22ο 22/12/2017

Έλεγχοι Υποθέσεων

$X_1, \dots, X_\nu \sim b(p)$ $p = \theta \in (0,1)$ άγνωστο.

$\hat{p} = \bar{X}$ $\bar{X} = 0.51 = 51\%$.

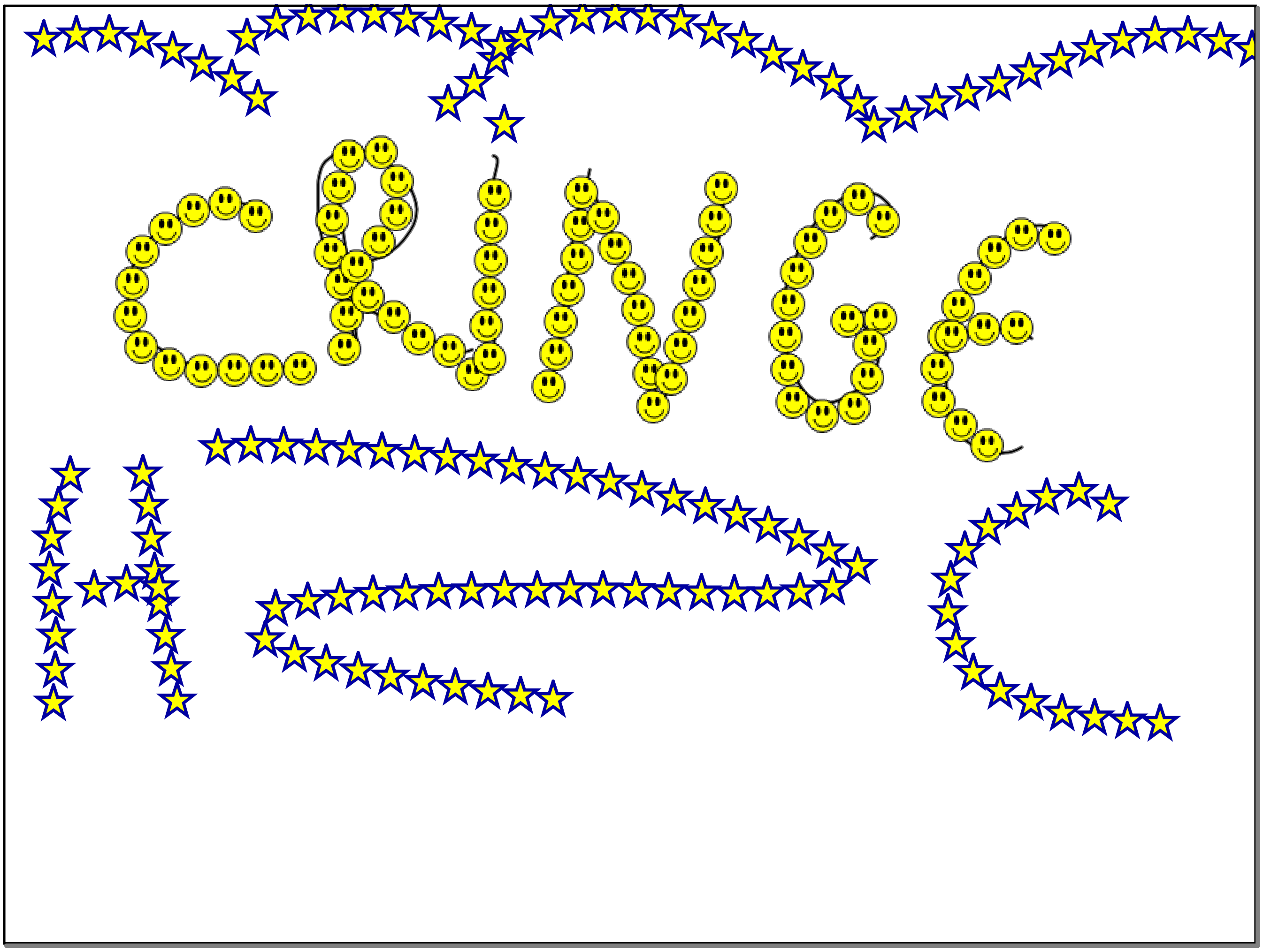
Είναι αλήθεια ότι $p > 0.5$?

