5ο 18/10/2017

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ.

$F(x) \overset{\text{op}}{=} P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$ σ.κ.

Συνάρτηση Πιθανότητας

$$f(x_i) \overset{\text{op}}{=} P(X = x_i), \quad x \in S = \{x_0, x_1, \dots\}$$

S πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

$$S = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} \quad \text{και} \quad x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$$

τότε $\quad F(x_k) = P(X \le x_k) = P(X = x_0) + \cdots + P(X = x_k)$

$$= \sum_{i=0}^{k} f(x_i)$$

π.χ. 3 ρίψεις νομίσματος, $X = \#$ "Γ".

$$P(X=0) = \frac{1}{8}, \quad P(X=1) = \frac{3}{8}, \quad P(X=2) = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = \frac{1}{8}$$

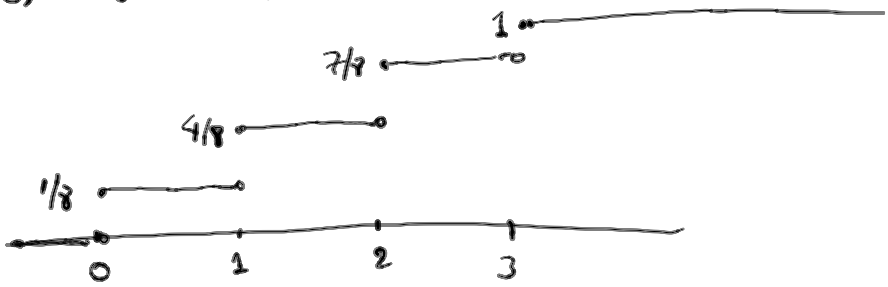
$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & x = 0 \text{ ή } 3 \\ 3/8 & x = 1 \text{ ή } 2 \end{cases} \qquad S = [0, 1, 2, 3]$$

(0 αλλού)

$$F(1) = P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$F(0) = 1/8 \qquad F(2) = 7/8 \qquad F(3) = 1$

F



$$F(x_k) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i)$$

Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής

Έστω τυχερό παιχνίδι και το κέρδος X

είναι διακριτή τ.μ. με τιμές $\{x_0, x_1, \dots, x_\kappa\}$

$f(x_i) = P(X = x_i) \quad i = 0, 1, \dots, \kappa \quad$ (η σ.π.)

Επαναλαμβάνω το πείραμα N ($N \to \infty$) φορές.

Μέσο κέρδος/παιχνίδι $\quad \dfrac{X_1 + \dots + X_N}{N} = \dfrac{\text{συνολικό κέρδος}}{N}$

Αριθμητής $= x_2 + x_1 + x_0 + x_1 + x_1 + x_2 + x_k + x_0 + x_k + \cdots$

$= N(x_0)\cdot x_0 + N(x_1)\, x_1 + \cdots + N(x_k)\cdot x_k$

$N(x_i) = \#$ φορών που εμφ. το x_i στις N δοκιμές.

Μέσο κέρδος στις N δοκιμές

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{N(x_i)}{N}\cdot x_i \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{i=0}^{k} x_i\, f(x_i)$$

$$\frac{N(x_i)}{N} = \text{ποσοστό φορών που } X = x_i \xrightarrow{N\to\infty} P(X=x_i) = f(x_i)$$

Ορισμός Αν X μία διακριτή τ.μ. με τιμές $S = \{x_0, x_1, \dots\}$ και σ.π. $f(x_k)$, $k=0,1,\dots$ τότε ο αριθμός

$$\mu \overset{\text{op}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(x_k) = \sum_{x \in S} x \cdot f(x)$$

καλείται μέση τιμή της X, εφ' όσον

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_k| f(x_k) < \infty$$

(αν είναι σειρά, αν το S είναι πεπερασμένο τότε το μ είναι πεπερ. άθροισμα)

Παράδειγμα: Αν $f(x) = \begin{cases} 1/8, & x=0 \text{ ή } 3 \\ 3/8, & x=1,2 \end{cases}$ (0, αλλού)

$$\Rightarrow \mu = \sum_{x\in S} x f(x) = 0\, f(0) + 1\, f(1) + 2\, f(2) + 3\, f(3)$$
$$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\boxed{\mu = 1.5}$$

Παράδειγμα: $f(x) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$ $(0<p<1)$

$f \geq 0$ προφανώς, $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = p \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1} \overset{x-1=j}{=} p \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{j}$

$$= p\left\{1+(1-p)+(1-p)^2+\dots\right\} = p\,\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

$$1+w+\dots+w^{n-1} = \frac{1-w^n}{1-w} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-w} \qquad |w|<1$$

Άρα $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$ (η f είναι σ.π. πιθανότητας)

$$\mu = \sum_{x=1}^{\infty} x f(x) = p\sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \overset{w=1-p}{=} p\sum_{x=1}^{\infty}(w^x)'$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial w} w^x = x w^{x-1}\right]$$

$$= p\left(\sum_{x=1}^{\infty} w^x\right)' = p\left(1+\sum_{1}^{\infty} w^x\right)' = p\left(\sum_{0}^{\infty} w^x\right)' = p\left(\frac{1}{1-w}\right)' = \frac{p}{(1-w)^2} = \frac{p}{p^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{p}}$$

Συνάρτηση τυχαίας μεταβλητής.

$X \sim f(x)$ σημαίνει η τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθ. f.

