19ο 13/12/2017

7.5 Έστω $X_1, \dots, X_n$ ένα τυχαίο δείγμα από την εκθετική με παράμετρο $\theta > 0$. Να βρείτε την εκτιμήτρια ροπών και την ΕΜΠ για το θ.

$X \sim Exp(\theta)$ δηλ. X έχει πυκνότητα $\theta e^{-\theta x}$, $x>0$

τότε $E(X) = \frac{1}{\theta}$.

$$\frac{1}{\theta} = \overline{X} \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}}$$

δειγμ. μέση τιμή

θεωρητική μέση τιμή

$$L(\theta|x_1,\dots,x_\nu) = L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{\nu}\left(\theta e^{-\theta x_i}\right) = \theta^{\nu} e^{-\theta \Sigma x_i}$$

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \nu \log(\theta) - \theta \sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

$$\ell'(\theta) = \frac{\nu}{\theta} - \sum_{i=1}^{\nu} x_i = 0 \Rightarrow \frac{\nu}{\theta} = \Sigma x_i \Rightarrow \theta = \frac{\nu}{\Sigma x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}}$$ (ίδια με αυτήν των ροπών).

$$\ell''(\theta) = \frac{-\nu}{\theta^2} < 0$$ οπότε $\ell'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta$ σημείο μεγίστου.

7.4) $X_1,\dots,X_\nu \sim f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0<x<1$ $(\theta>0)$.

Βρείτε ΕΜΠ και εκτιμήτρια ροπών για το θ.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{\nu} \theta (x_i)^{\theta-1} = \theta^{\nu} \left(\prod_{i=1}^{\nu} x_i\right)^{\theta-1}$$

$$\ell(\theta) = \nu \log\theta + (\theta-1) \log \prod_{i=1}^{\nu} x_i = \nu \log\theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^{\nu} \log x_i$$

$$\ell'(\theta) = \frac{\nu}{\theta} + \sum_{i=1}^{\nu} \log x_i = 0 \Rightarrow \frac{\nu}{\theta} = -\sum \log x_i$$

$$\frac{\theta}{\nu} = \frac{1}{-\sum \log x_i}$$

ΕΜΠ $\boxed{\hat{\theta} = \dfrac{\nu}{-\sum \log X_i}}$

$$\ell''(\theta) = \frac{-\nu}{\theta^2} < 0.$$

$$E\left(\frac{\nu}{-\sum \log X_i}\right) = \nu\, E \frac{1}{\sum(-\log X_i)}$$

Έστω $X \sim f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}$. Θα βρώ την πυκνότητα της $Y = -\log X$. $Y \in (0, \infty)$

Για $y>0$, $F_Y(y) = P(-\log X \leq y) = P(\log X \geq -y)$

$$= P(X \geq e^{-y}) = 1 - P(X < e^{-y})$$

$$= 1 - P(X \leq e^{-y}) \quad (X \text{ συνεχής})$$

$F_Y(y) = 1 - F_X(e^{-y}) \Rightarrow f_Y(y) = -f_X(e^{-y}) \cdot (e^{-y})'$

$$= e^{-y} f_X(e^{-y})$$

$$= e^{-y} \theta (e^{-y})^{\theta-1}$$

$$= \theta e^{-\theta y}, \quad y > 0$$

$-\log X \sim \mathcal{E}xp(\theta)$. Άρα $-\log X_1, \ldots, -\log X_\nu \sim \mathcal{E}xp(\theta) \equiv \Gamma(1, \theta)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\nu}(-\log X_i) \sim \Gamma(1+\dots+1, \theta) = \Gamma(\nu, \theta)$$

$$W = \sum_{i=1}^{\nu}(-\log X_i) \Rightarrow \boxed{f_W(w) = \frac{\theta^{\nu}}{\Gamma(\nu)} w^{\nu-1} e^{-\theta w}, \quad w>0}$$

