Μάθημα 20ο, 15/12/2017

Διαστήματα Εμπιστοσύνης για τον μέσο μ της κανονικής, και όχι μόνο.

(α) $\sigma^2 = \sigma_0^2$ (γνωστό). $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma_0^2)$.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma_0^2}{n}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma_0} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma_0} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

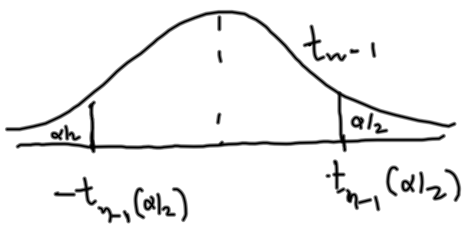
Συμπέρασμα: Το Δ.Ε. με Σ.Ε $1-\alpha$ είναι το $\boxed{\bar{X} \pm \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}}$.

(β) Το σ άγνωστο. $X_1,\dots,X_n \sim N(\mu,\sigma^2)$

Αντικαθιστούμε στο $\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ το σ με $S=\sqrt{S^2}$

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ δειγμ. διασπορά.

$$T_n = \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{n-1}$$



$\left[\ t_n(a) \xrightarrow{n\to\infty} z_a \ \right]$

$$P\left(-t_{n-1}(a/2) \le \frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{S} \le t_{n-1}(a/2)\right) = 1-a$$

Δ.Ε. $$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1}(a/2),\quad \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}\, t_{n-1}(a/2)\right]$$

Γενικά, αν το δείγμα δεν είναι από την κανονική.

Κ.Ο.Θ.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sqrt{n}\,(\bar{X}-\mu)}{S} \le t\right) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-z^2/2}\,dz.$$

$$\forall\, t \in \mathbb{R}$$

Δεκ 15-3:31 μμ

Συμπέρασμα Αν n μεγάλο ($n \to \infty$, στην πράξη $n \geq 30$) τότε

$$P\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right] \simeq 1-\alpha$$

Άρα, προσεγγιστικό Δ.Ε. για το άγνωστο μ κάθε κατανομής με πεπερασμένη διασπορά είναι το

$$\left[\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \ \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

8.1) Μετρήσεις υψών 20 ατόμων

$173, \ldots, 165$

$x_1, \ldots, x_{20} \qquad (n=20)$

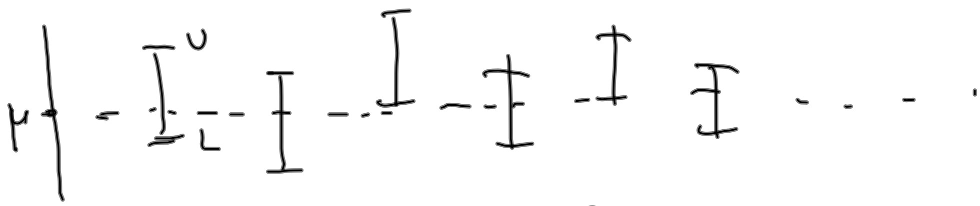
(α) Όταν είναι γνωστό ότι τα ύψη ακολουθούν $N(\mu, \sigma^2)$ με μ άγνωστο, $\sigma = 5$, να κατασκευαστεί 95% ΔΕ για το μ.

(β) Να γίνει το ίδιο αν το σ είναι άγνωστο.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_{20}}{20} = \frac{3352}{20} = 167.6$$

$$1-a = 0.95 \Rightarrow a = 0.05 \quad a/2 = 0{,}025 \quad z_{a/2} = z_{0.025} = 1.96$$

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2} = \bar{x} \pm \frac{5}{\sqrt{20}} \cdot (1.96) = [165.41, 169.79].$$



(β) σ^2 άγνωστο. Υπολογίζω $\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 562096$

$$\Rightarrow \sum (x_i-\bar{x})^2 = \sum X_i^2 - n\cdot \bar{X}^2 = \underbrace{562096 - 20\cdot(167.6)^2}$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{1}{n-1}(\quad) = \frac{1}{19}(\quad) = 15.8316 \qquad s=\sqrt{s^2}$$

Δ.Ε. $$\bar{X} \pm \frac{\sqrt{15.8316}}{\sqrt{20}}\cdot \underset{\underset{2.093}{\shortparallel}}{t_{19}(0.025)} = \bar{X} \pm 1.86 = (165.74,\ 169.46).$$

t

Εκτίμηση του άγνωστου ποσοστού p της Bernoulli(p).

$n \to \infty$, $(n \geq 30)$. $X_1, \dots, X_n \sim b(p)$ δηλ. $X_i = 0$ ή 1.

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \sum X_i^2 - n\,\bar{X}^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{} - n\,\bar{X}^2 \quad (X_i = X_i^2)$$

$$= n\bar{X} - n\bar{X}^2 = n\,\bar{X}(1-\bar{X})$$

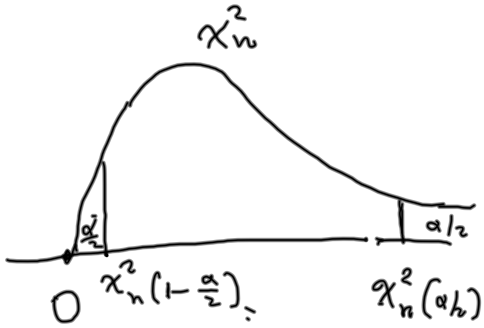
$$\Rightarrow S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{n-1}\,\bar{X}(1-\bar{X}) \simeq \bar{X}(1-\bar{X})$$

Το $\bar{X}$ εκτιμάει το p, το $S^2 \simeq \bar{X}(1-\bar{X})$ εκτιμάει το $\sigma^2 = p(1-p)$.

Προσεγγιστικό Δ.Ε. για το άγνωστο p είναι το

$$\left[\bar{X} - \frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2},\ \bar{X} + \frac{\sqrt{\bar{X}(1-\bar{X})}}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right]$$

Διάστημα Εμπιστοσύνης για το σ^2 κανονικής όταν το μ είναι άγνωστο.



$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \equiv \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)} \geq \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}\right) = 1-\alpha$$

$$\Delta.\underline{E}. = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]$$ για το σ^2 του $N(\mu, \sigma^2)$

Δύο κανονικά δείγματα.

ανεξ. δείγματα: $X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} E[\bar{X}-\bar{Y}] &= \mu_1-\mu_2 \\ Var(\bar{X}-\bar{Y}) &= \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)}$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Αν σ_1^2, σ_2^2 γνωστά τότε το Δ.Ε. για το

$\mu_1 - \mu_2$ είναι το

$$\boxed{\bar{X} - \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\; z_{\alpha/2}}$$

Αν σ_1^2, σ_2^2 άγνωστα <u>αλλά</u> $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

το αφήνω για Τετάρτη.

Δεκ 15-4:17 μμ