21ο 20/12/2017

$X_1, \ldots, X_{\nu_1}$
$Y_1, \ldots, Y_{\nu_2}$ δύο ανεξάρτητα δείγματα

(α) Αν $X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ με μ_1, μ_2 άγνωστα, σ_1^2, σ_2^2 γνωστά, τότε το $(1-\alpha)$-ΔΕ για το $\mu_1 - \mu_2$ είναι το

$$\left[\, \bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}\, z_{\alpha/2},\ \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}\, z_{\alpha/2} \,\right]$$

Παρατήρηση: Αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ τότε το Δ.Ε.:

$$(\bar{X} - \bar{Y}) \pm \sigma \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2}}\, z_{\alpha/2}$$

(β) Αν $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ (άγνωστο): $N(\mu_1,\sigma^2)$, $N(\mu_2,\sigma^2)$

$$S_1^2=\frac{1}{\nu_1-1}\sum_{i=1}^{\nu_1}(x_i-\bar{x})^2 \quad \text{εκτιμ. } \sigma^2$$

$$S_2^2=\frac{1}{\nu_2-1}\sum_{j=1}^{\nu_2}(y_j-\bar{y})^2 \quad -\text{''}-$$

$$S_p^2\overset{\text{op}}{=}\frac{(\nu_1-1)S_1^2+(\nu_2-1)S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2}=\frac{1}{\nu_1+\nu_2-2}\left\{\sum_{i=1}^{\nu_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{j=1}^{\nu_2}(y_j-\bar{y})^2\right\}$$

p = pooled

$$(\nu_1+\nu_2-2)\,S_p^2\approx\chi^2_{\nu_1+\nu_2-2}\Rightarrow\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}}\sim t_{\nu_1+\nu_2-2}$$

Παρόμοιως $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}}\sim N(0,1)$$

Το Δ.Ε.: $(\bar{X}-\bar{Y}) \pm S_p \sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}\; t_{\nu_1+\nu_2-2}(\alpha/2)$

(γ) Αν $\nu_1, \nu_2 \to \infty$ (μεγάλα), τότε δεν χρειάζεται να υποθέσουμε κανονικότητα, αλλά το Δ.Ε.

$$(\bar{X}-\bar{Y}) \pm \sqrt{\frac{S_1^2}{\nu_1}+\frac{S_2^2}{\nu_2}}\; z_{\alpha/2}$$

είναι προσεγγιστικό 1-α ΔΕ για το $\mu_1-\mu_2$.

Εφαρμογή: $X_1,\dots,X_{\nu_1} \sim b(p_1)$, $Y_1,\dots,Y_{\nu_2} \sim b(p_2)$. Μας ενδιαφέρει Δ.Ε. για το p_1-p_2

$$S_1^2 = \frac{\nu_1}{\nu_1 - 1} \bar{X}(1-\bar{X}) \simeq \bar{X}(1-\bar{X})$$

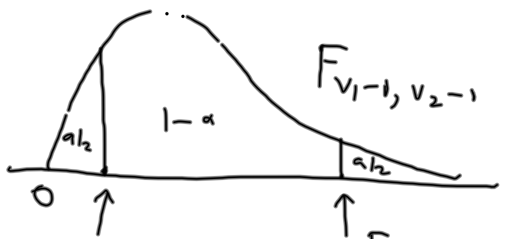
$$S_2^2 \simeq \bar{Y}(1-\bar{Y}) \qquad \Delta.E.: \quad (\bar{X}-\bar{Y}) \pm \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{\nu_1} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{\nu_2}} \cdot z_{\alpha/2}$$

Διάστημα εμπιστοσύνης για τον λόγο διασπορών σ_1^2/σ_2^2 από δύο δείγματα $X_1, \ldots, X_{\nu_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y_1, \ldots, Y_{\nu_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

$$\frac{(\nu_1-1) S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{\nu_1-1} \qquad \frac{(\nu_2-1) S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{\nu_2-1}$$

$$F_{n_1,n_2} \overset{\text{op}}{=} \frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2} \Rightarrow \frac{\frac{(\nu_1-1) S_1^2}{\sigma_1^2} \Big/ (\nu_1-1)}{\frac{(\nu_2-1) S_2^2}{\sigma_2^2} \Big/ (\nu_2-1)} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$\sim F_{\nu_1-1, \nu_2-1}$$