$$E(\hat{\theta}) = E\left(\frac{\nu}{W}\right) = \nu\, E\left(\frac{1}{W}\right) = \nu\, \frac{\theta^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu-1)}{\theta^{\nu-1}} \int_0^{\infty} \frac{\theta^{\nu-1}}{\Gamma(\nu-1)} \underbrace{\frac{1}{w} w^{\nu-1}}_{w^{\nu-2} = w^{(\nu-1)-1}} e^{-\theta w}\, dw$$

$$= \nu\, \frac{\theta^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \cdot \frac{\Gamma(\nu-1)}{\theta^{\nu-1}} \int_0^{\infty} \text{πυκνότητας } \Gamma(\nu-1, \theta)\, dw$$

$$= \nu\, \frac{\theta\, \Gamma(\nu-1)}{(\nu-1)\Gamma(\nu-1)} = \frac{\nu}{\nu-1}\theta \qquad (\nu \geq 2) \quad (\text{μάλιστα } = \infty \text{ για } \nu=1)$$

$$E(\hat{\theta}) = \frac{\nu}{\nu-1}\theta \Rightarrow E\left(\frac{\nu-1}{\nu}\hat{\theta}\right) = \theta \quad \text{άρα η } \frac{\nu-1}{-\sum \log X_i} \text{ είναι αμερόληπτη}$$

Εκτιμήτρια Ροπών

$$E(X) = \int_0^1 x\,\theta x^{\theta-1}\,dx = \theta \int_0^1 x^{\theta}\,dx = \frac{\theta}{\theta+1}$$

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X} \Rightarrow \theta = (\theta+1)\bar{X}, \quad \theta(1-\bar{X}) = \bar{X},$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}}$$ Εκτιμήτρια Ροπών

Για την αμεροληψία χρησιμοποιώ την ανισότητα Jensen:

Αν g κυρτή $\Rightarrow E\,g(X) \geqslant g(\mu) \quad (\mu = E(X))$.

$g(x) = \frac{x}{1-x}$, $0<x<1$ κυρτή $g''(x) = \frac{2(x+1)}{(1-x)^2} > 0$

$$E(\hat{\theta}) = E\left(g(\bar{X})\right) > g(E\bar{X}) = g\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right) = \frac{\frac{\theta}{\theta+1}}{1-\frac{\theta}{\theta+1}} = \theta$$

Δεκ 13-5:53 μμ

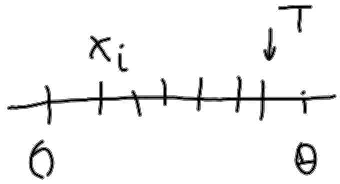
Ομοιόμορφη στο διάστημα $(0,\theta)$

7.6 Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu \sim U(0,\theta)$, $\theta > 0$ άγνωστο.

Θέτουμε $T = T(X_1, \dots, X_\nu) = \max\{X_1, \dots, X_\nu\}$.

Να υπολογιστεί η μεροληψία $b(T)$ της T ως εκτιμήτριας του θ.

$$b(T) = E(T) - \theta.$$



Υπολογίζω την πυκνότητα $f_T(t)$.

$$F_T(t) = P(T \le t) = P\left(\max_{i=1,\dots,\nu}\{X_i\} \le t\right) = P(X_1 \le t, X_2 \le t, \dots, X_\nu \le t)$$

$$\overset{\text{ανεξ.}}{=} P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t) \cdot \dots \cdot P(X_\nu \le t) = F_{X_1}(t) \cdots F_{X_\nu}(t)$$

$$\left[\begin{array}{ll} F_{X_i}(t) = \frac{t}{\theta}, & 0 \le t \le \theta \\ \quad = 1, & t \ge \theta \end{array}\right] \qquad \begin{array}{ll} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^\nu, & 0 \le t \le \theta \\ = 1, & t \ge \theta \end{array}$$

$$f_T(t) = F_T'(t) = \left[\left(\frac{t}{\theta}\right)^\nu\right]' = \nu \left(\frac{t}{\theta}\right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\theta} = \frac{\nu}{\theta^\nu} t^{\nu-1}, \quad 0 < t < \theta.$$

$$E(T) = \int_0^\theta t\, f_T(t)\, dt = \frac{\nu}{\theta^\nu} \int_0^\theta t^\nu\, dt = \frac{\nu}{\theta^\nu} \cdot \frac{\theta^{\nu+1}}{\nu+1} = \frac{\nu}{\nu+1}\, \theta$$

$$b(T) = E(T) - \theta = \frac{\nu}{\nu+1}\theta - \theta = \frac{-1}{\nu+1}\theta$$ μεροληψία της T.