H_0: $p \leq 0.50 = p_0$ (μηδενική υπόθεση)

H_1: $p > 0.50$ (εναλλακτική υπόθεση)

Σαν H_1 ορίζουμε αυτό που θέλουμε να "αποδείξουμε"!

Δεκ 22-3:04 μμ



Δεκ 22-3:05 μμ

	ισχύει η H_0	ισχύει η H_1
Αποφ. υπέρ H_0	✓	σφ. τύπου II
Αποφ. υπέρ H_1	σφ. τύπου I	✓

Αποφ. υπέρ H_0 $\equiv$ Αποδέχομαι την H_0

Αποφ. υπέρ H_1 $\equiv$ Απορρίπτω την H_0

σφ. τύπου I $\overset{ορ}{=}$ Εσφαλμένη απόρριψη της H_0.

$\alpha =$ επίπεδο σημαντικότητας (ε.σ.) του ελέγχου

$$= \sup_{H_0} P(\text{σφ. τύπου I})$$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $X_1, \dots, X_\nu \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ σ_0^2 γνωστό.

Η ελεγχοσυνάρτηση είναι η $\dfrac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0}$

σε καθεμία από τις περιπτώσεις

(α) $H_0: \mu \leq \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$

(β) $H_0: \mu \geq \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$

μονόπλευροι

(γ) $H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$ (αμφίπλευρος).

Στην (α) απορρίπτω την H_0 όταν $\dfrac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \geq z_\alpha$

ισοδ. $\boxed{\bar{X} \geq \mu_0 + \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha}$ Κρίσιμη περιοχή ή περιοχή απόρριψης της H_0

Δεκ 22-3:34 μμ

Στην (β) απορρ. όταν $\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0} \leq -z_\alpha$

δηλ. $\bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha$ [κρίσιμη περιοχή]

Στην (γ) απορρ. όταν $\left|\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{\sigma_0}\right| \geq z_{\alpha/2}$

δηλ. $\boxed{\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2} \quad \text{ή} \quad \bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2}}$

Απόδ. (α). Έστω ότι ισχύει η $H_0: \mu \leq \mu_0$.

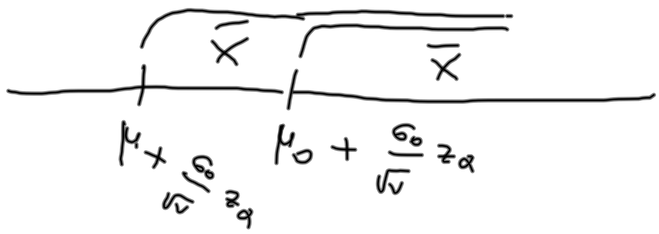
τότε

$$\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma_0} \sim N(0,1) \Rightarrow P\left(\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma_0} > z_\alpha\right) = \alpha$$

δηλ. $P\left(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha\right) = \alpha$. Όμως, $\mu \leq \mu_0$

$$\mu + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha \leq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha$$

$$P\left(\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha\right) \le P\left(\bar{X} > \mu + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha\right) = \alpha$$



$\forall \; \mu \le \mu_0$ ισχύει $P(\text{σφ. τ. I}) = P\left(\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha\right) \le \alpha$

Κρίσιμη περιοχή $\bar{X} > \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_\alpha$

Εξασφαλίζει $P(\text{σφ. τ. I}) \le \alpha \quad \forall \; \mu \le \mu_0$.

Κανονική με σ^2 άγνωστο.

