23ο 10/1/2018

9.1) Μέτρηση ύψους σε 20 άτομα:

173, 166, 168, ..., 165.

(α) Αν υποθέσουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από την $N(\mu, \sigma^2)$ με $\sigma = 5$cm, να ελέγξετε αν το μέσο ύψος είναι μεγαλύτερο από 165cm σε ε.σ. $\alpha = 5\%$.

(β) Ακριβώς το ίδιο με σ^2 άγνωστο.

Λύση: $H_0: \mu \leq 165 = \mu_0$ $\quad H_1: \mu > 165$.

$$\nu = 20 \qquad \bar{X} = \frac{173 + \ldots + 165}{20} = 167.6$$

Κρίσιμη περιοχή: $$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha = 165 + \frac{5}{\sqrt{20}} \overset{1.645}{\overset{\parallel}{z_{0.05}}} = 166.84$$

$\bar{X} \geq 166.84$ Ναι, απορρίπτω την H_0.

Δηλ. είμαι κατά 95% σίγουρος ότι $\mu > 165$.

(β) Τώρα σ^2 άγνωστο. Το εκτιμώ με S^2:

$$S^2 = \frac{1}{\nu-1}\left(\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{\nu} \right)$$

$\Sigma x_i = 3352$, $\Sigma x_i^2 = 562096$, $\nu = 20$

$$\Rightarrow S^2 = 15.8316, \quad S = \sqrt{S^2} = 3.9789$$

Χωρίο απόρριψης:

$$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{\nu}} t_{\nu-1}(\alpha) = 165 + \frac{3.9789}{\sqrt{20}} \overset{1.729}{\boxed{t_{19}(0.05)}}$$

$$\bar{X} \geq 166.54 \qquad (\bar{x} = 167.6)$$

Να απορρ. την H_0 δηλ. $\mu > 165$ με π.θ. τουλάχιστον 95%

9.2) Έστω μ η μέση βαθμολογία των φοιτ. στις εξετάσεις.
Παίρνω δείγμα $\nu = 16$ φοιτητών.

10, 3, 5, 4, ..., 9, 10.

Να ελεγχθεί σε ε.σ. $\alpha = 5\%$ αν η μέση βαθμολογία $\mu \neq 6.5$.
(α) Για δεδομένα $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma_0^2 = \sigma^2 = 4$ (β) $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 άγνωστο.

$$H_0 : \mu = 6.5 = \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq 6.5$$

$$\alpha = 0.05 \quad \mu_0 = 6.5 \quad \sigma_0^2 = 4$$

Χωρίο απόρριψης $|\bar{X} - \mu_0| \geq \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2}$

$$\nearrow \bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2}$$

ή

$$\searrow \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2}$$

$$\bar{X} = 7 \qquad \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2} = 6.5 - \frac{2}{\sqrt{16}} z_{0.025} = 6.5 - \frac{2}{4} 1.96 \simeq 5.5$$

$$\mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2} = \cdots \simeq 7.5$$

Απορρ. την H_0 ανν $\bar{X} \geq 7.5$ ή $\bar{x} \leq 5.5$.

Στα δεδομένα $\bar{X} = 7$. Άρα αποδέχομαι την H_0, $\mu = 6.5$.

Από τα δεδομένα <u>δεν προκύπτουν</u> ισχυρές ενδείξεις ότι $\mu \neq 6.5$.

(β)

$$|\bar{X} - \mu_0| \geq \frac{S}{\sqrt{\nu}} t_{\nu-1}(\alpha/2)$$

$$S^2 = 4.8, \quad s = 2.191 \qquad t_{\nu-1}(\alpha/2) = t_{15}(0.025) = 2.131$$

$$|\bar{X} - 6.5| \geq \frac{2.191}{\sqrt{16}}(2.131) = 1.2 \quad \Big| \quad \text{Χ.Α.:} \ \boxed{\begin{array}{l} \bar{X} \geq 7.7 \\ \text{ή } \bar{X} \leq 5.3 \end{array}}$$

Αποδ. την H_0: $\mu = 6.5$.

