6o 20/10/2017

2.15| Η τ.μ. X έχει σ.π. $f(x)=\begin{cases} 1/5 & x=0, \\ \frac{1}{10}, & x=\pm 1, \dots, \pm 4 \end{cases}$

Να βρεθούν $E(X)$ και $Var(X)$.

$f \geq 0$ και $\sum_{x} f(x) = \sum_{x=-4}^{4} f(x) = 1$ άρα σ.π.

$$E(X) = \mu = \sum_{x=-4}^{4} x \cdot f(x) = \sum_{x=-4}^{-1} x \frac{1}{10} + 0 \cdot f(0) + \sum_{x=1}^{4} x \frac{1}{10}$$

$$= \frac{-1-2-3-4}{10} + \frac{1+2+3+4}{10} = 0 \qquad \mu = 0$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x} x^2 f(x) = \sum_{x=-4}^{-1} x^2 \frac{1}{10} + \cancel{0^2 f(0)}^{0} + \sum_{x=1}^{4} x^2 \frac{1}{10} = 2 \, \frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{10} = 6$$

$$E\,g(X) = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x), & X \text{ διακρ. με σ.π. } f. \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx, & X \text{ συνεχής με πυκν. } f. \end{cases}$$

$\mu = E(X) = 0$ και $E(X^2) = 6$

$$\Rightarrow \sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = 6 - 0^2 = \boxed{6 = \sigma^2}$$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{6}$ τυπική απόκλιση.

Σημασία Διασποράς: $X - \mu$ = απόκλιση της X από το μ

$$E(X-\mu) = E(X) - E(\mu) = \mu - \mu = 0$$

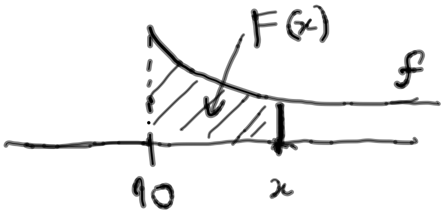
$(X-\mu)^2$: τετραγωνική απόκλιση της X από το μ

σ^2 = μέση τετραγωνική απόκλιση

2.16 Το εισόδημα X μισθωτού είναι συνεχής τ.μ.

με πυκνότητα $f_X(x) = \dfrac{4\cdot 10^4}{x^5}$, $x > 10$.

Βρείτε την σ.κ. της X, την $E(X)$ και την $Var(X)$



$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \qquad F_X(x) = 0 \text{ για } x \le 10.$$

Για $x > 10$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{10} 0\,dt + \int_{10}^{x} \frac{4\cdot 10^4}{t^5}\,dt$

$$F_X(x) = 4\cdot 10^4 \int_{10}^{x} t^{-5}\,dt = 4\cdot 10^4 \int_{10}^{x} \left(\frac{t^{-4}}{-4}\right)' dt$$

$$= 4\cdot 10^4 \left(\frac{x^{-4}}{-4} - \frac{10^{-4}}{-4}\right) = 4\cdot 10^4 \left(\frac{1}{4\cdot 10^4} - \frac{1}{4\cdot x^4}\right)$$

$$= 1 - \frac{10^4}{x^4}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 10 \\ 1 - \frac{10^4}{x^4}, & x \ge 10 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = 0 + \int_{10}^{\infty} x \cdot \frac{4\cdot 10^4}{x^5}\cdot dx = 4\cdot 10^4 \int_{10}^{\infty} x^{-4}\,dx$$

$$= 4\cdot 10^4 \cdot \int_{10}^{\infty} \left(\frac{x^{-3}}{-3}\right)' dx = 4\cdot 10^4 \left(\cancel{\lim_{\infty} \frac{x^{-3}}{-3}}^{\,0} - \frac{10^{-3}}{-3}\right) = 4\cdot 10^4 \cdot \frac{10^{-3}}{3}$$

$$= \boxed{\frac{40}{3} = \mu}$$

Για να βρω τη διασπορά, υπολογίζω πρώτα την

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = 0 + \int_{10}^{\infty} x^2 \frac{4\cdot 10^4}{x^5}\,dx$$

$$= 4\cdot 10^4 \int_{10}^{\infty} x^{-3}\,dx = 4\cdot 10^4 \int_{10}^{\infty} \left(x^{-2}/(-2)\right)'\,dx$$

$$= \dots = 200 \qquad \boxed{E(X^2) = 200 \quad E(X) = \frac{40}{3}}$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 200 - \left(\frac{40}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{200}{9} = \sigma^2}$$

Οκτ 20-3:58 μμ

Δεν έπρεπε να κάνουμε την Άσκ. 2.16
διότι δεν έχουμε πει τη θεωρία για συνεχείς τ.μ.!

