8ο 27/10/2017

Κατανομή Bernoulli

$X \sim b(p)$ όταν $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$.

σ.π. $f_X(x)=\begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1 \end{cases}$ $S_X=\{0,1\}$

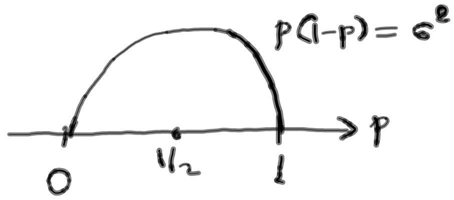
$[0<p<1]$

$$\mu=\sum_x x f_X(x)=\sum_{x=0}^{1} x f_X(x)=0 f_X(0)+1\cdot f_X(1)=f_X(1)=p$$

$$E(X^2)=\sum_x x^2 f_X(x)=0^2 f_X(0)+1^2 f_X(1)=p$$

$$\sigma^2= E(X^2)-\mu^2=p-p^2=p(1-p).$$

$X \sim b(p)$, $\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$



Ανεξάρτητη ακολουθία δοκιμών Bernoulli είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων πειραμάτων, όπου σε κάθε πείραμα η πιθ. επιτυχίας είναι p (σταθερή) και αποτυχίας 1-p.

$X_1, X_2, \ldots$ ανεξ. δοκ. Bernoulli

δηλ. $X_i \sim b(p) \quad \forall i = 1, 2, \ldots$

Αν κάνω n δοκιμές, τότε η τ.μ.

$$\boxed{X = X_1 + \cdots + X_n}$$

παριστάνει τον αριθμό επιτυχιών στις n (πρώτες) δοκιμές.

$$S_X = \{0, 1, \ldots, n\}$$

$X \sim b(n,p) \overset{\text{op}}{\iff}$ η X παριστάνει τον αριθμό επιτυχιών σε n ανεξ. δοκιμές Bernoulli (p)

$$b(1,p) \equiv b(p)$$

$$E(X) = E(X_1 + \dots + X_n) \overset{\gamma\rho.}{=} E(X_1) + \dots + E(X_n)$$
$$= p + \dots + p$$
$$= n \cdot p$$

$$Var(X) = Var(X_1 + \dots + X_n)$$
$$\overset{\alpha\nu\varepsilon\xi.}{=} Var(X_1) + \dots + Var(X_n) = n\,p(1-p)$$

$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ ισχύει για ανεξ. X, Y,
αλλά όχι για όλες.

Διων. Θεώρημα:

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

Θεώρημα Η συνάρτηση πιθανότητας της $X \sim b(n,p)$

είναι $$\boxed{f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\dots,n}$$

Εξήγηση: Για x επιτυχίες, τα ενδεχόμενα είναι της μορφής

		Πιθανότητα
$\underbrace{EE\dots E}_{x}\ \underbrace{AA\dots A}_{n-x}$	:	$p^x (1-p)^{n-x}$
$\underbrace{EE\dots E}_{x-1}\ AE\ \underbrace{AA\dots A}_{n-x-1}$	:	$p^x (1-p)^{n-x}$
$\vdots$		$\vdots$
$\underbrace{AA\dots A}_{n-x}\ \underbrace{EE\dots E}_{x}$	:	$(1-p)^{n-x} \cdot p^x$

Οκτ 27-3:39 μμ

$\binom{n}{x}$ ενδεχόμενα.

$$\underset{1n}{\_}\ \underset{2n}{\_}\ \cdots\ \underset{n_n}{\_}$$

$\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p).$

$$\mu = \sum_{x=0}^{n} x \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \cdots = np$$

$$x \binom{n}{x} = n \binom{n-1}{x-1} \quad x \geq 1$$

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$= \cdots = n(n-1)p^{2} = \text{γνωστό}$$

$$E(X^{2}) - \underbrace{E(X)}_{np} = \text{γνωστό} \Rightarrow E(X^{2}) = \text{γνωστό}.$$

$$\sigma^{2} = E(X^{2}) - \mu^{2} = \cdots = np(1-p)$$

Γεωμετρική Κατανομή.

Σε ακολουθία δοκιμών Bernoulli(p), θέτουμε

$X = \#$ δοκιμών ως την πρώτη επιτυχία.

Η X καλείται Γεωμετρική με παράμετρο $p \in (0,1)$

Συμβολισμός: $X \sim G(p)$.

$$S_X = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$P(X=x) = P(\underbrace{AA\dots A}_{x-1} \cdot E) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$

Οκτ 27-3:56 μμ

$$\boxed{f_X(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p, \quad x = 1, 2, \ldots}$$

Υπολογίστε (α) Η f_X είναι σ.πιθανότητας

(2) $\mu = 1/p$

(3) $\sigma^2 = (1-p)/p^2$

(α) $$\sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = p \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} = p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = p \sum_{j=0}^{\infty} w^j = \frac{p}{1-w} = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

