4.11) ΑΣΚ

		Μέσος	Τυπικ. Απ.
Αγόρια	Βάρος	3.400	0.400
Κορ.		3.350	~~0.400~~ 0.350

Βάρος ~ Κανον. (Υπόθεση)

(α) Πιθ. αγορ. Βάρος > 4.000.

X = βάρος αγοριού $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu = 3.400$

$\sigma^2 = (0{,}400)^2$

$$P(X > 4.000) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4000-3400}{0.400}\right) = P(Z > 1{,}5)$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0{,}9332$$

(β) Πιθ. Κορ. Βάρος από 3 ως 3700.

(β) $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu = 3.350$ $\sigma = \cancel{0.4}$ 0.350

$$P(3 < Y < 3.7) = P\left(\frac{3-3.35}{0.35} < \frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{3.7-3.35}{0.35}\right)$$

$$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z \leq -1)$$

$$\overset{Z \text{ συν.}}{=} P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.68.$$

Νοε 18-3:20 μμ

4.12) Ύψος ιχαν $\mu = 175 cm$ $\sigma = 5 cm$

Αν 6 άνδρες επιλεγούν τυχαία να βρείτε την πιθ. ακριβώς 2 να έχουν ύψος ≤ 1.80.

$$p = P(\text{κάποιος}^{\text{ύψος}} \leq 1.80) = P(X \leq 180) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{180-175}{5}\right)$$

$= P(Z \leq 1) = \Phi(1)$ γνωστό από τον πίνακα.

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i \le 180 \\ 0, & X_i > 180 \end{cases} \quad i=1,2,\dots,6$$

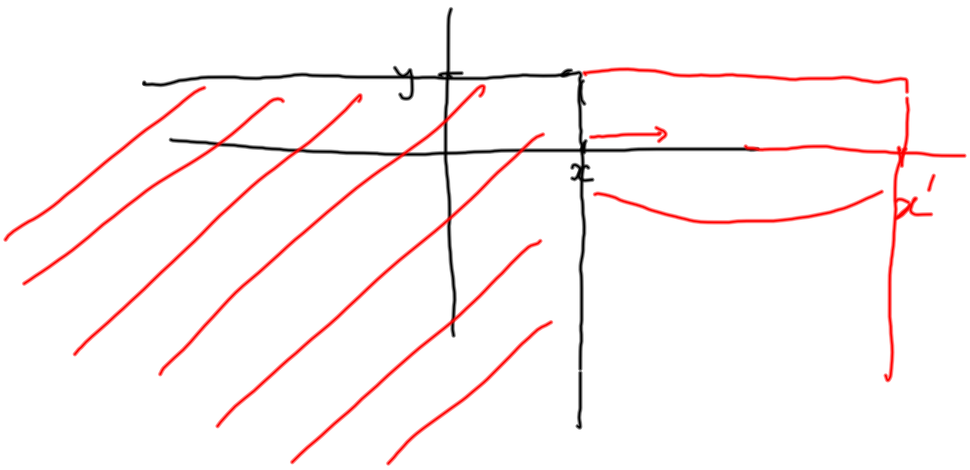
$$P(Y_i=1) = P(X_i \le 180) = \Phi(1) = p = 0.84$$

$$Y = Y_1 + \dots + Y_6 \sim b(6 = \nu, p = \Phi(1))$$

$$P(Y=2) = \binom{\nu}{2} p^2 (1-p)^{\nu-2} = \binom{6}{2} \Phi(1)^2 (1-\Phi(1))^4$$

(X, Y) Ζεύγος τ.μ. ή τυχαίο διάνυσμα.

$$\underline{F(x,y)} \overset{\text{ορ}}{=} P(X \le x,\ Y \le y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$



$$F(x,\infty) = F_X(x), \quad F(\infty,y) = F_Y(y)$$

$$F(x_1, \ldots, x_k) \overset{\text{op}}{=} P(X_1 \le x_1, \ldots, X_k \le x_k)$$

$$F(x_1, \infty, \ldots, \infty) = F_{X_1}(x_1).$$

Νοε 18-3:40 μμ

σ.π.θ.

$$f(x,y) \overset{\text{ορ}}{=} P(X=x,\ Y=y)$$

Διακριτό τυχαίο διάνυσμα:

(1) $f(x,y) \geq 0$.