$H_0: \mu \leq \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$

$H_0: \mu \geq \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$

$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$

$$T_{\nu-1} = \frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S}.$$

Χωρία απορρίψεως:

(α) $\dfrac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S} \geq t_{\nu-1}(\alpha)$, $\bar{X} \geq \mu_0 + \dfrac{S}{\sqrt{\nu}}\,t_{\nu-1}(\alpha)$

(β) $\dfrac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S} \leq -t_{\nu-1}(\alpha)$, $\bar{X} \leq \mu_0 - \dfrac{S}{\sqrt{\nu}}\,t_{\nu-1}(\alpha)$

(γ) $\left|\dfrac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right| \geq t_{\nu-1}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

ή $|\bar{X}-\mu_0| \geq \dfrac{S}{\sqrt{\nu}}\,t_{\nu-1}(\alpha/2)$.

Δεκ 22-3:52 μμ

Επειδή $\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu)}{S} \xrightarrow{\nu\to\infty} N(0,1)$ (για κάθε κατανομή με μ, σ^2 πεπερ.)

Γενικά!

<u>Θεώρημα:</u> Αν $X_1, \dots, X_\nu$ ένα τ. δείγμα από κάποια κατανομή με μέσο μ (άγνωστο), διασπορά σ^2 (άγνωστη) και αν $\nu \to \infty$ τότε:

(α) $H_0: \mu \leq \mu_0$ v.s. $H_1: \mu > \mu_0$ απορρ. την H_0 όταν

$$\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu_0)}{S} \geq z_\alpha$$

(β) $H_0: \mu \geq \mu_0$ v.s. $H_1: \mu < \mu_0$ απορρ. όταν $\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu_0)}{S} \leq -z_\alpha$

(γ) $H_0: \mu = \mu_0$ v.s. $H_1: \mu \neq \mu_0$ απορρ. όταν $\left|\frac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu_0)}{S}\right| \geq z_{\alpha/2}$

Πόρισμα για την bernoulli(p), όπου $S^2 \simeq \bar{X}(1-\bar{X})$

(α) $H_0: p \leq p_0$ vs. $H_1: p > p_0$ Κ.Α.: $\dfrac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-p_0)}{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}} \geq z_\alpha$

(β) $H_0: p \geq p_0$ v.s. $H_1: p < p_0$ Κ.Α. $\dots \leq -z_\alpha$

(γ) $H_0: p = p_0$ v.s. $H_1: p \neq p_0$ Κ.Α. $|\dots| \geq z_{\alpha/2}$

$(\nu \to \infty)$.

9.5 3400 κάτοικοι, οι 800 προσβ. Μπορούμε να ισχυρ. ότι στην πόλη αυτή το ποσοστό είναι >20% (σε ε.σ. 2%).

$\nu = 3400$ $X_i \sim b(p)$ $i = 1, 2, \dots, \nu$. $X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν προσβ.} \\ 0, & \text{διαφ.} \end{cases}$

$$\bar{X} = \frac{800}{3400} = \frac{8}{34} = 0.2353 = 23.53\%$$

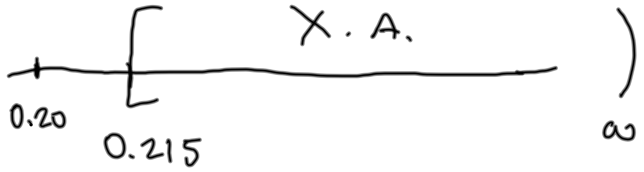
$H_0: p \leq 0.2 = p_0$ v.s. $H_1: p > 0.2$

Χ.Α. $\bar{X} \geq p_0 + \frac{S}{\sqrt{v}} z_{0.02}$ $S = \sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}$

$z_{0.02} = 2.05$

$v = 3400$

$$\bar{X} \geq (0.20) + \frac{0.42418}{\sqrt{3400}} (2.05) = 0.215$$



Εδώ $\bar{X} = 0.2353 > 0.215$ άρα απορρ. την H_0 δηλ.

