίδιο να είναι το πρώτο μαύρο σφαρίδιο που εξάγεται; (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να χρειαστούν τουλάχιστον 10 εξαγωγες για να εμφανιστεί μαύρο σφαιρίδιο. (γ) Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού των άσπρων σφαιριδίων που εμφανίζονται πριν την πρώτη εμφάνιση μαύρου σφαιριδίου.

4.9. Θεωρούμε ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Περιμένουμε ώσπου να εμφανιστούν και οι δύο ενδείξεις 3 και 4. Για παράδειγμα, ένα δυνατό σενάριο των αποτελεσμάτων της ακολουθίας είναι

$$5, 1, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 6, 3$$

και τότε σταματάμε. Έστω X ο αριθμός των ρίψεων που απαιτούνται (στο παράδειγμα, $X = 10$). Ποιά η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X;

4.10.*(Το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών) Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n είδη διαφορετικών κουπονιών, και κάθε φορά που κάποιος αγοράζει ένα κουπόνι, αυτό μπορεί να είναι ισοπίθανα οποιοδήποτε απο τα n διαφορετικά είδη. Ποιά είναι η μέση τιμή του αριθμού κουπονιών που πρέπει να αγοράσει κανείς ώστε να έχει συλλέξει ένα κουπόνι απο κάθε είδος;

Υπόδειξη: Έστω Y_i η αγορά κατά την οποία βρίσκουμε το i-στο νέο κουπόνι. Ζητάμε την $E(Y_n)$. Ποιά είναι η κατανομή καθεμίας από τις διαφορές $Y_2 - Y_1, \ldots, Y_n - Y_{n-1}$;

4.11. Κατασκευάζουμε έναν αριθμό $x = 0.\, a_1 a_2 a_3 ...$ στο $[0, 1)$ επιλέγοντας τα δεκαδικά του ψηφία απο αριστερά προς τα δεξιά το ένα μετά το άλλο απο το $\{0, 1, \ldots, 9\}$ ομοιόμορφα. Στον αριθμό που σχηματίζεται ποιός είναι ο αναμενόμενος αριθμός δεκαδικών ψηφίων

(α) Πρίν απο την εμφάνιση για πρώτη φορά του ψηφίου 7.

(β) Πριν την εμφάνιση για πρώτη φορά ενός απο τα ψηφία 2, 4, 6.

(γ) Πριν την 8η εμφάνιση του ψηφίου 4.

(δ) Μέχρι την 4η εμφάνιση ζυγού ψηφίου.

(ε)* Μέχρι την εμφάνιση και των τριών ψηφίων 3, 5, 6.

5. Συνεχεισ κατανομεσ

5.1. Ένα βενζινάδικο γεμίζει πλήρως τη δεξαμενή του μια φορά την εβδομάδα. Αν ο εβδομαδιαίος όγκος πωλήσεων σε χιλιάδες λίτρα είναι μιά τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4 & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \in \mathbb{R} \setminus (0,1), \end{cases}$$

πόση πρέπει να είναι η χωρητικότητα της δεξαμενής ώστε η πιθανότητα να εξαντληθούν τα αποθέματα κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης εβδομάδας να είναι ίση με $1/100$;

5.2. Η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = cx^{-r}\mathbf{1}_{x \geq 1}$, όπου οι c, r είναι θετικές σταθερές.

(α) Ποιές είναι οι επιτρεπτές τιμές του r;

(β) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c συναρτήσει του r.

(γ) Για ποιές τιμές του r ισχύει $EX < \infty$;

(δ) Για δεδομένο $r > 1$, για ποιές τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $E(X^a) < \infty$;

5.3. Αν η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή σε κάποιο διάστημα (a, b), $X \sim U(a, b)$, και έχει μέση τιμή $\mu = 5$ και διασπορά $\sigma^2 = 3$, να βρείτε τους αριθμούς a, b και την πιθανότητα $P(|X - 5| > 2)$.

5.4. Ρίχνουμε ένα ζάρι, και αν εμφανιστεί η ένδειξη i, τότε διαλέγουμε τυχαία έναν αριθμό, έστω X, από το διάστημα $(0, i)$ (σύμφωνα με την ομοιόμορφη κατανομή $U(0, i)$). Βρείτε την πυκνότητα της X. Κατά μέσο όρο ποιόν αριθμό διαλέγουμε;

5.5. Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Αν $P(X > 1.85) = 0.2$ και $P(X > 1.70) = 0.9$ να βρεθούν τα μ, σ^2. Δίνεται ότι $\Phi^{-1}(0.8) = 0.85, \Phi^{-1}(0.9) = 1.29$

5.6. Το βάρος X ενός κουτιού αναψυκτικού ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 330$gr και τυπική απόκλιση $\sigma = 10$gr. Βρείτε

(α) Την πιθανότητα όπως ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί έχει βάρος μεγαλύτερο των 340gr.

(β) Την πιθανότητα όπως ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί έχει βάρος μικρότερο των 310gr.

(γ) Την πιθανότητα όπως ένα τυχαία επιλεγμένο κουτί έχει βάρος μεταξύ των 310gr και των 340gr.

(δ) Την πιθανότητα όπως μεταξύ δέκα τυχαία επιλεγμένων κουτιών, το πολύ 8 από αυτά έχουν βάρος μικρότερο των 340gr.

(ε) Τον αναμενόμενο αριθμό κουτιών, μεταξύ δέκα τυχαία επιλεγμένων κουτιών, που έχουν βάρος μικρότερο των 340gr.

5.7. Για μια συνεχή κατανομή, ο αριθμός a λέγεται *διάμεσος* της κατανομής αν $P(X \geq a) = P(X \leq a)$, όπου η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την δεδομένη κατανομή.

(α) Να δειχθεί ότι κάθε συνεχής κατανομή έχει τουλάχιστον ένα διάμεσο.

(β) Ποιός είναι ένας διάμεσος για την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$; Είναι μοναδικός;

***5.8.** Αν $X \sim N(0, 1)$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και με $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ φραγμένο, να δειχθεί ότι

$$E(f'(X)) = E(Xf(X)).$$

5.9. Υπολογίστε τις *απόλυτες* ροπές $E|Z|^p$, $p>0$, όταν η Z ακολουθεί τυποποιημένη κανονική $N(0,1)$ συναρτήσει της συνάρτησης Γάμμα, και δείξτε ότι $E|X-\mu| = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ όταν $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

5.10. Η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με κάποια παράμετρο $\theta>0$. Η X παριστάνει το χρόνο ζωής (σε έτη) ενός ηλεκτρονικού εξαρτήματος. Ο κατασκευαστής προσφέρει εγγύηση $a=2$ ετών, και αυτό είναι το μέγιστο a έτσι ώστε τουλάχιστον το 95% των εξαρτημάτων να λειτουργούν τουλάχιστον μέχρι το χρόνο εγγύησης (ώστε να μην χρειάζεται να τα αντικαταστήσει). Ποιός είναι ο μέσος χρόνος ζωής των εξαρτημάτων, και ποια η διασπορά του χρόνου ζωής των εξαρτημάτων;

5.11. Να βρεθεί ένας διάμεσος για την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.

5.12. Αν $X \sim \exp(\lambda)$, να δειχθεί ότι για $k \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$E(X^k) = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Συναρτηση τυχαιας μεταβλητης

5.13. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \frac{1}{2x^2}\mathbf{1}_{|x|\ge 1}$, να βρεθεί η πυκνότητα της $Y := X^2$.

5.14. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$, να βρεθεί η πυκνόητητα της

$$Y := \begin{cases} X & \text{αν } X \le 1, \\ 1/X & \text{αν } X > 1. \end{cases}$$

5.15. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει πυκνότητα $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$ όπου λ είναι μια θετική σταθερά[5], να προσδιοριστεί η κατανομή της $Y = [X]$ (ακέραιο μέρος του X). Ποιά είναι η μέση τιμή της Y;

5.16. (α) Αν η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$, τότε για $a<b$ η

$$X := a + (b-a)\,U$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη στο (a,b).

(β) Αν η X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (a,b), όπου $a<b$, τότε η

$$U := \frac{X-a}{b-a}$$

ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$.
(γ) Αν η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$, τότε και η $Y := 1-U$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

5.17. Έστω $\theta>0$. Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

(α) Αποδείξτε ότι η τυχαία μεταβλητή $X := -\log(U)/\theta$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ.

(β) Βρείτε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής[6] $Y := \log\left(\frac{U}{1-U}\right)$.

5.18. Αν $X \sim N(0,1)$, να δειχθεί ότι $X^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$.

[5] Δηλαδή η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ.
[6] Η συγκεκριμένη Y λέμε ότι ακολουθεί την Λογιστική (Logistic) κατανομή.

5.19. (Κατανομή Weibul) Έστω $c > 0$. Όταν η X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta > 0$ τότε λέμε ότι η τυχαία μεταβλητή $Y = X^{1/c}$ ακολουθεί την κατανομή Weibul με παραμέτρους c και θ. Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας της Y.

5.20. Αν η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ και r είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε η $Y = rX$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda/r)$.

***5.21.** Αν η F είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής, τότε ξέρουμε ότι ικανοποιεί τα εξής:

(i) είναι αύξουσα,
(ii) είναι δεξιά συνεχής,
(iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,
(iv) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι μια $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις (i)-(iv), και επιπλέον ότι είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Και έστω U τυχαία μεταβλητή με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0, 1)$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X := F^{-1}(U).$$

Να δειχθεί ότι η X έχει συνάρτηση κατανομής F.

Σχόλιο: Η υπόθεση ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής δεν χρειάζεται. Χωρίς αυτήν, ορίζει κανείς για $t \in [0, 1]$

$$F^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}.$$

Και αποδεικνύεται πάλι ότι η $F^{-1}(U)$ έχει συνάρτηση κατανομής F.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

(α) Κάθε F που ικανοποιεί τις (i)-(iv) είναι συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής, π.χ., της $F^{-1}(U)$. Και επομένως οι συνθήκες (i)-(iv) είναι ικανές και αναγκαίες ώστε μια συνάρτηση να είναι συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.

(β) Αν έχουμε ένα μηχανισμό που παράγει μία τυχαία μεταβλητή U με κατανομή ομοιομορφη στο $(0, 1)$, τότε μπορούμε να παραγάγουμε οποιαδήποτε άλλη τυχαία μεταβλητή μέσω του μετασχηματισμού $F^{-1}(U)$. Αρκεί βέβαια να μπορούμε να υπολογίσουμε την F^{-1}. Αυτό κάναμε στην άσκηση 6(α).

6. Πολυδιαστατές τυχαίες μεταβλητές

6.1. Εξάγουμε διαδοχικά χωρίς επανάθεση έξι σφαιρίδια απο μία κάλπη που περιέχει 50 σφαιρίδια αριθμημένα $1, 2, \ldots, 50$. Έστω X η μικρότερη ένδειξη, και Y η μεγαλύτερη ένδειξη απο τις 6. Να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας της διδιάστατης τυχαίας μεταβλητής (X, Y).

6.2. Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} 6x^c y, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Ποιά η τιμή της σταθεράς c;

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες της (X, Y).

(γ) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(X < 1/3)$, $P(Y > 2X)$.

***6.3.** Έστω ότι επιλέγουμε ένα σημείο (X, Y) ομοιόμορφα στο $(0,1) \times (0,1)$ Ποιά η πιθανότητα ο εγγύτερος ακέραιος στον Y/X να είναι άρτιος; Δίνεται ότι η αντίστροφη εφαπτομένη $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ έχει το εξής ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$\tan^{-1} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1,1].$$

6.4. Έστω X, Y από κοινού συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα $f(\cdot,\cdot)$. Να δειχθεί ότι $P(X = Y) = 0$, δηλαδή δεν έχουμε ποτέ σύμπτωση/ισοπαλία των X, Y.

Ειδική περίπτωση είναι όταν οι X, Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, και έχουν και οι δυό τους πυκνότητα.

6.5. Έστω X_1, X_2, X_3, X_4 ανεξάρτητες και ισόνομες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα $f(\cdot)$. Να δειχθεί ότι για οποιαδήποτε μετάθεση των (i_1, i_2, i_3, i_4) των (1, 2, 3, 4), π.χ. $(i_1, i_2, i_3, i_4) = (2, 4, 3, 1)$, ισχύει

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}) = \frac{1}{4!}$$

Ποιό είναι το ανάλογο αποτέλεσμα όταν έχουμε n τυχαίες μεταβλητές;

6.6. Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι πράγματι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας.

(β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y), f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχουν νόημα.

7. Διαφορα

Υπολογισμος μεσων τιμων, συνδιακυμανση, συντελεστης συσχετισης

7.1. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές με από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(β) Να υπολογιστεί η $E(Ye^X)$.

(γ) Να υπολογιστούν οι $\text{Cov}(X,Y)$, $\rho(X,Y)$.

7.2. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x,y) = \begin{cases} -xy & \text{αν } (x,y) \in (-1,0)\times(0,1) \cup (1,2)\times(-1,0), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X+Y<0)$.

(β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή $E(XY)$.

(γ) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

7.3. Έστω X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές με $E(X^2), E(Y^2) < \infty$, $Z \sim N(0,1)$, $\text{Cov}(X,Y) = 1$, και η Z ανεξάρτητη απο τις X, Y. Να υπολογιστεί η $\text{Cov}(XZ^2, Y+Z)$.

7.4. Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 με $\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = 1$ και διασπορά του αθροίσματος $\text{Var}(X_1+X_2) = 3$. Είναι οι X_1, X_2 ανεξάρτητες? Αν είναι γνωστό ότι για κάποια σταθερά c οι τυχαίες μεταβλητές X_1 και $X_2 - cX_1$ είναι ανεξάρτητες, τι συμπέρασμα βγάζετε για την σταθερά c;

7.5. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με μέση τιμή $E(X_i) = 2$ και διασπορά $\text{Var}(X_i) = 8$, $i = 1, 2, \dots, n$. Να προσδιορίσετε σταθερές $\alpha_n \in \mathbb{R}$ και $\beta_n > 0$ έτσι ώστε η τυχαία μεταβλητή $\alpha_n + \beta_n Y$ να έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1, όπου $Y = \sum_{i=1}^n 3^{i-1} X_i$.

7.6. Επιλέγουμε έναν αριθμό X ομοιόμορφα τυχαία στο σύνολο $\{1, 2, \dots, 20\}$, και θέτουμε $Y := 21 - X$.

(α) Ποιά η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Y;

(β) Τι πρόσημο περιμένουμε να έχει η $\text{Cov}(X,Y)$; Να αποδειχθεί τυπικά ποιό είναι αυτό.

7.7. $n \geq 1$ άτομα επιβιβάζονται τυχαία σε ένα αεροπλάνο n θέσεων, αγνοώντας την ανάθεση θέσης που λέει η κάρτα επιβίβασης τους. Έστω W ο αριθμός αυτών που κάθονται (συμπτωματικά) στην θέση που τους ανατέθηκε. Θέτουμε $X_i = 1$ αν ο i επιβάτης κάθησε στην θέση που αναφέρει η κάρτα του και $X_i = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $\text{Cov}(X_i, X_j)$ για $i \neq j$. Πώς σχολιάζετε το πρόσημό της;

(β) Να υπολογιστούν οι $E(W), \text{Var}(W)$.

7.8. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι $n \geq 1$ φορές. Έστω Z ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται 2, και W ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται το 3. Να υπολογιστεί η $\text{Cov}(Z, W)$.

7.9. Έστω A, B ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας, και $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B$ οι δείκτριες συναρτήσεις τους. Να υπολογιστεί η $\text{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$.

7.10. Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και καθεμία ακολουθεί την εκθετική με μέση τιμή μ. Να βρείτε την συνδιακύμανση $\text{Cov}(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2)$ καθώς και τον συντελεστή συσχέτισης $\rho(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2)$. Είναι οι τυχαίες μεταβλητές $X_1 + X_2$ και $2X_1 + 3X_2$ ανεξάρτητες;

***7.11.** Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 για τις οποίες ξέρουμε μόνο ότι $\text{Var}(X_1) = 3, \text{Var}(X_2) = 2$.

(α) Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η $\text{Var}(X_1 + X_2)$;

(β) Πως σχετίζονται στις δύο ακραίες περιπτώσεις του ερωτήματος (α) οι X_1, X_2;

***7.12.** Έστω τυχαία μεταβλητή X με διασπορά $\text{Var}(X) = a \in (0, \infty)$.

(α) Για $c \in [0, 1]$ δεδομένο, να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $\rho(X, Y) = c$.

(β) Για $c \in [-1, 0]$ δεδομένο, να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $\rho(X, Y) = c$.

7.13. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή, με μέση τιμή μ, και διακύμανση $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Θέτουμε

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2.$$

Να δειχθεί ότι

(α) $E(\overline{X}) = \mu, \text{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/n$.

(β) $E(S^2) = \sigma^2$.

Δεσμευμένη μέση τιμή

7.14. Έστω ότι οι X, Y έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Να δειχθεί ότι πράγματι η f είναι συνάρτηση πυκνότητας.

(β) Να υπολογιστούν οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X|Y}(\cdot \,|\, y), f_{Y|X}(\cdot \,|\, x)$ για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία έχουν νόημα.

(γ) Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές $E(Y), E(X^2 \,|\, Y = y), E(e^Y \,|\, X = x)$ για $x, y \in (0, 1)$.

7.15. Σε ένα παιχνίδι ο παρουσιαστής μοιράζει τυχαία σε τρία κουτιά Α, Β, Γ, τρείς φακέλους 1, 2, 3. Ο 1 λέει ότι ο παίκτης πρέπει να πληρώσει 5 Ευρώ, ο 2 ότι πρέπει να πληρώσει 6 Ευρώ, ο 3 λέει ότι ο παίκτης κερδίζει ένα αυτοκίνητο. Ο παίκτης επιλέγει ένα από τα τρία κουτιά Α, Β, Γ, με πιθανότητα 1/3 το καθένα, και ακολουθεί την εντολή που λέει ο φάκελος που περιέχεται στο κουτί. Στόχος του είναι να βρεί τον φάκελο 3, οπότε μετά από κάθε αποτυχημένη προσπάθεια ξαναπαίζει το παιχνίδι. Βέβαια ο παρουσιαστής ξαναμοιράζει τους φακέλους στα κουτιά. Έστω X το ποσό που θα πληρώσει ο παίκτης ώσπου να βρεί τον φάκελο 3 (προφανώς η X είναι τυχαία μεταβλητή). Να βρεθεί η $E(X)$.

7.16. Ένα νόμισμα έχει πιθανότητα p να φέρει γράμματα (Γ) σε μία ρίψη. Το ρίχνουμε συνεχώς ώσπου να εμφανιστούν και οι δύο διαφορετικές ενδείξεις Κ, Γ. Να βρεθούν:

(α) Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων

(β) Η πιθανότητα η τελευταία ρίψη να είναι Κ.

7.17. Μία κάλπη περιέχει αρχικά a άσπρες και b μαύρες μπάλες. Εξάγουμε τυχαία μία μπάλα, και αν είναι άσπρη την επιστρέφουμε στην κάλπη, ενώ αν είναι μαύρη την αντικαθιστούμε με μία άσπρη που παίρνουμε από μιά άλλη κάλπη. Έστω X_n το πλήθος των άσπρων μπαλών όταν η προηγούμενη διαδικασία πραγματοποιηθεί n φορές.

(α) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$E(X_n \,|\, X_{n-1}) = \left(1 - \frac{1}{a+b}\right) X_{n-1} + 1.$$

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε $n \geq 0$ ισχύει

$$E(X_n) = a + b - b\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n.$$

(γ) Ποιά είναι η πιθανότητα η μπάλα που επιλέγουμε κατά το $n+1$ βήμα να είναι άσπρη;

7.18. Ένα μηχάνημα μας δίνει ένα νόμισμα που φέρνει Κ με τυχαία πιθανότητα p. Το p είναι άγνωστο σε μας, αλλά ξέρουμε από πολλές παρατηρήσεις των νομισμάτων που εξάγει η μηχανή ότι η κατανομή της τυχαίας παραμέτρου p είναι η ομοιόμορφη στο $(0, 1)$. Ρίχνουμε το νόμισμα δύο φορές. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

(α) Στην πρώτη ρίψη το νόμισμα φέρνει Κ.

(β) Και στις δύο ρίψεις το νόμισμα φέρνει Κ.

Ροπογεννητριε, Πιθανογεννητριες

7.19. (α) Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x) = x^{-2}\,\mathbf{1}_{x\geq 1}$. Για ποιά $t \in \mathbb{R}$ είναι η ροπογεννήτρια $M_X(t) = E(e^{tX})$ πεπερασμένη;

(β) Να κατασκευαστεί τυχαία μεταβλητή X ώστε $M_X(t) = \infty$ κάθε για $t \neq 0$.

