16o 1/12/2017

5.5) Γνωρίζουμε ότι $Y \sim Poisson(\lambda)$ και ότι $(X|Y=y) \sim b(y, p)$ (δηλ. γνωρίζω και τις παραμέτρους $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$). Να βρείτε την σ.π. της X, $f_X(x) = P(X=x)$.

$f_{X|Y}$ $\quad f_Y$ $\qquad f_{X|Y} = \dfrac{f_{X,Y}}{f_Y} \Rightarrow f_{X,Y} = f_{X|Y} \cdot f_Y$

Έστω $x, y \in \{0,1,\dots\}$ με $x \leq y$. Τότε

$$f(x,y) = f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y) = \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

$$f_X(x) = \sum_{y:\, y \geq x} f(x,y) = \sum_{y=x}^{\infty} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

$$= e^{-\lambda} p^x \frac{1}{x!} \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\cancel{y!}}{(y-x)!} (1-p)^{y-x} \frac{\lambda^{y-x+x}}{\cancel{y!}}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{1}{x!} p^x \lambda^x \sum_{y=x}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{y-x}}{(y-x)!} \qquad y-x=j \in \{0,1,\dots\}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^x}{x!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^j}{j!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^x}{x!} e^{\lambda(1-p)}$$

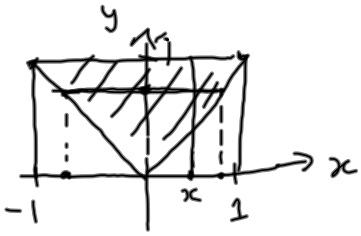
$$= e^{-\lambda+\lambda-\lambda p} \frac{(\lambda p)^x}{x!} = \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^x}{x!} = f_X(x), \quad x = 0,1,\dots}$$

$X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$

Δεκ 1-3:23 μμ

5.7) $f(x,y)=1$, για $|x|<y<1$ (0 αλλού).

Τότε οι X, Y είναι ασυσχέτιστες αλλά όχι ανεξάρτητες.



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_{|x|}^{1} 1\, dy = 1-|x|, \quad -1<x<1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx = \int_{-y}^{y} 1\, dx = 2y, \quad 0<y<1$$

$f_X(x) f_Y(y) > 0 \quad \forall x \in (-1,1),\ y \in (0,1)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{x(1-|x|)}_{\text{περιττή}}\, dx = 0.$$

$$E(X\cdot Y) = \int_0^1 \int_{-y}^{y} xy\, f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{ή} \quad \underbrace{\int_{-1}^{1} \int_{|x|}^{1} xy\, f(x,y)\, dy\, dx}$$

$$= \int_0^1 y \underbrace{\left(\int_{-y}^{y} x\, dx \right)}_{=0 \ \forall y} dy = \int_0^1 y\cdot 0\, dy = 0.$$

$$Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) = 0 - 0\cdot E(Y) = 0$$

$$\left[Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\right] = E(XY) - \mu_1\mu_2 \right]$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}} = 0$$ δηλ. X, Y ασυσχέτιστες.

Τότε ισχύει και το εξής: $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

$$(+\,2Cov(X,Y) = 0)$$

Δεσμευμένη μέση τιμή.

$$E(X|Y=y) \overset{op}{=} \begin{cases} \sum_x x \cdot f_{X|Y}(x|y) & \text{διακριτή περίπτωση} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y}(x|y)\, dx & \text{συνεχής περίπτωση.} \end{cases}$$

Αντίστοιχα ορίζεται η $E(Y|X=x)$.

Παρατήρηση: Η $E(X|Y=y)$ είναι συνάρτηση του y (μόνο).

Μπορώ να ορίσω την $E(g(X,Y)\,|\,Y=y)$ που πάλι είναι συνάρτηση του y. π.χ. στη συνεχή περίπτωση

$$E(g(X,Y)\,|\,Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

$h(y) = E(X|Y=y)$ καλείται συνάρτηση παλινδρόμησης της X στην Y (regression).

Θεωρούμε τα σημεία (x,y) του επιπέδου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x = h(y) \qquad (1).$$

Η (1) καλείται καμπύλη παλινδρόμησης της X στην Y.

$$\boxed{\text{Θέτουμε } E(X|Y) = h(Y), \quad \text{όπου } h(y) = E(X|Y=y)}$$

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα: $E(X) = E\big(E(X|Y)\big)$.

Δεκ 1-4:00 μμ

$$h(y) = E(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, f(x,y)}{f_Y(y)}\, dx$$

$$= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dx$$

$$E\, h(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, h(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{f_Y(y)} \frac{1}{\cancel{f_Y(y)}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = E(X).$$

Δηλ. $E\big(E(X|Y)\big) = E(X).$

π.χ. $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ $\quad (X \mid Y=y) \sim b(y,p). \Rightarrow E(X \mid Y=y) = y \cdot p$

$h(y) = p \cdot y, \quad h(Y) = p \cdot Y \Rightarrow E(X) = E(p \cdot Y) = p\, E(Y) = p \cdot \lambda.$

Πρόβλημα 1: Να βρεθεί σταθερά c ώστε να ελαχιστοποιείται το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα

$$MSE \stackrel{\text{op}}{=} E\left[(X-c)^2\right].$$

Τότε $c = \mu = E(X)$.