$F_{\nu_1-1,\nu_2-1}(a/2) = c_2$

$$c_1 = F_{\nu_1-1,\nu_2-1}(1-a/2) = \frac{1}{F_{\nu_2-1,\nu_1-1}(a/2)}$$

από τον ορισμό της F

$$P\left(c_1 \leq \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq c_2\right) = 1-a$$

$$P\left(c_1\cdot\frac{S_2^2}{S_1^2} \leq \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq c_2\frac{S_2^2}{S_1^2}\right) = P\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{c_2} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq \frac{S_1^2/S_2^2}{c_1}\right)$$

$$\Delta E:\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}:\left[\frac{1}{F_{\nu_1-1,\nu_2-1}(a/2)}\ \frac{S_1^2}{S_2^2},\ F_{\nu_2-1,\nu_1-1}(a/2)\cdot\frac{S_1^2}{S_2^2}\right]$$

Ασκήσεις 8.1, 8.4, 8.5, 8.6, 8.10, 8.13, 8.14, 8.15, 8.16, 8.19, 8.23, 8.30, 8.31

$\boxed{8.5}$ Δ.Ε. 99%, και πλάτος Δ.Ε. το πολύ 1 kgr, όταν γνωρίζει ότι $\sigma = \sigma_0 = 1$ kgr.

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2},\ \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2} \right]$$

Πλάτος: $2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2} \leq 1 \overset{\sigma_0 = 1}{\Leftrightarrow} 2 \cdot z_{\alpha/2} \leq \sqrt{\nu} \Leftrightarrow \nu \geq 4 \cdot z_{\alpha/2}^2$

$1-\alpha = 0.99 = $ Δ.Ε. $\Rightarrow \alpha = 0.01,\ \alpha/2 = 0.005 \quad z_{\alpha/2} = 2.575$

$$\nu \geq 4 \cdot (2.575)^2 = 26.525 \quad (\nu \geq 27).$$

8.6) $\quad \nu \geq 4\sigma_0^2 z_{\alpha/2}^2 = 238.70 \qquad (\sigma_0 = 3)$

8.4) $\nu_1 = 10$ μαθητές $\quad \nu_2 = 10$ μαθήτριες

$\bar{X} = 152 \qquad \bar{Y} = 149$

(i) Να εκτιμηθεί σημειακά η διαφορά των μέσων υψών.

$$\widehat{\mu_1 - \mu_2} = \bar{X} - \bar{Y} = 152 - 149 = 3$$

(ii) Να κατασκ. 95% ΔΕ για τη διαφορά $\mu_1 - \mu_2$

(α) Αν $\sigma_1^2 = 25$, $\sigma_2^2 = 49$

(β) Αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ (άγνωστο) αλλά $S_1^2 = 20$, $S_2^2 = 30$.

(α): $$\bar{X} - \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{\nu_1} + \frac{\sigma_2^2}{\nu_2}}\, z_{\alpha/2} = (152 - 149) \pm \sqrt{\frac{25}{10} + \frac{49}{10}} \cdot \underbrace{z_{0.025}}_{}^{1.645}$$

$$\text{ΔΕ}: \quad 3 \pm 4.47 = (-1.47,\ 7.47)$$

(ε) $(\bar{X}-\bar{Y}) \pm S_p\sqrt{\frac{1}{\nu_1}+\frac{1}{\nu_2}}\; t_{\nu_1+\nu_2-2}(a/2)$

$$S_p^2 = \frac{(\nu_1-1)S_1^2+(\nu_2-1)S_2^2}{\nu_1+\nu_2-2} = \frac{9\cdot 20 + 9\cdot 30}{18} = 25$$

Δ.Ε.: $(152-149) \pm 5\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\; \underbrace{t_{18}(0.025)}_{2.1009}$

$$= 3 \pm 2.34 = (0.66,\ 5.34).$$

8.10)

	# ερωτ.	# με ανωμαλία
Πόλη 1	300	25
Πόλη 2	350	42

Να γίνει 95% Δ.Ε. για τη διαφορά p_1-p_2 των ποσοστών των ατόμων που παρουσιάζουν κάποια ανωμαλία.

