18ο 8/12/2017

Μέθοδοι σημειακής εκτίμησης

Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_\nu \sim f(x|\theta)$ ή $f(x|\theta_1, \theta_2)$ κ.λπ.

<u>Μέθοδος ροπών</u> Αν έχουμε κ άγνωστες παραμέτρους, τότε υπολογίζουμε τις κ πρώτες θεωρητικές ροπές

$$\mu_i(\underset{\sim}{\theta}) = \begin{cases} \sum_x x^i f(x|\underline{\theta}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^i f(x|\underline{\theta})\,dx \end{cases} \quad i = 1, 2, \ldots, \kappa$$

Υπολογίζουμε τις δειγματικές ροπές

$$m_i = \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{\nu} X_j^i \quad (i = 1, 2, \ldots, \kappa).$$

Δεκ 8-3:13 μμ

Βρίσκουμε την εκτιμήτρια $\underset{\sim}{\hat{\theta}} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_k \end{pmatrix}$ ως τη λύση του συστήματος $\mu_i(\underset{\sim}{\theta}) = m_i \quad (i=1,2,\dots,k)$

<u>Παράδειγμα</u> Έστω $X_1, X_2, \dots, X_\nu \sim U(0,\theta) \quad \theta > 0$.

Εδώ $k=1$.

$$E(X_i) = \frac{\theta}{2} = \mu_1(\theta) \qquad (i=1,2,\dots,\nu)$$

$$m_1 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i = \bar{X}$$

$$\mu_1(\theta) = m_1 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \bar{X} \Rightarrow \theta = 2\bar{X} \qquad \boxed{\hat{\theta} = 2\bar{X}}$$

Παράδειγμα: $X_1, \dots, X_\nu \sim U(\theta_1, \theta_2)$ και $\theta_1 < \theta_2$ άγνωστα.

$$\mu_1(\underset{\sim}{\theta}) = \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = E(X_1) \qquad E(X_1^2) = \mu^2 + \sigma^2 = \left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)^2 + \frac{(\theta_2-\theta_1)^2}{12}$$

$$= \frac{1}{12}\left\{3(\theta_1+\theta_2)^2 + (\theta_2-\theta_1)^2\right\} = \frac{1}{12}\left\{4\theta_1^2 + 4\theta_2^2 + 4\theta_1\theta_2\right\}$$

$$= \frac{\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_1\theta_2}{3} = \mu_2(\underset{\sim}{\theta})$$

$\mu_1(\underset{\sim}{\theta}) = m_1 \qquad m_1 = \bar{X} \rightarrow$ 1η δειγμ. ροπή

$\mu_2(\underset{\sim}{\theta}) = m_2 \qquad m_2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 \rightarrow$ 2η δειγμ. ροπή

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1 + \theta_2 = 2m_1 \\ \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_1\theta_2 = 3m_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \theta_1 = g_1(m_1, m_2) \\ \theta_2 = g_2(m_1, m_2) \end{array}$$

Δεκ 8-3:23 μμ

(α) $X_1, \ldots, X_\nu \sim N(\theta_1, 1) \qquad \theta_1 \in \mathbb{R}$

$E(X_i) = \mu_1(\theta_1) = \theta_1 \qquad m_1 = \overline{X} \Rightarrow \hat{\theta}_1 = \overline{X}$

(β) $X_1, \ldots, X_\nu \sim N(\theta_1, \theta_2), \quad \theta_1 \in \mathbb{R}, \quad \theta_2 > 0,$ άγνωστα

$$\left.\begin{array}{l} \mu_1(\theta_1, \theta_2) = E(X_1) = \theta_1 \\ \mu_2(\theta_1, \theta_2) = E(X_1^2) = \theta_1^2 + \theta_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} = m_1 \\ = m_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_1 = m_1 = \overline{X}, \quad \hat{\theta}_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i^2 - \overline{X}^2.$$

Δεκ 8-3:32 μμ

(B) Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας.

