3ο μάθημα – 11/10/2017

1.4| 5 κλειδιά. Να βρω την πιθ. η πόρτα να ανοίξει στην 3η δοκιμή.

1.13| Ρίχνουμε 5 φορές δύο ζάρια. Βρείτε την πιθανότητα να εμφανισθούν και οι τρεις ενδείξεις (5,6), (6,5), (6,6)

(από τουλάχιστον μία φορά η καθεμία)

$A = \{$να μην εμφανιστεί $(5,6)\}$

$B = \{$να μην εμφανιστεί $(6,5)\}$

$\Gamma = \{$να μην εμφ. $(6,6)\}$

$A' \cap B' \cap \Gamma' = \{$να εμφανιστούν και οι τρεις ζαριές$\}$

$$P(A' \cap B' \cap \Gamma') = 1 - \big(P(A)+P(B)+P(\Gamma)\big) + \big(P(A\cap B)+P(A\cap\Gamma)+P(B\cap\Gamma)\big) - P(A\cap B\cap\Gamma)$$

$$P(A) = P(B) = P(\Gamma) = \left(\frac{35}{36}\right)^5$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap \Gamma) = P(B \cap \Gamma) = \left(\frac{34}{36}\right)^5$$

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = \left(\frac{33}{36}\right)^5$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A' \cap B' \cap \Gamma') = 1 - 3\left(\frac{35}{36}\right)^5 + 3\left(\frac{34}{36}\right)^5 - \left(\frac{33}{36}\right)^5.}$$

1.10 $P(A)=3/4$ $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A\cap B)=3/5$ γνωστά

Βρείτε $P(A-B)$, $P(A\cup B)$, $P(A'\cap B')$

(1): $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(B)+P(A-B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{3}{20}=$ γν.

(3) $P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$ γνωστό

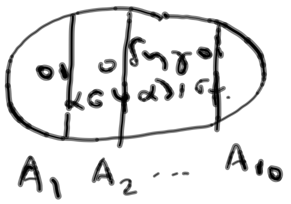
1.16) $A_1, \ldots, A_{10}$ οι 10 κατηγορίες οδηγών.

Η πιθ. να κάνει ατύχημα οδηγός της κατηγ. κ ισούται με $\frac{\kappa}{100}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, 10)$

Το ποσοστό ασφαλισμένων της A_κ είναι $\frac{\kappa}{55}$ $(\kappa = 1, 2, \ldots, 10)$

Αν ένας οδηγός (ασφαλ.) προξενήσει ατύχημα, ποια είναι η πιθανότητα να ανήκει στην κατηγορία A_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$?

$\underline{\Omega}$ =



A_κ = {οι οδηγ. της κατηγ. κ}

$$P(A_\kappa) = \frac{\kappa}{55} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, 10)$$

B = {αυτοί που προσέλθηκαν αζήτητα}

$$P(B \mid A_\kappa) = \frac{\kappa}{100} \quad (\kappa = 1, 2, \ldots, 10)$$

$$P(B) = \sum_{\kappa=1}^{10} P(A_\kappa) P(B \mid A_\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{10} \frac{\kappa}{55} \cdot \frac{\kappa}{100} = \frac{\sum_{\kappa=1}^{10} \kappa^2}{55 \cdot 100}$$

ο.ο.π.

$$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6 \cdot 55 \cdot 100} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 7}{55 \cdot 100}$$

Ζητούμενο: $P(A_j \mid B) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(A_j)\,P(B \mid A_j)}{P(B)}$

$$= \frac{\frac{j}{55} \cdot \frac{j}{100}}{\frac{5 \cdot 11 \cdot 7}{55 \cdot 100}} = \frac{j^2}{5 \cdot 11 \cdot 7} = \frac{j^2}{385} \quad (j = 1, 2, \dots, 10)$$

Σχόλιο: $P(A_k) = \dfrac{k}{55} = c_1 \cdot k$

$$P(A_k \mid B) = \frac{k^2}{385} = c_2 \cdot k^2$$

Οκτ 11-5:51 μμ

Ορισμός: A, B ενδεχόμενα καλούνται [στοχαστικά] ανεξάρτητα όταν

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B). \qquad (*)$$

Σχόλιο: Αν $P(A)>0$, διαιρώ την $(*)$ με $P(A)$ και παίρνω $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B)$ δηλ. $P(B|A) = P(B)$

Αν $P(B)>0$ η $(*) \equiv$ με $P(A|B) = P(A)$

Οκτ 11-5:54 μμ

$$P(A|B) = P(A)$$
και $\Longleftrightarrow$ τα A, B ανεξάρτητα
$$P(B|A) = P(B)$$

ξένα ή ασυμβίβαστα καλούνται τα A, B όταν
$A \cap B = \emptyset$ [το ένα αποκλείει το άλλο]

ανεξάρτητα είναι άλλο πράγμα!