$\nu_1 = 300 \quad \nu_2 = 350 \qquad X_1, \dots, X_{\nu_1} \sim b(p_1)$

$$Y_1, \dots, Y_{\nu_2} \sim b(p_2)$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{\nu_1} = \frac{25}{300} = 8.333\% = 0.0833\ldots = \hat{p}_1$$

$$\bar{Y} = \frac{42}{350} = 0.012 \qquad (\mu_1 - \mu_2 = p_1 - p_2, \text{ bernoulli}).$$

Δ.Ε. $\bar{X} - \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{\nu_1} + \frac{\bar{Y}(1-\bar{Y})}{\nu_2}}\, z_{\alpha/2}$

$$= (-0.03666 \pm 0.023\, z_{\alpha/2})$$

90%, 95%, 99%!

$\alpha = 0.10 \quad z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645 \qquad$ ΔΕ $(-0.075,\ 0.002)$ -7.5% 0.2%

$\alpha = 0.05 \quad z_{\alpha/2} = 1.96 \qquad (-8.3\%,\ 0.96\%)$

$\alpha = 0.01 \qquad (-9.74\%,\ 2.41\%)$

8.13) Χρόνος μετακίνησης 20 εργαζομένων:

Λεπτά	συχν. (ν_i)	Λεπτά	συχν.
0–10	1 (ν_1)	50–60	2
10–20	2 (ν_2)	60–70	2
20–30	3	70–80	2
30–40	4	80–90	1
40–50	2	90–100	1 (ν_{10})

Υπολογίστε τα $\bar{X}$ και S^2. Μετά κατασκευάστε 90% Δ.Ε. για το μ και το σ^2 αν $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$k=10$ κλάσεις $\qquad \nu_1 + \dots + \nu_k = \nu = 20$

$$\bar{X} = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{k} \nu_i c_i \qquad c_i = \text{κέντρο κλάσης } i \quad (i=1,2,\dots,k)$$

$$= \frac{1}{20}\left(1\cdot 5 + 2\cdot 15 + 3\cdot 25 + \dots + 1\cdot 95\right) = 45{,}5.$$

$$S^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum (x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{\nu-1}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \nu\,\bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{\nu-1}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \nu_i \cdot c_i^2} - \nu\cdot\bar{x}^2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{k} \nu_i\, c_i^2 = 1\cdot 5^2 + 2\cdot 15^2 + \dots + 1\cdot 95^2 = \text{γνωστό}$$

$$\boxed{S^2 = \dots = 626.053, \quad \bar{x} = 45.5}$$

$$S = \sqrt{S^2} = 25.021$$

$\alpha = 0.10$ (για 90%) : $\bar{x} \pm \frac{S}{\sqrt{\nu}}\, t_{\nu-1}(\alpha/2) = 45.5 \pm \frac{25.021}{\sqrt{20}}\, t_{19}(0.05)$

δηλ. Δ.Ε. για το μ : $[35.8,\ 55.2]$.

σ^2: $\left(\dfrac{(\nu-1)\, S^2}{\chi^2_{\nu-1}(\alpha/2)}, \dfrac{(\nu-1)\, S^2}{\chi^2_{\nu-1}(1-\alpha/2)} \right)$ $\alpha = 0.05$

$\chi^2_{\nu-1}(\alpha/2) = \chi^2_{19}(0.025) = 35.852$

$\chi^2_{\nu-1}(1-\alpha/2) = \chi^2_{19}(0.975) = 8.907$

95% ΔΕ για το σ^2: $(362.08,\ 1335.47)$

ΔΕ για το σ: $\left(\sqrt{\dots},\ \sqrt{}\right) = (19.0,\ 36.5)$

8.30 Αν $X_1, \dots, X_\nu \sim f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x>0$ $(\theta>0)$, να γίνει $(1-\alpha)$-ΔΕ για το θ (α) ακριβές, (β) προσεγγιστικό (για $\nu \to \infty$).

