2ο μάθημα 6/10/2017

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_\nu) = \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^{k-1} S_{\nu,k}$$

$$S_{\nu,k} = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le \nu} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Πόρισμα:

$$P(A_1' \cap \dots \cap A_\nu') = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k S_{\nu,k}$$

$$S_{\nu,0} = 1$$

Απόδ: $A_1' \cap \dots \cap A_\nu' = (A_1 \cup \dots \cup A_\nu)'$

$$\Rightarrow P(A_1' \cap \dots \cap A_\nu') = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_\nu)$$

Οκτ 6-3:19 μμ

$$\nu = 2 \quad P(A_1 \cup A_2) = \underbrace{P(A_1) + P(A_2)}_{S_{2,1}} - \underbrace{P(A_1 \cap A_2)}_{S_{2,2}}$$

$$P(A_1' \cap A_2') = \underset{S_{2,0}}{1} - \underset{S_{2,1}}{(P(A_1) + P(A_2))} + \underset{S_{2,2}}{P(A_1 \cap A_2)}$$

$$P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') = 1 - \underbrace{(P(A_1) + P(A_2) + P(A_3))}_{S_{3,1}}$$

$$+ \underbrace{(P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3))}_{S_{3,2}} - \overbrace{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}^{S_{3,3}}$$

Окт 6-3:22 μμ

Δεσμευμένη Πιθανότητα

A, B ενδεχόμενα

Πληροφορούμαι ότι συνέβει το A.

$P(B|A) = ?$ δεσμ. πιθ. του B δεδομένου του A.

$\overbrace{1\ \ 2}^{\alpha}\ \overbrace{3\ \ 4\ \ 5}^{\mu}$

B = {να βγάλω α}

A = {μονός αριθμός} $\longrightarrow$ 1 3 5

$P(B) = \frac{2}{5}$. $P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{N(A\cap B)}{N(A)}$

$$P(B|A) = \frac{N(A\cap B)}{N(A)} = \frac{N(A\cap B)/N(\Omega)}{N(A)/N(\Omega)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Ορισμός: $P(A|B) \overset{\text{ορ}}{=} \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

εφ' όσον $P(B) > 0$.

Πολλ/κός Νόμος Πιθανοτήτων

$$P(A_1\cap\dots\cap A_\nu) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1\cap A_2)\dots P(A_\nu|A_1\cdots A_{\nu-1})$$

Απόδ:

$$P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P(A_\nu|A_1\ldots A_{\nu-1})$$

$$=\cancel{P(A_1)}\cdot\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\;\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}\cdots\frac{P(A_1\cap\cdots\cap A_\nu)}{\cancel{P(A_1\cap\cdots\cap A_{\nu-1})}}$$

$$\left(P(A_1\cap\cdots\cap A_{\nu-1})>0\right)$$

Άσκ. 1.4. Έχω 5 κλειδιά, 1 ταιριάζει, τα δοκιμάζω στην τύχη. Ποια η πιθ. να ανοίξω στην 3η δοκιμή;

$A_i = \{$ανοίγω στην i-οστή δοκιμή$\}$ $i=1,\dots,5$.

$$A_3 = A_1' \cap A_2' \cap A_3 \qquad (A_3 \subseteq A_1' \cap A_2')$$

$$\Rightarrow P(A_1' \cap A_2' \cap A_3) = P(A_1')\cdot P(A_2' \mid A_1')\cdot P(A_3 \mid A_1' \cap A_2')$$

$$= \frac{\cancel{4}}{5}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} = \frac{1}{5}.$$

Θ.Ο.Π. (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας)

Αν $A_1, \dots, A_\nu$ ξένα ανά 2 και

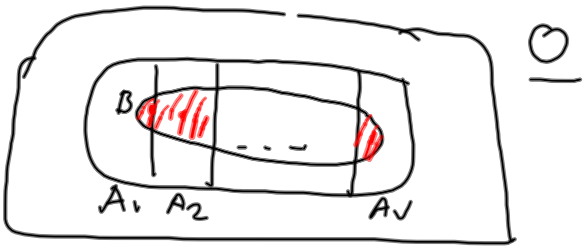
$$B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_\nu$$

τότε $\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{\nu} P(A_i) P(B|A_i).}$ ΘΟΠ

Σημ: Ισχύει πάντα όταν $P(A_i) > 0 \ \forall i$

και $A_1 \cup \dots \cup A_\nu = \Theta$ (και $A_i A_j = \emptyset$)

Απόδ:



$$B = BA_1 \cup \dots \cup BA_\nu \quad (\text{διότι } B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_\nu)$$

$$BA_i \, BA_j = BA_iA_j \overset{\text{υπθ.}}{=} B\emptyset = \emptyset.$$

$$\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{\nu} P(BA_i) \quad \text{και} \quad P(BA_i) = P(A_i)\cdot P(B|A_i)$$

Τύπος Bayes.