(2) $\displaystyle\sum_{(x,y)\in S} f(x,y) = 1$

για όλα τα $(x,y) \in S \subseteq \mathbb{R}^2$

αριθμήσιμο

πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F(x,y)$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1$$

(1) $f \geq 0$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = 1$

Ανεξαρτησία + Δεσμ. πυκνότητες / σ. π.θ.

Για διακριτές

$$f_{X|Y}(x|y) \overset{\text{ορ}}{=} P(X=x \mid Y=y) \qquad A=\{X=x\}$$

$$B=\{Y=y\}$$

$$= P(A \mid B)$$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(X=x,\ Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x P(X=x,\ Y=y) = \sum_x f(x,y)$$

συνεχής περ.

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F(\infty, y)$$

$$= \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{\int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_2}\, dt_1$$

$$F(\infty, y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y) = \lim_{x \to \infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, y)\, dt_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

$f(x_1, \dots, x_k)$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\, dx_k \cdots dx_2$$

<u>Ορισμός</u>: Δεσμ. πυκνότητα της X δεδομ. της Y καλούμε την

$$f_{X|Y}(x,y) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Στοχαστική Ανεξαρτησία τ.μ.

X, Y καλούνται ανεξάρτητες εάν

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$A = \{X \le x\}$, $B = \{Y \le y\}$ $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Αποδεικνύεται ότι αν η (X,Y) είναι διακριτή τότε

ανεξ. $\iff f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x,y \in S$

Αν (X,Y) συνεχ.

X,Y ανεξ. $\iff f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_y \\ \int_{-\infty}^{\infty} \end{cases} f(x,y)\, dy$$

X, Y ανεξ και η $(X,Y) \sim f(x,y)$ πυκνότητα

$$\Rightarrow f_{X|Y}(x,y) \overset{\text{ορ}}{=} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \overset{\text{αν.}}{=} \frac{f_X(x)\cancel{f_Y(y)}}{\cancel{f_Y(y)}}$$

$$= f_X(x)$$

Ανεξ. $\Leftrightarrow f_{X|Y} = f_X$

$$F(x_1,\dots,x_k) = F_{X_1}(x_1)\dots F_{X_k}(x_k)$$

$$\forall\ (x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$$

συν; διαφ.

$$\Longleftrightarrow\ f(x_1,\dots,x_k) = f_{X_1}(x_1)\dots f_{X_k}(x_k)$$

Νοε 18-4:24 μμ

Τύπος αγνω. Μαθ/κού

$$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

$$Y = g(X_1, \dots, X_k)$$

$$E\,g(X_1, \dots, X_k) = EY$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_k)\, \underbrace{f(x_1, \dots, x_k)}_{\text{πυκνότητα}}\, dx_1 \cdots dx_k$$

$$f(x,y) \geq 0 \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} f = 1.$$

$$E(X\cdot Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} \underline{xy}\, f(x,y)\, dy\, dx$$

$$E(X) = \iint_{\mathbb{R}^2} x\, f(x,y)\, dy\, dx = \int_{\mathbb{R}} x \overbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy\right)}^{f_X(x)} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = E(X).$$

(X, Y) Μέση τιμή: (μ_1, μ_2)

$\mu_1 = E(X), \quad \mu_2 = E(Y)$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \sigma_1^2 &= Var(X) \\ \sigma_2^2 &= Var(Y) \end{aligned}$$

$$\sigma_{12} = Cov(X, Y) \overset{ορ}{=} E\left[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\right]$$