7.10 Έστω $X_1, \ldots, X_\nu \sim N(0, \sigma^2)$ [$\theta = \sigma^2$ άγνωστη].

(α) Ν.Δ.Ο. η $T_1 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της διασποράς σ^2, αλλά η $\sqrt{T_1}$ δεν είναι αμερόληπτη για την σημειακή εκτίμηση σ.

(β) Ν.Δ.Ο. η $T_3 = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{\nu} |X_i|$ είναι αμερόληπτη για το σ.

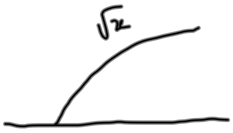
Δεκ 13-6:21 μμ

(α) $E(T_1) = E\left(\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2\right) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} E(X_i^2)$

$X_i \sim N(0,\sigma^2)$ $\quad \left.\begin{array}{l} E(X_i)=0 \\ Var(X_i)=\sigma^2\end{array}\right\} \Rightarrow E(X_i^2) = Var(X_i) + [E(X_i)]^2$

$= \sigma^2+0^2=\sigma^2$

$E(T_1) = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^{\nu} \sigma^2 = \frac{1}{\nu}\cdot\nu\sigma^2=\sigma^2$ (αμερόληπτη).



$(\sqrt{x})''<0$ αν. κοίλη $\quad$ Jensen: $Eg(X) \le g(EX)$ όταν g κοίλη

Άρα $E\sqrt{T_1} < \sqrt{ET_1} = \sqrt{\sigma^2}=\sigma$.

$T_1 = \frac{\sigma^2}{\nu}\cdot Y_\nu \quad Y_\nu \sim \chi^2_\nu \equiv \Gamma\left(\frac{\nu}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\sqrt{T_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\sqrt{Y_\nu} \quad E\sqrt{T_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}E\sqrt{Y_\nu} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}}\int_0^\infty \sqrt{y}\, \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}\, y^{\nu/2-1}e^{-y/2}\,dy$

$$E\sqrt{T_1} = \frac{\sigma}{\sqrt{\nu}} \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \qquad \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} < 1 \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Αμερόληπτη είναι η

$$\frac{\sqrt{\nu}\,\Gamma(\nu/2)}{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \sqrt{T_1} \qquad (\text{για το } \sigma)$$

(β) $T_3 = c_\nu \sum_{i=1}^{\nu} |X_i| \qquad X_i \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X_i - 0}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$\frac{X_i}{\sigma} = Z_i \Rightarrow X_i = \sigma Z_i \qquad Z_i \sim N(0,1)$$

$$T_3 = c_\nu \cdot \sigma \cdot \sum_{i=1}^{\nu} |Z_i|$$

$Z \sim N(0,1)$, $E|Z| = ?$ $\quad E|Z| = \int_{-\infty}^{\infty} |z|\, \varphi(z)\, dz = 2\int_0^{\infty} z\, \varphi(z)\, dz$

Δεκ 13-6:34 μμ

$$\varphi(z) = c\, e^{-z^2/2} \qquad \log \varphi(z) = \log c - \frac{z^2}{2}$$

$$(\log \varphi(z))' = -z$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = -z \qquad \varphi' = -z\,\varphi(z)$$

$$z\,\varphi(z) = -\varphi'(z)$$

$$\int_0^\infty z\,\varphi(z)\,dz = \int_0^\infty (-\varphi(z))'\,dz = -\cancel{\varphi(\infty)}^{\,0} + \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-0^2/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty z\,\varphi(z)\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow E|Z| = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

$$E|Z_i| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad i=1,2,\dots,\nu, \qquad E(T_3) = c_\nu'\, \sigma \cdot \sum_{i=1}^{\nu} E|Z_i| = \nu\, c_\nu\, \sigma \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \sigma$$

$$c_\nu = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{δηλ.} \quad \boxed{T_3 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}|X_i|} \quad \text{αμερ. για το } \sigma.$$

