Πιθανότητες - Στατιστική
1ο Μάθημα

Ω = δειγματικός χώρος

= {όλα τα δυνατά εξαγόμενα}

$A \subseteq \Omega$ A: ενδεχόμενο

$\xrightarrow{\text{τυχ. πείραμα}} \omega$ = εξαγόμενο

$\underline{\Omega}$

$\omega \in A$: εμφανίστηκε το A

$\omega \notin A$: δεν εμφ. το A

$\Leftrightarrow$ εμφ. το A'

Κλασικός Ορισμός (1812)

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \quad N(A) = \text{πλήθος στοιχείων του } A.$$

Ανεπάρκεια του ορισμού αυτού, π.χ. υπάρχουν δειγμ. χώροι με άπειρα στοιχεία.

Αξιωματικός Ορισμός (1930)

(1) $P(A) \geq 0 \quad \forall$ ενδεχ. A

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) Αν τα ενδεχ. $A_1, A_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο ($A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$) τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Οκτ 4-6:20 μμ

Θ1) $P(\emptyset)=0$

Θ2) Αν $A_1, \ldots, A_n$ ξένα ανά δύο

τότε $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Πόρισμα: $P(A') = 1 - P(A)$.

Πρόβλημα γενεθλίων.

Αν κ άτομα βρεθούν τυχαία σε έναν χώρο, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν δύο άτομα με τα ίδια γενέθλια;

Θεωρώ ότι υπάρχουν $\nu = 365$ ημέρες γενεθλίων. Επίσης θεωρώ ότι όλες οι ημερομ. είναι εξ' ίσου πιθανές.

$$\underline{\Omega} = \left\{ (i_1, i_2, \ldots, i_k) : i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, \nu\} \right\}$$

$$N(\underline{\Omega}) = \nu^k$$

Οκτ 4-6:28 μμ

$A = \{$υπάρχουν 2 με ίδια γενέθλια$\}$

$N(A) = ?$ Λύση

$A' = \{$όλοι διαφορ. γενέθλια$\}$

$= \{(i_1, \ldots, i_k) : i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, \nu\}$ και $i_s \neq i_j$ για $s \neq j\}$

$$N(A') = \underbrace{\nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdots (\nu - (k-1))}_{k \text{ παράγ.}} \overset{\text{ορ}}{=} (\nu)_k$$

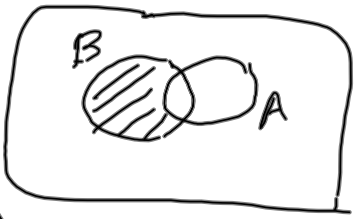
$$P(A') = \frac{N(A')}{N(\Omega)} = \frac{(\nu)_\kappa}{\nu^\kappa}$$

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{(\nu)_\kappa}{\nu^\kappa}.$$

$P(A)$ αύξουσα ως προς κ

$\kappa = 23 \quad \nu = 365 \quad P(A) \simeq 0.51 > \frac{1}{2}.$

$B - A \overset{\text{ορ}}{=} B \cap A'$



Θ3)

$P(B-A) = P(B) - P(A \cap B)$

Απόδ: $B = (B-A) \cup (B \cap A) = B_1 \cup B_2$

B_1, B_2 ξένα: $B_1 \cap B_2 = (B \cap A') \cap (B \cap A)$

$= B \cap (A' \cap A) = B \cap \emptyset = \emptyset.$

$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = P(B-A) + P(A \cap B).$

Πόρισμα: Αν $A \subseteq B$ τότε
$P(A) \leq P(B)$. (μονοτονία)

Απόδ: $0 \leq P(B \setminus A) \overset{\Theta 3}{=} P(B) - P(A \cap B)$
$\overset{A \subseteq B}{=} P(B) - P(A)$.

Πόρισμα: $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall$ ενδεχ. A

διότι $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$.

Οκτ 4-6:48 μμ

$\underline{\Theta 4}$ $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$.

Αρχή εγκλεισμού - αποκλεισμού.

Απόδ. $A_1 \cup A_2 = \underbrace{A_1 \cup (A_2 - A_1)}_{\text{ξένα}}$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) \overset{\Theta 3}{=} P(A_1) + \left(P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)\right)$.

Οκτ 4-6:51 μμ

Θ5)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3)$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$