Συνδιασπορά

Συνδιακύμανση

Συντ. συσχέτισης ρ

$$\rho \overset{\text{ορ}}{=} \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} \quad : \quad \frac{m\cdot sec}{\sqrt{m^2}\ \sqrt{sec^2}} = \text{αδιάστατο}$$

$X \sim m \quad Y \sim sec \quad \mu_1 \sim m \quad \mu_2 \sim sec$

$Var(X) \sim m^2 \quad Var(Y) \sim sec^2$

$Cov(X,Y) \sim m\cdot sec$

$$\left[\mathrm{Cov}(X,Y)\right]^2 \leq \mathrm{Var}(X)\cdot \mathrm{Var}(Y)$$

ανισότητα C-S.

$$\rho^2 \leq 1$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\}$$

$$= E[XY - \mu_1 Y - \mu_2 X + \mu_1\mu_2]$$

$$= E(XY) - \mu_1 \underset{\mu_2}{\underset{\parallel}{E(Y)}} - \mu_2 \underset{\mu_1}{\underset{\parallel}{E(X)}} + \mu_1\mu_2$$

$$= \underline{E(XY) - \mu_1 \cdot \mu_2}$$

Νοε 18-4:41 μμ

Πρόταση:

Αν $X_1, X_2, \dots, X_k$ ανεξ. τ.μ. και

$g_1, \dots, g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τότε

$$E\left[g_1(X_1) \cdots g_k(X_k) \right] = \left(E\, g_1(X_1)\right) \cdots \left(E\, g_k(X_k)\right).$$

Συν. περ. $k=2$.

$$E\, g_1(X) \cdot g_2(Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g_1(x)\, g_2(y) \cdot \overbrace{f_X(x) \cdot f_Y(y)}^{\text{ανεξ.}}$$

$$= \left(\int g_1(x) f_X(x)\,dx \right) \left(\int g_2(y) f_Y(y)\,dy \right)$$

$$\underset{Eg_1(X)}{\parallel} \qquad \underset{Eg_2(Y).}{\parallel}$$

Αν X, Y ανεξ. $\Rightarrow$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_1\mu_2 \overset{\text{ανεξ.}}{=} \underset{\mu_1}{E(X)} \cdot \underset{\mu_2}{E(Y)} - \mu_1\mu_2$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \rho = 0$ ασυσχέτιστες.

Ασκ. 5.1, 5.2, 5.5, 5.7, 5.15

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξ. και ισόνομες τμ.
(καθεμία έχει την ίδια σ.κ. με τις άλλες)

Τυχαίο δείγμα μεγέθους n.

$$X_1, \ldots, X_n \sim \underbrace{F}_{\text{άγνωστη}}$$

Νοε 18-4:48 μμ

Παράδειγμα:

$$X_1, \dots, X_n \sim b(p), \quad \underline{p \text{ άγνωστο.}}$$

p παράμετρος.

$$Var(c_1 X_1 + \dots + c_n X_n) \overset{\text{τύπος αφηρ. καθ.}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum c_i c_j Cov(X_i, X_j)$$

Αν $X_1, \dots, X_n$ ανεξ. $\Rightarrow Cov(X_i, X_j) = 0$

$$Var(c_1 X_1 + \dots + c_n X_n) = \sum c_i^2 Var(X_i)$$

Νοε 18-4:53 μμ

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

$$E\bar{X} = \frac{1}{n} E(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{np}{n} = p$$

$$MSE \overset{op}{=} E\left[(\bar{X} - p)^2\right] = Var\,\bar{X}$$

$$= Var\,\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n^2}\,Var(X_1 + \cdots + X_n)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)\right) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

<u>Ορισμός</u> $T_n \xrightarrow{P} \theta$ (η ακολ. τ.μ. T_n συγκλίνει κατά πιθ. στη σταθερά θ, καθώς $n \to \infty$)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|T_n - \theta| > \varepsilon) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

<u>Παράδειγμα:</u> $P(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

δηλ. $\bar{X}_n \xrightarrow{P} p. \quad (n \to \infty)$

Νοε 18-5:02 μμ