9ο 1/11/2017

Συνάρτηση Πιθανότητας Αρν. Διωνυμικής.

$$f_Y(y) = \binom{r+y-1}{y} p^r (1-p)^y, \quad y = 0, 1, \ldots \qquad (1)$$

$$\left(\mu = r\,\frac{1-p}{p}, \quad \sigma^2 = r\cdot\frac{1-p}{p^2}\right)$$

$$f_X(x) = P(X=x) = P(Y+r=x) = P(Y=x-r) = f_Y(x-r)$$

$$= \binom{r+(x-r)-1}{x-r} p^r (1-p)^{x-r} = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, \quad x = r, r+1, \ldots$$

Απόδ: $f_Y(y) = P(Y=y) = P($να γίνουν ακριβώς y αποτυχίες μέχρι την r επιτυχία$)$

$$= P(\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{r+y-1}\ \underline{E})$$

$r+y-1$ θέσεις στις οποίες μπορώ να βάλω y αποτυχίες, $r-1$ επιτυχίες

$$= \left[\binom{r+y-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^y\right] \cdot p$$

$Y \sim A\Delta(r, p)$

$$\binom{r+y-1}{r-1} = \binom{r+y-1}{y}.$$

$r=1 \quad A\Delta(1,p) \equiv G(p)$

Νοε 1-5:24 μμ

$X \sim b(\nu, p) \qquad \nu \to \infty, \quad p = p_\nu \to 0, \quad p_\nu = \frac{\lambda}{\nu}, \quad \lambda > 0$

Γενικότερα: $p_\nu \to 0, \quad \nu \cdot p_\nu \to \lambda > 0.$

$P(X_\nu = x)$ όταν $X_\nu \sim b(\nu, p_\nu) \equiv b(\nu, \frac{\lambda}{\nu})$

$\nu = 10000 \qquad p_\nu = \frac{1}{5000} \qquad \nu \cdot p_\nu = 2$

$$P(X_\nu = 4) = f_{X_\nu}(4) = \binom{\nu}{4} p_\nu^4 (1-p_\nu)^{\nu-4} = \binom{10000}{4} \left(\frac{1}{5000}\right)^4 \left(\frac{4999}{5000}\right)^{9996}$$

$$\simeq e^{-2} \frac{2^4}{4!} = \frac{16}{2 \cdot 3 \cdot 4} e^{-2} = \frac{2}{3} e^{-2}$$

Νοε 1-5:32 μμ

Ας βρούμε όριο για $\nu \to \infty$

$$\lim_{\nu\to\infty} P(X_\nu = x) = \lim_{\nu} \binom{\nu}{x} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu-x} \qquad p_\nu = \frac{\lambda}{\nu}$$

$$= \lim_{\nu} \frac{(\nu)_x}{x!} \frac{\lambda^x}{\nu^x} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^\nu}{\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^x} = \frac{\lambda^x}{x!} \lim_{\nu} \frac{(\nu)_x}{\nu^x} \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^\nu}{\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^x}$$

$$\frac{(\nu)_x}{\nu^x} \to 1 \qquad \left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^x \to 1$$

$$(\nu)_x = \underbrace{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-x+1)}_{x \text{ παράγοντες}}$$

$$\frac{(\nu)_x}{\nu^x} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-x+1)}{\nu\cdot\nu\cdots\nu} = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{\nu}\right) \xrightarrow{\nu\to\infty} 1$$

$$\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu \to e^\alpha \qquad \left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)^\nu \to e^{-\lambda}$$

$$\lim_{\nu} P(X_\nu = x) = \underbrace{e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!}}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

Ορισμός: Η X ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ όταν $S_X = \{0, 1, \ldots\}$ και

$$f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad (x = 0, 1, 2, \ldots)$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ ή $X \sim P(\lambda)$.

Θεώρημα: $X \sim P(\lambda) \Rightarrow \mu = \sigma^2 = \lambda$.

Νοε 1-5:49 μμ

Απόδ: $\mu = \sum_{x=0}^{\infty} x \, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\lambda^x}{x!}$ $\quad (0 \cdot f_X(0) = 0)$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1+1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$\boxed{x-1=j}$ $$= \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}}_{e^{\lambda}} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda e^0 = \lambda .$$

$$f(\lambda) = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \dots \qquad f(0) = 1$$

$$f'(\lambda) = (1)' + (\lambda)' + \left(\frac{\lambda^2}{2!}\right)' + (\ )' + \dots = 0 + 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = f(\lambda)$$

$$E[X(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E(X).$$

$$\Rightarrow E(X^2) = E(X) + E(X(X-1)) = \lambda + E(X(X-1)) \qquad (*)$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{\infty} \underbrace{x(x-1)} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{x(x-1)}{x!} \lambda^x$$

$(x(x-1)=0$ για $x=0,\ x=1)$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2+2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \overset{j=x-2}{=\!=} \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 \overset{(*)}{\Rightarrow} E(X^2) = \lambda + \lambda^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = (\lambda + \lambda^2) - (\lambda)^2 = \lambda.$$