Ορισμός: Η συνάρτηση

$$L(\theta) = L(\theta \mid x_1, \dots, x_\nu) \overset{\text{op}}{=} f(x_1 \mid \theta)\, f(x_2 \mid \theta) \dots f(x_\nu \mid \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{\nu} f(x_i \mid \theta)$$

καλείται συνάρτηση πιθανοφάνειας.

<u>Ορισμός:</u> Κάθε τιμή $\hat{\theta}$ που μεγιστοποιεί την $L(\theta)$ καλείται ΕΜΠ = Εκτιμήτρια Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Δεκ 8-3:37 μμ

Στην πράξη μεγιστοποιούμε τη συνάρτηση λογαριθμοπιθανοφάνειας

$$\ell(\theta) = \log L(\theta) = \sum_{i=1}^{\nu} \log f(x_i|\theta).$$

Παράδειγμα: $X_1, \ldots, X_\nu \sim b(\theta)$, θ άγνωστο.

$$f(x_i|\theta) = \theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i} \quad i=1,2,\ldots,n$$

$$\log f(x_i|\theta) = x_i \log\theta + (1-x_i)\log(1-\theta)$$

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{\nu}\{x_i \log\theta + (1-x_i)\log(1-\theta)\} = \log\theta \cdot \sum x_i$$

$$+ \log(1-\theta)\sum(1-x_i) = \log\theta \sum x_i + \log(1-\theta)(\nu - \sum x_i)$$

$$\ell'(\theta) = \frac{1}{\theta}\sum x_i - \frac{1}{1-\theta}(\nu - \sum x_i) = 0 \qquad \ell''(\theta) = \frac{-1}{\theta^2}\sum x_i - \frac{1}{(1-\theta)^2}(\nu - \sum x_i) < 0$$

$$\frac{1}{\theta}\sum x_i - \frac{1}{1-\theta}\left(\nu - \sum x_i\right) = 0$$

$$\sum x_i \left(\underline{\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}}\right) = \frac{\nu}{1-\theta}$$

$$\frac{1}{\theta(1-\theta)}\sum x_i = \frac{\nu}{1-\theta} \Rightarrow \sum x_i = \nu\theta \Rightarrow \theta = \frac{1}{\nu}\sum x_i$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i = \overline{X} \quad \text{η ΕΜΠ του } \theta}$$

Καινοτομίες που προκύπτουν από τυχαία δείγματα

που προέρχονται από την Κανονική

Πρόταση 1 Αν $X_1, \dots, X_\nu \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε

ο $\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_\nu}{\nu} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu})$.

Γενικότερα στην κανονική κατανομή ισχύει η αναπαραγωγική ιδιότητα: Αν $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i=1,2,\dots,\nu)$ και είναι ανεξάρτητες, τότε

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i X_i + b \sim N\left(\mu = \sum_{i=1}^{\nu} a_i \mu_i + b,\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{\nu} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

$$a_i = \frac{1}{\nu},\quad b = 0 \quad \mu_i = \mu,\ \sigma_i^2 = \sigma^2 \Rightarrow \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu})$$

Δεκ 8-3:53 μμ

Αναπαραγωγική Ιδιότητα της κατανομής Γ.

Αν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu$ ανεξάρτητες με $X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \lambda)$ (το ίδιο λ) τότε $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$.

Αν $X \sim N(0,1) \Rightarrow X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \equiv \chi^2_1$

$$P(X^2 \le y) \overset{y>0}{=} P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

$$f_{X^2}(y) = \{2\Phi(\sqrt{y}) - 1\}' = 2\varphi(\sqrt{y})\cdot(\sqrt{y})' = \frac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(\sqrt{y})^2/2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-y/2}, \quad y>0$$

$$\Gamma(\alpha,\lambda) \sim f(y) = c \cdot y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} \qquad \equiv \Gamma\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

Ορισμός X_ν ακολουθεί χ^2_ν (χι-τετράγωνο με ν βαθμούς ελευθερίας) όταν $X_\nu \sim \Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2})$.