7.20. Έστω X τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα

$$f(x) := \begin{cases} |x| & \text{αν } |x| < 1, \\ 0 & \text{αν } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Ποιά είναι η ροπογεννήτρια M_X της X;

7.21. Ποιά από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ροπογεννήτρια καποιας τυχαίας μεταβλητής; Χρησιμοποιήστε τον πίνακα ροπογεννητριών γνωστών κατανομών και ιδιότητες των ροπογεννητριών.

$$(a)\ \tfrac{4}{2-t}\,\mathbf{1}_{t<2} + \infty\mathbf{1}_{t\geq 2},\quad (b)\ \left(\tfrac{3}{3-t}\right)^{3/5}\mathbf{1}_{t<3} + \infty\mathbf{1}_{t\geq 3},\ (c)\quad \tfrac{1}{\sqrt{1-t}}\,e^{-5t^2}\mathbf{1}_{t<1} + \infty\mathbf{1}_{t\geq 1},$$

$$(d)\ e^{3\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}-1\right)},\qquad\qquad (e)\ \cos t.$$

7.22. Έστω $n \geq 1$ φυσικός αριθμός, και δύο τυχαίες μεταβλητές X, R (σε κοινό χώρο πιθανότητας) ώστε η R να ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$, ενώ για την X ξέρουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή $X \,|\, R = r$ είναι διωνυμική με παράμετρους n, r για κάθε $r \in (0, 1)$.

(α) Να υπολογιστεί η ροπογεννήτρια της X.

(β) Με χρήση του (α) να βρεθεί η κατανομή της X.

7.23. (α) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτριά της, $P_X(u) = E(u^X)$, και από αυτήν να συνάγετε τις $E(X)$ και $\mathrm{Var}(X)$. Για ποιά u είναι πεπερασμένη;

(β) Έστω θετικές σταθερές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Να δειχθεί ότι

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$$

με $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

7.24. Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε μία από τις συναρτήσεις

$$g(t) := \frac{at-1}{3-t^3}, \; f(t) := \frac{5t^2+a}{7-t^5},$$

(περιορισμένη σε ένα διάστημα γύρω από το 0) να είναι η πιθανογεννήτρια P_X κάποιας τυχαίας μεταβλητής X; Για αυτή την τιμή του a

(α) Να προσδιοριστεί η κατανομή αυτής της τυχαίας μεταβλητής X.

(β) Να υπολογιστούν με χρήση της P_X η μέση τιμή και η διασπορά της X.

7.25. (α) Για τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί την κατανομή $N(0, \sigma^2)$, να υπολογιστούν, με χρήση της ροπογεννήτριας της X, οι ροπές $\mu_r' := E(X^r)$ για κάθε ακέραιο $r \geq 0$.
(β) Για τυχαία μεταβλητή Y που ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ να υπολογιστούν, με χρήση της ροπογεννήτριας της Y, οι ροπές $\mu_r' := E(Y^r)$ για κάθε ακέραιο $r \geq 0$.

7.26. (α) Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ (όπου $a, \lambda > 0$), δηλαδή την κατανομή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Να υπολογίσετε την ροπογεννήτριά της, $M_X(t) = E(e^{tX})$. Για ποιά t είναι η M_X πεπερασμένη; Χρησιμοποιώντας την, υπολογίστε τις $E(X)$ και $\text{Var}(X)$.

(β) Έστω θετικές σταθερές $a_1, a_2, \ldots, a_n, \lambda$ και $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \Gamma(a_i, \lambda)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ (δηλαδή με κοινή δεύτερη παράμετρο λ). Να δειχθεί ότι

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \Gamma(a, \lambda)$$

με $a = \sum_{i=1}^n a_i$.

(γ) Να δείξετε ότι όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες Εκθετικές με (κοινή) παράμετρο $\theta > 0$ τότε ο δειγματικός τους μέσος $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ ακολουθεί κατανομή $\Gamma(a_n, \lambda_n)$ με κατάλληλες σταθερές a_n και λ_n, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

7.27. Αν η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ και r είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, τότε η $Y = rX$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda/r)$.

7.28. Έστω $X_1, X_2, \ldots. X_n$ τυχαίο δείγμα από την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$.
(α) Ποιά είναι η κατανομή της $-\log X_1$;
(β) Ποιά είναι η κατανομή της $Y := -\log(X_1 X_2 \cdots X_n)$;
(γ) Να δειχθεί ότι η $2Y$ ακολουθεί την κατανομή χ^2 με $2n$ βαθμούς ελευθερίας.

7.29. (α) Έστω ότι $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Υπολογίστε την ροπογεννήτριά της, $M_X(t) = E(e^{tX})$. Για ποιά t είναι πεπερασμένη; Συνάγετε απο αυτήν τις ροπές $E(X^k)$ για $k = 1, 2, 3$.

(β) Να δείξετε ότι όταν οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ είναι ανεξάρτητες και $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε το άθροισμά τους ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$.

(γ) Γενικότερα, να δείξετε ότι όταν οι $\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$ είναι όπως στο ερώτημα (β), τότε για οποιεσδήποτε σταθερές c_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, με $\sum_{i=1}^{n} |c_i| > 0$, η τυχαία μεταβλητή $X = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ ακολουθεί την κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ όπου $\mu = c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \mu_i$ και $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma_i^2$.

(δ) Ποια είναι η κατανομή του δειγματικού μέσου $\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ όταν οι τυχαίες μεταβλητές X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κανονικές $N(\mu, \sigma^2)$, και ποια είναι η κατανομή του τυποποιημένου δειγματικού μέσου $Z_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)/\sigma$;

8. Ανισοτητα Markov. Κεντρικο οριακο θεωρημα

8.1. Έστω X μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με $EX = 4$ και $E(X^2) = 18$. Τι άνω φράγματα παίρνουμε για την πιθανότητα $P(X \geq 5)$ από τις ανισότητες Markov και Chebyshev;

8.2. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, με συνάρτηση πιθανότητας f, ώστε η ακολουθία $(f(k))_{k\geq 1}$ να είναι φθίνουσα. Να δειχθεί ότι

$$P(X = k) \leq 2\,\frac{E(X)}{k^2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

8.3. Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$, με πυκνότητα f, ώστε η f να είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$. Να δειχθεί ότι

$$f(x) \leq 2\,\frac{E(X)}{x^2}$$

για κάθε $x > 0$.

8.4. Έστω n "μεγάλος" φυσικός αριθμός και X τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο τις τιμές 0 και n^2 με πιθανότητες $1 - n^{-1}, n^{-1}$ αντίστοιχα, δηλαδή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0, n \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{αν } x = 0, \\ \frac{1}{n} & \text{αν } x = n^2. \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι $EX = n$, να υπολογιστεί η $\mathrm{Var}(X)$ καθώς και η πιθανότητα $P(X > 0.8\,n)$, δηλαδή η X να μην είναι πολύ μικρότερη απο την μέση της τιμή.

8.5. Έστω X μή αρνητική τυχαία μεταβλητή με $EX < \infty$ και $a \in (0, 1)$. Τότε

(α)

$$P(X \leq a\,EX) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2(EX)^2}.$$

*(β) (Ανισότητα Paley-Zygmund)

$$P(X > a\,EX) \geq (1-a)^2\frac{(EX)^2}{E(X^2)}.$$

(γ) Τι φράγματα δίνουν οι (α), (β) για την πιθανότητα $P(X > 0.8\,n)$ από την προηγούμενη άσκηση;

8.6. Έστω X τυχαία μεταβλητή, και έστω ότι για κάποιο $a > 0$ ισχύει $E(e^{aX}) < \infty$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $C > 0$ σταθερά ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}$ να ισχύει $P(X > t) \leq Ce^{-at}$. Δηλαδή η "ουρά" της X προς τα δεξιά φθίνει γρήγορα, τουλάχιστον με ταχύτητα e^{-at}.

8.7. Τα αιτήματα που φτάνουν σε έναν server έχουν το καθένα τυχαίο χρόνο εξυπηρέτησης που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\theta = 1/2$ (δηλαδή πυκνότητα $(1/2)e^{-x/2}\mathbf{1}_{x>0}$, το x σε λεπτά). Ο server μπορεί να απασχολείται με μόνο ένα αίτημα σε κάθε δεδομένη στιγμή. Ποιά είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να εξυπηρετήσει τα πρώτα 100 αιτήματα μιας δεδομένης μέρας σε συνολικό χρόνο το πολύ 220 λεπτά; Δίνονται $\Phi(1)$=0.8413, $\Phi(1.5)$=0.9332, $\Phi(2)$=0.9773.

8.8. Θεωρούμε μία ακολουθία ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Για j θετικό ακέραιο θέτουμε $X_j = 1$ αν το αποτέλεσμα της j δοκιμής είναι 5 ή 6 και $X_j = 0$ διαφορετικά.

(α) Να υπολογισθεί η μέση τιμή και η διασπορά της X_1.

(β) Έστω ο αριθμός των αποτελεσμάτων 5 ή 6 στις πρώτες 1800 ρίψεις. Να υπολογισθεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα $P(580 < T < 640)$. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9773$.]

8.9. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_{80}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές καθεμία με διακριτή ομοιόμορφη κατανομή στο $\{1, 2, 3, 4\}$. Να βρεθεί προσεγγιστικά η πιθανότητα το άθροισμά τους να βρίσκεται στο διάστημα $[190, 220]$. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(1.5) = 0.9332$, $\Phi(2) = 0.9773$.]

8.10. Υπολογίστε κατά προσέγγιση την πιθανότητα όπως σε 100 ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος εμφανιστούν το πολύ 40 επιτυχίες. [Δίνονται $\Phi(1) = 0.841$, $\Phi(1.5) = 0.933$, $\Phi(2) = 0.977$.]

8.11. Ο αριθμός τυπογραφικών λαθών μίας σελίδας μίας συγκεκριμένης εφημερίδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\lambda = 0.7$. Αν η εφημερίδα έχει 64 σελίδες, ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα όπως το πολύ 36 σελίδες δεν έχουν καθόλου λάθη? [Δίνονται $e^{-0.7} \simeq 1/2$, $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(3) = 0.9987$.]

8.12. Το σφάλμα μέτρησης ενός οργάνου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-0.05, 0.05]$. Ποια είναι κατά προσέγγιση η πιθανότητα το σφάλμα μέτρησης για το άθροισμα 300 μετρήσεων να είναι κατ΄ απόλυτη τιμή μικρότερο του 0.25; [Δίνονται $\Phi(0.5) = 0.6915$, $\Phi(0.8) = 0.7881$, $\Phi(1) = 0.8413$.]

8.13. Δυό ομάδες φοιτητών A και B με 200 μέλη η καθεμία πρόκειται να γράψουν μία εξέταση. Οι επιδόσεις τους είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και ξέρουμε ότι αυτές των φοιτητών της ομάδας A ακολουθούν κοινή κατανομή με μεση τιμή 9 και διασπορά 1/6, ενώ για την ομάδα B η μέση τιμή είναι 8.5 και η διασπορά είναι 1/3. Έστω M_A, M_B οι μέσοι όροι των δύο ομάδων. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχουμε $M_A - M_B \in [0.5, 0.65]$. Δίνονται $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9773$, $\Phi(3) = 0.9987$.

[Προσοχή. Η εξέταση δεν έχει συμβεί ακόμα. Οι επιδόσεις των φοιτητών καθώς και τα M_A, M_B είναι τυχαίες μεταβλητές. Μετά την εξέταση, θα πάρουν συγκεκριμένες τιμές, και δεν θα υπάρχει καμία αβεβαιότητα/τυχαιότητα. Το πιο πάνω ερώτημα για το $M_A - M_B$ το κάνουμε πριν γίνει η εξέταση.]

Απαντήσεις §1

1.1. (α) Η πιθανότητα είναι

$$\frac{n(n-1)^{r-1}}{n^r}.$$

Το πείραμα που εξετάζουμε είναι οι πρώτες r διαδόσεις. Για τις δυνατές επιλογές, σε κάθε μία από τις r διαδόσεις, το άτομο έχει n επιλογές. Για τις ευνοϊκές επιλογές, το πρώτο άτομο έχει n επιλογές, ενώ καθένα από τα επόμενα $r-1$ άτομα έχει $n-1$ επιλογές γιατί από τους $n+1$ κατοίκους της πόλης, το άτομο δεν μπορεί να κάνει την διάδοση στον εαυτό του ούτε στο άτομο που την ξεκίνησε ($n-1=n+1-2$).

(β) Για αυτό το ενδεχόμενο το πλήθος των δυνατών επιλογών είναι πάλι n^r (είμαστε στο ίδιο πείραμα, στον ίδιο δειγματικό χώρο όπως στο προηγούμενο ερώτημα), ενώ το πλήθος των ευνοϊκών επιλογών είναι $(n)_r$. Γιατί κάθε διάδοση στην οποία δεν έχουμε επαναλήψεις αντιστοιχεί σε μία διάταξη των n ατόμων[7] ανά r (και απλοϊκά: Ο πρώτος ψιθυριστής έχει n επιλογές, ο δεύτερος $n-1$, κλπ). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{(n)_r}{n^r}.$$

1.2. (α) $25/6^3$. (β) $27/6^3$. Μετράμε τις κατάλληλες διατεταγμένες τριάδες.

1.3. (α)

$$\Omega := \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : a_i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \{1, 2, \dots, n\}^k.$$

Ο αριθμός a_i λέει σε ποιά στάση κατεβαίνει ο φοιτητής i. Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από διατεταγμένες k-αδες γιατί οι φοιτητές είναι διαφορετικά αντικείμενα.

(β) $N(\Omega) = n^k$.

(γ) Έστω A το ενδεχόμενο σε μία τουλάχιστον στάση να αποβιβαστούν τουλάχιστον δύο φοιτητές (δηλαδή A είναι το σύνολο των k-αδων που ανήκουν στο Ω και στις οποίες τουλάχιστον δύο απο τις συντεταγμένες τους είναι ίδιες, π.χ., $a_2 = a_5$). Τότε $P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(n)_k}{n^k}$.

1.4. Έστω A το ενδεχόμενο στην ερώτηση. Τότε

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{365 \times (364)^{k-1}}{(365)^k} = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^k.$$

Αυτό γιατί, κατά τον υπολογισμό της $P(A^c)$, στα ευνοϊκά αποτελέσματα, ο a_1 έχει 365 επιλογές, και για κάθε επιλογή του, καθένας από τους υπόλοιπους $k-1$ μαθητές έχει 364 επιλογές.

1.5. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{5!\,6!4!3!7!10!}{30!}.$$

Το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι 30!. Για να παράγουμε μια ευνοϊκή τοποθέτηση αποφασίζουμε πρώτα την σειρά με την οποιά θα μπούν οι 5 ομάδες βιβλίων. Έχουμε 5! τρόπους για αυτό, π.χ., τοποθετούμε από αριστερά προς τα δεξιά στο ράφι Φυσική, Μαθηματικά, Ιστορία, Ξένες γλώσσες, Λεξικά. Έπειτα, μέσα στην ομάδα των βιβλίων μαθηματικών έχουμε 6! τρόπους να τα τοποθετήσουμε, ανάλογος υπολογισμός ισχύει και για τις υπόλοιπες ομάδες βιβλίων. Έτσι προκύπτει με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή ο αριθμητής του πιο πάνω κλάσματος.

1.6. Είναι πιο βολικό να κοιτάξουμε την μοιρασιά μόνο μέχρι το r βήμα. Και τα δύο ενδεχόμενα αφορούν κάτι που εξαρτάται μόνο από τα βήματα $1, 2, \dots r$.

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{(n-1)_{r-1} \times 1}{(n)_r} = \frac{1}{n}.$$

---

[7] Εξαιρούμε αυτόν που αρχίζει την διάδοση

Κάθε μοίρασμα κομματιών στα πρώτα r άτομα είναι μία διάταξη των n κομματιών ανά r. Έτσι προκύπτει ο παρονομαστής. Ένα μοίρασμα που δίνει σε καθένα από τα πρώτα $r-1$ άτομα ένα κομμάτι που δεν έχει το νόμισμα είναι μία διάταξη των $n-1$ κομματιών που δεν έχουν νόμισμα ανά $r-1$. Έπειτα για το r κομμάτι που δίνεται, υπάρχει μόνο μία ευνοϊκή δυνατότητα. Έτσι προκύπτει ο αριθμητής.

Καλό είναι να δει κανείς αυτούς τους υπολογισμούς και εξ' αρχής, χωρίς επίκληση του τύπου των διατάξεων, δηλαδή με απόδειξη του στο συγκεκριμένο σενάριο.

(β)Τώρα τα ευνοϊκά μοιράσματα είναι εκείνα στα οποία τα πρώτα κομμάτια δεν περιέχουν αυτό με το νόμισμα. Βρίσκουμε όπως πριν την πιθανότητα $(n-1)_r/(n)_r = (n-r)/n$.

1.7. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{(r)_{n-1}(n-1)}{r^n}.$$

Γιατί κάθε βώλο έχουμε r επιλογές (σε πιό δοχείο θα πάει), έτσι το πλήθος των δυνατών τοποθετήσεων είναι r^n. Για την κατασκευή μιας ευνοϊκής τοποθέτησης έχουμε κατ' αρχάς μία διάταξη των r δοχείων ανά $n-1$ που αντιστοιχεί στην τοποθέτηση των πρώτων βώλων σε διαφορετικά δοχεία. Έπειτα, ο n-οστος βώλος έχει $n-1$ επιλογές, γιατί πρέπει να πάει σε ένα ήδη κατειλημμένο δοχείο, και υπάρχουν $n-1$ τέτοια.

Επίσης θα μπορούσαμε να κάνουμε τον τελευταίο υπολογισμό απο την αρχή. Ο πρώτος βώλος έχει r επιλογές, ο δεύτερος $r-1$, ..., ο $n-1$ έχει $r-(n-2) = r-n+2$. Ο τελευταίος, $n-1$ επιλογές. Η πολλαπλαστικη αρχή δίνει $r(r-1)\cdots(r-n+2)(n-1)$, το οποίο ισούται με $(r)_{n-1}(n-1)$.

1.8. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{100}{10}\binom{200}{90}}{\binom{300}{100}}.$$

Ως δειγματικό χώρο Ω παίρνουμε τα υποσύνολα του $\{1,2,...,300\}$ με 100 στοιχεία (τα στοιχεία του Ω είναι ισοπίθανα). Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων, δηλαδή το $N(\Omega)$ ισούται με τον παρονομαστή του πιο πάνω κλάσματος. Ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο με 10 άσπρα και 90 μαύρα σφαιρίδια. Για να το φτιάξουμε πρέπει να επιλέξουμε 10 μαύρα σφαιρίδια και 90 άσπρα. Για την επιλογή των πρώτων έχουμε $\binom{100}{10}$ επιλογές ενώ για την επιλογή των δεύτερων $\binom{200}{90}$ έχουμε επιλογές. Έπειτα εφαρμόζουμε την πολλαπλασιαστική αρχή, και προκύπτει ο αριθμητής του κλάσματος.

1.9. (α), (β). Τα πρώτα δύο ερωτήματα λύνονται όπως στην προηγούμενη άσκηση, και δίνουν τις απαντήσεις

$$\frac{\binom{945}{3}\binom{55}{12}}{\binom{1000}{15}} \quad \text{και} \quad \frac{\binom{25}{2}\binom{30}{3}\binom{945}{10}}{\binom{1000}{15}}$$

αντίστοιχα.

(γ) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{945}{4}\left\{\binom{55}{11}-\binom{30}{11}-\binom{25}{1}\binom{30}{10}\right\}}{\binom{1000}{15}}.$$

Στον αριθμητή θέλουμε να μετρήσουμε το πλήθος των υποσυνόλων των 1000 σφαιριδίων με 15 στοιχεία που περιέχουν ακριβώς 4 κόκκινα και τουλάχιστον δύο μαύρα σφαιρίδια. Για την επιλογή των κόκκινων σφαιριδίων έχουμε $\binom{945}{4}$ επιλογές. Τα υπόλοιπα 11 σφαιρίδια πρέπει να επιλεγούν από το σύνολο S των 55 μη κόκκινων σφαιριδίων (25 μαύρα, 30 άσπρα). Έστω $N(k)$ το πλήθος των υποσυνόλων του S με k μαύρα και $11-k$ άσπρα σφαιρίδια. Ο αριθμός υποσυνόλων του S καθένα από τα οποία έχει 11 στοιχεία από τα οποία τουλάχιστον 2 είναι μαύρα ισούται με

$$\binom{55}{11} - N(0) - N(1) = \binom{55}{11} - \binom{30}{11} - \binom{25}{1}\binom{30}{10}$$

Δηλαδη από τον αριθμό όλων των υποσυνόλων του S με 11 στοιχεία αφαιρούμε το πλήθος αυτών που δεν έχουν την επιθυμητή σύσταση.

