4ο 13/10/2017

Έχουμε τρεις κάρτες $\overset{A_1}{\boxed{A|A}}$ $\overset{A_2}{\boxed{A|M}}$ $\overset{A_3}{\boxed{M|M}}$

Φίλος διαλέγει κάρτα στην τύχη και μας δείχνει Α. Ποια η πιθ. η άλλη πλευρά να είναι Α; Ποια η πιθ. να είναι Μ;

$A_i = \{$ο φίλος διαλέγει την κάρτα $i\}$ $i=1,2,3$

$A_\varphi = \{$ο φίλος μας δείχνει $A\}$.

ΘΟΠ $P(A_\varphi) = P(A_1)\overbrace{P(A_\varphi|A_1)}^{1} + P(A_2)\overbrace{P(A_\varphi|A_2)}^{1/2} + P(A_3)\underbrace{P(A_\varphi|A_3)}_{0}$

$= \frac{1}{3}1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Οκτ 13-3:14 μμ

$$P(A_1 | A\varphi) = \frac{P(A_1)\, P(A\varphi | A_1)}{P(A\varphi)} = \frac{(1/3)\cdot 1}{1/2} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_2 | A\varphi) = \frac{P(A_2)\, P(A\varphi | A_2)}{P(A\varphi)} = \frac{(1/3)\,(1/2)}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Δίλημμα κατάδικου A, B, Γ.

Θα αφεθούν οι δύο. Ο φρουρός γνωρίζει.

$$\underline{\Omega} = \Big\{ \underbrace{\overbrace{\{A, B\}}^{A_1}}_{\omega_1},\ \underbrace{\overbrace{\{A, \Gamma\}}^{A_2}}_{\omega_2},\ \underbrace{\overbrace{\{B, \Gamma\}}^{A_3}}_{\omega_3} \Big\} \qquad P(A_i) = \frac{1}{3}$$

$B_\varphi = \{$ο φρουρός αποκαλύπτει ότι ελευθ. ο $B\}$

$$P(B_\varphi) = P(A_1)\,P(B_\varphi \mid A_1) + P(A_2)\,\cancelto{0}{P(B_\varphi \mid A_2)} + P(A_3)\,P(B_\varphi \mid A_3)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 + 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A_3 \mid B_\varphi) = \frac{P(A_3)\cdot P(B_\varphi \mid A_3)}{P(B_\varphi)} = \frac{(1/3)\cdot(1/2)}{(1/2)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P(\text{να αθωωθεί ο } A \mid B_\varphi) = P(A_1 \cup A_2 \mid B_\varphi)$$

$$= P(A_3' \mid B_\varphi) = 1 - P(A_3 \mid B_\varphi) = \frac{2}{3}.$$

Τυχαία Μεταβλητή / Συνάρτηση Κατανομής

τ.μ. $\quad X : \Omega \to \mathbb{R} \quad$ (X κεφαλαίο)

$X, Y, Z, X_1, X_2, Y_3, \ldots$

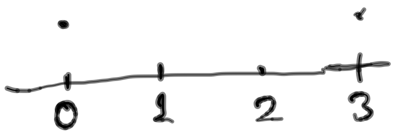
Ρίχνω 3 φορές ένα νόμισμα. <u>Με ενδιαφέρει</u> ο αριθμός "Γ" $(0, 1, 2, 3)$

$$\Omega = \{ \underbrace{(\text{Κ},\text{Κ},\text{Κ})}_{X \downarrow \; 0}, \underbrace{(\text{Κ},\text{Κ},\text{Γ})}_{1}, \underbrace{(\text{Κ},\text{Γ},\text{Κ})}_{1}, \underbrace{(\text{Γ},\text{Κ},\text{Κ})}_{1}, \underbrace{(\text{Κ},\text{Γ},\text{Γ}), (\text{Γ},\text{Κ},\text{Γ}), (\text{Γ},\text{Γ},\text{Κ})}_{2}, \underbrace{(\text{Γ},\text{Γ},\text{Γ})}_{3} \}$$

Οκτ 13-3:42 μμ

$$P(X=0) = \frac{1}{8} = P(X=3)$$

$$P(X=1) = \frac{3}{8} = P(X=2)$$



$\underbrace{\text{Συνάρτηση κατανομής}}_{\substack{\| \\ \text{σ.κ.}}}$ $\underbrace{\text{τυχαίας μεταβλητής}}_{\text{τ.μ.}}$

$$\underline{F(x) \overset{\text{ορ}}{=} P(X \le x),} \quad x \in \mathbb{R}$$

Σημ: $P(X \le x) = P(A)$ όπου $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}$

$\underline{\Omega} = \{ (\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \{\kappa, \Gamma\} \}$ (τρεις ρίψεις)

$X : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ $\quad X = \#$ "Γ"

$X((\kappa,\kappa,\kappa)) = 0$

$X((\kappa,\kappa,\Gamma)) = X((\kappa,\Gamma,\kappa)) = X((\Gamma,\kappa,\kappa)) = 1$

$X((\kappa,\Gamma,\Gamma)) = X((\Gamma,\kappa,\Gamma)) = X((\Gamma,\Gamma,\kappa)) = 2$

$X((\Gamma,\Gamma,\Gamma)) = 3$

Έτσι ορίζονται τα $X(\omega)$, $\omega \in \underline{\Omega}$.