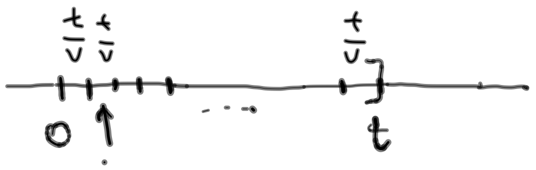
$$\nu \to \infty \qquad p_\nu = \frac{\lambda}{\nu} \to 0 \qquad (\nu p_\nu \to \lambda)$$

$$X_\nu \sim b\left(\nu, \frac{\lambda}{\nu}\right) \qquad E(X_\nu) = \nu \cdot p_\nu = \nu \cdot \frac{\lambda}{\nu} = \lambda \to \lambda$$

$$Var(X_\nu) = \nu\, p_\nu \cdot (1-p_\nu) = \nu \cdot \frac{\lambda}{\nu}\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right) =$$

$$= \lambda\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right) \to \lambda$$

Αριθμός συμβάντων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$.



ν διαστήματα μήκους $\frac{t}{\nu}$

P(να γίνει συμβάν σε κάποιο διάστημα) $\simeq \frac{\lambda t}{\nu}$

$$X_\nu \sim b\left(\nu, \frac{\lambda t}{\nu}\right) \xrightarrow{\nu \to \infty} \text{Poisson}(\lambda t)$$

$X(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

$X(t) = \#$ συμβάντων στο $(0, t]$. $t > 0$.

Ανέλιξη Poisson.

$$P(X(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Ασκήσεις 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.7, 3.10, 3.12, 3.16

3.16 Ο αριθμός θανάτων σε νοσοκ. της Αθήνας στη διάρκεια ενός μήνα ακολουθεί Poisson.
Είναι γνωστό ότι
η P(να συμβεί το πολύ ένας θάνατος)
είναι τετραπλάσια της πιθ. να συμβούν ακριβώς 2 θάνατοι. Βρείτε:
(α) Την πιθ. να μη συμβεί θάνατος σε ένα μήνα.
(β) Την πιθ. να συμβούν το πολύ 2 θάνατοι σε 2 μήνες.

Νοε 1-6:33 μμ

Έστω $X = X(1)$ ο αριθμός θανάτων σε 1 μήνα (στο $(0,1]$)

$$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad (x=0,1,\dots)$$

$$P(X\le 1) = 4P(X=2) \Rightarrow f_X(0)+f_X(1) = 4 f_X(2)$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} = 4 e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!}$$

$$e^{-\lambda}(1+\lambda) = 2e^{-\lambda}\cdot\lambda^2 \qquad 2\lambda^2-\lambda-1=0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

$X(t) = \#$ συμβ. στο $(0,t] \sim \text{Poisson}(t)$

(α) $P(\text{να μη συμβεί θάνατος}) = P(X(1)=0)$

$$= e^{-\lambda} = e^{-1}$$

(β) $P(\text{να συμβούν το πολύ 2 θάνατοι σε } \underline{\text{2 μήνες}})$

$= P(X(2) \leq 2) \qquad X(2) \sim Poisson(2)$

$= P(X(2)=0) + P(X(2)=1) + P(X(2)=2)$

$$= e^{-2} + e^{-2}\frac{2^1}{1!} + e^{-2}\frac{2^2}{2!} = e^{-2}(1+2+2) = 5e^{-2}$$

3.10) Από 125 εργαζόμενους, 50 γυν, 75 άνδρες, διαλέγω τυχαία 5. Να υπολ. την πιθανότητα οι 2 να είναι γυναίκες. (και προσεγγιστικά).

$$\frac{\binom{50}{2}\cdot\binom{75}{3}}{\binom{125}{5}} = \dots = 10\cdot\frac{50\cdot 49\cdot 75\cdot 74\cdot 73}{121\cdot 122\cdot 123\cdot 124\cdot 125}$$

Προσεγγιστικά:

Έστω ότι σε μία κάλπη έχω Λ λευκά, Μ μαύρα σφαιρ., και διαλέγω στην τύχη ν από αυτά. Έστω Χ τα λευκά στα ν που διαλέγω.

$$f_X(x) = P(X=x) = \frac{\binom{\Lambda}{x}\binom{M}{\nu-x}}{\binom{\Lambda+M}{\nu}}, \quad x = 0, 1, \ldots, \nu$$

$$= \frac{\frac{(\Lambda)_x}{x!} \, \frac{(M)_{\nu-x}}{(\nu-x)!}}{\frac{(\Lambda+M)_\nu}{\nu!}} = \frac{\nu!}{x!\,(\nu-x)!} \, \frac{(\Lambda)_x \, (M)_{\nu-x}}{(\Lambda+M)_\nu}$$

$$= \binom{\nu}{x} \frac{(\Lambda)_x \, (M)_{\nu-x}}{(\Lambda+M)_\nu} \xrightarrow[\frac{\Lambda}{\Lambda+M} \to p]{\Lambda \to \infty,\ M \to \infty} \binom{\nu}{x} p^x (1-p)^{\nu-x}$$

$$\Lambda = 50, \quad M = 75, \quad p = \frac{50}{125} = \frac{2}{5}, \quad \nu = 5$$

$$P(X=2) \simeq \binom{\nu}{2} p^2 (1-p)^3 = 10 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625}.$$

Noε 1-6:52 μμ