1.10. Ο δειγματικός χώρος είναι το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ με n στοιχεία. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Ο παρονομαστής είναι η πληθικότητα του δειγματικού χώρου. Έπειτα, για την κατασκευή ενός ευνοϊκού υποσυνόλου (n στοιχείων) πρέπει από κάθε ζευγάρι να επιλέξουμε ένα άτομο. Για κάθε ζευγάρι έχουμε 2 επιλογές, έτσι από την πολλαπλασιαστική αρχή προκύπτει το 2^n στον αριθμητή.

1.11. (α) Με σκεπτικό όπως στις ασκήσεις 9, 10 πιο πάνω, βρίσκουμε ότι η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{n}{j}\binom{n}{k-j}}{\binom{2n}{k}}.$$

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\binom{n}{k}2^k}{\binom{2n}{k}}.$$

Για ένα ευνοϊκό υποσύνολο, επιλέγουμε πρώτα k ζευγάρια, έπειτα από κάθε ζευγάρι επιλέγουμε ένα από τα μέλη του. Αυτή η διαδικασία παράγει $\binom{n}{k}2^k$ υποσύνολα, που είναι ακριβώς τα ευνοικά υποσύνολα.

1.12. Το πλήθος των δυνατών κατανομών είναι 4^{13}. Για να φτιάξουμε μία ευνοϊκή κατανομή επιλέγουμε πρώτα τους 3 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην πρώτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{13}{3}$ τρόπους . Έπειτα επιλέγουμε τους 4 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην δεύτερη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{10}{4}$ τρόπους (γιατί ήδη τρείς έχουν φύγει για την πρώτη στάση, και έχουν μείνει 10). Επιλέγουμε τους 4 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην τρίτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{6}{4}$ τρόπους. Τέλος, επιλέγουμε τους 2 φοιτητές που θα αποβιβαστούν στην πρώτη στάση, αυτό γίνεται με $\binom{2}{2} = 1$ τρόπους. Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των ευνοϊκών τρόπων είναι

$$\binom{13}{3}\binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = \frac{13!}{3!10!}\frac{10!}{4!6!}\frac{6!}{4!2!}\frac{2!}{2!0!} = \frac{13!}{3!4!4!2!}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{1}{4^{13}}\frac{13!}{3!4!4!2!}.$$

Η γενική περίπτωση αυτής της άσκησης είναι η Άσκηση 1.24 πιό κάτω.

1.13. Το πλήθος των δυνατών αποβιβάσεων είναι n^k. Όλες οι ευνοϊκές αποβιβάσεις φτιάχνονται ως εξής. Επιλέγουμε πρώτα το ποιά στάση θα έχει τους 3 φοιτητές (n επιλογές), επιλέγουμε τους 3 φοιτητές που αποβιβάζονται εκεί ($\binom{k}{3}$ επιλογές), αφήνουμε καθέναν από τους υπόλοιπους $k-3$ φοιτητές να επιλέξει την στάση που θα αποβιβαστεί, αλλά δεν επιτρέπονται επαναλήψεις ($(n-1)_{k-3}$ επιλογές). Με αυτή την διαδικασία παίρνουμε όλες τις ευνοϊκές αποβιβάσεις, και καμία τους δεν προκύπτει πάνω από μιά φορά. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{n\binom{k}{3}(n-1)_{k-3}}{n^k}.$$

1.14. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{60}{5}}{(60)_5} = \frac{1}{5!}.$$

Ένα δυνατό αποτέλεσμα $(k_1, k_2, \ldots, k_5)$ είναι ακριβώς μια διάταξη των 60 ανά 5. Έτσι προκύπτει ο παρονομαστής. Σε ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα, δηλαδή μια πεντάδα $(k_1, k_2, \ldots, k_5)$ με $k_1 < k_2 <$

$\cdots < k_5$ αντιστοιχούμε το υποσύνολο $\{k_1, k_2, \ldots, k_5\}$ του $\{1, 2, \ldots, 60\}$ με 6 στοιχεία. Αυτή η αντιστοίχηση είναι 1-1 και επί (αν μας δώσουν ένα υποσύνολο με 6 στοιχεία, τότε βρίσκουμε την διατεταγμένη εξάδα που το παρήγαγε βάζοντας στην σειρά τα 6 δοσμένα στοιχεία).

(β) Από κάθε ευνοϊκή περίπτωση $(k_1, k_2, \ldots, k_5)$ του (α) παράγονται 4! της περίπτωσης μας. Όσες και οι μεταθέσεις των (k_1, k_2, k_3, k_4) γιατί η διάταξη των πρώτων τεσσάρων αποτελεσμάτων δεν μας ενδιαφέρει. Έχουμε βέβαια εξεσφαλίσει ότι και τα τέσσερα είναι μικρότερα από το k_5. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{60}{5} 4!}{(60)_5} = \frac{1}{5}.$$

Τα (α), (β) αποδεικνύονται επίσης και με ένα επιχείρημα συμμετρίας.

1.15. Έστω $X =$ πλήθος εμφανίσεων του 6 στις n ρίψεις[8] Έχουμε

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{5^n}{6^n} - \frac{n \times 1 \times 5^{n-1}}{6^n}.$$

Ο τελευταίος όρος προκύπτει γιατί έχουμε n επιλογές για την ρίψη κατά την οποία θα εμφανιστεί η μοναδική ένδειξη 6. Για εκείνη την ρίψη υπάρχει μόνο μία επιλογή για το αποτέλεσμα (πρέπει να ρθει 6), ενώ για κάθε μία από τις υπόλοιπες $n - 1$ ρίψεις υπάρχουν 5 επιλογές.

(β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A := \{\text{δεν εμφανίζεται καθόλου ο αριθμός } 1\},$$
$$B := \{\text{εμφανίζεται τουλάχιστον 2 φορές ο αριθμός } 6\} = \{X \geq 2\}.$$

Τότε

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c),$$

με $P(A) = (5/6)^n$, και

$$P(A \cap B^c) = P(A \cap \{X < 2\}) = P(A \cap \{X = 0\}) + P(A \cap \{X = 1\}) = \frac{4^n}{6^n} + \frac{n \times 1 \times 4^{n-1}}{6^n}.$$

Ο τελευταίος όρος προκύπτει γιατί έχουμε n επιλογές για την ρίψη κατά την οποία θα εμφανιστεί η μοναδική ένδειξη 6. Για εκείνη την ρίψη υπάρχει μόνο μία επιλογή για το αποτέλεσμα (πρέπει να ρθει 6), ενώ για κάθε μία από τις υπόλοιπες $n - 1$ ρίψεις υπάρχουν 4 επιλογές (απαγορεύτεται το 1 και το 6).

1.16. (α) Θέτουμε $A_k := \{\text{όλες οι } n \text{ ενδείξεις είναι } \leq k\}$. Ζητούμε την πιθανότητα του $A_k \setminus A_{k-1}$. Επειδή $A_{k-1} \subset A_k$, βρίσκουμε κατά τα γνωστά

$$P(A_k \setminus A_{k-1}) = P(A_k) - P(A_{k-1}) = \left(\frac{k}{6}\right)^n - \left(\frac{k-1}{6}\right)^n.$$

Για το υπολογισμό του A_k, παρατηρούμε ότι καθένα από τα n ζάρια έχει 6 επιλογές (και έτσι προκύπτει ο παρονομαστής 6^n), και k ευνοϊκές επιλογές, τις $\{1, 2, \ldots, k\}$.

(β) Θέτουμε $B_k := \{\text{όλες οι } n \text{ ενδείξεις είναι } \geq k\}$. Ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $B_k \setminus B_{k+1}$. Επειδή $P(B_k) = ((7 - k)/6)^n$ για κάθε $k \in \{1, \ldots, 6\}$, βρίσκουμε $P(B_k \setminus B_{k+1}) = ((7 - k)/6)^n - ((6 - k)/6)^n$.

1.17. (α) Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A := \{$ ο λαχνός 1 επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά $\}$. Τότε

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{(n-1)^k}{n^k}.$$

Για τον υπολογισμό του πλήθους των ευνοϊκών περιπτώσεων στο ενδεχόμενο A^c, παρατηρούμε ότι έχουμε k εξαγωγές, και σε καθεμία από αυτές έχουμε $n - 1$ επιλογές (ο λαχνός 1 απαγορεύεται). Έτσι προκύπτει ο αριθμητής $(n - 1)^k$.

---

[8] Θα δούμε αργότερα ότι ο τυχαίος αριθμός X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n και $p = 1/6$.

(β) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα $A_i :=$ { ο λαχνός i επιλέγεται τουλάχιστον μία φορά }, $i = 1, 2, 3$. Τότε $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1 - P((A_1 \cap A_2 \cap A_3)^c) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c)$, και η τελευταία πιθανότητα, με βάση την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού, ισούται με

$$P(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) = P(A_1^c) + P(A_2^c) + P(A_3^c) - P(A_1^c \cap A_2^c) - P(A_2^c \cap A_3^c) - P(A_1^c \cap A_3^c)$$
$$+ P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 3\frac{(n-1)^k}{n^k} - 3\frac{(n-2)^k}{n^k} + \frac{(n-3)^k}{n^k}.$$

Για τον υπολογισμό π.χ. της $P(A_1^c \cap A_3^c)$, τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι οι διατεταγμένες k-αδες (με τις επαναλήψεις να επιτρέπονται) από το $\{1, 2, ..., n\}$ που δεν περιέχουν τους λαχνούς 1 και 3. Το πλήθος αυτών των k-αδων είναι $(n-2)^k$.

1.18. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. (α) Έστω

$$A_3 := \{i \in \{1, 2, \ldots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 3\},$$
$$A_5 := \{i \in \{1, 2, \ldots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 5\}.$$

Τότε

$$P(A_3 \cup A_5) = P(A_3) + P(A_5) - P(A_3 \cap A_5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}.$$

Για τον υπολογισμό π.χ. της $P(A_3 \cap A_5)$. Το $A_3 \cap A_5$ περιέχει τους αριθμούς στο $\{1, 2, \ldots, 1050\}$ που διαιρούνται και με το 3 και με το 5, ισοδύναμα, αυτούς που διαιρούνται με το 15. Το πλήθος τους είναι 70=[1050/15] (ακέραιο μέρος). Άρα $P(A_3 \cap A_5) = 70/1050$ καθότι η επιλογή είναι ομοιόμορφη (όλοι οι ακέραιοι στο $\{1, 2, \ldots, 1050\}$ είναι ισοπίθανοι).

(β) Ορίζουμε επιπλέον

$$A_7 := \{i \in \{1, 2, \ldots, 1050\} : \text{ το } i \text{ διαιρείται με το } 7\}.$$

Ζητάμε την πιθανότητα

$$P(A_3 \cup A_5 \cup A_7) = P(A_3) + P(A_5) + P(A_7) - P(A_3 \cup A_5) - P(A_5 \cup A_7) - P(A_3 \cup A_7)$$
$$+ P(A_3 \cap A_5 \cap A_7) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{35} + \frac{1}{105} = \frac{57}{105}.$$

1.19. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Για $i = 1, 2, \ldots, 6$, θέτουμε

$$A_i = \{\text{Εμφανίζεται η διπλή ζαριά } (i, i) \text{ σε κάποια από τις } n \text{ δοκιμές}\}.$$

Ζητούμε την πιθανότητα

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6) = 1 - P(A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_6^c).$$

Με βάση την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού,

$$P(A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_6^c) = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le 6} P(A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \cap \ldots A_{i_k}^c).$$

Για κάθε k δείκτες $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ απο το $\{1, 2, \ldots, 6\}$, έχουμε $P(A_{i_1}^c \cap A_{i_2}^c \ldots A_{i_k}^c) = (\frac{36-k}{36})^n$ γιατί από τα 36 αποτελέσματα μιας ρίψης των δύο ζαριών απογορεύονται οι k διπλές $(i_1, i_1), \ldots, (i_k, i_k)$. Επίσης, υπάρχουν $\binom{6}{k}$ επιλογές k τέτοιων δεικτών. Οπότε

$$P(A_1^c \cup A_2^c \cup \ldots \cup A_6^c) = \sum_{k=1}^{6} (-1)^{k-1} \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{36}\right)^n,$$

και η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_6) = \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k} \left(1 - \frac{k}{36}\right)^n$.

1.20. Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Για $i = 1, \ldots, n$, θέτουμε

$$A_i = \{\text{η } i \text{ επιστολή τοποθετείται στον φάκελο που της αντιστοιχεί}\}.$$

Ισχύει $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$, και

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Κάποιες εξηγήσεις. Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ επιλογές δεικτών $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, μία για κάθε υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με k στοιχεία. Για μία τέτοια επιλογή, η πιθανότητα $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k})$ είναι ακριβώς η πιθανότητα σε μια τυχαία κατανομή των επιστολών $\{1, 2, \ldots, n\}$ να έχουν τοποθετηθεί σωστά οι $i_1, i_2, \ldots, i_k$ (δεν ξέρουμε τι έγινε με τις άλλες επιστολές, δεν απαγορεύεται και μία από εκείνες να τοποθετήθηκε σωστά). Το πλήθος των δυνατών κατανομών είναι $n!$ ενώ των ευνοϊκών είναι $(n-k)!$ γιατί οι $i_1, i_2, \ldots, i_k$ τοποθετούνται αυτόματα στους σωστούς φακέλους, και υπάρχει ελευθερία μόνο στην τοποθέτηση των υπόλοιπων $n-k$.
Τελικά βρίσκουμε

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

Η τελευταία ποσότητα τείνει στο e^{-1} καθώς $n \to \infty$ (από το ανάπτυγμα της e^x σε δυναμοσειρά).

1.21. (α) Όταν τα σφαιρίδια είναι διακεκριμένα, μιά κατανομή τους στα κελιά περιγράφεται πλήρως από το διάνυσμα $D = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$, όπου r_i είναι το όνομα του κελιού που περιέχει το σφαιρίδιο i.

(i) Σε αυτή την περίπτωση, το διάνυσμα D είναι μια διάταξη n των ανά k με επανάληψη (για την τιμή κάθε r_i έχουμε n επιλογές). Άρα το πλήθος αυτών των διανυσμάτων είναι n^k.

(ii) Τώρα, επειδή κάθε κελί χωράει μόνο ένα σφαιρίδιο, στο διάνυσμα δεν επιτρέπεται να έχουμε επαναλήψεις. Έτσι το D είναι μια διάταξη n των ανά k (χωρίς επανάληψη. Το πρώτο σφαιρίδιο έχει n επιλογές, το δεύτερο $n-1$, κοκ). Το πλήθος αυτών των διανυσμάτων είναι $(n)_k$.

(iii) Έστω S το σύνολο όλων των κατανομών και A_i το σύνολο των κατανομών κατά τις οποίες το i κελί μένει άδειο. Τότε

$$N(A_1^c \cap A_2^c \cdots \cap A_n^c) = N(S) - N(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = n^k - N(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n),$$

και η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού δίνει

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) &= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_s \le n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_s}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{s-1} \binom{n}{s} (n-s)^k. \end{aligned}$$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι $\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^k$.

(β) Όταν τα σφαιρίδια είναι όμοια, μιά κατανομή τους στα κελιά περιγράφεται πλήρως από το διάνυσμα $E = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, όπου s_i είναι το πλήθος των σφαιριδίων που περιέχονται στο κελί i. Ισοδύναμα, περιγράφεται πλήρως από έναν συνδυασμο με επανάληψη, που περιέχει s_i φορές το στοιχείο i (δηλαδή πόσες φορές επιλέγουμε το κελί i).

(i) Το πλήθος των κατανομών ισούται με το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη των n ανά k, δηλαδή $\binom{n+k-1}{k}$.

(ii) Εδώ ένα κελί μπορεί να επιλεγεί μία ή καμία φορά, άρα μιά κατανομή των σφαιριδίων ισοδυναμεί με έναν συνδυασμό χωρίς επανάληψη. Ο συνδυασμός αποτελείται ακριβώς από τα κελιά που έχουν ένα σφαιρίδιο. Επομένως το πλήθος αυτών των κατανομών είναι $\binom{n}{k}$.

(iii) Για να κατασκευάσουμε μιά τέτοια κατανομή, ρίχνουμε αρχικά σε κάθε κελί ένα σφαιρίδιο[9]. Αυτό γίνεται με έναν μόνο τρόπο γιατί τα σφαιρίδια είναι όμοια. Και μας μένουν $k-n$ σφαιρίδια να μοιραστούν στα n κελιά. Αυτό γίνεται με $\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$ τρόπους (συνδυασμοί των n ανά $k-n$ με επανάληψη). Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $\binom{k-1}{k-n}$.

1.22. (α), (β). Οι τιμές της f ορίζουν ένα διάνυσμα $(f(1), f(2), \ldots, f(k))$. Αυτό το διάνυσμα είναι στο ερώτημα (α) μια διάταξη με επανάληψη των n ανά k, ενώ στο ερώτημα (β) μια διάταξη χωρίς επανάληψη των n ανά k. Έτσι τα ζητούμενα πλήθη είναι n^k και $(n)_k$ αντίστοιχα.

(γ) Παρατηρούμε ότι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού και τιμών όπως στην εκφώνηση καθορίζεται μονοσήμαντα από την εικόνα της $\{f(1), f(2), \ldots, f(k)\}$, γιατί το μικρότερο στοιχείο της εικόνας είναι το $f(1)$ το αμέσως μεγαλύτερο το $f(2)$ κ.ο.κ. Σε κάθε τέτοια συνάρτηση αντιστοιχίζουμε την εικόνα της, το οποίο είναι ένα υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, n\}$ με k στοιχεία. Αυτή η αντιστοίχηση είναι 1-1 και επί. Άρα το ζητούμενο πλήθος ισούται με $\binom{n}{k}$.

(δ) Για να ξέρουμε μια αύξουσα συνάρτηση $f : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ δεν αρκεί να ξέρουμε την εικόνα της γιατί μπορεί μια τιμή να παίρνεται πολλές φορές. Είναι πλήρως καθορισμένη όμως αν ξέρουμε πόσες φορές παίρνει καθεμία από τις τιμές $1, 2, \ldots, n$. Για παράδειγμα αν ξέρουμε ότι παίρνει την τιμή 1 δύο φορές, την τιμή 2 καμία φορά, την τιμή 3 καμία φορά, και την τιμή 4 τρείς φορές, τότε $f(1) = f(2) = 1, f(3) = f(4) = f(5) = 4$, ενώ οι επόμενες τιμές $f(6), f(7)$ κλπ θα είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 5. Επομένως μία αύξουσα συνάρτηση όπως πιο πάνω αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό με επανάληψη των n στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανά k. Το πόσες φορές περιέχει ο συνδυασμός τον αριθμό i δηλώνει πόσες φορές έχει η f ως τιμή το i. Η αντιστοίχηση είναι 1-1 και επί, και άρα το πλήθος των συναρτήσεων που μας απασχολούν είναι $\binom{n+k-1}{k}$.

(ε) Όπως στο προηγούμενο ερώτημα, σε κάθε αύουσα συνάρτηση αντιστοιχούμε έναν συγκεκριμένο συνδυασμό με επανάληψη. Το να είναι η συνάρτηση επί σημαίνει ότι κάθε στοιχείο από το περιέχεται στον συνδυασμό. Άρα το πλήθος αυτών των συναρτήσεων ισούται με το πλήθος των κατανομών k όμοιων σφαιριδίων σε n κελιά. Με βάση το ερώτημα (β)(iii) της προηγούμενης άσκησης, το πλήθος αυτών των κατανομών ισούται με $\binom{k-1}{k-n}$.

(ζ) Μία συνάρτηση επί αντιστοιχεί σε μία κατανομή k διακεκριμένων σφαιριδίων σε n κελιά. Με βάση το ερώτημα (α)(iii) της προηγούμενης άσκησης, το πλήθος αυτών των κατανομών ισούται με $\sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} (n-s)^k$.