$Y = g(X)$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g: S \to g(S) = S_Y \Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)), \quad y \in S_Y$$

$$g^{-1}(y) \overset{\text{ορ}}{=} \{x \in S_X : g(x) = y\}$$

Παράδειγμα: Έστω $f(x) = \begin{cases} 1/8, & x = 0, 3 \\ 3/8, & x = 1, 2. \end{cases}$

$Y = (X-1)^2$ $\quad Y = g(X)$ όπου $g(t) = (t-1)^2$

$g: S \to S_Y$ $\quad S = \{0, 1, 2, 3\}$ $\quad (0-1)^2 = 1,\ (1-1)^2 = 0,\ (2-1)^2 = 1,$
$(3-1)^2 = 4$

$\Rightarrow S_Y = \{0, 1, 4\}$

$$f_Y(0) = P(Y=0) = P\left((X-1)^2 = 0\right) = P(X=1) = 3/8$$

$$f_Y(1) = P\left((X-1)^2 = 1\right) = P\left(X \in \{0,2\}\right) = f_X(0) + f_X(2)$$

$g^{-1}(1)$ $$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$f_Y(4) = P\left((X-1)^2 = 4\right) = P\left(X \in \{3, -1\}\right) = P(X=3) + P(X=-1)$$

$$= f(3) + f(-1) = 1/8 + 0 = 1/8$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} 3/8, & y=0 \\ 4/8, & y=1 \\ 1/8, & y=4 \end{cases} \qquad S_Y = \{0,1,4\}}$$

$$E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y\, f_Y(y) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{4}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 1$$

Μέση τιμή συνάρτησης τ.μ.

$Y = g(X)$ g, κάποια συνάρτηση, πώς θα υπολογίσω τη μέση τιμή της Y;

$E(Y)$ συμβολίζει την μέση τιμή της Y.

$\mu = E(X)$

Από τον ορισμό, $E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y\, f_Y(y) = \sum_{y \in S_Y} y \cdot f(g^{-1}(y))$

$$= \sum_{x \in S} g(x) f(x).$$

ΤΥΠΟΣ ΑΦΗΡΗΜΕΝΟΥ ΜΑΘΗΤΗ

Θεώρημα: $\boxed{E(Y) = \sum_{x \in S_X} g(x) f_X(x)}$ όταν $Y = g(X)$

Οκτ 18-6:29 μμ

$$E(Y) = E\left[(X-1)^2\right] = \sum_{x\in S_X} (x-1)^2 f_X(x)$$

$$= (0-1)^2 f_X(0) + (1-1)^2 f_X(1) + (2-1)^2 f_X(2) + (3-1)^2 f_X(3)$$

$$= 1\cdot\frac{1}{8} + 0\cdot\frac{3}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 4\cdot\frac{1}{8} = 1 \quad \text{όπως πριν.}$$

Ιδιότητες της μέσης τιμής

(1) $E(c) = c$ ($g(x)=c$ $\forall x\in\mathbb{R}$, και εφαρμόστε του υποσχεμένου τύπου)

$$\sum_{x\in S} g(x) f_X(x) = \sum_{x\in S} c\, f_X(x) = c\underbrace{\sum_{x\in S} f_X(x)}_{\text{σ.π.ι.θ.}} = c\cdot 1 = c$$

(2) Αν $a \leq X \leq b$ τότε $a \leq E(X) \leq b$

Γενικότερα: Αν $g_1(x) \leq g_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ τότε

$$E(g_1(X)) \leq E(g_2(X))$$

Διότι: $g_1(x) \leq g_2(x)$

$$\Rightarrow \quad g_1(x) f_X(x) \leq g_2(x) f_X(x) \qquad \forall x$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sum_{x \in S} g_1(x) f_X(x)}_{E(g_1(X))} \leq \underbrace{\sum_{x \in S} g_2(x) f_X(x)}_{E(g_2(X))}$$

(3) Γραμμικότητα

$$E\{\underbrace{a\, g_1(X) + b\, g_2(X)}_{g(X)}\} = a\, E(g_1(X)) + b\, E(g_2(X))$$

$$E[g(X)] = \sum_{x \in S_X} (a g_1(x) + b\, g_2(x))\, f_X(x)$$

$$= a \sum_{x \in S_X} g_1(x) f_X(x) + b \sum_{x \in S_X} g_2(x) f_X(x)$$

$$= a\, E(g_1(X)) + b\, E(g_2(X)).$$

Διασπορά.

<u>Ορισμός</u>: Έστω X μία τ.μ. με μέση τιμή μ.

Ο μη αρνητικός αριθμός

$$E[(X-\mu)^2]$$

καλείται διασπορά (ή διακύμανση) της X και

συμβολίζεται με σ^2 ή $Var(X)$ ή $V(X)$

V=Variance

$$\sigma^2 \overset{\text{ορ}}{=} E[(X-\mu)^2]$$

Окт 18-6:49 μμ

$$E[(X-\mu)^2] = \sum_{x \in S_X} (x-\mu)^2 f_X(x)$$

$$E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E(X^2) - 2\mu \overset{\mu}{\overset{\|}{E(X)}} + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu\cdot\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Πρόταση: $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ $\quad (\mu = E(X))$.

$$\mu^2 \leq E(X^2), \quad [E(X)]^2 \leq E(X^2).$$

Οκτ 18-6:53 μμ

Υπολογισμός διασποράς στο παράδειγμά μας.

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 f_X(x) = 0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{24}{8} = 3$$

Είχα βρει $\mu = E(X) = 3/2$

Άρα $\sigma^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \boxed{\frac{3}{4} = \sigma^2}$.

Οκτ 18-6:56 μμ