(α) Έστω $T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$

$X_i \sim \mathcal{E}xp(\theta) \equiv \Gamma(1, \theta) \Rightarrow$

$\Rightarrow T = \sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \Gamma(\nu, \theta)$

$$P(\theta \cdot T \le y) = P(T \le y/\theta) \Rightarrow$$

$$f_{\theta T}(y) = \left[F_T\left(\frac{y}{\theta}\right)\right]' = f_T\left(\frac{y}{\theta}\right) \cdot \frac{1}{\theta}$$

$$T \sim \Gamma(\nu, \theta) \qquad f_T(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \theta^\nu t^{\nu-1} e^{-\theta t}, \quad t > 0$$

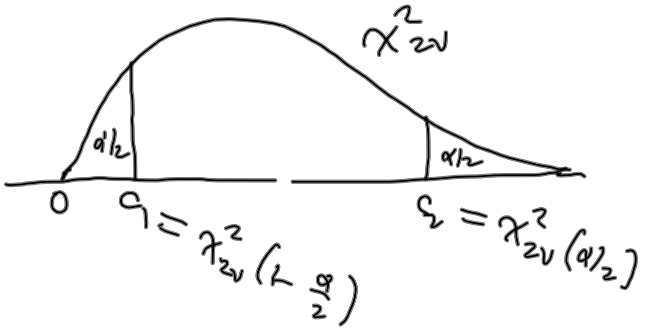
$$\Rightarrow f_{\theta T}(y) = \frac{1}{\theta} f_T\left(\frac{y}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \theta^\nu \left(\frac{y}{\theta}\right)^{\nu-1} e^{-y}$$

$$= \frac{y^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-y}, \quad y > 0$$

$$2\theta T \sim \Gamma\left(\nu, \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2\nu}{2}, \frac{1}{2}\right) \equiv \chi^2_{2\nu}$$

$$P(c_1 < 2\theta T < c_2) = 1-\alpha \quad \text{αν} \quad c_1 = \chi^2_{2\nu}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$c_2 = \chi^2_{2\nu}(\alpha/2)$$



$$P\left(\chi^2_{2\nu}(1-\tfrac{a}{2}) < 2\theta T < \chi^2_{2\nu}(\tfrac{a}{2}) \right) = 1-a$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{2\nu}(1-\frac{a}{2})}{2T} < \theta < \frac{\chi^2_{2\nu}(\frac{a}{2})}{2T} \right) = 1-a$$

Άρα ΔΕ για το θ: $\left[\dfrac{\chi^2_{2\nu}(1-\frac{a}{2})}{2\sum_{i=1}^{\nu} x_i}, \dfrac{\chi^2_{2\nu}(\frac{a}{2})}{2\sum_{i=1}^{\nu} x_i} \right]$

(β) $\dfrac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu)}{S} \to N(0,1)$ $\mu = \dfrac{1}{\theta}$

$$\frac{\sqrt{\nu}\,\left(\bar{X}-\frac{1}{\theta}\right)}{S} \to N(0,1)$$

$$P\left(\underbrace{-z_{\alpha/2} < \frac{\sqrt{\nu}\,\left(\bar{X}-\frac{1}{\theta}\right)}{S} < z_{\alpha/2}}\right) \xrightarrow{\nu\to\infty} 1-\alpha$$

$$\parallel$$

$$P\left(\frac{1}{\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{\nu}}z_{\alpha/2}} < \theta < \frac{1}{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{\nu}}z_{\alpha/2}}\right) \simeq 1-\alpha$$

Προσεγγ. $\left[\dfrac{1}{\bar{X}+\frac{S}{\sqrt{\nu}}z_{\alpha/2}}, \dfrac{1}{\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{\nu}}z_{\alpha/2}}\right]$ για το θ.