1.23. Για την κατασκευή μιας τέτοιας n-άδας, διαλέγουμε πρώτα τις r_1 θέσεις που θα τοποθετηθούν τα a_1, έπειτα τις r_2 θέσεις που θα τοποθετηθούν τα a_2, κλπ. Για να διαλέξουμε τις θέσεις για τα a_1 έχουμε $\binom{n}{r_1}$ επιλογές. Έπειτα, για να διαλέξουμε τις θέσεις για τα a_2 έχουμε $\binom{n-r_1}{r_2}$ επιλογές, αφού r_1 θέσεις έχουν καταληφθεί από τα a_1. Όμοια και για τα υπόλοιπα στοιχεία. Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των n-άδων με τις συγκεκριμένες προδιαγραφές είναι

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{n-2}}{r_{n-1}}\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1}}{r_n} \\
&\quad = \frac{n!}{r_1!\,(n-r_1)!}\frac{(n-r_1)!}{r_2!\,(n-r_1-r_2)!}\frac{(n-r_1-r_2)!}{r_3!\,(n-r_1-r_2-r_3)!}\cdots\frac{(n-r_1-r_2-\cdots-r_{n-1})!}{r_n!\,(n-r_1-r_2-\cdots-r_n)!} \\
&\quad = \frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_n!}
\end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος στον παρονομαστή του τελευταίου κλάσματος στη δεύτερη γραμμή ισούται με $0! = 1$.

1.24. (α) $(n)_k/n^k$.

[9] Αυτό το τρικ δεν δουλεύει στην περίπτωση των διακεκριμένων σφαιριδίων. Γιατί;

(β) Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με

$$\frac{\frac{k!}{k_1!\cdot k_2!\cdots k_n!}}{n^k} = \frac{1}{n^k}\binom{k}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_n}.$$

Το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων, που εμφανίζεται στον αριθμητή του πρώτου κλάσματος, μπορεί να το υπολογίσει κανείς εξ΄ αρχής ή με χρήση της προηγούμενης άσκησης, γιατί τα άτομα, με τη επιλογή ορόφων, δημιουργούν μια διατεταγμένη k-άδα που στην θέση i έχει τον όροφο επιλογής του i ατόμου.

1.25. (i) Έστω Z_{2n} το σύνολο των ζευγαρωμάτων των στοιχείων του $\{1,2,\ldots,2n\}$ και M_{2n} το σύνολο των μεταθέσεων του ίδιου συνόλου. Θεωρούμε την απεικόνιση $T : M_{2n} \to Z_{2n}$ με

$$T((x_1,x_2,\ldots,x_{2n})) = \{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\},\ldots,\{x_{2n-1},x_{2n}\}\}.$$

Δηλαδή έχοντας βάλει τους αριθμούς $1,2,\ldots,2n$ σε μιά σειρά, την $(x_1,x_2,\ldots,z_{2n})$, ζευγαρώνουμε κάθε αριθμό σε περιττή θέση με τον αριθμό που βρίσκεται στην αμέσως επόμενη θέση. Με λίγη σκέψη βλέπει κανείς ότι η απεικόνιση είναι $n!2^n$ προς 1. Άρα $|M_{2n}| = n!\,2^n\,|Z_{2n}|$, δηλαδή

$$|Z_{2n}| = \frac{(2n)!}{n!\,2^n} = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1.$$

(ii) Έστω Z_{2n} το σύνολο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. (α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1/|Z_{2n}|$. (β) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{n!}{Z_{2n}} = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}.$$

Απαντήσεις §2

2.2. Το πρώτο άτομο από τα $2k$ μπορεί να είναι φοιτητής ή φοιτήτρια. Έτσι, η προσθετική αρχή και ο πολλαπλασιαστικός τύπος δίνουν πιθανότητα

$$\frac{(r)_k(s)_k}{(r+s)_{2k}} + \frac{(r)_k(s)_k}{(r+s)_{2k}} = 2\,\frac{(r)_k(s)_k}{(r+s)_{2k}}.$$

Επίσης και με τις τεχνικές του προηγούμενου κεφαλαίου.

2.3. Έστω E_i το ενδεχόμενο η ρίψη i να είναι επιτυχία.
(α)

$$\begin{aligned}P(E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_k\cap E_{k+1}^c\cap\cdots\cap E_{100}^c) &= P(E_1)\prod_{i=2}^{k} P(E_i\,|\,E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{i-1})\\ &\times P(E_{k+1}^c\,|\,E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_k)\prod_{i=k+2}^{100} P(E_i^c\,|\,E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_k\cap E_{k+1}^c\cap\cdots\cap E_{99}^c)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{k}{k+1}\times\frac{1}{k+2}\times\frac{2}{k+3}\cdots\times\frac{100-k}{101} = \frac{k!(100-k)!}{100!}\frac{1}{101}.\end{aligned}$$

(γ) $1/101$ για κάθε $k\in\{0,1,\ldots,100\}$.

2.4. Έστω B το ενδεχόμενο στην πρώτη εξαγωγή να βγήκε άσπρο σφαιρίδιο, και A το ενδεχόμενο στην δεύτερη εξαγωγή να βγεί άσπρο σφαιρίδιο. Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για την διαμέριση $\{B,B^c\}$ του χώρου πιθανότητας.

$$P(A) = P(A\cap B)+P(A\cap B^c) = P(B)P(A\,|\,B)+P(B^c)P(A\,|\,B^c) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{9}+\frac{7}{12}\times\frac{3}{9} = \frac{41}{108}.$$

2.5. Θεώρημα ολικής πιθανότητας. $\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\frac{2i}{14} = \frac{1}{2}$.

2.6. Θεώρημα ολικής πιθανότητας. Πείραμα σε τρία βήματα. Δεσμεύουμε ως προς το τί έγινε στα δύο πρώτα βήματα. Για $i = 1, 2, 3$ θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_i := \{ \text{ το σφαιρίδιο της } i \text{ εξαγωγής είναι άσπρο}\},$$
$$M_i := \{ \text{ το σφαιρίδιο της } i \text{ εξαγωγής είναι μαύρο}\}.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για την διαμέριση

$$\{A_1 \cap A_2, A_1 \cap M_2, M_1 \cap A_2, M_1 \cap M_2\}$$

του χώρου πιθανότητας.

$$\begin{aligned} P(A_3) &= P(A_1 \cap A_2)P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap M_2)P(A_3 \,|\, A_1 \cap M_2) \\ &\quad + P(M_1 \cap A_2)P(A_3 \,|\, M_1 \cap A_2) + P(M_1 \cap M_2)P(A_3 \,|\, M_1 \cap M_2) \\ &= \frac{k}{n}\frac{k}{n}\frac{k}{n} + \frac{k}{n}\frac{(n-k)}{n}\frac{(k+1)}{n} + \frac{(n-k)}{n}\frac{(k+1)}{n}\frac{(k+1)}{n} + \frac{(n-k)}{n}\frac{(n-k-1)}{n}\frac{(k+2)}{n}. \end{aligned}$$

2.7. Τύπος Bayes.

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4}}{\frac{1}{2}\frac{5^4}{10^4} + \frac{1}{2}\frac{9^4}{10^4}} \approx 0.08$$

2.8. Τύπος Bayes.

$$\frac{0.001 \times 0.95}{0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.01} = \frac{95}{95 + 999} \approx 0.086$$

2.9. Τύπος Bayes. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{ο φίλος μας, μας δείχνει άσπρη πλευρά}\} \\ B_1 &:= \{ \text{ ο φίλος μας επιλέγει το φύλλο } AA\}, \\ B_2 &:= \{ \text{ ο φίλος μας επιλέγει το φύλλο } AM\}, \\ B_3 &:= \{ \text{ ο φίλος μας επιλέγει το φύλλο } MM\}. \end{aligned}$$

Αναζητούμε την πιθανότητα

$$P(B_2 \,|\, A) = \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_2)P(A \,|\, B_2)}{P(B_1)P(A \,|\, B_1) + P(B_2)P(A \,|\, B_2) + P(B_3)P(A \,|\, B_3)}.$$

(α) Στο πρώτο σενάριο, το πιο πάνω κλάσμα ισούται με

$$\frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{3}.$$

(β) Στο δεύτερο σενάριο, αυτό που αλλάζει είναι η πιθανότητα $P(A \,|\, B_2)$. Τώρα ο φίλος μας επιδιώκει να δείχνει άσπρη πλευρά, οπότε αυτή η πιθανότητα είναι 1. Και το κλάσμα γίνεται

$$\frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{1}{2}.$$

2.10. Έστω A το ενδεχόμενο ο κλέφτης να άνοιξε το συρτάρι Σ_1 και B το ενδεχόμενο να πήρε δύο χρυσά νομίσματα. (α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας για την διαμέριση $\{A, A^c\}$ του χώρου πιθανότητας.

$$P(B) = P(A)P(B \,|\, A) + P(A^c)P(B \,|\, A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{17}{120}.$$

(β) Εφαρμόζουμε τον τύπο του Bayes. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B\,|\,A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{17}{120}} = \frac{12}{17}.$$

Την πιθανότητα $P(B)$ την υπολογίσαμε στο ερώτημα (α).

2.11. Τύπος Bayes. Θέτουμε $C_k := \{$ο οδηγός ανήκει στην κατηγορία $A_k\}$ για $k = 1, 2, \ldots, 10$, και $B := \{$ο οδηγός αναφέρει ατύχημα$\}$.

$$P(C_k\,|\,B) = \frac{P(B\cap C_k)}{P(B)} = \frac{P(B\,|\,C_k)P(C_k)}{\sum_{j=1}^{10} P(B\,|\,C_j)P(C_j)} = \frac{\frac{k}{100}\frac{k}{55}}{\sum_{j=1}^{10}\frac{j}{100}\frac{j}{55}} = \frac{k^2}{385}.$$

2.12. (β) Τα A, B είναι θετικά συσχετισμένα, ενώ τα A, C είναι αρνητικά συσχετισμένα.

2.13. Με βάση τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας,

$$p_\Gamma(A\,|\,B) = \frac{p_\Gamma(A\cap B)}{p_\Gamma(B)} = \frac{P(A\cap B\,|\,\Gamma)}{P(B\,|\,\Gamma)} = \frac{\frac{P(A\cap B\cap\Gamma)}{P(\Gamma)}}{\frac{P(B\cap\Gamma)}{P(\Gamma)}} = \frac{P(A\cap B\cap\Gamma)}{P(B\cap\Gamma)} = P(A\,|\,B\cap\Gamma).$$

2.14. Επειδή η συνάρτηση $p_\Gamma : \mathcal{A}\to[0,1]$ με $p_\Gamma(A) = P(A\,|\,\Gamma)$ είναι μέτρο πιθανότητας, ισχύει για αυτήν το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Δηλαδή

$$\begin{aligned} P(A\,|\,\Gamma) &= p_\Gamma(A) = p_\Gamma(B_1)p_\Gamma(A\,|\,B_1) + p_\Gamma(B_2)p_\Gamma(A\,|\,B_2) \\ &= P(B_1\,|\,\Gamma)P(A\,|\,\Gamma\cap B_1) + P(B_2\,|\,\Gamma)P(A\,|\,\Gamma\cap B_2) \end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης.

2.15. (α) Επειδή $(A\cap B)\cap(A\cup B) = A\cap B$ και $(A\cap B)\cap A = A\cap B$, η ζητούμενη σχέση ισοδυναμεί με

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} \le \frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

που ισχύει αφού $P(A\cap B)\ge P(A)$.

(β) Με χρήση του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας, η ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &\frac{P(B)}{P(B\cup A)} \ge \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A)P(B) \ge P(A\cap B)P(A\cup B) \\ &\Leftrightarrow P(A)P(B) \ge P(A\cap B)\,\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\} \\ &\Leftrightarrow P(A)P(B) - P(A)P(A\cap B) - P(B)P(A\cap B) + P(A\cap B)P(A\cap B) \ge 0 \\ &\Leftrightarrow (P(A)-P(A\cap B))(P(B)-P(A\cap B)) \ge 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει προφανώς.

2.16. Δείχνουμε μόνο το (α).

$$P(A\cap B^c) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1-P(B)) = P(A)P(B^c).$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί τα σύνολα $A\cap B, A\cap B^c$ είναι ξένα με ένωση το A. Στην δεύτερη, χρησιμοποιούμε την ανεξαρτησία των A, B.

2.17. Έχουμε

$$P(A) = 1 - 2\frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}},\ P(B) = \frac{1}{2^k} + \frac{k}{2^k} = \frac{k+1}{2^k},\ P(A\cap B) = \frac{k}{2^k}.$$

Τότε

$$A, B \text{ ανεξάρτητα} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow \frac{k}{2^k} = \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)\left(\frac{k+1}{2^k}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \Leftrightarrow 2^{k-1} = k+1 \Leftrightarrow k = 3.$$

Άρα τα A, B είναι ανεξάρτητα μόνο για $k = 3$.

2.18. Δεν είναι ανεξάρτητα.

Πως το σκεφτόμαστε: Ας θεωρήσουμε το ακραίο σενάριο που και τα δύο νομίσματα N_1, N_2 είναι κίβδηλα με $p_1 = 999/1000, p_2 = 1/1000$, και κάνουμε το πείραμα που αναφέρει η άσκηση. Επιλέγουμε στην τύχη ένα από τα δύο νομίσματα, και έχουμε στα χέρια ένα νόμισμα του οποίου την πιθανότητα επιτυχίας **δεν ξέρουμε**. Το ρίχνουμε μία φορά, και έστω ότι έρχεται Κ δηλαδή συμβαίνει το A_1. Τι καταλαβαίνουμε από αυτό; Προφανώς ότι κρατάμε το νόμισμα N_1 (δεν είμαστε σίγουροι, αλλά έχουμε τεράστιο βαθμό βεβαιότητας). Αυτό επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του A_2. Ποντάρουμε με σιγουριά ότι και στην δεύτερη φορά θα έρθει Κ. Ενώ αν δεν βλέπαμε το πρώτο αποτέλεσμα, δεν θα ποντάραμε με μεγάλη σιγουριά ότι θα συμβεί το A_2. Δηλαδή $P(A_2|A_1) > P(A_2)$. Το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης μας έδωσε κάποια πληροφορία για την (άγνωστη) πιθανότητα επιτυχίας του νομίσματος που κρατάμε, και άρα μια εκτίμηση για το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης.

Τότε τι σημαίνει το ότι πραγματοποιούμε δύο ανεξάρτητες ρίψεις; Σημαίνει ότι τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων είναι ανεξάρτητα **δεδομένου** ότι έχουμε επιλέξει το νόμισμα N_1 (ή το N_2). Δηλαδή

$$P(A_1 \cap A_2 \,|\, \text{έχουμε επιλέξει το } N_1) = P(A_1 \,|\, \text{έχουμε επιλέξει το } N_1)P(A_2 \,|\, \text{έχουμε επιλέξει το } N_1)$$
$$= p_1 p_1$$

Η τυπική απόδειξη της μη ανεξαρτησίας: Επιστρέφουμε στο σενάριο της άσκησης, και θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$B_1 := \{\text{επιλέγω το νόμισμα } N_1\},$$
$$B_2 := \{\text{επιλέγω το νόμισμα } N_2\}.$$

Τότε

$$P(A_1 \cap A_2) = P(B_1)P(A_1 \cap A_2 \,|\, B_1) + P(B_2)P(A_1 \cap A_2 \,|\, B_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{32},$$

και

$$P(A_1) = P(B_1)\,P(A_1 \,|\, B_1) + P(B_2)\,P(A_1 \,|\, B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{8}.$$

Όμοια, $P(A_2) = 5/8$. Και όπως περιμέναμε,

$$P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2).$$

Μάλιστα

$$\frac{P(A_2 \,|\, A_1)}{P(A_2)} = \frac{26}{25} > 1,$$

δηλαδή $P(A_2 \,|\, A_1) > P(A_2)$.

2.19. Έστω A το ενδεχόμενο ένα άτομο να πάσχει απο την ασθένεια α και B το ενδεχόμενο να πάσχει απο την ασθένεια β. Δίνεται ότι

$$P(A \setminus B) = 0.6/100,$$
$$P(B \setminus A) = 0.5/100,$$
$$P(A \cap B) = 0.2/100.$$

Βρίσκουμε ότι $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) = 0.8/100$, και όμοια, $P(B) = 0.7/100$. Τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα.

2.20. Έστω E_k το ενδεχόμενο ότι η k δοκιμή είναι επιτυχία, και $A_k (= E_k^c)$ το ενδεχόμενο ότι η k δοκιμή είναι αποτυχία.
(β) Για κάθε $n \geq 1$ φυσικό, έχουμε

P(όλες οι δοκιμές δίνουν αποτυχίες) $\leq P$(οι πρώτες n δοκιμές δίνουν μόνο αποτυχίες) $= (1-p)^n$.

Η τελευταία ισότητα προκύπτει απο το (α). Όμως $(1-p)^n \to 0$ για $n \to \infty$ επειδή $1-p \in (0,1)$.
(γ) Ζητάμε την πιθανότητα

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k-1} \cap E_k) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_{k-1})P(E_k) = (1-p)^{k-1}p$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}, E_k$.
(δ) Το να χρειαστούν τουλάχιστον k δοκιμές ισοδυναμεί με το οι πρώτες $k-1$ δοκιμές να είναι αποτυχίες. Έτσι η πιθανότητα που ζητάμε είναι

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_{k-1}) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_{k-1}) = (1-p)^{k-1}.$$

2.21. Έστω $A_i := \{$κερδίζει το παιχνίδι ο $a_i\}$ για $i = 1, 2, 3$, και $B := \{$η πρώτη ρίψη είναι κορώνα$\}$.

$$p_2 := P(A_2) = P(A_2 \cap B) + P(A_2 \cap B^c) = 0 + P(A_2 \,|\, B^c)P(B^c) = \frac{1}{2}\, p_1.$$

Αυτό γιατί δεδομένου ότι η πρώτη ρίψη ήταν γράμματα, το παιχνίδι είναι σαν να ξαναρχίζει, με την θέση του a_1 να την παίρνει ο a_2. Όμοια $p_3 = p_2/2$. Από το (β) της Άσκησης 16, κάποια στιγμή θα έρθει κορώνα (άρα σίγουρα κάποιος θα κερδίσει), οπότε $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Βρίσκουμε έτσι το p_1.

Το p_1 υπολογίζεται και άμεσα ως εξής. Ο a_1 κερδίζει μόνο αν φέρει στην αρχή κορώνα ή αν φέρει γράμματα, οι επόμενοι δύο γράμματα (ώστε να έρχεται πάλι η σειρά του), και να κερδίσει στο νέο παιχνίδι που θα ξεκινήσει τότε. Δηλαδή,

$$p_1 = P(A_1) = P(A_1 \cap B) + P(A_1 \cap B^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P(A_1 \,|\, B^c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}p_1.$$

2.22. (α) Χρησιμοποιούμε την Άσκηση 17(α). Για μία δεδομένη ερώτηση απο τις n θέτουμε

$$\Xi := \{\text{ο διαγωνιζόμενος ξέρει την ερώτηση}\}$$
$$\Sigma := \{\text{ο διαγωνιζόμενος απαντάει σωστά την ερώτηση}\}.$$

$$P(\Sigma) = P(\Sigma \,|\, \Xi)P(\Xi) + P(\Sigma \,|\, \Xi^c)P(\Xi^c) = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{j} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{j}\right) =: a.$$

Από την Άσκηση 20(α) προκύπτει ότι

$$P(\text{ο διαγωνιζόμενος απαντάει σωστά σε } k \text{ ερωτήσεις}) = \binom{n}{k} a^k (1-a)^{n-k}.$$

(β) Έστω

$$A := \{\text{ο διαγωνιζόμενος απάντησε σωστά σε } k \text{ ερωτήσεις}\},$$
$$B := \{\text{ο διαγωνιζόμενος ξέρει } s \text{ ερωτήσεις}\},$$

Έχουμε

$$P(B \,|\, A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \,|\, B)P(B)}{P(A)}. \tag{2}$$

Ο παρονομαστής είναι γνωστός από το (α). Επίσης, απο την Άσκηση 17(α),

$$P(B) = \binom{n}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{1}{2}\right)^{n-s} = \binom{n}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

γιατί έχουμε n δοκιμές ενός πειράματος με πιθανότητα επιτυχίας $1/2$, ενώ

$$P(A \,|\, B) = \binom{n-s}{k-s}\left(\frac{1}{j}\right)^{k-s}\left(1-\frac{1}{j}\right)^{n-k}.$$

Αυτό, γιατί ξέροντας ότι γνωρίζει s ερωτήσεις, μένουν $n-s$ από τις οποίες επιλέγουμε τις επιπλέον $k-s$ που απαντάει σωστά στην τύχη. Αφού επιλέξουμε τις $k-s$ που απαντάει σωστά στην τύχη, πολλαπλασιάζουμε με την πιθανότητα σε αυτές να απαντήσει σωστά και στις υπόλοιπες $n-s-(k-s) = n-k$ να απαντήσει λάθος.
Αντικαθιστώντας στην (2) , βρίσκουμε

$$P(B \,|\, A) = \frac{\binom{n-s}{k-s}\left(\frac{1}{j}\right)^{k-s}\left(1-\frac{1}{j}\right)^{n-k}\binom{n}{s}\left(\frac{1}{2}\right)^n.}{\binom{n}{k}\left(\frac{j+1}{2j}\right)^k\left(\frac{j-1}{2j}\right)^{n-k}} = ... = \binom{k}{s}\left(\frac{j}{j+1}\right)^s\left(\frac{1}{j+1}\right)^{k-s}.$$

2.23. Ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$. Γιατί αν καταγράψουμε τους αριθμούς των σφαιριδίων με την σειρά με την οποία βγαίνουν από την κάλπη, παίρνουμε μία μετάθεση των $\{1, 2, \dots, n\}$. Για λόγους συμμετρίας, όλοι οι $n!$ δυνατοί τρόποι εξαγωγής είναι ισοπίθανοι.