Εκτίμηση με διάστημα εμπιστοσύνης

Στόχος: Να κατασκευάσω ένα διάστημα εμπιστοσύνης (δ.ε.) της μορφής $[L(x_1, .., x_\nu), U(x_1, .., x_\nu)]$ ώστε οι U, L να είναι ανεξάρτητες από άγνωστες παραμέτρους, $L \leq U$, και $P(L \leq \theta \leq U) = 1-\alpha$.

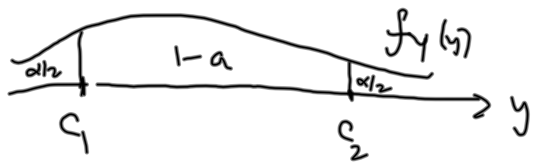
Τότε το $[L, U]$ καλείται δ.ε. για το θ με συντελεστή εμπιστοσύνης (=σ.ε.) $1-\alpha$.

Το α συνήθως είναι $5\% = 0.05$ ή $0.01 = 1\%$ οπότε μιλάμε για 95% ή 99% δ.ε.

Τεχνική: Έστω T μία εκτιμήτρια του θ, και $g(T,\theta)$ μία συνάρτηση που εξαρτάται και από την T, και από το άγνωστο θ.

Απαιτούμε η τ.μ. $Y = g(T,\theta)$ να έχει μία γνωστή κατανομή <u>που δεν εξαρτάται από το θ</u>.

Έστω F_Y αυτή η κατανομή, και ας πούμε ότι η Y έχει πυκνότητα $f_Y(y) = F_Y'(y)$.



Οι σταθερές $c_1 < c_2$ υπολογίζονται από $F_Y(c_1) = \alpha/2$, $F_Y(c_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Τότε $$P[c_1 \le Y \le c_2] = 1-\alpha$$

$$P[c_1 \le g(T,\theta) \le c_2] = 1-\alpha$$

Αν οι ανισότητες $c_1 \le g(T,\theta) \le c_2$

μπορούν να λυθούν ως προς θ, και προκύψει

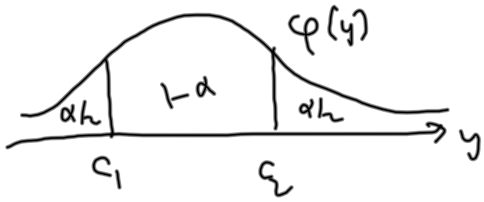
$$c_1 \le g(T,\theta) \le c_2 \iff L(T,c_1) \le \theta \le U(T,c_2),$$

τότε το $[L,U]$ είναι το επιθυμητό δ.ε.

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $X_1, \dots, X_\nu \sim N(\theta, 1)$ $\quad \theta \in \mathbb{R}$.

Τότε $\quad \bar{X} \sim N(\theta, \frac{1}{\nu}) \Rightarrow \bar{X} - \theta \sim N(0, \frac{1}{\nu}) \Rightarrow \sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \theta) \sim N(0,1)$

$T = \bar{X}, \quad g(T, \theta) = \sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \theta) = Y \sim N(0,1)$



$c_2 = z_{\alpha/2} \quad c_1 = -z_{\alpha/2}$

$$P\left(-z_{\alpha/2} \le \sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \theta) \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$-z_{\alpha/2} \le \sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \theta) \le z_{\alpha/2} \iff \bar{X} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{\nu}} \le \theta \le \bar{X} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{\nu}}$$

Το δ.ε. $\left[\bar{X} - \frac{1}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2},\ \bar{X} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} z_{\alpha/2}\right]$

είναι $(1-\alpha)$- δ.ε. για το $\theta = \mu$ της $N(\theta, 1)$.

Δεκ 13-7:04 μμ