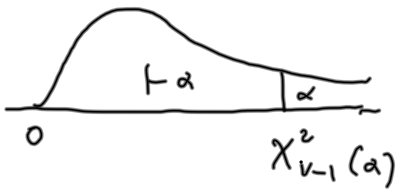
έχω στοιχεία ώστε να συμπεράνω ότι $p > 0.20$ και μάλιστα το σφάλμα θα είναι το πολύ $a = 0.02 = 2\%$.

Έλεγχος για την άγνωστη διασπορά της $N(\mu, \sigma^2)$

$$\frac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{\nu-1}$$

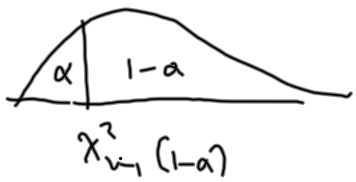
(α) $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ θα απορρίψω όταν

Χ.Α.: $\dfrac{(\nu-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\nu-1}(\alpha)$



(β) $H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

Χ.Α. $\dfrac{(\nu-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{\nu-1}(1-\alpha)$



(γ) $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ vs $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ απορρ. αν $\dfrac{(\nu-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{\nu-1}(\alpha/2)$

ή —"— $< \chi^2_{\nu-1}(1-\frac{\alpha}{2})$

Ή σύγκριση δύο δειγμάτων.

$X_1, \ldots, X_{\nu_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_1, \ldots, Y_{\nu_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

Υποθέτω ότι σ_1^2, σ_2^2 γνωστά, αλλά τα μ_1, μ_2 άγνωστα.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{\nu_1}\right), \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}\right)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}\right)$$

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}} \sim N(0,1)$$

(α) $H_0: \mu_1-\mu_2 \le \delta_0$ v.s. $H_1: \mu_1-\mu_2 > \delta_0$ (συνήθως $\delta_0=0$)

(β) $H_0: \mu_1-\mu_2 \geq \delta_0$ v.s. $H_1: \mu_1-\mu_2 < \delta_0$

(γ) $H_0: \mu_1-\mu_2 = \delta_0$ vs $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq \delta_0$

Ελεγχοσυνάρτηση: $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1}+\frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}}$

Χ.Α. (α) $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/\nu_1+\sigma_2^2/\nu_2}} \geq z_\alpha$

(β) ίδιο $\leq -z_\alpha$

(γ) $|$ίδιο$| \geq z_{\alpha/2}$

Όταν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sigma\sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}}\,.$$

Όταν το <u>κοινό</u> σ^2 είναι άγνωστο τότε η

$$\boxed{T_{\nu_1+\nu_2-2} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{S_p\cdot\sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}}} \sim t_{\nu_1+\nu_2-2}$$

$$S_p^2 = \frac{(\nu_1-1)\,S_1^2+(\nu_2-1)\,S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2}$$

Το Χ.Α. στις (α), (β), (γ) είναι:

(α) Χ.Α. $\quad T_{\nu_1+\nu_2-2} \geq t_{\nu_1+\nu_2-2}(\alpha)$

(β) $\quad T_{\nu_1+\nu_2-2} \leq -t_{\nu_1+\nu_2-2}(\alpha)$

(γ) $\quad |T_{\nu_1+\nu_2-2}| \geq t_{\nu_1+\nu_2-2}(\alpha/2)$

<u>Θεώρημα</u>: Αν $X_1,\dots,X_{\nu_1}$ τ.δ. από κάποια κατανομή με μέσο μ_1, διασπορά σ_1^2, και $Y_1,\dots,Y_{\nu_2}$ τ.δ. από κάποια άλλη κατανομή με μέσο μ_2, διασπορά σ_2^2, και αν $\nu_1, \nu_2 \to \infty$ τότε:

Η ελεγχοσυνάρτηση είναι $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{\nu_1}+\dfrac{S_2^2}{\nu_2}}}$

ναι στην

(α) $H_0: \mu_1-\mu_2 \le \delta_0$ vs $H_1: \mu_1-\mu_2 > \delta_0$ το Χ.Α. είναι

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{\nu_1}+\frac{S_2^2}{\nu_2}}} \geq z_\alpha$$

(β) $H_0: \mu_1-\mu_2 \geq \delta_0$ vs $H_1: \mu_1-\mu_2 < \delta_0$ το Χ.Α. είναι

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{\nu_1}+\frac{S_2^2}{\nu_2}}} \leq -z_\alpha$$

(γ) $H_0: \mu_1-\mu_2 = \delta_0$ vs $H_1: \mu_1-\mu_2 \neq \delta_0$ το Χ.Α. είναι

$$\left| \frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{\nu_1}+\frac{S_2^2}{\nu_2}}} \right| \geq z_{\alpha/2}.$$

Δεκ 22-4:47 μμ

Πόρισμα για bernoulli.

$X_1, \ldots, X_{\nu_1} \sim b(p_1)$, $Y_1, \ldots, Y_{\nu_2} \sim b(p_2)$.

Ελεγχοσυνάρτηση $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-\delta_0}{\sqrt{\dfrac{\bar{X}(1-\bar{X})}{\nu_1}+\dfrac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{\nu_2}}} = Z_{\nu_1,\nu_2}$

(α) $H_0: p_1-p_2 \leq \delta_0$ vs $H_1: p_1-p_2 > \delta_0$ Κ.Α. $Z_{\nu_1,\nu_2} \geq z_\alpha$

(β) $\geq$ $<$ Κ.Α. $\leq -z_\alpha$

(γ) $=$ $\neq$ Κ.Α. $|Z_{\nu_1,\nu_2}| \geq z_{\alpha/2}$

Δεκ 22-4:49 μμ

Έλεγχος του λόγου διασπορών από δύο κανονικά ανεξάρτητα δείγματα.

$$\frac{(\nu_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{\nu_1-1} \qquad \frac{(\nu_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{\nu_2-1}$$

$$F_{\nu_1-1,\nu_2-1} = \frac{\frac{(\nu_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}\Big/(\nu_1-1)}{\frac{(\nu_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}\Big/(\nu_2-1)} = \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$$

Δηλ. $\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F_{\nu_1-1,\nu_2-1}$

<u>Θεώρημα:</u> Αν $X_1,\dots,X_{\nu_1} \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y_1,\dots,Y_{\nu_2} \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ τότε για τον έλεγχο της υπόθεσης

Δεκ 22-4:52 μμ

$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$ vs $H_1: \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$,

η ελεγχοσυνάρτηση είναι η S_1^2/S_2^2

και το χ. απόρριψης είναι

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\nu_1-1,\nu_2-1}(\alpha/2) \quad \text{ή} \quad \underbrace{\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\nu_1-1,\nu_2-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

[Διότι υπό την H_0, $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ άρα $S_1^2/S_2^2 \sim F_{\nu_1-1,\nu_2-1}$].

$$F_{\nu_1-1,\nu_2-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{F_{\nu_2-1,\nu_1-1}(\alpha/2)}$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{\nu_1-1,\nu_2-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{F_{\nu_2-1,\nu_1-1}(\alpha/2)} \Leftrightarrow \frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{\nu_2-1,\nu_1-1}(\alpha/2).$$

Τελικά το Χ.Α. της $H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$ είναι το

$$\boxed{\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{\nu_1-1,\nu_2-1}(\alpha/2) \quad \text{ή} \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{\nu_2-1,\nu_1-1}(\alpha/2)}$$

- Ασκ. 9.1, 9.2, 9.4, 9.5, 9.6, 9.9, 9.14, 9.21