Ασυμπτωτική Στατιστική – Ασκήσεις 1

1.1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$. Αν $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$, να δειχθεί ότι η ακολουθία των δειγματικών διασπορών $\{S_n^2\}_{n\geq 1}$ με

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$$

είναι συνεπής για το σ^2.

1.2. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $\mathbb{E}|X_1|^k < \infty$ για κάποιον ακέραιο $k \geq 2$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία των δειγματικών κεντρικών ροπών $\{M_{k,n}\}_{n\geq 1}$ με

$$M_{k,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^k$$

είναι συνεπής για την κεντρική ροπή τάξης k, $\mu_k = \mathbb{E}(X_1 - \mu)^k$.

1.3. Έστω ότι υπάρχει σταθερά $M < \infty$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\left[|T_n - \theta| < M\right] = 1 \quad \text{για κάθε } n.$$

Να αποδείξετε ότι $T_n \xrightarrow{\mathbf{p}} \theta$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(T_n) = \theta \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(T_n) = 0.$$

1.4. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $\mu_4 = \mathbb{E}(X_1 - \mu)^4 < \infty$ όπου $\mu = E(X_1)$. Έστω επίσης $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$.

1. Να δειχθεί ότι η δειγματική διασπορά είναι S_n^2 είναι ασυμπτωτικά κανονονική εκτιμήτρια του σ^2 με ασυμπτωτική τυπική απόκλιση $\sqrt{\mu_4 - \sigma^4}$.

2. Να βρεθεί η ασυμπτωτική κατανομή των εκτιμητριών S_n και $\ln S_n^2$, για τις παραμέτρους σ και $\ln\sigma^2$, αντίστοιχα.

1.5. Θεωρούμε τυχαίο δείγμα από την κατανομή Bernoulli με παράμετρο $p \in (0, 1)$.

1. Να βρεθεί κατάλληλος μετασχηματισμός σταθεροποίησης της διασποράς.
2. Να βρεθεί ασυμπτωτικά κανονική εκτιμήτρια για το πηλίκο $\frac{p}{1-p}$.

1.6. Έστω $U_1, U_2, \ldots, U_n$ τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη $U(0, \theta)$ στο διάστημα $(0, \theta)$, $\theta > 0$.

1. Να δειχθεί ότι η $T_n = \left(\prod_{i=1}^{n} U_i\right)^{-1/n}$ είναι ασυμπτωτικά κανονονική εκτιμήτρια της παραμετρικής συνάρτησης e/θ.

2. Να βρεθούν ασυμπτωτικά κανονικές εκτιμήτριες για τις παραμέτρους θ και θ^2.

3. Να συγκρίνετε την εκτιμήτρια του θ που βρήκατε στο ερώτημα 2 με την $W_n = \frac{n+1}{n}U_{(n)}$ όπου $U_{(n)} = U_{n:n} = \max\{U_1, \ldots, U_n\}$.

1.7. Έστω δείγμα μίας παρατήρησης από την Υπεργεωμετρική κατανομή $HG(r, \theta - r; n)$ με r, n γνωστά. Να βρεθεί η MLE του θ.

1.8. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την κατανομή Γάμμα, $G(\alpha, \lambda)$, με $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda) \in \Theta = (0, \infty)^2$ και πυνκότητα

$$f(x; \boldsymbol{\theta}) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Να βρεθεί η MLE του $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \lambda)$. Τι παρατηρείτε;

1.9. Θεωρούμε τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ από την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma_0^2)$ με $\theta = \mu \in \Theta = \mathbb{R}$ και σ_0^2 γνωστό. Να βρεθεί η MLE του μ για κάθε $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^n$. Τι παρατηρείτε;

1.10. Έστω τυχαίο δείγμα από την οικογένεια κατανομών $\{N(0, \sigma^2), \sigma \in (0, \infty)\}$. Να εξεταστεί η ασυμπτωτική αποδοτικότητα της MLE του σ.