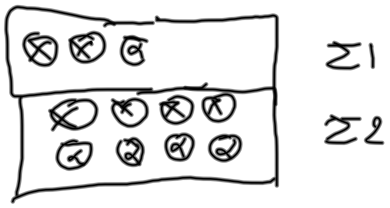
Υπό τις ίδιες συνθήκες του Θ.Ο.Π.,

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)\cdot P(B|A_j)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{\nu} P(A_i)\,P(B|A_i)}_{=P(B)}} \quad (j=1,\dots,\nu).$$

<u>Απόδ.:</u>

$$P(A_j|B) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{P(A_j\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j)\,P(B|A_j)}{\text{Θ.Ο.Π.}}$$

Παράδειγμα



Ανοίγει ένα συρτ. στην τύχη και παίρνει 2 νομίσματα στην τύχη. (α) Βρείτε την πιθ. να είναι χρυσά (και τα δύο). (β) Αν είναι χρυσά και τα δύο, βρείτε την πιθ. να είχε ανοίξει το Σ2.

$A_i = \{\text{ανοίγει το } \Sigma_i\} \quad i=1,2.$

$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ (τυχαία $A_1 \cup A_2 = \Omega$)

$B = \{\text{παίρνει 2 χρυσά}\}.$

$P(B|A_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ (πολλ/κή αρχή)

$P(B|A_2) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$ — II —

$$\Rightarrow P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{14} = \frac{1}{6} + \frac{3}{28} =$$

Οκτ 6-4:36 μμ

(β) $P(A_2 \mid B) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(A_2)\,P(B \mid A_2)}{P(B) = \text{γνωστό}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{14}}{\cdots} =$

$= \dfrac{9}{23} < \dfrac{1}{2}$

$P(A_1 \mid B) = \dfrac{14}{23} > \dfrac{1}{2}$

$A_2 = A_1'$ άρα $P(A_2 \mid B) = P(A_1' \mid B)$

$= 1 - P(A_1 \mid B)$

Η δεσμ. πιθανότητα $P(\cdot \mid B)$ ικανοποιεί τα (1)–(3) του αξιωματικού ορισμού.

π.χ. $P(A_1 \cup A_2 \mid B)$

$$= P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 \cap A_2 \mid B)$$

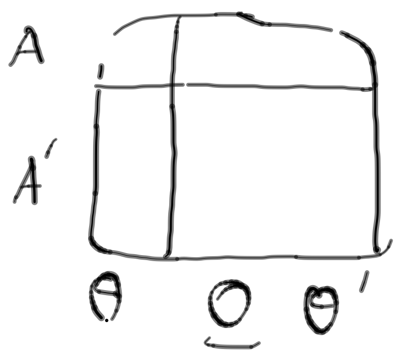
$P(\Omega \mid B) = 1$, $P(\emptyset \mid B) = 0$, $0 \leq P(A \mid B) \leq 1$

κ.ο.κ.

Ασκ. Κεφ. 1. [1.4, 1.10, 1.11, 1.13, 1.15, 1.16, 1.17, 1.24, 1.26, 1.28, 1.29.]

Οκτ 6-4:43 μμ

1.17) Ποσοστό γυναικών που πάσχουν από καρκ. μήτρας είναι 0.001. Το test Παπ. κάνει ορθή διάγνωση στο 97% των περιπτώσεων. Δεδομένου ότι το test για μία γυναίκα βγήκε θετικό, ποια η πιθ. η γυναίκα αυτή να πάσχει?



$A = \{\text{οι ασθενείς}\}$

$A' = \{\text{οι υγιείς}\}$

$\Theta = \{\text{θετικό test}\}$

$P(A) = 0.001$

$\Rightarrow P(A') = 0.999$

$P(\Theta|A) = 0.97 \Rightarrow P(\Theta'|A) = 0.03$

$P(\Theta'|A') = 0.97 \rightarrow P(\Theta|A') = 0.03$

$P(\Theta) \overset{\theta o \pi}{=} P(A)P(\Theta|A) + P(A')P(\Theta|A') = 1094 \cdot 10^{-5}$

$$P(A|\Theta) = \frac{P(A)\,P(\Theta|A)}{P(\Theta)} = \cdots = \frac{97}{1094} < 10\%$$

Η συγκεκριμένη γυναίκα είναι υγιής με πιθ. $> 90\%$ (!)