9.4) Τυχαία δείγματα υψών 10 μαθητών και 10 μαθητριών (X_i), (Y_j) έδωσαν $\bar{X}=152$ $\bar{Y}=149$ $(\nu_1=10,\ \nu_2=10)$. Να ελέγξετε σε $\alpha=10\%$ αν οι μαθητές είναι ψηλότεροι.

(α) Υποθέτουμε κανονικές $N(\mu_1, 25)$, $N(\mu_2, 49)$.

(β) Υποθέτουμε κανονικές $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$

σ^2 άγνωστη, και $S_1^2=20$, $S_2^2=30$.

Λύση: $H_0:\ \mu_1 \leq \mu_2$ $\quad H_1:\ \mu_1 > \mu_2$

Ισοδύναμα $H_0:\ \mu_1-\mu_2 \leq \delta_0 = 0$ $\quad H_1:\ \mu_1-\mu_2 > \delta_0 = 0$

(α) Απορρίπτω την H_0 όταν

$$\bar{X}-\bar{Y} \geq \delta_0 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}\ z_\alpha = 0 + \sqrt{\frac{25}{10}+\frac{49}{10}}\cdot \overset{1.282}{\overset{\parallel}{z_{0.10}}} = 3.487$$

Χ.Α.: $\bar{X}-\bar{Y} \geq 3.487$.

Εδώ $\bar{X}-\bar{Y}=152-149=3 \ngeq 3.487$. Αποδέχομαι την H_0

(δεν έχω στοιχεία να συμπεράνω ότι οι μαθητές είναι ψηλότεροι).

(β) Χ.Α. $\bar{X}-\bar{Y} \geq \delta_0 + S_p \sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}\; t_{\nu_1+\nu_2-2}(\alpha)$

$$S_p^2 = \frac{(\nu_1-1)S_1^2+(\nu_2-1)S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2} = \frac{9\cdot 20+9\cdot 30}{18} = 25 \Rightarrow S_p=\sqrt{S_p^2}=5.$$

Χ.Α. $\bar{X}-\bar{Y} \geq 0+5\cdot\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\;\underset{\substack{\parallel\\ 1.33}}{t_{18}(0.10)} = 2.974$

Χ.Α. $\bar{X}-\bar{Y} \geq 2.974$. $\bar{X}-\bar{Y}=3 \geq 2.974$. Απορρ. την H_0,

δηλ. ΕΧΩ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΤΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΕΙΝΑΙ ΨΗΛΟΤΕΡΟΙ.

9.9] Ποσότητα οινοπνεύματος οδηγών

πόλη X (120 οδηγοί), $X_1, \ldots, X_{120}$, $\Sigma X_i = 120$, $\Sigma x_i^2 = 300$, $\nu_1 = 120$

πόλη Y (80 οδηγοί), $Y_1, \ldots, Y_{80}$, $\Sigma Y_j = 100$, $\Sigma Y_j^2 = 600$, $\nu_2 = 80$.

Βρείτε τα $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$. Αν μ_1, μ_2 είναι οι μέσοι όροι οινοπνεύματος στην πόλη X (Y) αντίστοιχα, να ελέγξετε αν $\mu_2 > \mu_1$. ($\alpha = 5\%$).