<u>Απόδ:</u> $E\left[(X-c)^2\right] = E\left[\left(X-\mu+(\mu-c)\right)^2\right]$

$= E\left[(X-\mu)^2 + (\mu-c)^2 + 2(\mu-c)(X-\mu)\right]$

$= E\left[(X-\mu)^2\right] + (\mu-c)^2 + 2(\mu-c)\,\overset{0}{E\left[\cancel{(X-\mu)}\right]}$

$= \underbrace{E\left[(X-\mu)^2\right]}_{\sigma^2} + (\mu-c)^2 \geq \sigma^2$ με ισότητα αν και μόνο αν $\mu = c$.

Πρόβλημα 2. Ποια είναι η "καλύτερη" συνάρτηση του Y, $h(Y)$, που να ελαχιστοποιεί το

$$MSE \overset{\text{ορ}}{=} E\left[(X-h(Y))^2\right] ?$$

Η απάντηση: $h^*(y) = E(X|Y=y)$ είναι η βέλτιστη.

Αν $h^*(Y) = E(X|Y)$ τότε $\forall h$ ισχύει ότι

$$E\left[(X-h(Y))^2\right] \geq E\left[(X-h^*(Y))^2\right]$$

με ισότητα αν και μόνο αν $P\left(h(Y)=h^*(Y)\right)=1$.

5.15 Η πυκνότητα $f(x,y) = \frac{2}{3}(x+2y)$, $0<x<1$, $0<y<1$.

Βρείτε το $\rho = \rho(X,Y)$, καθώς και την συνάρτηση παλινδρόμησης και την καμπύλη παλινδρόμησης της Y στην X.

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy = \frac{2}{3}x\int_0^1 dy + \frac{4}{3}\int_0^1 y\,dy = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{2}{3}(x+1), \quad 0<x<1}$$

$$\mu_1 = E(X) = \int_0^1 x\, f_X(x)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x(x+1)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \boxed{\frac{5}{9} = \mu_1}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2\,\frac{2}{3}(x+1)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^3 dx + \frac{2}{3}\int_0^1 x^2 dx = \frac{7}{12}$$

$$Var(X) = \sigma_1^2 = \frac{7}{12} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \dots = \boxed{\frac{89}{324} = \sigma_1^2}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x+2y)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\cdot y$$

$$\Rightarrow \boxed{f_Y(y) = \frac{1}{3}(4y+1), \quad 0<y<1}$$

$$E(Y) = \mu_2 = \int_0^1 y\,\frac{1}{3}(4y+1)\,dy = \dots = \boxed{\frac{11}{18} = \mu_1}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 y^2\,\frac{1}{3}(4y+1)\,dy = \dots = \frac{4}{9}$$

$$\sigma_2^2 = Var(Y) = \frac{4}{9} - \left(\frac{11}{18}\right)^2 = \dots = \boxed{\frac{23}{324} = \sigma_2^2}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_1\cdot\mu_2$$

Δεκ 1-4:44 μμ

$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \frac{2}{3} (x+2y) \, dy \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 y + 2xy^2\right) dy \, dx$$

$$= \dots = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{5}{9} \cdot \frac{11}{18} = \dots = \frac{-1}{162}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2}} = \frac{-\frac{1}{162}}{\sqrt{\frac{89}{324} \cdot \frac{23}{324}}} = \dots = \frac{-2}{\sqrt{2047}}.$$

Δεκ 1-4:49 μμ

Συνάρτηση παλινδρόμησης της Y στην X:

$h(x) = E(Y|X=x)$.

$$f_{Y|X}(y|x) \overset{\text{op}}{=} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{2}{3}(x+2y)}{\frac{2}{3}(x+1)} = \frac{x+2y}{x+1}, \quad 0<y<1$$

$$E(Y|X=x) = \int_0^1 y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy = \frac{1}{x+1}\int_0^1 y(x+2y)\, dy$$

$$= \frac{1}{x+1}\left[x\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{x+1}\left(\frac{3x}{6}+\frac{4}{6}\right) = \frac{3x+4}{6(x+1)}, \quad 0<x<1.$$

Συνάρτηση παλινδρόμησης: $\boxed{h(x) = \frac{3x+4}{6(x+1)}, \quad 0<x<1}$

Καμπύλη παλινδρόμησης $\boxed{y = \frac{3x+4}{6(x+1)}, \quad 0<x<1}$

Δεκ 1-4:53 μμ