1.11. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από την οικογένεια κατανομών $\{U(0, \theta), \theta \in (0, \infty)\}$. Να δειχθεί ότι η MLE του θ δεν είναι ασυμπτωτικά κανονική. Ποια είναι η οριακή κατανομή της;

1.12. Θεωρούμε τυχαίο δείγμα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ από την κατανομή Poisson με παράμετρο $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Να βρεθεί η MLE του $g(\theta) = \mathbb{P}(X_1 = 0)$ και να εξεταστεί αν είναι ασυμπτωτικά αποδοτική.

1.13. Έστω τυχαίο δείγμα από την οικογένεια $\{\text{Poisson}(\theta),\ \theta \in \Theta = (0, \infty)\}$. Να γίνει ο έλεγχος της $H_0 : \theta = \theta_0$ έναντι της $H_1 : \theta \neq \theta_0$ σε ε.σ. α για μεγάλο μέγεθος δείγματος n, χρησιμοποιώντας τους ελέγχους Wald, LR και Rao.

1.14. Έστω τυχαίο δείγμα από την οικογένεια $\{N(\mu, \sigma^2),\ \boldsymbol{\theta} = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)\}$. Να γίνει ο έλεγχος της $H_0 : \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$ έναντι της $H_1 : \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta_0}$ σε ε.σ. α για μεγάλο μέγεθος δείγματος n, χρησιμοποιώντας τους ελέγχους Wald, LR και Rao.

1.15. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ δύο ανεξάρτητα τυχαία δείγματα από Κανονικές κατανομές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ με παραμέτρους μ_1 και μ_2, αντίστοιχα. Να δοθεί κρίσιμη περιοχή για την υπόθεση $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ έναντι της $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ σε ε.σ. α για μεγάλα μεγέθη δειγμάτων n, όταν (α) σ_1^2, σ_2^2 γνωστά και (β) σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα.

1.16. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα με $\mathbb{E}|X_1|^{2k} < \infty$ για κάποιον ακέραιο $k \geq 2$ και $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία των δειγματικών κεντρικών ροπών $\{M_{k,n}\}_{n\geq1}$ με

$$M_{k,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^k$$

είναι ασυμπτωτικά κανονική εκτιμήτρια της κεντρικής ροπής τάξης k, $\mu_k = \mathbb{E}(X_1 - \mu)^k$, με ασυμπτωτική διασπορά

$$v_k^2 = \mu_{2k} - \mu_k^2 + k\mu_{k-1}(k\sigma^2\mu_{k-1} - 2\mu_{k+1}).$$

Να δειχθεί επίσης ότι η v_k^2 είναι μη αρνητική.
[**Υπόδειξη:** Υπολογίστε την $\text{Var}[(X - \mu)^k - \lambda(X - \mu)]$ και θέστε κατάλληλη τιμή στο $\lambda \in \mathbb{R}$.]

1.17. Δείξτε ότι αν $\mathbb{E}|X_n - \theta| \to 0$ τότε $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$, και κατασκευάστε παράδειγμα για το οποίο $\mathbb{E}|X_n - \theta| \to 0$ και $\mathbb{E}(X_n - \theta)^2 \nrightarrow 0$.

1.18. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από πυκνότητα $f(x;\theta)$. Δείξτε ότι η ακολουθία εκτιμητριών $X_{1:n} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ είναι συνεπής για το θ όταν:

1. $f(x;\theta) = I(\theta < x < \theta + 1), \quad \theta \in \Theta = \mathbb{R}$,
2. $f(x;\theta) = 2(x-\theta)I(\theta < x < \theta + 1), \quad \theta \in \Theta = \mathbb{R}$,
3. $f(x;\theta) = e^{x-\theta}I(x > \theta), \quad \theta \in \Theta = \mathbb{R}$.

Γενικότερα, αν $f(x;\theta) = 0$ όταν $x < \theta$, να δοθεί ικανή συνθήκη για την συνέπεια της $X_{1:n}$, δηλ. για την $X_{1:n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$.