Λύση: $\bar{X} = \frac{\Sigma X_j}{\nu_1} = \frac{120}{120} = 1$ $\quad \bar{Y} = \frac{\Sigma Y_j}{\nu_2} = \frac{100}{80} = 1.25$

$$S_1^2 = \frac{1}{\nu_1 - 1}\left(\Sigma x_i^2 - \frac{(\Sigma x_i)^2}{\nu_1}\right) = \frac{1}{119}\left(300 - \frac{(120)^2}{120}\right) = 1.513$$

$$S_2^2 = \cdots = 6.013$$

$H_0: \mu_1 \geqslant \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 < \mu_2$

$\mu_1 - \mu_2 \geqslant 0 \qquad \mu_1 - \mu_2 < 0 = \delta_0$

Χ.Α. (μεγάλα δείγματα, $\nu_1 = 120$, $\nu_2 = 80$)

$$\bar{X} - \bar{Y} \leq \delta_0 - \sqrt{\frac{s_1^2}{\nu_1} + \frac{s_2^2}{\nu_2}}\, z_\alpha = 0 - \sqrt{\frac{1.513}{120} + \frac{6.013}{80}}\, \overset{\overset{1.645}{\shortparallel}}{z_{0.05}}$$

Χ.Α.: $\bar{X} - \bar{Y} \leq -0.487$

Εδώ $\bar{X} - \bar{Y} = 1 - 1.25 = -0.25 \not\leq -0.487$. Αποδ. την H_0.

9.14 Σε δύο εξεταστ. περιόδους εξετάστηκαν 80 και 110 φοιτητές και πέτυχαν 60 και 80 αντίστοιχα. Να εξεταστεί σε ε.σ. $a = 5\%$ αν η πιθ. επιτυχίας είναι ίδια στις δύο περιόδους.

Λύση: $X_1, \dots, X_{80} \sim b(p_1)$ $\qquad Y_1, \dots, Y_{110} \sim b(p_2)$

$$\hat{p}_1 = \bar{X} = \frac{\Sigma x_i}{\nu_1} = \frac{60}{80} = 0.75$$

$$\hat{p}_2 = \bar{Y} = \frac{80}{110} = \frac{8}{11} = 0.727$$

$H_0: \ p_1 = p_2 \qquad H_1: \ p_1 \neq p_2$

Χ.Α. $\quad |\bar{X} - \bar{Y}| \geq \sqrt{\frac{S_1^2}{\nu_1} + \frac{S_2^2}{\nu_2}} \, z_{a/2}$

$S_1^2 = \bar{x}(1-\bar{x}) = 0.1875$

$S_2^2 = \bar{Y}(1-\bar{Y}) = 0.1983$

Χ.Α. $|\bar{X}-\bar{Y}| \geq \sqrt{\frac{0.1875}{80}+\frac{0.1983}{110}} \cdot \underset{\underset{z_{0.025}}{\|}}{(1.96)} = 0.126.$

Χ.Α. $|\bar{X}-\bar{Y}| \geq 0,126$

Εδώ $|\bar{X}-\bar{Y}| = |-0.0227| = 0.0227 \not\geq 0.126 \Rightarrow$ Αποδ. H_0

$(p_1 = p_2)$.

9.21 baseball:

ο Α έκανε 233 βολές και πέτυχε στις 84

ο Β έκανε 350 —||— 103,

Ο Α ισχυρίζεται ότι είναι καλύτερος. Έχει δίκιο;

$H_0: p_1 \leq p_2$ $\quad$ $H_1: p_1 > p_2$

Χ.Α. $\bar{x}-\bar{y} \geqslant \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{\nu_1}+\frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{\nu_2}} \cdot z_a$

$\bar{x} = \frac{84}{233} = 0,3605$ $\quad$ $\bar{x}(1-\bar{x}) = 0,230544$

$\bar{y} = \frac{103}{350} = 0,2943$ $\quad$ $\bar{y}(1-\bar{y}) = 0,2077$

Χ.Α. $\bar{x}-\bar{y} \geqslant \sqrt{\frac{0.23}{233}+\frac{0.21}{350}} \; \overset{\overset{z_{0.05}}{\shortparallel}}{(1.645)} = 0.066$

Χ.Α. $\bar{x}-\bar{y} \geqslant 0.066.$

Εδώ $\bar{x}-\bar{y} = 0.3605-0.2943 = 0.0662.$ Απορρ. H_0 οριακά.