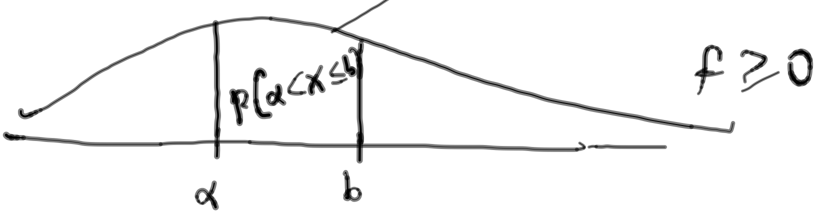
Ορισμός: Η τ.μ. X καλείται συνεχής όταν υπάρχει μία συνάρτηση $f \geq 0$ με $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ τέτοια ώστε

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η σ.κ. F_X καλείται (και είναι) συνεχής, η δε συνάρτηση $f(x)$ καλείται πυκνότητα (πιθανότητας) της τ.μ. X.

$$P(\alpha < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

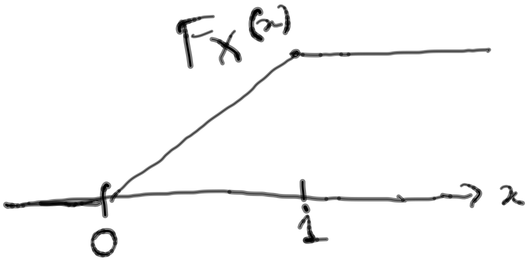
$$= \int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt - \int_{-\infty}^{\alpha} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$



Ισχύει $F_X'(x) = f(x)$ όταν f συνεχής στο x

Επίσης $\underline{P(X=x)=0}$ $\forall x$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

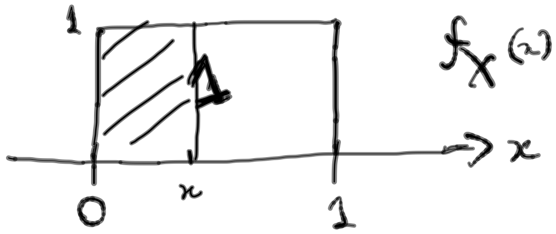


$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ή } x \geq 1 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ \nexists & \text{στα } x=0 \text{ ή } 1 \end{cases}$$

Στα σημεία $x=0$ και $x=1$, ορίζουμε την f_X όπως θέλουμε

π.χ. $f_X(0) = f_X(1) = 0$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \Big\| \quad \boxed{f_X(x) = 1, \ x \in (0,1)}$$



Η τ.μ. X παίρνει τιμές στο $\{x : f_X(x) > 0\} = (0,1)$

(1) $f_X(x) \geq 0$ προφανές,

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) = 1$ ✓ προφανές

$$\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \underbrace{\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & \text{αν } x \leq 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 1\,dt = x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 1\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 0+1+0 = 1, & x \geq 1 \end{cases}}_{F_X(x)}$$

Είδατε ότι $\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$

Ορισμός Μέσης Τιμής της X. (συνεχής περίπτωση)
Αν η X έχει πυκνότητα $f_X(x)$, ορίζουμε ως μέση τιμή της X τον αριθμό

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx,$$

εφ' όσον $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$.

$$f_X(x_0) = F_X'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F_X(x_0+h) - F_X(x_0)}{h}$$

$$F_X(x_0+h) - F_X(x_0) \simeq h\, f_X(x_0) \qquad h>0,\ h\to 0$$

$$P(x_0 < X \le x_0+h) \simeq h\, f_X(x_0)$$

Οκτ 20-4:35 μμ

$$E[g(X)] \overset{(\Theta)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx, \quad \text{εφ' όσον}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, f_X(x)\, dx < \infty$$

(Θ) = Τύπος αγνοημένου Μαθηματικού (συνεχής περίπτωση)

Άρα γενικά

$$\boxed{E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f_X(x), & X \text{ διακρ. με σ.π. } f_X \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x), & X \text{ συνεχής με πυκν. } f_X \end{cases}}$$

Οκτ 20-4:42 μμ

<u>Διασπορά</u> Αν X είναι μία συνεχής τ.μ.
με μέση τιμή μ $\left(= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx\right)$ και πυκνότητα
$f_X(x)$, ορίζουμε ως διασπορά της X την
μη-αρνητική ποσότητα

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\,dx$$

$\sigma \overset{\text{ορ}}{=} \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$ καλείται τυπική απόκλιση.

<u>Παρατήρηση:</u> $g_1 \leq g_2 \Rightarrow E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$

Ειδικότερα, αν $g_2 \geq 0 \Rightarrow E(g_2(X)) \geq E(0) = 0$

Βασική Ιδιότητα: Γραμμικότητα

$$E[\underbrace{a_1 g_1(X)+a_2 g_2(X)}_{g(X)}] = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 g_1(x)+\alpha_2 g_2(x))\, f_X(x)\, dx$$

$$= \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, f_X(x)\, dx + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \alpha_1 E(g_1(X)) + a_2 E(g_2(X)).$$

Πρόταση: $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2)-\mu^2$ όπως στη

διακριτή περίπτωση.

$$\sigma^2 = E[X^2-2\mu X+\mu^2] \overset{\text{γραμμ.}}{=} E(X^2) - 2\mu \overbrace{E(X)}^{\mu} + \overbrace{E(\mu^2)}^{\mu^2}$$

$$= E(X^2)-\mu^2$$