1.19. Έστω $t > 0$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}|X|^t < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|X-\theta|^t < \infty$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Επίσης, δείξτε ότι $\mathbb{E}|X-\theta|^t < \infty$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{E}|X|^t < \infty$.

1.20. Να δοθεί παράδειγμα ακολουθίας T_n και τυχαίας μεταβλητής T με $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathrm{d}} T$, $\mathrm{Var}(T_n) < \infty$ για κάθε n, $\mathrm{Var}(T) < \infty$ και $\mathrm{Var}(\sqrt{n}(T_n - \theta)) \nrightarrow \mathrm{Var}(T)$. Μπορεί η T να ακολουθεί τυποποιημένη κανονική; Μπορεί, επιπροσθέτως, να ισχύει και η σχέση $\mathbb{E}(\sqrt{n}(T_n - \theta)) \nrightarrow \mathbb{E}(T) = 0$;

1.21. Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$, $\theta > 0$, να δείξετε ότι $\mathrm{Var}(X_{n:n}) \sim \frac{\theta^2}{n^2}$, όπου $X_{n:n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, και να υπολογίσετε την ασυμπτωτική κατανομή της

$$\lambda_n(\theta - X_{n:n})$$

για κατάλληλη ακολουθία σταθερών $\lambda_n \to \infty$.

1.22. Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι τυχαίο δείγμα από την Ομοιόμορφη κατανομή $U(0,\theta)$, $\theta > 0$, να δείξετε ότι $\mathrm{Var}(X_{n-1:n}) \sim \frac{2\theta^2}{n^2}$, όπου $X_{n-1:n}$ είναι η δεύτερη μεγαλύτερη παρατήρηση, και να υπολογίσετε την ασυμπτωτική κατανομή της

$$\lambda_n(\theta - X_{n-1:n})$$

για κατάλληλη ακολουθία σταθερών $\lambda_n \to \infty$.

1.23. Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την Εκθετική κατανομή $E(\theta)$, $\theta > 0$, με πυκνότητα

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x}, \quad x > 0,$$

να υπολογίσετε την ασυμπτωτική κατανομή της $X_{n:n} - \frac{1}{\theta}\log(n)$ όπου $X_{n:n} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1.24. Έστω X_n ακολουθία Κανονικών τυχαίων μεταβλητών με μέσους μ_n και διασπορές $\sigma_n^2 > 0$, και έστω X Κανονική τυχαία μεταβλητή με μέσο μ και διασπορά $\sigma^2 > 0$. Να δείξετε ότι $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ αν και μόνο αν $\mu_n \to \mu$ και $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

1.25. Αν $Z_1, Z_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες τυποποιημένες κανονικές $N(0,1)$ τότε, εξ' ορισμού, η τυχαία μεταβλητή $\chi_n^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2$ ακολουθεί Κατανομή χ_n^2 (χι-τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας). Δείξτε ότι $\chi_n^2 \equiv G(n/2, 1/2)$ (ειδική περίπτωση της Κατανομής Γάμμα, βλ. άσκηση 1.8), και συμπεράνατε ότι

$$\sqrt{n}\left(\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,2).$$

Μπορείτε να αποδείξετε απευθείας το ισχυρότερο αποτέλεσμα $f_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\phi(x/\sqrt{2})$ σχεδόν παντού; (f_n η πυκνότητα της $\sqrt{n}(\chi_n^2/n - 1)$ και ϕ η πυκνότητα της $N(0,1)$). Επιπροσθέτως, να αποδείξετε την ασυμπτωτική κανονικότητα της $\chi_n = \sqrt{\chi_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n Z_i}$ (η οποία ονομάζεται χι-κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας).