(α) Οι ευνοϊκές εξαγωγές έχουν πλήθος $\binom{n}{j}(j-1)!(n-j)!$. Γιατί φτιάχνουμε μία μετάθεση ως εξής. Επιλέγουμε πρώτα ποιά j στοιχεία θα καταλάβουν τις πρώτες j θέσεις ($\binom{n}{j}$ τρόποι για αυτό). Έπειτα, για την j θέση πάει το μεγαλύτερο από αυτά (μία επιλογή), βάζουμε τα υπόλοιπα $j-1$ σε σειρά ($(j-1)!$ τρόποι για αυτό), και όμοια βάζουμε σε σειρά τα $n-j$ στοιχεία που έχουν μείνει για να καταλάβουν τις θέσεις $j+1, j+2, \dots, n$ ($(n-j)!$ τρόποι για αυτό). Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{n}{j}(j-1)!(n-j)!}{n!} = \frac{\frac{n!}{j!(n-j)!}(j-1)!(n-j)!}{n!} = \frac{1}{j}$$

(β) Πρέπει να δείξουμε ότι $P(A_j \cap A_j) = 1/(ij)$ για $1 \le i \ne j \le n$.

Απαντήσεις §3

3.1. $F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^X \le y) = 0$ προφανώς αν $y \le 0$, ενώ για $y > 0$, $P(e^X \le y) = P(X \le \log y) = F_X(\log y)$. Άρα

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } y < 1, \\ 1 - e^{-(\log y)^2} & \text{αν } y \ge 1. \end{cases}$$

3.2. (α) Πρέπει

$$1 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} f(x) = c\left(\sum_{k=-1}^{-\infty} 2^{-|k|} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right) = c\left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\right) = c\,3$$

Άρα $c = 1/3$.

(β) Έστω X η τυχαία μεταβλητή που αντιστοιχεί στην f.

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{y \le x} f(y) = \sum_{k=-\infty}^{[x]} f(k) = ... = \begin{cases} \frac{1}{3}\frac{1}{2^{-[x]-1}} & \text{αν } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{2^{[x]}} & \text{αν } x \ge 0. \end{cases}$$

3.3. Στο (α) έχουμε $E(X^+) = E(X^-) = \infty$, δεν ορίζεται η μέση τιμή. Στο (β) έχουμε $E(X^+) < \infty, E(X^-) = \infty$, άρα $EX = E(X^+) - E(X^-) = -\infty$.

3.4. (α) $P(X = r) = P(X \le r) - P(X \le r - 1)$. Προφανώς $X \ge k$ πάντοτε, και για $k \le r \le n$ έχουμε $P(X \le r) = (r)_k/(n)_k$.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), έχουμε

$$EX = \sum_{r=k}^{n} rP(X = r) = \sum_{r=k}^{n} r\{P(X \le r) - P(X \le r - 1)\} = ... = n - \sum_{r=k}^{n-1} \frac{(r)_k}{(n)_k}.$$

Για το τελευταίο άθροισμα υπάρχει απλούστερη έκφραση. Χρησιμοποιώντας την σχέση $(r+1)_{k+1} - (r)_{k+1} = (r)_k(k + 1)$ που ισχύει για κάθε $r, k \ge 1$ (και είναι μη τετριμένη για $r \ge k$) παίρνουμε

$$(r)_k = \frac{(r + 1)_{k+1} - (r)_{k+1}}{k + 1}.$$

Άρα με τηλεσκοπικότητα το άθροισμα βγαίνει $(n - k)/(k + 1)$, και η μέση τιμή

$$EX = \frac{(n + 1)k}{k + 1}.$$

3.5. (α) $f(t) := P(X = t) = (2/3)^{t-1}(1/3)$ αν $t \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ και $f(t) = 0$ αν $t \notin \mathbb{N}$.

(β) $P(X \in 2\mathbb{N} - 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2k + 1) = ... = 3/5$.

(γ) $\alpha = 3\beta/2$.

Το (β) βγαίνει επίσης και με τρικ όπως η Άσκηση 21 απο την Παράγραφο 2 αυτού του φυλλαδίου. Δηλαδή με χρήση δεσμευμένης πιθανότητας.

3.6. Έστω Z η πρώτη δοκιμή κατα την οποία εμφανίζεται η ένδειξη Κ. Τότε

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n P(Z = n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \infty.$$

Το παράδοξο είναι ότι ενώ η μέση τιμή είναι άπειρη και επομένως οποιαδήποτε πεπερασμένη τιμή είναι μεγάλη έκπτωση, κανείς δεν προτίθεται να δώσει μεγάλο ποσό για να παίξει. 50 Ευρώ θεωρείται ακριβή τιμή για το παιχνίδι.

Το παράδοξο διατυπώθηκε το 1713 από τον Nicolas Bernoulli. Διαβάστε λεπτομέρειες στο άρθρο της Wikipedia για το θέμα. http://en.wikipedia.org/wiki/St._ Petersburg_ paradox

3.7. Η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή, και η X^a διακριτή τυχαία μεταβλητή μή αρνητική. Άρα η μέση τιμή της X^a υπάρχει (πεπερασμένη ή άπειρη) και δίνεται από τον τύπο

$$E(X^a) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^a f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^a \frac{1}{k(k + 1)}.$$

Η τελευταίας σειρά είναι ουσιαστικά η $\sum_{k=1}^{\infty} k^{a-2}$ η οποία συγκλίνει ακριβώς για $a - 2 < -1$, δηλαδή $a < 1$. Για την αυστηρή απόδειξη, χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης για τις δύο σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} k^a/(k(k + 1)), \sum_{k=1}^{\infty} k^{a-2}$

Απαντήσεις §4

4.1. Η κατανομή είναι διωνυμική με παραμέτρους $n = 80, p = 1/10$. Και άρα με μέση τιμή $np = 8$.

4.2. Έχουμε 90 ανεξάρτητες δοκιμές ενός πειράματος που έχει πιθανότητα επιτυχίας

$$\begin{aligned} p &= P(\text{η ένδειξη του B ξεπερνάει αυτήν του A κατα δύο μονάδες τουλάχιστον}) \\ &= \frac{4+3+2+1}{36} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος αριθμός ρίψεων ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 90$ και $p = 5/18$.

4.3. Έστω p η πιθανότητα ο σκοπευτής να πετύχει το στόχο σε μια δεδομένη βολή. Δίνεται ότι

$$\binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = 3\binom{10}{3} p^3 (1-p)^7,$$

απ΄ όπου βρίσκουμε μετά απο απλοποιήσεις ότι $p = 12/19$.

(α) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1-p)^5 - 5p(1-p)^4$.

(β) $P(X = 0) + P(X = 5) = (1-p)^5 + p^5$

(γ)

$$P(X \leq 4 \,|\, X \geq 2) = \frac{P(2 \leq X \leq 4)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)}{P(X \geq 2)}.$$

Ο παρονομαστής έχει υπολογιστεί στο (α). Ο αριθμητής ισούται με

$$\binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 + \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p).$$

4.4. Για την πρώτη μέση τιμή, υπολογίζουμε

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (pt + q)^n$$

Για την δεύτερη μέση τιμή, ένας τρόπος είναι ο εξής. Θέτουμε $\theta = p/(1-p)$. Τότε

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X+1}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\theta^{k+1}}{k+1} \\ &= \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \int_0^\theta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k \, dz = \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \int_0^\theta (1+z)^n dz \\ &= \frac{(1-p)^{n+1}}{p} \frac{(1+\theta)^{n+1} - 1}{n+1} = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $1 + \theta = 1/(1-p)$.

4.5. Αν η παράμετρος της Poisson είναι λ τότε απο τα δεδομένα $e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 12 e^{-\lambda} \lambda^2 / 2$. Και επειδή $\lambda > 0$, προκύπτει ότι $\lambda = 1/2$. Έπειτα $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1/2}$.

4.6. Ισχύει $X \sim \text{Bin}(100, p)$. Η Poisson που την προσεγγίζει είναι η $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ με $\lambda = 100p = 0.1$. Έπειτα

$$\begin{aligned}
P(X \le 1) &= P(X=0) + P(X=1) = (1-p)^{100} + 100p(1-p)^{99} \approx 0.995362,\\
P(X=3) &= \binom{100}{3} p^3 (1-p)^{97} \approx 1467 \times 10^{-7},\\
P(X=10) &= \binom{100}{10} p^{10} (1-p)^{90} \approx 1581 \times 10^{-20}.
\end{aligned}$$

Οι αντίστοιχες προσεγγίσεις είναι

$$\begin{aligned}
P(Y \le 1) &= P(Y=0) + P(Y=1) = e^{-0.1} + e^{-0.1}0.1 \approx 0.995321,\\
P(Y=3) &= e^{-0.1}(0.1)^3/3! \approx 1508 \times 10^{-7},\\
P(Y=10) &= e^{-0.1}(0.1)^{10}/10! \approx 2493 \times 10^{-20}.
\end{aligned}$$

4.7. (α) Επειδή η h παίρνει θετικές τιμές, η μέση τιμή $E(Xh(X))$ ορίζεται, και έχουμε

$$\begin{aligned}
E(Xh(X)) &= \sum_{k=0}^{\infty} kh(k)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{r=0}^{\infty} h(r+1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^{r+1}}{r!}\\
&= \lambda \sum_{r=0}^{\infty} h(r+1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} = \lambda E(h(X+1)).
\end{aligned}$$

(β) Έστω $a_k = P(X=k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για $k \in \mathbb{N}, k \ge 1$ εφαρμόζοντας την (1) για την συνάρτηση h με $h(k) = 1$ και $h(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$, παίρνουμε

$$kP(X=k) = \lambda P(X=k-1).$$

Δηλαδή $a_k = a_{k-1}\lambda/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Άρα $a_k = a_0 \frac{\lambda^k}{k!}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Και η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ δίνει $a_0 = e^{-\lambda}$. Δηλαδή

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

4.8. Επειδή κάθε φορά η σύνθεση της κάλπης είναι ίδια, σε κάθε εξαγωγή, η πιθανότητα το σφαιρίδιο να είναι μαύρο είναι $p = 20/(60+20) = 1/4$. Ονομάζουμε X τον αριθμό των δοκιμών ως την πρώτη εμφάνιση μαύρου σφαιριδίου. Η X είναι γεωμετρική με παράμετρο $p = 1/4$.

(α) $P(X=7) = (1-p)^6 p$.

(β) $P(X \ge 10) = P(\text{οι πρώτες 9 δοκιμές είναι αποτυχίες}) = (1-p)^9$.

(γ) $E(X-1) = (1/p) - 1 = 3$.

4.9. Έστω $X_1 :=$ αριθμός δοκιμών ως την εμφάνιση ενός από τα 3, 4, και $X_2 :=$ αριθμός των επιπλέων δοκιμών ως την εμφάνιση του άλλου από τα 3, 4. Τότε

$$\begin{aligned}
X_1 &\sim \text{Γεωμετρική}(1/3),\\
X_2 &\sim \text{Γεωμετρική}(1/6).
\end{aligned}$$

Αυτό γιατί η X_1 μετράει δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, με επιτυχία να σημαίνει εμφάνιση του 3 ή του 4. Η πιθανότητα μιας τέτοιας επιτυχίας είναι 2/6=1/3. Έπειτα, αν π.χ. εμφανίζεται πρώτο το 4, η X_2 μετράει δοκιμές ως την πρώτη επιτυχία, με επιτυχία τώρα να σημαίνει την εμφάνιση του 3. Η πιθανότητα αυτής της επιτυχίας είναι 1/6.
Επειδή $X = X_1 + X_2$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = (1/3)^{-1} + (1/6)^{-1} = 3 + 6 = 9.$$

4.10. Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων δοκιμών ώσπου να δούμε και τα n διαφορετικά κουπόνια, και για $i = 1, 2, \ldots, n$, έστω X_i ο αριθμός των δοκιμών που απαιτείται από την στιγμή που έχουμε δεί $i - 1$ διαφορετικά κουπόνια μέχρι την στιγμή που θα δούμε ένα νέο διαφορετικό απο τα προηγούμενα. Η X_i είναι γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $p_i = (n-(i-1))/n$, και επομένως με μέση τιμή $1/p_i = n/(n-i+1)$. Επειδή $X = X_1 + \cdots + X_n$, η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \approx n \log n$$

για μεγάλο n. Περισσότερα για την τελευταία προσέγγιση, στην Πρόταση 21.21, Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙ, Νεγρεπόντης-Γιωτόπουλος-Γιαννακούλιας.

4.11. (α) 10-1=9. (β) 10/3-1=7/3. (γ) $8 \times 10 - 1$. Αρνητική διωνυμική. (δ) 4×2. Αρνητική διωνυμική.
(ε) Εδω έχουμε το πρόβλημα του συλλέκτη κουπονιών χωρίς να ζητάμε να δούμε όλα τα διαφορετικά κουπόνια, απλώς τρία συγκεκριμένα. Με το ίδιο σκεπτικό βρίσκουμε ότι η μέση τιμή είναι

$$\frac{10}{3} + \frac{10}{2} + 10 = 18 + \frac{1}{3}.$$

Απαντήσεις §5

5.1. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που δίνει τον όγκο των πωλήσεων αυτή τη συγκεκριμένη εβδομάδα και a η χωρητικότητα της δεξαμενής. Θέλουμε

$$P(X > a) = 10^{-2}.$$

Προφανώς $a \in (0, 1)$, αλλιώς το αριστερό μέλος της ισότητας θα ισούται με 0 ή 1 (αφού η X παίρνει τιμές στο $(0, 1)$). Έτσι,

$$10^{-2} = \int_a^{\infty} f(x)\, dx = 5 \int_a^1 (1-x)^4\, dx = -(1-x)^5|_a^1 = (1-a)^5.$$

Άρα $a = 1 - 10^{-2/5}$.

5.2. Σε αυτή την άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} x^a\, dx$ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $a < -1$ (Απλή άσκηση. Υπάρχει στο φυλλάδιο της η-τάξης που μιλάει για γενικευμένα ολοκληρώματα).

(α) Προφανώς πρέπει να ισχύει $c > 0$. Θα δείξουμε ότι οι επιτρεπτές τιμές είναι $r > 1$. Αυτό γιατί πρέπει η f_X να έχει ολοκλήρωμα 1. Υπολογίζουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\, dt = c \int_1^{\infty} t^{-r}\, dt.$$

Με βάση την παρατήρηση στην αρχή της λύσης, αυτό το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο $-r < -1$. Δηλαδή $r > 1$. Και τότε επιλέγοντας κατάλληλα την τιμή της σταθεράς c κατορθώνουμε το ολοκήρωμα να ισούται με 1. Όταν $r \le 1$, το ολοκλήρωμα ισούται με ∞ για οποιαδήποτε επιλογή της σταθεράς $c > 0$. Άρα κάθε τιμή $r \le 1$ είναι μη επιτρεπτή.
(β) Για $r > 1$, υπολογίζουμε

$$c \int_1^{\infty} t^{-r}\, dt = c \frac{t^{-r+1}}{(-r+1)} \bigg|_1^{\infty} = c \left(0 - \frac{1}{-r+1} \right) = \frac{c}{r-1}.$$

Άρα $c = r - 1$.

(γ) $EX = \int_1^\infty x(r-1)x^{-r}\,dx = (1-r)\int_1^\infty x^{1-r}\,dx$. Με βάση την παρατήρηση στην αρχή της λύσης, έχουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $1-r < -1$. Δηλαδή αν $r > 2$.

(δ) Έχουμε $E(X^a) = (1-r)\int_1^\infty x^{a-r}\,dx$. Όμοια όπως στο (γ), αυτό το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $a - r < -1$, δηλαδή αν $a < r - 1$.

5.3. $a = 2, b = 8$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(|X-5| > 2) = P(X \in (2,3)) + P(X \in (7,8)) = \frac{1}{6}(1+1) = \frac{1}{3}.$$

5.4. Έχουμε πείραμα σε δύο βήματα. Ως συνήθως, δεσμεύουμε ως προς το τι έγινε στο πρώτο βήμα. Έστω N η τυχαία μεταβλητή που καταγράφει το αποτέλεσμα της ρίψης του ζαριού. Προφανώς $F_X(t) = 0$ για $t < 0$ και $F_X(t) = 1$ για $t > 6$, ενώ για $t \in [0,6]$ έχουμε

$$P(X \le t) = \sum_{i=1}^{6} P(X \le t \,|\, N = i) P(N = i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \frac{\min\{i,t\}}{i} = \frac{1}{6}\left([t] + t \sum_{t<i\le 6}^{6} \frac{1}{i}\right).$$

Η τρίτη έκφραση έκφραση για την συνάρτηση κατανομής της X δείχνει ότι αυτή είναι συνεχής. Η τελευταία δείχνει ότι η F_X είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R} \setminus \{0,1,\dots,6\}$. Άρα μια πυκνότητα για την X είναι η

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}\sum_{t<i\le 6}^{6} \frac{1}{i} & \text{αν } t \in (0,6), \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Έπειτα, $E(X) = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt = \dots = 7/4$. Ο υπολογισμός αυτός είναι πιο άμεσος με χρήση της δεσμευμένης μέσης τιμής, την οποία θα καλύψουμε αργότερα στο μάθημα.

5.5. Η τυχαία μεταβλητή $Z := (X - \mu)/\sigma$ ακολουθεί την κατανομή $N(0,1)$. Απο τα δεδομένα

$$0.2 = P\left(Z > \frac{1.85-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1.85-\mu}{\sigma}\right) \Longrightarrow \Phi\left(\frac{1.85-\mu}{\sigma}\right) = 0.8 = \Phi(0.85).$$

Και επειδή η Φ είναι 1-1, παίρνουμε

$$\frac{1.85-\mu}{\sigma} = 0.85 \tag{3}$$

Όμοια, βρίσκουμε ότι

$$\Phi\left(\frac{1.70-\mu}{\sigma}\right) = 0.1 = 1 - 0.9 = 1 - \Phi(1.29) = \Phi(-1.29).$$

Ο τελευταίος υπολογισμός υπαγορεύεται απο την γραφική παράσταση της πυκνότητας της $N(0,1)$. Άρα

$$\frac{1.70-\mu}{\sigma} = -1.29 \tag{4}$$

Βρίσκουμε από τις (3), (4) ότι $\mu \approx 1.79, \sigma \approx 0.07$

5.6. Θα χρησιμοποιήσουμε το ότι η τυχαία μεταβλητή $Z := (X-\mu)/\sigma = (X-330)/10$ ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή για να εκφράσουμε όλες τις ζητούμενες πιθανότητες συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής, Φ, της $N(0,1)$.

(α) $P(X > 340) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.158$

(β) $P(X < 310) = P(Z < -2) = \Phi(-2) \approx 0.023$

(γ) $P(310 < X < 340) = P(-2 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) \approx 0.818$

(δ) Ο αριθμός N των κουτιών απο τα 10 που έχουν βάρος μικρότερο από 340gr ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$, και $p := P(X < 340) = \Phi(1) \approx 0.84$. Άρα

$$P(N \le 8) = 1 - P(N > 8) = 1 - P(N = 9) - P(N = 10) = 1 - 10p^9\,(1 - p) - p^{10}.$$

(ε) $E(N) = np \approx 8.41$

5.7. (α) Αν ο a είναι διάμεσος, τότε επειδή η κατανομή είναι συνεχής, έχουμε $P(X = a) = 0, P(X \ge a) = P(X > a)$. Άρα

$$1 = P(X \le a) + P(X > a) = P(X \le a) + P(X \ge a) = 2P(X \le a) = 2F(a).$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του διάμεσου. Επειδή η F είναι συνεχής (αντιστοιχεί σε συνεχή κατανομή, δεν έχει άλματα) και

$$F(-\infty) = 0 < 1/2 < 1 = F(\infty),$$

από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ με $F(a) = 1/2$. Για αυτό το a έχουμε

$$P(X \ge a) = 1 - P(X < a) = 1 - P(X \le a) = 1/2 = P(X \le a).$$

Άρα τουλάχιστον ένας διάμεσος υπάρχει.