Πρόταση: Αν $X_1, \dots, X_\nu$ ανεξάρτητες $N(0,1)$ τότε η τ.μ. $X_1^2 + \dots + X_\nu^2 \sim \chi^2_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots)$

Απόδ: Αφού $X_i^2 \sim \Gamma(1/2, 1/2)$ και ανεξάρτητες, το άθροισμά τους ακολουθεί $\Gamma(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}) \equiv \chi^2_\nu$.

Θεώρημα: Αν $X_1, \dots, X_\nu \sim N(\mu, \sigma^2)$ και

$$\overline{X} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i , \qquad S^2 = \frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\overline{X})^2 \quad (\nu>1).$$

Τότε

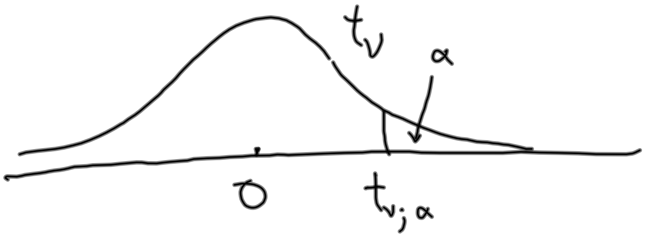
(1) $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{\nu}\right)$

(2) $\dfrac{(\nu-1)S^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\overline{X})^2 \sim \chi^2_{\nu-1}$

(3) οι τ.μ. $\overline{X}$ και S^2 είναι ανεξάρτητες*

* Έχει αποδειχθεί ότι η (3) χαρακτηρίζει την κανονική κατανομή.

Ορισμός Αν η $X_1 \sim N(0,1)$ και η $X_2 \sim \chi^2_\nu$, X_1, X_2 ανεξ., τότε η τ.μ. $T_\nu \overset{o\rho}{=} \dfrac{X_1}{\sqrt{\dfrac{X_2}{\nu}}}$ λέμε ότι ακολουθεί την t-κατανομή του student (με ν β.ε.)



$$t_{\nu,\alpha}: \; P(T_\nu > t_{\nu;\alpha}) = \alpha \qquad \left(T_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} N(0,1)\right)$$

Θεώρημα: Αν $X_1, X_2, \ldots, X_\nu \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε

(1) $$\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

(2) $$\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t_{\nu-1} \qquad (\nu>1)$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{\nu-1}\sum_{i=1}^{\nu}(X_i-\bar{X})^2}$$

Απόδ: $$E\left(\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right) = \frac{\sqrt{\nu}}{\sigma}\,E(\bar{X}-\mu) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(E(\bar{X})-\mu\right) = 0$$

$$Var\left(\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X}-\mu)}{\sigma}\right) = \frac{\nu}{\sigma^2}\,Var(\bar{X}-\mu) = \frac{\nu}{\sigma^2}\,Var(\bar{X}) = \frac{\nu}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{\nu} = 1.$$

Δεκ 8-4:30 μμ

Αφού $\bar{X} \sim \text{Normal} \Rightarrow$ όλοι οι γρ. συνδ. $a\bar{X}+b \sim N$.

Άρα $\dfrac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Για το (2): $\dfrac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu)}{S} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\dfrac{S}{\sigma}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma^2}\dfrac{1}{\nu-1}\Sigma(X_i-\bar{X})^2}}$

$$= \frac{\overbrace{\dfrac{\sqrt{\nu}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}}^{\sim N(0,1)}}{\sqrt{\underbrace{\dfrac{\overbrace{\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(X_i-\bar{X})^2}^{\sim \chi^2_{\nu-1}}}{\nu-1}}_{=\theta.\varepsilon}}} \sim t_{\nu-1}$$

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα: Αν $X_1, \dots, X_\nu$ ανεξάρτητες ισόνομες και $E(X_i) = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$ $(0 < \sigma^2 < \infty)$

τότε

$$\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \to N(0,1) \qquad (\nu \to \infty)$$

$$\frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \mu)}{S} \to N(0,1) \qquad (\nu \to \infty)$$

δηλαδή

$$\lim_{\nu \to \infty} P\left(\alpha < \frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$\lim_{\nu \to \infty} P\left(\alpha < \frac{\sqrt{\nu}\,(\bar{X} - \mu)}{S} \leq \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$\forall \ \alpha < \beta$$

Δεκ 8-4:39 μμ

Ορισμός F_{ν_1,ν_2} κατανομής.