$x-1=j$

$w = 1-p$

$$1 + w + w^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} w^j = \frac{1}{1-w}, \quad |w| < 1$$

$$x = 1 + w + w^2 + \dots \Rightarrow xw = w + w^2 + w^3 + \dots = x - 1$$

$$xw = x - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{1-w}$$

$$E_p(X) \overset{\text{ορ}}{=} \sum_{x=1}^{\infty} x\, p (1-p)^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} x w^{x-1} \qquad w = 1-p$$

$$= p \sum_{x=1}^{\infty} (w^x)'$$

′: η παράγωγος ως προς w

$$= p \left[\sum_{x=1}^{\infty} w^x \right]'$$

(παράγωγος δυναμοσειράς)

$$= p \left[\frac{1}{1-w} - 1 \right]' = \frac{p}{(1-w)^2} \overset{w=1-p}{=} \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

$$\sum_{x=1}^{4} a_x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{j=1}^{4} a_j = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{j=0}^{3} a_{j+1} \quad //$$

$$(\gamma)\quad E[X(X-1)] = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\, p\, (1-p)^{x-1}$$

$$= p(1-p) \sum_{x=1}^{\infty} \underbrace{x(x-1)\, w^{x-2}}_{(w^x)''} \qquad [w^n]'' = n(n-1)w^{n-2}$$

$$= p(1-p)\left[\sum_{1}^{\infty} w^x\right]'' = p(1-p)\left[\frac{1}{1-w} - 1\right]'' = p(1-p)\cdot\frac{2}{(1-w)^3}$$

$$= 2\,\frac{p(1-p)}{p^3} = 2\,\frac{1-p}{p^2}$$

$$E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$$

$$E(X(X-1)) = \frac{2(1-p)}{p^2}, \quad E(X) = \frac{1}{p}$$

$$E[X^2] = E[X(X-1) + X] = E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \mu^2 = \frac{2(1-p)+p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\boxed{X \sim G(p) \Rightarrow f_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots, \quad \mu = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}.}$$

Окт 27-4:35 μμ

$Y =$ αριθμός αποτυχιών ως την 1η επιτυχία.

και αυτή καλείται Γεωμετρική.

$$* \quad Y = X - 1, \qquad S_Y = \{0, 1, 2, \dots\}$$

με X όπως προηγουμένως.

$$\boxed{f_Y(y) = (1-p)^y \cdot p, \quad y = 0, 1, 2, \dots}$$

$$E[Y] = E[X-1] = E(X) - E(1) = E(X) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$$

$*$

Οκτ 27-4:40 μμ

<u>Λήμμα:</u> $Var(\alpha X+\beta)=\alpha^2 Var(X) \quad \forall\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$

<u>Απόδ:</u> $Var(\alpha X+\beta)=E\left[(\alpha X+\beta)^2\right]-\left(E(\alpha X+\beta)\right)^2$

$=E\left[\alpha^2X^2+2\alpha\beta X+\beta^2\right]-(\alpha\mu+\beta)^2 \qquad \mu=E(X)$

$=\alpha^2E(X^2)+2\alpha\beta\, E(X)+\beta^2-(\alpha\mu+\beta)^2$

$=\alpha^2E(X^2)+\cancel{2\alpha\beta\mu}+\cancel{\beta^2}-\alpha^2\mu^2-\cancel{2\alpha\beta\mu}-\cancel{\beta^2}$

$=\alpha^2\left(E(X^2)-\mu^2\right)=\alpha^2\, Var(X).$

π.χ. $Var(-X+2)=(-1)^2 Var(X)=Var(X)$

$Var(-3X)=9\,Var(X)$ κ.ο.κ.

Οκτ 27-4:44 μμ

Πόρισμα: Αν $Y = X-1$ είναι η Γεωμετρική (p) που μετράει τον αριθμό αποτυχιών ως την 1η επιτ., τότε $E(Y) = \frac{1-p}{p}$ και $Var(Y) = \frac{1-p}{p^2} = Var(X)$.

Ορισμός: Αρνητική Διωνυμική ή Pascal.

$Y \stackrel{op}{=}$ το πλήθος αποτυχιών ως την r-επιτυχία

$X \stackrel{op}{=}$ το πλήθος δοκιμών ως την r-επιτυχία

$$S_X = \{r, r+1, \ldots\}, \quad S_Y = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$X = Y + r, \quad Y = X - r$$

Παρατήρηση: $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$

όπου Y_i ανεξ. $G(p)$ (που μετράνε τον αριθμό αποτυχιών ως την 1η επιτυχία).

$$\underbrace{A\ A \cdots A}_{Y_1}\ \underset{1\eta}{E}\ \underbrace{A\ A \cdots A}_{Y_2}\ \underset{2\eta}{E}\ \cdots\ \underset{r\eta}{E}$$

$Y_1 + \dots + Y_r =$ συνολικός αριθμός αποτυχιών μέχρι την r-οστή επιτυχία.

$$E(Y) = E(Y_1 + \dots + Y_r) = E(Y_1) + \dots + E(Y_r)$$
$$= r \cdot \frac{1-p}{p}$$

$$Var(Y) = Var(Y_1 + \dots + Y_r) \overset{\text{ανεξ.}}{=} Var(Y_1) + \dots + Var(Y_r)$$
$$= r \cdot \frac{1-p}{p^2}$$

$$E(X) = E(Y+r) = E(Y) + r = r \cdot \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = Var(Y+r) = Var(Y) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}$$