(β) Απο τα επιχειρήματα στο (α) προκύπτει ότι ο $a \in \mathbb{R}$ είναι ένας διάμεσος αν και μόνο αν $F(a) = 1/2$. Στην περίπτωση της κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$, η F είναι γνησίως αύξουσα (έχει πυκνότητα θετική σε όλο το $\mathbb{R}$), οπότε υπάρχει μόνο ένας διάμεσος. Θα δείξουμε ότι ισούται με την μέση τιμή μ. Έχουμε

$$F(\mu) = P(X \le \mu) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \le 0\right) = \frac{1}{2}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η $(X - \mu)/\sigma$ έχει κατανομή $N(0, 1)$, και για αυτήν ξέρουμε ότι έχει πυκνότητα άρτια συνάρτηση.

5.8. Εστω $a < b$ πραγματικοί ώστε $f = f' = 0$ στο $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$. Τότε

$$\begin{aligned} E(f'(X)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f'(x) e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\, e^{-x^2/2}\Big|_{x=a}^{x=b} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x)(e^{-x^2/2})'\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f(x) x e^{-x^2/2}\, dx = E(Xf(X)). \end{aligned}$$

Στην παραγοντική ολοκλήρωση, χρησιμοποιήσαμε το ότι $f(a) = f(b) = 0$.

5.9. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} E|Z|^p &= \int_{\mathbb{R}} |x|^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^p\, e^{-x^2/2}\, dx \overset{x=\sqrt{2y}}{=} \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^{(p-1)/2}\, e^{-y}\, dy \\ &= \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Ειδικές περίπτωσεις:

(α) $p = 2k$, με k μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιούμε την σχέση $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ που ισχύει για κάθε $x > 0$, και την $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$$\begin{aligned} E(Z^{2k}) &= \frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}} \left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= (2k - 1)(2k - 3) \cdots 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Αυτόν τον αριθμό τον έχουμε συναντήσει στο Φυλλάδιο 1, Άσκηση 25 (α). Είναι το πλήθος των διαφορετικών ζευγαρωμάτων $2k$ διαφορετικών αντικειμένων.

(β) $p = 2k+1$, με k μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιούμε πάλι την σχέση $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ και το ότι $\Gamma(1) = 1$.

$$E(|Z|^{2k+1}) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(k+1) = \frac{2^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,k!$$

Τώρα, αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, έχουμε ότι $Z := (X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$, οπότε

$$E|X-\mu| = \sigma E|Z| = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Χρησιμοποιήσαμε την (5) για $p = 1$.

5.10. Το μέγιστο a που ικανοποιεί την $P(X \geq a) \geq 0.95$, δηλαδή την $e^{-a\theta} \geq 0.95$, είναι το $a = -\frac{\log 0.95}{\theta}$. Από τα δεδομένα, αυτό είναι το 2. Επομένως

$$\theta = -\frac{\log 0.95}{2} \approx 0.02564.$$

Ο μέσος όρος της και η διασπορά της X είναι αντίστοιχα $1/\theta \approx 39, 1/\theta^2 \approx 1520$.

5.11. Αν ο a είναι ένας διάμεσος, τότε

$$P(X \geq a) = P(X \leq a) \Longrightarrow e^{-\lambda a} = 1 - e^{-\lambda a} \Longrightarrow a = \frac{\log 2}{\lambda}.$$

Άρα υπάρχει μόνο ένας διάμεσος, το οποίο ήταν αναμενόμενο γιατί η συνάρτηση κατανομής F της εκθετικής είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\infty)$ με $F(0) = 0, F(\infty) = 1$.

5.12. Για $k = 0$ ισχύει προφανώς. Αν ισχύει για έναν $k \geq 0$ φυσικό, τότε

$$\begin{aligned} E(X^{k+1}) &= \int_0^\infty x^{k+1}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty x^{k+1}(-e^{-\lambda x})'\,dx = (k+1)\int_0^\infty x^k e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \frac{k+1}{\lambda}\int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{k+1}{\lambda}E(X^k) = \frac{(k+1)!}{\lambda^{k+1}}. \end{aligned}$$

Στην παραγοντική ολοκλήρωση, χρησιμοποιήσαμε το ότι $\lim_{x\to\infty} x^{k+1}e^{-\lambda x} = 0$ επειδή $\lambda > 0$.

5.13. Υπολογίζουμε την συνάρτηση κατανομής της Y. Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_Y(t) := P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t),$$

το οποίο είναι 0 για $t < 0$. Για $t \geq 0$,

$$P(X^2 \leq t) = P(|X| \leq \sqrt{t}) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) - F_X(-\sqrt{t}).$$

Επειδή η πυκνότητα της X είναι ασυνεχής μόνο στα $-1, 1$, έχουμε ότι η F_Y και διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, με $F_Y'(t) = 0$ για $t < 0$, ενώ για $t > 0, t \neq 1$,

$$F_Y'(t) = \left(f_X(\sqrt{t}) + f_X(-\sqrt{t})\right)\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}}f_X(\sqrt{t}).$$

Η τελευταία ποσότητα ισούται με 0 για $t \in (0,1)$, και με $t^{-3/2}/2$ για $t > 1$. Έπεται ότι μιά πυκνότητα για την Y είναι η $f_Y(t) = (1/2)t^{-3/2}\mathbf{1}_{t>1}$.

5.14. Όμοια όπως στην προηγούμενη άσκηση, $F_Y(t) = 0$ για $t < 0$ και $F_Y(t) = 1$ για $t > 1$, ενώ για $t \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = P(Y \leq t, X \leq 1) + P(Y \leq t, X > 1) = P(X \leq t) + P(1/X \leq t) \\ &= F_X(t) + 1 - F_X(1/t). \end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας. Για $t \in (0,1)$ η τελευταία σχέση για την F_Y δίνει με παραγώγιση
$$F'_Y(t) = f_X(t) + t^{-2} f_X(1/t) = e^{-t} + t^{-2} e^{-1/t}.$$
Άρα μια πυκνότητα για την Y είναι η
$$f_Y(t) = \begin{cases} e^{-t} + t^{-2} e^{-1/t} & \text{αν } t \in (0,1), \\ 0 & \text{αν } t \in \mathbb{R} \setminus (0,1). \end{cases}$$

5.15. Επειδή $P(X \geq 0) = 1$, έχουμε ότι ο Y είναι με πιθανότητα 1 ένας μη αρνητικός ακέραιος. Για $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$,
$$\begin{aligned} P([X] = k) &= P(k \leq X < k+1) = \lambda \int_k^{k+1} e^{-\lambda x}\, dx = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) \\ &= (1-p)^k p, \end{aligned}$$
με $p = 1 - e^{-\lambda}$.
Σημείωση: Εύκολα βλέπουμε ότι η $Y+1$ ακολουθεί την Γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p.

5.17. (β) Για $t \in \mathbb{R}$,
$$F_Y(t) = P\left(\frac{U}{1-U} \leq e^t\right) = P\left(U \leq \frac{e^t}{1+e^t}\right) = \frac{1}{1+e^{-t}}.$$
Πυκνότητα $f_Y(t) = F'_Y(t) = e^{-t}(1+e^{-t})^{-2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

5.18. Έστω $Y = X^2$. Η συνάρτηση κατανομής της Y ισούται με 0 στο $(-\infty, 0)$ γιατί $P(Y < 0) = P(\emptyset) = 0$. Όμοια, $F_Y(0) = P(Y \leq 0) = P(X = 0) = 0$ γιατί η X έχει συνεχή κατανομή. Για $x > 0$,
$$F_Y(x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}).$$
Αν f είναι η πυκνότητα της $N(0,1)$, παραγωγίζουμε την τελευταία ισότητα, και παίρνουμε
$$F'_Y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big) = \frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-1/2} e^{-x/2}.$$
Άρα η Y έχει πυκνότητα
$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x^{-1/2} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0} = \frac{(1/2)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(1/2)}\, x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x>0},$$
η οποία είναι η πυκνότητα της $\Gamma(1/2, 1/2)$. Χρησιμοποιήσαμε το ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

5.19. Όμοια όπως στην Άσκηση 5.13, $F_Y(t) = 0$ για $t < 0$, ενώ για $t \geq 0$ έχουμε
$$F_Y(t) = P(X^{1/c} \leq t) = P(X \leq t^c) = F_X(t^c).$$
Για $t > 0$ η τελευταία σχέση για την F_Y δίνει με παραγώγιση
$$F'_Y(t) = f_X(t^c)\, c\, t^{c-1}.$$
Έπεται ότι μια πυκνότητα για την Y είναι η
$$f_Y(t) = \theta c e^{-\theta t^c} t^{c-1} \mathbf{1}_{t>0}.$$

5.20. Έστω f_X η πυκνότητα της X. Εύκολα βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι $f_Y(y) = \frac{1}{r} f_X(\frac{y}{r})$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την f_X (δηλαδή $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$), βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι αυτή της $\Gamma(a, \lambda/r)$.

5.21. Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F_X(t) := P(X \le t) = P(F^{-1}(U) \le t) = P(U \le F(t)) = F(t).$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$ και ότι ο $F(t)$ είναι ένας αριθμός στο $(0,1)$. Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η F είναι γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $(0,1)$, οπότε για $t \in \mathbb{R}$ και $U \in (0,1)$ έχουμε

$$F^{-1}(U) \le t \Longleftrightarrow U \le F(t).$$

Απαντήσεις §6

6.1. Για $x, y \in \{1, 2, \cdots, 50\}$ με $y - x \ge 5$,

$$f(x,y) = \frac{6 \times 5 \times (y-x-1)_4}{(50)_6}$$

Διαφορετικά, $f(x,y) = 0$. Θεωρουμε ότι καταγράφουμε τα σφαιρίδια με την σειρά με την οποία εξάγονται, έχουμε δηλαδή διάταξη. Στον αριθμητή, το 6 είναι το πλήθος των επιλογών για την θέση στην οποία εμφανίζεται η ένδειξη y, το 5 είναι το πλήθος των επιλογών για την θέση στην οποία εμφανίζεται η ένδειξη x. Μένουν 4 θέσεις στις οποίες θα βάλουμε μια διάταξη 4 σφαριδίων με αριθμούς γνησίως ανάμεσα στα x, y.

6.2. (α) $c = 2$.

(β) $f_X(x) = 3x^2 \mathbf{1}_{x \in (0,1)}$, $f_Y(x) = 2y \mathbf{1}_{y \in (0,1)}$.

(γ) Έστω

$$\begin{aligned} A &:= \{(x,y) \in (0,1)^2 : x < 1/3\}, \\ B &:= \{(x,y) \in (0,1)^2 : y > 2x\}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(X < 1/3) = \iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{1/3} 6x^2 y\,dxdy = (1/3)^3 = 1/27,$$

και

$$P(Y > 2X) = \iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{y/2} 6x^2 y\,dxdy = \int_0^1 \frac{y^4}{4}\,dy = 1/20.$$

Για τον προσδιορισμό των ορίων της ολοκλήρωσης, βοηθάει πολύ να κάνουμε σχήμα. Για την πρώτη πιθανότητα μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την περιθώρια της X, αλλά προτιμάμε την πιο πάνω γενική μέθοδο.

6.3. Ένα σχήμα βοηθάει. Το σύνολο των (x,y) στο $(0,1) \times (0,1)$ για τα οποία ο ακέραιος που είναι εγγύτερα στο πηλίκο y/x είναι ένας από τους 0, 2, 4,... είναι ένωση ξένων μεταξύ τους τριγώνων. Η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με $(5-\pi)/4$.

6.4. Έστω η ευθεία $\Delta := \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$, δηλαδή η διχοτόμος του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου (λέγεται και διαγώνιος του $\mathbb{R}^2$). Τότε

$$P(X = Y) = P((X,Y) \in \Delta) = \iint_\Delta f(x,y)\,dxdy = 0$$

γιατί είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε μια γραμμή (η οποία έχει εμβαδόν 0).

6.5. Έστω

$$A_0 := \{\text{κάποιες από τις } X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ είναι ίσες}\}.$$

Τότε από την προηγούμενη άσκηση,

$$P(A_0) \leq \sum_{1\leq i,j\leq 4, i\neq j} P(X_i = X_j) = 0.$$

Τώρα, για οποιαδήποτε μετάθεση (i_1, i_2, i_3, i_4) των $\{1, 2, 3, 4\}$ ισχύει

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}) = P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4) \tag{6}$$

γιατί η (τετραδιάστατη) τυχαία μεταβλητή $(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, X_{i_4})$ έχει την ίδια κατανομή με την (X_1, X_2, X_3, X_4). Έχουν και οι δυό πυκνότητα $\tilde{f}(x, y, z, w) = f(x)f(y)f(z)f(w)$. [Ένα ανάλογο και απλούστερο σενάριο. Ρίχνουμε ένα ζάρι 5 φορές και γράφουμε τα αποτελέσματα με την σειρά με την οποία εμφανίζονται. Η πιθανότητα να φέρουμε (6, 3, 6, 2, 5) είναι η ίδια με το να φέρουμε (3, 6, 6, 5, 2)]
Έστω S_4 το σύνολο των μεταθέσεων των $\{1, 2, 3, 4\}$. Επειδή

$$\Omega = A_0 \cup \bigcup_{(i_1,i_2,i_3,i_4)\in S_4} \{X_{i_1} < X_{i_2} < X_{i_3} < X_{i_4}\}$$

είναι ένωση ξένων ανά δύο συνόλων (διαμέριση του Ω), και $P(A_0) = 0$ (έλλειψη ισοπαλιών), έπεται λόγω της (6) ότι

$$1 = |S_4| \times P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4) = 4!P(X_1 < X_2 < X_3 < X_4),$$

δηλαδή το ζητούμενο.
Όταν έχουμε n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνεχή κατανομή, τότε

$$P(X_{i_1} < X_{i_2} < \cdots < X_{i_n}) = \frac{1}{n!}$$

για κάθε μετάθεση $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ των $\{1, 2, \cdots, n\}$.

6.6. (β) Υπολογίζουμε πρώτα τις πυκνότητες των X, Y. Βρίσκουμε

$$f_X(x) = \mathbf{1}_{(0,1)}(x),$$
$$f_Y(y) = -\log y\, \mathbf{1}_{(0,1)}(y),$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Άρα οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y), f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ έχουν νόημα ακριβώς για $x, y \in (0, 1)$ και ισούνται με

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = -\frac{1}{x\log y}\mathbf{1}_{(y,1)}(x),$$
$$f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) = \frac{1}{x}\,\mathbf{1}_{(0,x)}(y).$$

Παρατηρούμε ότι η $Y\,|\,X = x$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, x)$.

Απαντήσεις §7

7.1. (α) Δεν είναι ανεξάρτητες. Αυτό προκύπτει, π.χ., απο το ότι η πυκνότητα $f(x, y)$ της (X, Y) δεν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο $h(x)g(y)$ (η δικαιολόγηση είναι εύκολη). Ένα πιό διαισθητικό επιχείρημα είναι το εξής. Θα χρησιμοποιήσουμε το ότι $P(X < Y) = 1$. Επιλέγουμε κατάλληλα σύνολα A, B και δείχνουμε $P(X \in A, Y \in B) \neq P(X \in A)\,P(Y \in B)$. Πιό συγκεκριμένα

$$\frac{P(X < 2/3, Y < 1/3)}{P(X < 2/3)P(Y < 1/3)} = \frac{P(Y < 1/3)}{P(X < 2/3)\,P(Y < 1/3)} = \frac{1}{P(Y < 1/3)} \neq 1.$$

(β)

$$E(Ye^X) = \iint_{\mathbb{R}^2} ye^x f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^y ye^x 8xy\, dxdy = \ldots = 8\int_0^1 y^2(ye^y - e^y + 1)\, dy = \frac{200}{3} - 24e.$$

Ολοκληρώνουμε κατα παράγοντες αρκετές φορές.

(γ) Όμοια όπως στο (β), βρίσκουμε ότι για $r > 0$ ισχύει

$$E(X^r) = \frac{8}{(r+2)(r+4)},\ E(Y^r) = \frac{4}{r+4},\ E(XY) = \frac{4}{9}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - EXEY = \frac{4}{9} - \frac{8}{15}\frac{4}{5} = \frac{4}{225},\\
\mathrm{Var}(X) &= E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{11}{225},\\
\mathrm{Var}(Y) &= \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{2}{75},\\
\rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{4/225}{\frac{\sqrt{22}}{3\times 15}} = \frac{4}{5\sqrt{22}}.
\end{aligned}$$

7.2. Σε αυτή την άσκηση, βοηθάει πολύ να σχεδιάσει κανείς το χωρίο B που η πυκνότητα f είναι διαφορετική από το 0.

(α) Ολοκληρώνουμε την f στην τομή των χωρίων

$$\begin{aligned}
A &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y < 0\},\\
B &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \neq 0\} = (-1,0)\times(0,1) \cup (1,2)\times(-1,0).
\end{aligned}$$

Η τομή είναι το τρίγωνο με κορυφές $(-1,1), (-1,0), (0,0)$, και εκεί η f έχει ''ενιαίο τύπο'', ισούται με $-xy$. Άρα

$$P(X+Y<0) = P((X,Y)\in A) = \iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{0}\int_0^{-x} (-xy)\,dydx = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x^3\,dx = \frac{1}{8}.$$

(β) Υπολογίζουμε δύο διπλά ολοκληρώματα.

$$E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,dydx = \int_{-1}^{0}\int_0^1 xy(-xy)\,dydx + \int_1^2\int_{-1}^{0} xy(-xy)\,dydx = \ldots = -8/9.$$

(γ) Οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, και αυτό μπορεί να δειχθεί με πολλούς τρόπους.

1ος τρόπος. Υπολογίζει κανείς τις περιθώριες f_X, f_Y και δείχνει ότι δεν ισχύει $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ για όλα τα (x,y) στο $\mathbb{R}^2$.

2ος τρόπος. Εδώ εκμεταλευόμαστε την μορφή του χωρίου B. Έστω $C_1 = (1,2), C_2 = (0,1)$ τότε $P(X\in C_1, Y\in C_2) = 0$ ενώ $P(X\in C_1)P(Y\in C_2) > 0$. Άρα $P(X\in C_1, Y\in C_2) \neq P(X\in C_1)P(Y\in C_2)$.

7.3. Επειδή η Cov είναι διγραμμική, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(XZ^2, Y+Z) &= \mathrm{Cov}(XZ^2, Y) + \mathrm{Cov}(XZ^2, Z)\\
&= E(XYZ^2) - E(XZ^2)E(Y) + E(XZ^3) - E(XZ^2)E(Z)\\
&= E(Z^2)\big(E(XY) - E(X)E(Y)\big) + E(X)E(Z^3) - E(XZ^2)E(Z)\\
&= \mathrm{Cov}(X,Y) = 1.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία της Z από τις X, Y και το ότι $E(Z) = E(Z^3) = 0, E(Z^2) = \mathrm{Var}(Z) = 1$. Ο ισχυρισμός $E(Z^3) = 0$ προκύπτει από το ότι το

$$E(Z^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-x^2/2}\, dx$$

είναι ολοκλήρωμα μιας περιττής συνάρτησης σε χωρίο συμμετρικό γύρω από το 0.

7.4. Αν ήταν ανεξάρτητες, τότε έπρεπε $\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) = 2$ το οποίο είναι άτοπο. Επιπλέον

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \Longrightarrow \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \frac{1}{2}$$

Έπειτα έχουμε

$$0 = \mathrm{Cov}(X_1, X_2 - cX_1) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) - c\,\mathrm{Cov}(X_1, X_1) = \frac{1}{2} - c\,\mathrm{Var}(X_1) = \frac{1}{2} - c.$$

Άρα $c = 1/2$.

7.5. Υπολογίζουμε ότι

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} 2 = 2(3^{n+1} - 1)/2 = 3^n - 1,$$

και λόγω ανεξαρτησίας,

$$\mathrm{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(3^{i-1} X_i) = \sum_{i=1}^{n} (3^{i-1})^2 \mathrm{Var}(X_i) = 8 \sum_{i=1}^{n} 9^{i-1} = 9^n - 1.$$

Άρα

$$1 = \mathrm{Var}(\alpha_n + \beta_n Y) = \beta_n^2 \mathrm{Var}(Y) = \beta_n^2 (9^n - 1) \Longrightarrow \beta_n = (9^n - 1)^{-1/2}$$

και

$$0 = E(\alpha_n + \beta_n Y) = \alpha_n + \beta_n (3^n - 1) \Longrightarrow \alpha_n = -(3^n - 1)/\sqrt{9^n - 1}$$

7.6. (α) Οι τιμές που μπορεί να πάρει η Y είναι τα στοιχεία του συνόλου $A := \{1, 2, \ldots, 20\}$. Η συνάρτηση πιθανότητας της είναι $f_Y(k) = 0$ αν $k \in \mathbb{R} \setminus A$ ενώ για $k \in A$ έχουμε $f_Y(k) = P(Y = k) = P(X = 21 - k) = 1/20$ αφού ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο A. Έπεται λοιπόν ότι και η Y ακολουθεί την ίδια κατανομή με την X.