1.26. Να βρείτε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $X = 1/Z^2$ όταν η Z ακολουθεί τυποποιημένη Κανονική $N(0,1)$, και να αποδείξετε[1] ότι αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από αυτήν την πυκνότητα τότε

$$\overline{X}_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} nX_1.$$

1.27. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποια συνάρτηση κατανομής $F(x)$ με πυκνότητα $F'(x) = f(x)$ (σχεδόν παντού) και δ η μοναδική διάμεσος του πληθυσμού, δηλ. $x = \delta$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $F(x) = \frac{1}{2}$. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = \delta$ και $f(\delta) > 0$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{n}(\widehat{\delta}_n - \delta) \xrightarrow{\mathrm{d}} N\left(0, \frac{1}{4f^2(\delta)}\right),$$

όπου $\widehat{\delta}_n = X_{[(n+1)/2]:n}$. Να εφαρμόσετε το παραπάνω αποτέλεσμα για $F = U(\delta - 1, \delta + 1)$ (Ομοιόμορφη), $F(x) = \frac{1}{1+e^{-(x-\delta)}}$ (Logistic) και $F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t-\delta|}dt$ (Διπλή Εκθετική). Σε καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις ποια εκτιμήτρια προτιμάτε για την (άγνωστη) διάμεσο δ, την $\widehat{\delta}_n$ ή τον δειγματικό μέσο $\overline{X}_n$, και γιατί;

1.28. Έστω $p \in (0,1)$. Θεωρούμε μία ακολουθία ακεραίων i_n, $1 \le i_n \le n$, τέτοια ώστε

$$\frac{i_n}{n} = p + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποια συνάρτηση κατανομής $F(x)$ με πυκνότητα $F'(x) = f(x)$ (σχεδόν παντού) και ξ_p το μοναδικό ποσοστημόριο τάξεως p της F, δηλ. $x = \xi_p$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $F(x) = p$. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = \xi_p$ και $f(\xi_p) > 0$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{n}(\widehat{\xi_{p,n}} - \xi_p) \xrightarrow{\mathrm{d}} N\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(\xi_p)}\right),$$

όπου $\widehat{\xi_{p,n}} = X_{i_n:n}$ η διατεταγμένη παρατήρηση τάξεως i_n.

1.29. Έστω $p_1, p_2, \ldots, p_k \in (0,1)$, με $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k < 1$. Θεωρούμε k ακολουθίες ακεραίων $\{i_{j,n}\}_{n\ge1}$, με $1 \le i_{1,n} < i_{2,n} < \cdots < i_{k,n} \le n$, και τέτοιες ώστε

$$\frac{i_{j,n}}{n} = p_j + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ ($n \ge k$) τυχαίο δείγμα από κάποια συνάρτηση κατανομής $F(x)$ με πυκνότητα $F'(x) = f(x)$ (σχεδόν παντού) και ξ_{p_j} το μοναδικό ποσοστημόριο τάξεως p_j της F, δηλ. $x = \xi_{p_j}$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $F(x) = p_j$, $j = 1, \ldots, k$. Αν η $f(x)$ είναι συνεχής σε όλα τα σημεία $x = \xi_{p_1}, x = \xi_{p_2}, \ldots, x = \xi_{p_k}$ και αν $f(\xi_{p_j}) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \widehat{\xi_{p_1,n}} - \xi_{p_1} \\ \widehat{\xi_{p_2,n}} - \xi_{p_2} \\ \vdots \\ \widehat{\xi_{p_k,n}} - \xi_{p_k} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{d}} N_k(\mathbf{0}, \mathbf{\Sigma}),$$

[1] βλ. Feller, vol. 1, 1957, p. 231 και vol. 2, 1966, p.51

όπου $\widehat{\xi_{p_j}}_{,n} = X_{i_{j,n}:n}$ η διατεταγμένη παρατήρηση τάξεως $i_{j,n}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, και $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{ij})$ με $\sigma_{ji} = \sigma_{ij} = \frac{p_i(1-p_j)}{f(\xi_{p_i})f(\xi_{p_j})}$, $1 \le i \le j \le n$.