Οκτ 11-5:59 μμ

A_1, A_2, A_3 ανεξάρτητα

$\Longleftrightarrow$ εξ' ορισμού

$$\boxed{\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)\,P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)\,P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)\,P(A_3) \\ (+) \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) \end{aligned}}$$

4 σχέσεις

Γενικά: $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k}) \quad \forall\, k=2,\dots,\nu$

1.29) Αν A, B ανεξάρτητα να δείξετε ότι

(α) τα A', B ανεξάρτητα

(β) τα A, B' ανεξάρτητα

(γ) τα A', B' ανεξάρτητα

(α) $P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$

$\overset{\text{ανεξ.}}{=} P(B) - P(A) \cdot P(B)$

$= (1 - P(A)) P(B)$

$= P(A') \cdot P(B)$

Οκτ 11-6:19 μμ

1.28) Οικογένεια έχει 5 παιδιά. Θεωρώ ότι τα παιδιά έχουν φύλο α ή κ με πιθ. $1/2$, καθένα ανεξάρτητα από τα άλλα παιδιά.

Έστω $A = \{$η οικογ. έχει παιδιά και των 2 φύλων$\}$

$B = \{$η οικογ. έχει το πολύ 1 κορίτσι$\}$.

Είναι τα A, B ανεξάρτητα;

$P(A') = P($όλα τα παιδιά έχουν το ίδιο φύλο$)$

$= P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ $\quad \Gamma_1 = \{$όλα αγόρια$\}$, $\Gamma_2 = \{$όλα κ$\}$

$$P(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 - 0 = \boxed{2\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = P(A')}$$

$$\boxed{P(A) = 1 - 2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5}$$

$P(B) = P(\Delta_0 \cup \Delta_1)$ $\qquad \Delta_0 = \{\text{κανένα κορίτσι}\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta_1 = \{\text{ακριβώς 1 κορίτσι}\}$

$$= P(\Delta_0) + P(\Delta_1) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 + 5\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = \boxed{6\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(\Delta_1) = \boxed{5\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5 = P(A\cap B)}$$

A, B ανεξ. $\Leftrightarrow$ $\underline{5\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5} = \underline{\left(1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^5\right)\cdot 6\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^5}$ $\longrightarrow$ δεν ισχύει

Οκτ 11-6:31 μμ

Τα A, B δεν είναι ανεξάρτητα

$\Leftrightarrow$ τα A, B καλούνται εξαρτημένα.

Με κ παιδιά

$$P(A) = 1 - 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\kappa}, \quad P(B) = (\kappa+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\kappa}$$

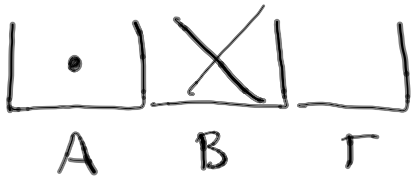
$$P(A \cap B) = \kappa \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\kappa}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow \kappa + 1 = 2^{\kappa - 1} \quad (\kappa = 2, 3, \ldots)$$

$$\Rightarrow \kappa = 3$$

Οκτ 11-6:38 μμ

Μεγάλο παζάρι



Διαλέγω αρχικά την A. Ο παρουσιαστής ανοίγει την B.

Ονομάζω $A = \{$το δώρο είναι στην $A\}$

$B = \{$το δώρο είναι στην $B\}$

$\Gamma = \{$το δώρο είναι στην $\Gamma\}$

$B_{\Pi} = \{$ο παρουσιαστής ανοίγει την $B\}$

ΔΕΝ είναι το B'.

$$P(B_{\Pi}) = P(A) \cdot P(B_{\Pi} | A) + P(B) P(B_{\Pi} | B) + P(\Gamma) P(B_{\Pi} | \Gamma)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A | B_{\Pi}) = \frac{P(A) \cdot P(B_{\Pi} | A)}{P(B_{\Pi})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{1/2} = \frac{1}{3} = P(A)$$

$$P(\Gamma | B_{\Pi}) = \frac{P(\Gamma) \cdot P(B_{\Pi} | \Gamma)}{P(B_{\Pi})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{1/2} = \frac{2}{3} > P(\Gamma) = \frac{1}{3}$$

Στο άλλο μάθημα θα κάνουμε 2 ακόμα παραδείγματα.