(β) Περιμένουμε η συνδιακύμανση να είναι αρνητική, γιατί όταν η X παίρνει μεγάλες τιμές, η Y παίρνει μικρές, και όταν η X παίρνει μικρές τιμές, η Y παίρνει μεγάλες. Η τιμή της συνδιακύμανσης είναι

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, 21 - X) = \mathrm{Cov}(X, 21) - \mathrm{Cov}(X, X) = -\mathrm{Cov}(X, X) = -\mathrm{Var}(X).$$

Η διασπορά της X είναι θετική γιατί η X δεν είναι σταθερά. Άρα $\mathrm{Cov}(X, Y) < 0$.

7.7. (α)

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_i) = P(X_i = X_j = 1) - P(X_i = 1)P(X_j = 1)\\ &= \frac{(n-2)!}{n!} - \frac{(n-1)!}{n!}\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.\end{aligned}$$

Κάποιες εξηγήσεις για τον υπολογισμό. Η τυχαία μεταβλητή $X_i X_j$ παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1, και την τιμή 1 την παίρνει ακριβώς όταν και η X_i και η X_j ισούνται με 1. Οπότε

$$E(X_i X_i) = 0 \times P(X_i X_j = 0) + 1 \times P(X_i X_j = 1) = P(X_i = X_j = 1).$$

Όμοια δικαιολογούμε και την $E(X_i) = P(X_i = 1)$. Τα υπόλοιπα είναι συνδυαστική (ευνοϊκές δια δυνατές περιπτώσεις...).

Άρα οι X_i, X_j είναι θετικά συσχετισμένες. Αυτό είναι αναμενόμενο γιατί όταν η X_i παίρνει μεγάλη τιμή (δηλαδή 1) είναι πιο πιθανό και η X_j να πάρει επίσης μεγάλη τιμή. Αν ο επιβάτης i καθίσει στην σωστή θέση, μειώνει τις λάθος επιλογές για τον j, και έτσι τον βοηθάει να καθίσει και αυτός στην θέση που του αναλογεί. Ομοίως, όταν η X_i παίρνει μικρή τιμή (δηλαδή 0) είναι πιο πιθανό και η X_j να πάρει επίσης μικρή τιμή. Αν ο επιβάτης i καθίσει σε λάθος θέση, ενδεχομένως να καθίσει σε αυτήν του j και έτσι να επιβάλει $X_j = 0$.

(β) Θα χρειαστούμε το ότι για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2},$$

που ισχύει γιατί η X_i παίρνει μόνο τιμές 0 και 1, οπότε $X_i^2 = X_i$ και

$$\mathrm{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = E(X_i) - (E(X_i))^2 = (1/n) - (1/n)^2.$$

Επειδή

$$W := \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{7}$$

χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της μέσης τιμής και την διγραμμικότητα της συνδιακύμανσης, βρίσκουμε

$$E(W) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

και

$$\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Cov}(W, W) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_i)$$

$$= n\mathrm{Var}(X_1) + 2\frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 1$$

Σχόλιο: Θα μπορούσε κανείς να βρει πρώτα την κατανομή της W, δηλαδή τις τιμές $P(W = k)$ για $k = 0, 1, 2, \dots, n$, και μετά τις $E(W), \mathrm{Var}(W)$. Αυτό όμως δεν είναι απλή υπόθεση (μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της αρχής εγκλεισμού-αποκλεισμού. Ο υπολογισμός αυτός βρίσκεται στο Παράδειγμα 1.21, σελ. 53, στο βιβλίο του κ. Χαραλαμπίδη, Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές). Προσέξτε πως η γραφή (7) και οι ιδιότητες των E, Cov κάνουν τον υπολογισμό της $E(W)$ τετριμμένο, και αυτόν της $\mathrm{Var}(W)$ εύκολο.

7.8. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $\{Z_i, W_i : 1 \le i \le n\}$ ως εξής

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{αν στην } i \text{ ρίψη εμφανίζεται } 2, \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \qquad W_i = \begin{cases} 1, & \text{αν στην } i \text{ ρίψη εμφανίζεται } 3, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε $Z = Z_1 + \dots + Z_n, W = W_1 + \dots + W_n$, οι Z_i, W_j με $i \ne j$ είναι ανεξάρτητες γιατί αφορούν διαφορετικές ρίψεις, και άρα

$$\mathrm{Cov}(Z, W) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(Z_i, W_i).$$

Όμως $\mathrm{Cov}(Z_i, W_i) = E(Z_i W_i) - E(Z_i)E(W_i) = 0 - (1/6)(1/6) = -1/36$, γιατί $Z_i W_i = 0$ πάντοτε (στην i ρίψη δεν είναι δυνατόν να εμφανιστεί και 2 και 3). Άρα $\mathrm{Cov}(Z, W) = -n/36$.

Εδώ το αρνητικό πρόσημο της συνδιακύμανσης είναι αναμενόμενο. Μεγάλες τιμές της Z επιβάλουν μικρές τιμές της W, ενώ μικρές τιμές Z της ευνοούν μεγάλες τιμές της W.

9. Χρησιμοποιούμε το ότι αν το C είναι ενδεχόμενο στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, και $\mathbf{1}_C : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι η δείκτρια του, τότε

$$E(\mathbf{1}_C) = P(C).$$

Αυτό γιατί η $\mathbf{1}_C$ παίρνει την τιμή 1 στο σύνολο C και την τιμή 0 στο $\Omega \setminus C$. Άρα

$$E(\mathbf{1}_C) = 1 \times P(C) + 0 \times P(\Omega \setminus C) = P(C).$$

Επίσης $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$. Άρα

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) &= E(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B) = E(\mathbf{1}_{A\cap B}) - E(\mathbf{1}_A)E(\mathbf{1}_B)\\ &= P(A\cap B) - P(A)P(B).\end{aligned}$$

7.10. Η διασπορά καθεμίας από τις X_1, X_2 είναι μ^2. Θα χρησιμοποιήσουμε πιο κάτω ότι λόγω ανεξαρτησίας έχουμε $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X_1+X_2, 2X_1+3X_2) &= 2\mathrm{Cov}(X_1, X_1) + 3\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_2, X_1) + 3\mathrm{Cov}(X_2, X_2)\\ &= 2\mu^2 + 0 + 0 + 3\mu^2 = 5\mu^2\end{aligned}$$

Έπειτα, $\mathrm{Var}(2X_1+3X_2) = \mathrm{Var}(2X_1)+\mathrm{Var}(3X_2)+6\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 13\mu^2$. Όμοια, $\mathrm{Var}(X_1+X_2) = 2\mu^2$. Έπεται ότι $\rho(X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2) = ... = 5/\sqrt{26}$.
Οι τυχαίες μεταβλητές $X_1 + X_2, 2X_1 + 3X_2$ δεν είναι ανεξάρτητες γιατί έχουν συνδιακύμανση διαφορετική απο το 0.

7.11. (α) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_1+X_2) &= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1, X_2)\\ &= \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}\rho_{X_1,X_2}\\ &= 3 + 2 + 2\sqrt{6}\rho_{X_1,X_2}.\end{aligned}$$

Η μέγιστη τιμή του ρ_{X_1,X_2} είναι 1 και η ελάχιστη -1. Άρα

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) \in [5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6}].$$

Ένα σενάριο το οποίο πετυχαίνει την μέγιστη τιμή είναι το $X_2 = \sqrt{2/3}X_1$ (δηλαδή η X_1 δεδομένη με διασπορά 3 και η X_2 ορισμένη μέσω της X_1). Αυτό όντως έχει $\mathrm{Var}(X_2) = 2$. Τότε $X_1 + X_2 = (1 + \sqrt{2/3})X_1$ με διασπορά

$$(1 + \sqrt{2/3})^2\mathrm{Var}(X_1) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Πως το σκεφτήκαμε αυτό το σενάριο; Ξέρουμε ότι μέγιστο συντελεστή συσχέτισης έχουμε όταν η X_2 είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο της X_1 (και έπειτα μια μετατόπιση, αν θέλουμε). Παίρνουμε λοιπόν $X_2 = aX_1$. Το $a > 0$ όμως δεν μπορεί να είναι οποιοδήποτε γιατί πρέπει $\mathrm{Var}(X_2) = 2$, δηλαδή $2 = a^2\mathrm{Var}(X_1)$. Έτσι βρίσκουμε $a = \sqrt{2/3}$.
Όμοια, ένα σενάριο που πετυχαίνει την ελάχιστη τιμή είναι το $X_2 = -\sqrt{2/3}X_1$.

(β) Όταν $\rho_{X_1,X_2} = 1$, τότε πρέπει $X_2 = aX_2 + b$ για κάποιες σταθερές $a > 0, b$. Και επειδή $\mathrm{Var}(X_1) = 3, \mathrm{Var}(X_2) = 2$ έπεται ότι $a = \sqrt{2/3}$. Άρα για κάθε $b \in \mathbb{R}$ έχουμε ένα σενάριο που πετυχαίνει το μέγιστο, δηλαδή

$$X_2 = \sqrt{2/3}X_1 + b.$$

Και αυτά είναι τα μόνα σενάρια που το πετυχαίνουν. Όμοια, τα σενάρια για το ελάχιστο είναι τα

$$X_2 = -\sqrt{2/3}X_1 + b$$

όπου $b \in \mathbb{R}$. Κάθε b δίνει ένα σενάριο.

7.12. (α) Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή Z, ανεξάρτητη της X, με διασπορά 1. Για $r \in [0,1]$ θέτουμε $Y := \sqrt{1-r}X + \sqrt{r}\sqrt{a}Z$. Τότε λόγω ανεξαρτησίας,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}(\sqrt{1-r}X) + \mathrm{Var}(\sqrt{r}\sqrt{a}Z) = (1-r)a + ra = a, \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(X, \sqrt{1-r}X + \sqrt{r}\sqrt{a}Z) = a\sqrt{1-r}, \\ \rho(X,Y) &= \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}} = \sqrt{1-r}. \end{aligned}$$

Για δεδομένο $c \in [0,1]$, επιλέγουμε r έτσι ώστε $\sqrt{1-r} = c$.

(β) Από το (α), βρίσκουμε μία $\hat{Y}$ με $\rho(X,\hat{Y}) = -c$. Η $Y := -\hat{Y}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

7.13. (α) Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}(EX_1 + \cdots + EX_n) = \mu,$$

και επειδή οι X_i είναι ανεξάρτητες, έχουμε

$$\mathrm{Var}(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}(\mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned} (n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) = \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - 2n\overline{X}\,\overline{X} + n\overline{X}^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) - n\overline{X}^2. \end{aligned}$$

Τώρα παίρνοντας μέσες τιμές, χρησιμοποιώντας το ότι οι $(X_i)_{1\le i\le n}$ είναι ισόνομες, και το ερώτημα (α), παίρνουμε

$$\begin{aligned} (n-1)E(S^2) &= nE(X_1^2) - nE(\overline{X}^2) = n(\mathrm{Var}(X_1) + E(X_1)^2) - n(\mathrm{Var}(\overline{X}) + E(\overline{X})^2) \\ &= n(\sigma^2 + \mu^2) - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = (n-1)\sigma^2, \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

7.14. (β) Υπολογίζουμε πρώτα τις πυκνότητες των X, Y. Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \mathbf{1}_{(0,1)}(x), \\ f_Y(y) &= -\log y\,\mathbf{1}_{(0,1)}(y), \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Άρα οι δεσμευμένες πυκνότητες $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y), f_{Y\,|\,X}(\cdot\,|\,x)$ έχουν νόημα ακριβώς για $x, y \in (0,1)$ και ισούνται με

$$\begin{aligned} f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) &= -\frac{1}{x\log y}\mathbf{1}_{(y,1)}(x), \\ f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x) &= \frac{1}{x}\,\mathbf{1}_{(0,x)}(y). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $Y\,|\,X = x$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,x)$.

(γ) Υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\, dy = -\int_0^1 y \log y\, dy = \ldots = \frac{1}{4} \\
E(X^2 \,|\, Y = y) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\, dx = -\int_y^1 x^2 \frac{1}{x \log y}\, dx = -\frac{1}{2\log y}(1-y^2), \\
E(e^Y \,|\, X = x) &= \int_{\mathbb{R}} e^y f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)\, dy = \int_0^x e^y \frac{1}{x}\, dy = \frac{e^x - 1}{x}.
\end{aligned}
$$

7.15. Έστω Y ο αριθμός του φακέλου που επιλέγει ο παίκτης την πρώτη φορά που παίζει το παιχνίδι. Τότε

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(E(X\,|\,Y)) \\
&= E(X\,|\,Y=1)P(Y=1) + E(X\,|\,Y=2)P(Y=2) + E(X\,|\,Y=3)P(Y=3) \\
&= \frac{1}{3}\big\{E(X\,|\,Y=1) + E(X\,|\,Y=2) + E(X\,|\,Y=3)\big\}. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Τώρα

$$
\begin{aligned}
E(X\,|\,Y=1) &= 5 + E(X), \\
E(X\,|\,Y=2) &= 6 + E(X), \\
E(X\,|\,Y=3) &= 0.
\end{aligned}
$$

Η πρώτη εξίσωση ισχύει γιατί δεδομένου ότι ο παίκτης διάλεξε τον φάκελο 1, πλήρωσε 5 Ευρώ, δεν βρήκε το αυτοκίνητο, και η διαδικασία αρχίζει από την αρχή. Μάλιστα η κατανομή της $X\,|\,Y=1$ είναι ακριβώς η ίδια με $5+X'$, όπου X' είναι το κόστος που θα πληρώσει ο παίκτης ώσπου να βρεί το αυτοκίνητο αν του χαριστεί η πρώτη μαντεψιά που είδαμε ήδη ότι είναι αποτυχημένη. Προφανώς η X' έχει την ίδια κατανομή με την X (απλως το παιχνίδι ξαναρχίζει).

Όμοια δικαιολογούμε και την δεύτερη εξίσωση, ενώ η τρίτη προκύπτει γιατί όταν $Y = 3$, ο παίκτης βρήκε το αυτοκίνητο και σταματάει να παίζει. Έτσι η εξίσωση (8) δίνει

$$
E(X) = \frac{2}{3}E(X) + \frac{11}{3}.
$$

Επομένως $E(X) = 11$.

7.16. (α) Έστω X ο αριθμός ρίψεων μέχρι την εμφάνιση και των δύο ενδείξεων, και η τυχαία μεταβλητή

$$
Y := \begin{cases} 0 & \text{αν η πρώτη ρίψη είναι Γ}, \\ 1 & \text{αν η πρώτη ρίψη είναι Κ}. \end{cases}
$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(E(X\,|\,Y)) = p\,E(X\,|\,Y=0) + (1-p)\,E(X\,|\,Y=1) \\
&= p(1 + (1-p)^{-1}) + (1-p)(1 + p^{-1}) = 1 + \frac{1}{p(1-p)}.
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι η κατανομή της $X\,|\,Y=0$ είναι η ίδια με αυτή της $1+Z$, όπου η Z είναι ο αριθμός των δοκιμών μέχρι την πρώτη εμφάνιση της ένδειξης Κ σε μία άλλη ακολουθία ρίψεων με το ίδιο νόμισμα. Η κατανομή της Z είναι γεωμετρική με παράμετρο $1-p$ (συνάρτηση πιθανότητας $f_Z(k) = (1-p)p^{k-1}, k = 1, 2, \ldots$). Ανάλογα αντιμετωπίζουμε την $E(X\,|\,Y=1)$.

(β) Η τελευταία ρίψη είναι Κ, αν και μόνο αν η πρώτη ρίψη είναι Γ, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα p.

7.17. (α) Για $x \in \{0, 1, \cdots, a+b\}$, η κατανομή της $X_n \,|\, X_{n-1} = x$ είναι διακριτή που παίρνει την τιμή x με πιθανότητα $x/(a+b)$ και την τιμή $x+1$ με πιθανότητα $1 - x(a+b)^{-1}$. Άρα

$$m(x) := E(X_n \,|\, X_{n-1} = x) = x\frac{x}{a+b} + (x+1)\left(1 - \frac{x}{a+b}\right) = 1 + x\left(1 - \frac{1}{a+b}\right),$$

και

$$E(X_n \,|\, X_{n-1}) = m(X_{n-1}) = 1 + X_{n-1}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right).$$

(β) Έστω $a_n := E(X_n)$ και $c = 1 - (a+b)^{-1}$. Επειδή $E(X_n) = E(E(X_n \,|\, X_{n-1}))$, παίρνοντας μέση τιμή στην σχέση του προηγούμενου ερωτήματος βρίσκουμε

$$a_n = ca_{n-1} + 1 \text{ για } n \geq 1$$

ενώ $a_0 = a$. Διαιρώντας με c^n βρίσκουμε

$$\frac{a_n}{c^n} = \frac{1}{c^n} + \frac{a_{n-1}}{c^{n-1}}.$$

Άρα για $n \geq 1$

$$\frac{a_n}{c^n} = \frac{1}{c^n} + \frac{1}{c^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{c^1} + \frac{a_0}{c^0},$$

οπότε, επειδή $a_0 = a$,

$$a_n = 1 + c + \cdots + c^{n-1} + ac^n = \frac{c^n - 1}{c - 1} + ac^n = -(a+b)(c^n - 1) + ac^n = a + b - bc^n.$$

Προφανώς ο ίδιος τύπος ισχύει και για $n = 0$.

(γ) Έστω $A := \{$Η μπάλα που επιλέγουμε κατά το $n+1$ βήμα είναι άσπρη$\}$. Τότε

$$P(A) = E(\mathbf{1}_A) = E(E(\mathbf{1}_A \,|\, X_n)) = E(P(A \,|\, X_n)).$$

Ισχύει $P(A \,|\, X_n = x) = x/(a+b)$. Άρα $P(A \,|\, X_n) = X_n/(a+b)$, και

$$P(A) = E\left(\frac{X_n}{a+b}\right) = \frac{1}{a+b}E(X_n) = 1 - \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{1}{a+b}\right)^n.$$

7.18. (α) Έστω $A := \{$Η πρώτη ρίψη φέρνει Κ$\}$, και f_p η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής p (η οποία είναι η ομοιόμορφη στο $(0,1)$). Τότε

$$P(A) = \int_0^1 P(A \,|\, p = x) f_p(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = 1/2.$$

(β) Έστω $B := \{$Και οι δύο ρίψεις φέρνουν Κ$\}$. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε

$$P(B) = \int_0^1 P(B \,|\, p = x) f_p(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = 1/3.$$

7.19. (α) Είναι πεπερασμένη μόνο για $t \leq 0$. Γιατί

$$M_X(t) = \int_1^\infty e^{tx}\frac{1}{x^2}\, dx,$$

και όταν $t > 0$, η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε ικανοποιεί $\lim_{x\to\infty} x^{-2}e^{tx} = \infty$. Άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα ισούται με ∞. Για $t \leq 0$ έχουμε $M_X(t) \leq M_X(0) = 1 < \infty$.

(β) Θεωρούμε την X με πυκνότητα

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} & \text{αν } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ανάλογα επιχειρήματα όπως στο (α) αποδεικνύουν το ζητούμενο.

7.20. Για $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} M_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-1}^{1} |x| e^{tx}\, dx = -\int_{-1}^{0} x e^{tx}\, dx + \int_{0}^{1} x e^{tx}\, dx = \dots \\ &= \frac{2 - (e^t + e^{-t}) + t(e^t - e^{-t})}{t^2}, \end{aligned}$$

ενώ $M_X(0) = 1$.

7.21. Ροπογεννήτριες είναι οι $(b), (c), (d)$.

7.22. Έχουμε$E(e^{tX}) = E(E(e^{tX} \mid R)) = E(m(R))$ με

$$m(r) := E(e^{tX} \mid R = r) = (re^t + 1 - r)^n$$

για κάθε $r \in [0, 1]$. Άρα

$$E(m(R)) = \int_0^1 (re^t + 1 - r)^n\, dr = \ldots = \frac{1}{n+1} \frac{e^{(n+1)t} - 1}{e^t - 1} = \frac{1}{n+1} \left(1 + e^t + e^{2t} + \cdots + e^{nt}\right).$$

Αλλά η τελευταία έκφραση είναι η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής Y με $P(Y = k) = 1/(n+1)$ για $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Από το θεώρημα μοναδικότητας για ροπογεννήτριες, έπεται ότι η X έχει την ίδια κατανομή με την Y.