[**Έκπτωση/Υπόδειξη:** Μπορείτε να θεωρήσετε ως γνωστό ότι το αποτέλεσμα ισχύει για $F = U(0,1)$ (Ομοιόμορφη), με την προϋπόθεση ότι θα υπολογίσετε τον οριακό πίνακα διασποράς του τυχαίου διανύσματος

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} U_{i_{1,n}:n} - p_1 \\ U_{i_{2,n}:n} - p_2 \\ \vdots \\ U_{i_{k,n}:n} - p_k \end{pmatrix},$$

σε αυτήν την ειδική περίπτωση. Μετά εφαρμόστε πολυδιάστατη μέθοδο Δέλτα.]

1.30. Έστω $\sqrt{n}(i_n/n - p) \to 0$ και $\sqrt{n}(j_n/n - s) \to 0$, όπου $0 < p < s < 1$. Αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από την Κατανομή Cauchy με πυκνότητα $f(x;\theta) = \frac{1}{\pi(1+(x-\theta)^2)}$, $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$, να εκφράσετε τα ποσοστιαία σημεία ξ_p, ξ_s (τάξης p και s) συναρτήσει της άγνωστης παραμέτρου θ, και να βρείτε την οριακή κατανομή του τυχαίου διανύσματος

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} X_{i_n:n} - \xi_p \\ X_{j_n:n} - \xi_s \end{pmatrix}.$$

Ειδικότερα, να εφαρμόσετε το παραπάνω αποτέλεσμα για $p = 1/4$ και $s = 3/4$ (τεταρτημόρια) ώστε να υπολογίσετε την οριακή κατανομή της $\sqrt{n}(aX_{i_n:n} + bX_{j_n:n} - a\xi_{1/4} - b\xi_{3/4})$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να επιλέξετε τις σταθερές a, b με τέτοιον τρόπο ώστε

$$\sqrt{n}(aX_{i_n:n} + bX_{j_n:n} - \theta) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \sigma^2(\theta)).$$

Τέλος, για τις κατάλληλες αυτές σταθερές a, b που βρήκατε, να συγκρίνετε την προκύπτουσα εκτιμήτρια $T_n = aX_{i_n:n} + bX_{j_n:n}$ με την δειγματική διάμεσο $\widehat{\delta}_n$.

1.31. Έστω ότι για κάθε $\theta \in \Theta$ ισχύει ότι $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \sigma^2(\theta))$, όπου $\sigma^2(\theta) > 0$. Επίσης υποθέτουμε ότι ο παραμετρικός χώρος Θ είναι ένα (πεπερασμένο ή άπειρο) ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0. Να βρεθεί η οριακή κατανομή της $\sqrt{n}(|T_n| - |\theta|)$ για κάθε $\theta \in \Theta$.

1.32. Έστω ότι $\{f(x;\theta) = f_0(x - \theta),\ \theta \in \Theta = \mathbb{R}\}$ όπου f_0 δεδομένη πυκνότητα (οικογένεια θέσης παραγόμενη από την f_0). Αν $f_0(x) > 0$ και η $f_0'(x)$ υπάρχει για κάθε x δείξτε ότι ο πληροφοριακός αριθμός του Fisher δεν εξαρτάται από το θ, και μάλιστα,

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f_0'(x)]^2}{f_0(x)} dx.$$

Υπολογίστε τον αριθμό $I(\theta)$ για f_0 κανονική, Logistic, Cauchy.

1.33. Έστω ότι $\{f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} f_0(x/\theta),\ \theta \in \Theta = (0, \infty)\}$ όπου f_0 δεδομένη πυκνότητα (οικογένεια κλίμακος παραγόμενη από την f_0). Αν $f_0(x) > 0$ και η $f_0'(x)$ υπάρχει για κάθε x δείξτε ότι ο πληροφοριακός αριθμός του Fisher ισούται με

$$I(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x f_0'(x)}{f_0(x)} + 1 \right)^2 f_0(x) dx.$$

Υπολογίστε τον αριθμό $I(\theta)$ για f_0 κανονική, Logistic, Cauchy.