Αν $X_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ και $X_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$, και είναι ανεξάρτητες,

τότε η τ.μ. $\dfrac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$

ν_1: β.ε. αριθμητή

ν_2: β.ε. παρανομαστή

<u>Θεώρημα:</u> Αν $X_1, X_2, \ldots, X_{\nu_1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu_2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ (ανεξάρτητα δείγμ.)

τότε η τ.μ. $\boxed{\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\ \dfrac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}}$

$$S_1^2 = \frac{1}{\nu_1 - 1} \sum_{i=1}^{\nu_1} (X_i - \bar{X})^2 \qquad S_2^2 = \frac{1}{\nu_2 - 1} \sum_{j=1}^{\nu_2} (Y_j - \bar{Y})^2$$

Ασκήσεις 7.1, 7.2, 7.4, 7.5, 7.6, 7.8, 7.10, 7.11, 7.14

$\boxed{7.8}$ Έστω $X_1, \dots, X_{\nu_1}$, $Y_1, \dots, Y_{\nu_2}$ ανεξάρτητα δείγματα από $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ και $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ αντίστοιχα.

Θέτουμε $Z_i = \dfrac{X_i - \mu_1}{\sigma_1}$ $(i = 1, 2, \dots, \nu_1)$, $W_j = \dfrac{Y_j - \mu_2}{\sigma_2}$, $(j = 1, \dots, \nu_2)$

Βρείτε την σ.κ. των (α) $\dfrac{\bar{Z} + \bar{W}}{2}$ (β) $\nu_1 \bar{Z}^2 + \nu_2 \bar{W}^2$.

$Z_i = \dfrac{X_i - \mu_1}{\sigma_1} \sim N(0,1)$ $\quad W_j = \dfrac{Y_j - \mu_2}{\sigma_2} \sim N(0,1)$.

$\bar{Z} = \dfrac{Z_1 + \dots + Z_{\nu_1}}{\nu_1} \sim N\left(0, \dfrac{1}{\nu_1}\right)$ $\quad \bar{W} \sim N\left(0, \dfrac{1}{\nu_2}\right)$

$E\left(\dfrac{\bar{Z} + \bar{W}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} E(\bar{Z}) + \dfrac{1}{2} E(\bar{W}) = 0$ $\quad Var\left(\dfrac{\bar{Z} + \bar{W}}{2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(Var(\bar{Z}) + Var(\bar{W})\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\nu_1} + \dfrac{1}{\nu_2}\right)$

Δεκ 8-4:47 μμ

$$\frac{\bar{Z}+\bar{W}}{2} \sim N\left(0, \frac{1}{4}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)\right).$$

(β) $v_1 \bar{Z}^2 + v_2 \bar{W}^2$ $\qquad \bar{Z} \sim N\left(0, \frac{1}{v_1}\right) \Rightarrow \sqrt{v_1}\, \bar{Z} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{v_1}\, \bar{Z}\right)^2 \sim \chi_1^2$$

$v_1 \bar{Z}^2 \sim \chi_1^2$

Ομοίως $v_2 \bar{W}^2 \sim \chi_1^2$

$\Rightarrow v_1 \bar{Z}^2 + v_2 \bar{W}^2 \sim \chi_2^2$. Δηλ. αν $Y = v_1 \bar{Z}^2 + v_2 \bar{W}^2$ τότε

$$f_Y(y) = \frac{(1/2)^{2/2}}{\Gamma(2/2)}\, y^{\frac{2}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}y} = \frac{1}{2} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

$Y \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{2}\right)$.

Δεκ 8-4:55 μμ