7.23. (α) Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$P_X(u) = E(u^X) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{\lambda(u-1)}.$$

Η πιθανογεννήτρια είναι πεπερασμένη για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Επομένως, παραγωγίζοντας ως προς u όρο προς όρο την δυναμοσειρά δύο φορές, παίρνουμε για κάθε $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} P'_X(u) &= E(Xu^{X-1}) = \lambda e^{\lambda(u-1)}, \\ P''_X(u) &= E(X(X-1)u^{X-2}) = \lambda^2 e^{\lambda(u-1)}. \end{aligned}$$

Για $u = 1$, οι δύο αυτές σχέσεις δίνουν $E(X) = \lambda, E(X(X-1)) = \lambda^2$. Άρα $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ και $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$.

Σχόλιο: Χρησιμοποιούμε από τον Απειροστικό ΙΙ ότι αν μια δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγλισης $R > 0$ τότε η παράγωγος της στο $(-R, R)$ προκύπτει με παραγώγιση όρο προς όρο.

(β) Η πιθανογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$\begin{aligned} P_{X_1 + \cdots + X_n}(u) &= E(u^{X_1 + \cdots + X_n}) = E(u^{X_1}) \cdots E(u^{X_n}) = e^{\lambda_1(u-1)} \cdots e^{\lambda_n(u-1)} \\ &= e^{\lambda(u-1)}. \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η πιθανογεννήτρια της Poisson(λ). Ξέρουμε (πάλι από Απειροστικό ΙΙ) ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y παίρνουν τιμές στο $\mathbb{N}$ και οι πιθανογεννήτριες τους, P_X, P_Y, συμφωνούν σε μια περιοχή του 0 (δηλαδή $P_X(u) = P_Y(u)$ για $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$), τότε έχουν την ίδια κατανομή. Άρα

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$$

με $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

7.24. Αναπτύσοντας την g σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, βρίσκουμε ότι οι συντελεστές των όρων t^{3n} με $n \geq 1$ είναι αρνητικοί, άρα δεν είναι δυνατόν να είναι πιθανογεννήτρια.

Για να είναι η f πιθανογεννήτρια, αναγκαία συνθήκη είναι η $f(1) = 1$, απ΄ όπου βρίσκουμε $a = 1$. Για αυτή την τιμή του a και για t κοντά στο 0 (μάλιστα $t^2/7 < 1$ είναι αρκετό), υπολογίζουμε

$$f(t) = \frac{1}{7}(5t^2+1)\frac{1}{1-\frac{t^5}{7}} = \frac{1}{7}(5t^2+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{5n}}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7^{n+1}}\,t^{5n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{7^{n+1}}\,t^{5n+2},$$

η οποία είναι μια δυναμοσειρά με μη αρνητικούς συντελεστές (οι οποίοι αθροίζουν στο 1 λόγω της $f(1) = 1$). Άρα για $a = 1$, η f είναι πιθανογεννήτρια.

(α) Η κατανομή της X προσδιορίζεται από την συνάρτηση πιθανότητάς της ως εξής.

$$P(X=k) = \begin{cases} 1/7^{n+1} & \text{αν } k = 5n \text{ με } n \in \mathbb{N}, \\ 5/7^{n+1} & \text{αν } k = 5n+2 \text{ με } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(β) Κατά τα γνωστά, $E(X) = P_X'(1-) = 5/2$ και $E(X(X-1)) = P_X''(1-) = 55/6$. Άρα $\mathrm{Var}(X) = E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 = 65/12$.

7.25. Η ροπογεννήτρια της X ισούται με $M_X(t) = e^{\sigma^2 t^2/2}$, πεπερασμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ (ιδιαίτερα σε μία περιοχή του 0). Άρα όλες οι ροπές μ_r' είναι πεπερασμένες και

$$M_X(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\mu_r'}{r!}t^r.$$

Από την άλλη, αναλύοντας την $e^{\sigma^2 t^2/2}$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0, έχουμε

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma^{2n}}{n!2^n}t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\sigma^{2n}}{n!2^n}\frac{1}{(2n)!}t^{2n}.$$

Άρα

$$\mu_r' := \begin{cases} 0 & \text{αν } r \in \mathbb{N} \text{ περιττός,} \\ \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{n!2^n} = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times \sigma^{2n} & \text{αν } r = 2n \text{ με } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

7.26. (α) Για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$M_X(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} e^{tx}x^{a-1}e^{-\lambda x}\,dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x(\lambda-t)}\,dx.$$

Προκύπτει απο την τελευταία έκφραση ότι $M(t) = \infty$ ακριβώς για $t \ge \lambda$. Ενώ για $t < \lambda$ έχουμε

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x(\lambda-t)}\,dx \overset{y=x(\lambda-t)}{=} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}\frac{y^{a-1}}{(\lambda-t)^{a-1}}e^{-y}\frac{1}{\lambda-t}\,dy \\ &= \frac{\lambda^a}{(\lambda-t)^a} = \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-a}. \end{aligned}$$

Επειδή η M_X είναι πεπερασμένη σε περιοχή του 0, μπορούμε να έχουμε σε εκείνη την περιοχή

$$\begin{aligned} E(Xe^{tX}) &= M_X'(t) = a\lambda^{-1}(1-t\lambda^{-1})^{-a-1}, \\ E(X^2e^{tX}) &= M_X''(t) = a(a+1)\lambda^{-2}(1-t\lambda^{-1})^{-a-2}. \end{aligned}$$

Θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $E(X) = a\lambda^{-1}, E(X^2) = a(a+1)\lambda^{-2}$. Άρα $\mathrm{Var}(X) = a\lambda^{-2}$.

(β) Η ροπογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = E(e^{t(X_1+\cdots+X_n)}) = E(e^{tX_1})\cdots E(e^{tX_n})$$

λόγω ανεξαρτησίας. Από το (α) έχουμε ότι αυτή η ποσότητα είναι πεπερασμένη ακριβώς όταν $t < \lambda$. Και για αυτά τα t έχουμε

$$M_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_1} \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_2} \cdots \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a_n} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}.$$

Επίσης, η κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$ έχει ακριβώς την ίδια ροπογεννήτρια, και αυτή η ταυτότητα των ροπογεννητριών ισχύει σε μια περιοχή του 0. Έπεται από γνωστή πρόταση (Πρόταση 7.1.2, Τόμος 2 του βιβλίου του κ. Κούτρα) ότι η $X_1 + \cdots + X_n$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(a, \lambda)$.

(γ) Κάθε μία από τις τυχαίες μεταβλητές $X_i/n, i = 1, \ldots, n$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $n\theta$ (γιατί για $x \geq 0$ έχουμε $P(X_1/n \geq x) = P(X_1 \geq nx) = e^{-\theta nx}$...), η οποία είναι η $\Gamma(1, n\theta)$. Προκύπτει από το (β) ότι η $\overline{X}$ ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(n, n\theta)$.

7.27. Έστω f_X η πυκνότητα της X. Εύκολα βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι $f_Y(y) = \frac{1}{r} f_X(\frac{y}{r})$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο για την f_X (δηλαδή $f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0}$), βρίσκουμε ότι η πυκνότητα της Y είναι αυτή της $\Gamma(a, \lambda/r)$.

7.28. (α) Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση κατανομής της $-\log X_1$ είναι η $F(t) = (1 - e^{-t})\, \mathbf{1}_{t>0}$ που είναι αυτή της εκθετικής με παράμετρο 1. Άρα $-\log X_1 \sim \exp(1) = \Gamma(1, 1)$.

(β) Λόγω του (α), έχουμε ότι η Y είναι άθροισμα ανεξάρτητων Γάμμα με κοινή δεύτερη παράμετρο. Άρα η κατανομή της είναι $\Gamma(1 + 1 + \cdots + 1, 1) = \Gamma(n, 1)$.

(γ) Έπεται από το (β) και την Άσκηση 7.27 ότι η Y ακολουθεί την κατανομή $\Gamma(n, 1/2)$ η οποία είναι η χ^2 με $2n$ βαθμούς ελευθερίας.

7.29. (α) Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Z = (X - \mu)/\sigma$ η οποία ακολουθεί την κατανομή $N(0, 1)$. Τότε $X = \mu + \sigma Z$, και

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t\mu + t\sigma Z}) = e^{t\mu} E(e^{t\sigma Z}) = e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $M_Z(t) = e^{t^2/2}$, πεπερασμένη για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έπειτα, για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $E(X^k) = M_X^{(k)}(0)$. Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
M'_X(t) &= (\mu + \sigma^2 t) M_X(t), \\
M''_X(t) &= (\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2) M_X(t), \\
M_X^{(3)}(t) &= \left\{(2\sigma^4 t + 2\mu\sigma^2) + [\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2](\mu + \sigma^2 t)\right\} M_X(t),
\end{aligned}$$

και άρα $E(X) = \mu, E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2, E(X^3) = 3\mu\sigma^2 + \mu^3$.

(β) Η ροπογεννήτρια του αθροίσματος σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισούται με

$$\begin{aligned}
M_{X_1+\cdots+X_n}(t) &= E(e^{t(X_1+\cdots+X_n)}) = E(u^{tX_1}) \cdots E(u^{tX_n}) = e^{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdots e^{\mu_n t + \frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} \\
&= e^{(\mu_1+\cdots+\mu_n)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)t^2}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι η ροπογεννήτρια της $N(\mu, \sigma^2)$ με μ, σ όπως στην εκφώνηση της άσκησης. Ξέρουμε ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές X, Y έχουν πεπερασμένες ροπεγεννήτριες σε μια περιοχή του 0 (δηλαδή σύνολο της μορφής $(-\epsilon, \epsilon)$ για κάποιο $\epsilon > 0$) και συμφωνούν εκεί, τότε έχουν την ίδια κατανομή. Το συμπέρασμα έπεται.

(γ) Όμοια όπως στο προηγούμενο ερώτημα.

(δ) Με βάση το προηγούμενο, η $\overline{X} \sim N(\mu', \sigma'^2)$ με $\mu' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}\mu = \mu, \sigma'^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \sigma^2/n$. Κατά τα γνωστά, η τυποποίηση οποιασδήποτε κανονικής ακολουθεί την $N(0, 1)$. Η τυποποίση της $\overline{X}$ είναι η

$$\frac{\overline{X}_n - \mu'}{\sigma'} = \sqrt{n}\, \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} = Z_n.$$

Απαντήσεις §8

8.1. Υπολογίζουμε ότι $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = 18 - 16 = 2$. Η ανισότητα Markov εφαρμόζεται γιατί η X είναι μη αρνητική, και δίνει τα φράγματα

$$P(X \geq 5) \leq \frac{EX}{5} = \frac{4}{5},\ P(X \geq 5) = P(X^2 \geq 25) \leq \frac{E(X^2)}{25} = \frac{18}{25},$$

ενώ η Chebyshev δίνει $P(X \geq 5) \leq P(|X - EX| \geq 1) \leq \mathrm{Var}(X)/1 = 2$, το οποίο είναι τετριμμένο (ξέρουμε ότι μια πιθανότητα είναι μικρότερη του 1). Άρα το καλύτερο φράγμα που παίρνουμε είναι το 18/25.

8.2. Έχουμε

$$E(X) = \sum_{r=1}^{\infty} r f(r) \geq \sum_{r=1}^{k} r f(r) \geq \sum_{r=1}^{k} r f(k) = f(k)\frac{k(k+1)}{2} \geq k^2 f(k)/2.$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει αφού η $(f(k))_{k\geq 1}$ είναι φθίνουσα. Το αποτέλεσμα έπεται.

8.3. Έχουμε

$$E(X) = \int_0^{\infty} t f(t)\, dt \geq \int_0^{x} t f(t) \geq \int_0^{x} t f(x)\, dt = f(x)\, \frac{x^2}{2}.$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει αφού η f είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$. Το αποτέλεσμα έπεται.

8.4. $EX = 0 f(0) + n^2 f(n^2) = 0 \times (1 - \frac{1}{n}) + n^2 \frac{1}{n} = n$. $E(X^2) = 0^2 f(0) + n^4 f(n^2) = n^3$. $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n^3 - n^2 = n^2(n-1)$. $P(X > 0.8n) = P(X = n^2) = 1/n$, πολύ μικρή πιθανότητα.

8.5. (α)

$$\begin{aligned} P(X \leq aEX) &= P(X - EX \leq -(1-a)EX) \\ &\leq P(|X - EX| \geq (1-a)EX) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{(1-a)^2 (EX)^2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $(1-a)EX > 0$.

(β) Έστω $A := \{\omega : X(\omega) > aEX\}$.

$$\begin{aligned} & EX = E(X 1_{A^c}) + E(X 1_A) \leq aEX + E(X^2)^{1/2} P(A)^{1/2} \Rightarrow \\ & (1-a)EX \leq E(X^2)^{1/2} P(A)^{1/2} \Rightarrow P(A) \geq (1-a)(EX)^2/E(X^2) \end{aligned}$$

(γ) $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - (EX)^2 = n^3 - n^2$. Το (α) φράζει την πιθανότητα του συμπληρώματος απο το $(n-1)/(0.2)^2$ που είναι άχρηστο για n μεγάλο γιατί είναι > 1.

Το (β) δίνει κάτω φράγμα $(0.2)^2/n$. Είναι η σωστή τάξη μεγέθους. Ξέρουμε ότι η πραγματική τιμή της πιθανότητας είναι ακριβώς $1/n$.

Σχόλιο: Η Άσκηση 8.5 ερευνά την εξής ερώτηση. Μπορεί η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής να μας δώσει πληροφορίες για την "τυπική" συμπεριφορά της X; Είναι αναμενόμενο η X να βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα γύρω απο την μέση της τιμή; Οι ανισότητες Markov, Chebyshev δίνουν άνω φράγμα στην πιθανότητα η X να είναι μακριά απο την μέση της τιμή. Αν όμως το φράγμα που δίνουν είναι μεγαλύτερο του 1, τότε είναι άχρηστο και δεν παίρνουμε κάτω φράγμα για την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να είναι κοντά στην μέση της τιμή. Η 8.5(β) δίνει πάντοτε μή τετριμμένο κάτω φράγμα, αρκεί να ισχύει $E(X^2) < \infty$.

8.6. $P(X > t) = P(aX > at) = P(e^{aX} > e^{at}) \leq E(e^{aX})/e^{at}$. Παίρνουμε $C = E(e^{aX}) \in (0, \infty)$.

8.7. Για $i \geq 1$, έστω X_i ο χρόνος εξυπηρέτησης του i αιτήματος. Απο τις ιδιότητες της εκθετικής κατανομής έχουμε $E(X_1) = 1/\theta = 2, \mathrm{Var}(X_1) = 1/\theta^2 = 4$. Έστω $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει ότι η

$$\frac{S_n - 2n}{\sqrt{4n}}$$

προσεγγιστικά ακολουθεί την κατανομή $N(0,1)$.
Ζητάμε την πιθανότητα

$$P\left(S_{100} \leq 220\right) = P\left(\frac{S_{100} - 200}{20} \leq 1\right) \approx P(Z \leq 1) = \Phi(1) \approx 0.8413.$$

Στις πιο πάνω ισότητες, η Z είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$, και χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

8.8. (α) Έχουμε $P(X_i = 1) = 1/3, P(X_i = 0) = 2/3$. Δηλαδή, κάθε X_i έχει κατανομή Bernoulli με $p = 1/3$. Άρα $E(X_i) = 1/3, \mathrm{Var}(X_i) = p(1-p) = 2/9$.

(β) Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Οι $\{X_i : i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Επίσης $Z = S_{1800}$, και

$$\begin{aligned} P(580 < S_{1800} < 640) &= P\left(-1 < \frac{S_{1800} - 1800\,(1/3)}{\sqrt{1800\,(2/9)}} < 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8186 \end{aligned}$$

8.9. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή ομοιόμορφη στο $\{1,2,3,4\}$, και $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Οι δύο πρώτες ροπές της X_1 είναι

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{5}{2}, \\ E(X_1^2) &= \frac{1}{4}(1^2+2^2+3^2+4^2) = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Άρα η X_1 έχει μέση τιμή $5/2$ και πεπερασμένη διασπορά $\sigma^2 = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 5/4$. Το κεντρικό οριακό θεώρημα λέει οτι για n μεγάλο, η τυχαία μεταβλητή

$$\frac{S_n - 5n/2}{\sqrt{5/4}\sqrt{n}}$$

ακολουθεί προσεγιστικά την τυπική κανονική κατανομή, $N(0,1)$.
Για $n = 80$, έχουμε $5n/2 = 200$ και $\sqrt{(5/4)\,n} = 10$, οπότε

$$P(190 \leq S_{80} \leq 220) = P\left(-1 \leq \frac{S_{80} - 200}{10} \leq 2\right) \approx \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \approx 0.8186$$

Η προσέγγιση στην δεύτερη ισότητα προκύπτει απο το κεντρικό οριακό θεώρημα.

8.10. Θέτουμε

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{αν η } i \text{ ρίψη είναι γράμματα,} \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Τότε $X_i \sim \text{Bernoulli}(1/2)$, άρα $\mu := E(X_1) = 1/2, \sigma^2 := \text{Var}(X_1) = 1/4$. Οι $(X_i)_{i\geq 1}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Θέτουμε $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Για n μεγάλο, η $(S_n - n/2)/\sqrt{n/4}$ ακολουθεί προσεγγιστικά την κατανομή $N(0,1)$ (από το κεντρικό οριακό θεώρημα). Άρα

$$P(S_{100} \leq 40) = P(S_{100} - 50 \leq -10) = P\left(\frac{S_{100} - 50}{\sqrt{100/4}} \leq -2\right) \approx \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$

8.11. Δουλεύουμε όπως και στην προηγούμενη άσκηση. Έστω Y_i ο αριθμός λαθών στην σελίδα i, και

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{αν η σελίδα } i \text{ δεν έχει καθόλου λάθη} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ξέρουμε ότι $Y_i \sim \text{Poisson}(0.7)$. Η X_i ακολουθεί την κατανομή $\text{Bernoulli}(p)$ με $p = P(Y_i = 0) = e^{-0.7}(0.7)^0/0! = e^{-0.7} \approx 1/2$. $E(X_1) = p \approx 1/2, \text{Var}(X_1) = p(1-p) \approx 1/4$. Άρα

$$P(S_{64} \leq 36) \approx P(S_{64} - 32 \leq 4) = P\left(\frac{S_{64} - 32}{\sqrt{64/4}} \leq 1\right) \approx \Phi(1).$$

Η πρώτη ισότητα είναι προσέγγιση γιατί χρησιμοποιήσαμε τις προσεγγιστικές τιμές για τα $E(X_1), \text{Var}(X_1)$. Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το κεντρικό οριακό θεώρημα.

8.12. Συνοπτική λύση. Έστω X_i το αποτέλεσμα της i μέτρησης. $E(X_i) = 0, \text{Var}(X_i) = (0.1)^2/12 = 0.01/12$.

$$\begin{aligned} P(|S_{300}| \leq 0.25) &= P\left(\left|\frac{S_{300} - 300 \times 0}{\sqrt{300 \times 0.01/12}}\right| \leq \frac{0.25}{\sqrt{300 \times 0.01/12}}\right) \approx P(|Z| \leq 0.5) \\ &= \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 2\Phi(0.5) - 1 \end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0,1)$, και χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα.

8.13. Έστω $\{X_i : 1 \leq i \leq 200\}$ και $\{Y_i : 1 \leq i \leq 200\}$ οι επιδόσεις των φοιτητών των ομάδων Α και Β αντίστοιχα. Θέτουμε $W_i := X_i - Y_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, 200\}$. Τότε

$$M_A - M_B = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} X_i - \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} Y_i = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i.$$

Οι $\{W_i : 1 \leq i \leq 200\}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, και έχουν όλες την ίδια κατανομή, με μέση τιμή $\mu = E(W_1) = E(X_1) - E(Y_1) = 9 - 8.5 = 0.5$, και διασπορά

$$\text{Var}(W_1) = \text{Var}(X_1 - Y_1) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(Y_1) - 2\text{Cov}(X_1, Y_1) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(Y_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

λόγω ανεξαρτησίας των X_1, Y_1.

Οπότε

$$\begin{aligned} P(M_A - M_B \in [0.5, 0.65]) &= P\left(\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i \in [0.5, 0.65]\right) = P\left(\frac{1}{200}\sum_{i=1}^{200} W_i - 0.5 \in [0, 3/20]\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{200} W_i - 200 \times 0.5 \in [0, 30]\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{200} W_i - 200 \times 0.5}{\sqrt{200 \times 1/2}} \in [0, 3]\right) \\ &\approx P(Z \in [0, 3]) = \Phi(3) - \Phi(0) = \Phi(3) - 1/2 = 0.4987, \end{aligned}$$

όπου $Z \sim N(0,1)$.