π.χ. $x = 2.3$

$$\{\omega : X(\omega) \le 2.3\} = \{\underset{\omega}{(\kappa,\kappa,\kappa)},\ (\kappa,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\gamma,\kappa),\ (\gamma,\kappa,\kappa),$$
$$(\gamma,\gamma,\kappa),\ (\gamma,\kappa,\gamma),\ (\kappa,\gamma,\gamma)\}$$

$$= \Omega - \{(\gamma,\gamma,\gamma)\} = A$$

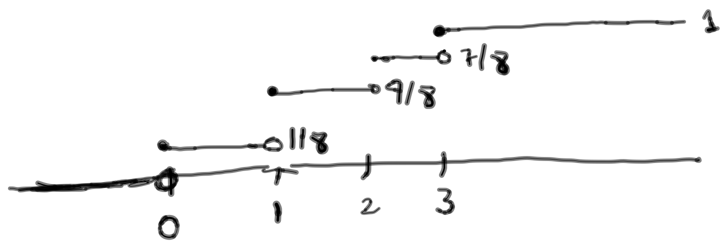
$$F(2.3) = P(A) = \frac{7}{8}$$

$$F(2) = \frac{7}{8} \qquad F(2.999) = \frac{7}{8}$$

διότι $\{\omega : X(\omega) \le 2\} = \{\omega : X(\omega) \le 2.999\}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ 1/8, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 4/8, & \text{αν } 1 \leq x < 2 \\ 7/8, & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ 1, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

Σχήμα;



Βασικές Ιδιότητες σ.κ. F

(i) $F \nearrow$ (αύξουσα)

(ii) F δεξιά συνεχής (δηλ. $F(x+) = F(x)$)

(iii) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ $\quad (F(+\infty) = 1)$

(iv) $\lim_{-\infty} F(x) = 0$ $\quad (F(-\infty) = 0)$

Λήμμα: $P(X < x) = F(x-)$.

Πόρισμα: $P(X = x) = F(x) - F(x-)$, $x \in \mathbb{R}$

Απόδ: (i) Έστω $x<y$. Τότε

$$A_1 = \{\omega : X(\omega) \le x\} \subseteq A_2 = \{\omega : X(\omega) \le y\}$$

$$\Rightarrow P(A_1) \le P(A_2) \quad \delta\eta\lambda. \quad F(x) \le F(y) \quad (F \nearrow)$$

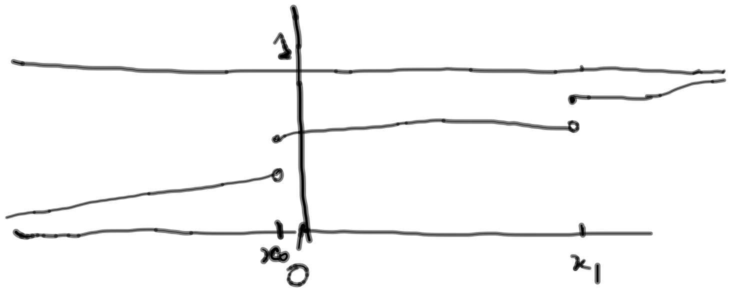
Πόρισμα: $\{X=x\} = \{X \le x\} - \{X < x\}$

γράφω π.χ. $\{X<x\}$ για το $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$

$$P(X=x) = P(\{X\le x\} - \{X<x\}) = P(X\le x) - P(\{X\le x\}\cap\{X<x\})$$

$$= P(X\le x) - P(X<x) = F(x) - F(x-).$$

Οκτ 13-4:30 μμ

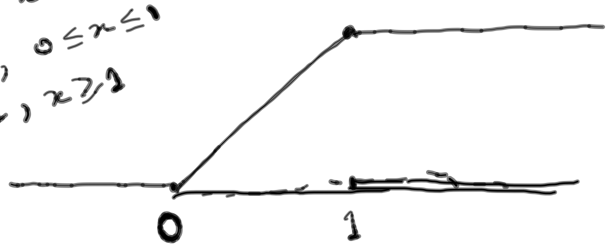


σ.κ.

$P(X=x_0)>0 \qquad P(X=x_1)>0$

$P(X=x)=0 \quad \forall\ x \neq x_0, x_1$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ x, & 0\le x\le 1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$



F συνεχής

$\Rightarrow P(X=x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Διακριτές και Συνεχείς τ.μ.

Ορισμός Η τ.μ. X καλείται διακριτή όταν υπάρχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο $S=\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ τέτοιο ώστε

$$P(X \in S) = 1.$$

(δηλ. η $X \in S$ με πιθ. 1)

Συνήθως το S είναι "απλό" της μορφής $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ ή $S=\{0,1,2,\ldots\}$ ή $\{0,1,\ldots,N\}$ κ.λπ.

Οκτ 13-4:46 μμ

Ορισμός (συνάρτηση πιθανότητας = σ.π. διακριτής τ.μ. X)

$$f(x_k) \overset{op}{=} P(X = x_k) \qquad x_k \in S = \{x_0, x_1, \dots\}$$

$(= 0$ αλλού$)$

(1) $\sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) = 1$ (2) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \qquad (*)$$

Απόδ:

$$F(x_k) = P(X \leq x_k) = P(X \in \{x_0, x_1, \ldots, x_k\})$$

$$= P\left(\bigcup_{i=0}^{k} \{X = x_i\}\right) \overset{\exists\, \text{ένα}}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i),$$

Τέλος:

$$f(x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

Χρησιμοποιούμε πάντα την σ.π. για διακριτές τ.μ.