15ο 29/11/2017

$$(X_1, X_2) \sim f_{X_1, X_2}$$

$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad Y = g(X_1, X_2)$$

Η Y είναι τ.μ. και άρα θα έχει κάποια πυκνότητα ή σ.π. $f_Y(y)$. Τότε

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy \quad (f_Y \text{ πυκνότητα})$$

Ισχύει το εξής:

<u>Θεώρημα:</u>
$$E[g(X_1, X_2)] = \begin{cases} \sum\limits_{x_1, x_2} g(x_1, x_2)\, f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) & \text{διακρ.} \\ \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2)\, f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 \end{cases}$$

Γενικός τύπος: (Για συνεχή).

$$E[g(X_1,\ldots,X_k)] = \int\cdots\int_{\mathbb{R}^k} g(x_1,\ldots,x_k)\, f_{X_1,\ldots,X_k}(x_1,\ldots,x_k)\, dx_k \ldots dx_1$$

Η μέση τιμή είναι γραμμική κ.λ.π.

$g = g(x_1, x_2) = x_1$

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\, f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2\, dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\, dx_2\right)}_{f_{X_1}(x_1)} dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1\, f_{X_1}(x_1)\, dx_1$$

$\sigma_1^2 = E[(X_1-\mu_1)^2]$ $\quad$ $\sigma_2^2 = E[(X_2-\mu_2)^2]$

$\mu_1 = E(X_1)$ $\quad$ $\mu_2 = E(X_2)$

Υπολογισμός διασποράς του αθροίσματος X_1+X_2:

$$Var(X_1+X_2) = E[(X_1+X_2)^2] - (\mu_1+\mu_2)^2$$

$$= E[X_1^2+X_2^2+2X_1X_2] - (\mu_1^2+\mu_2^2+2\mu_1\mu_2)$$

$$= (E(X_1^2)-\mu_1^2) + (E(X_2^2)-\mu_2^2) + 2[E(X_1X_2)-\mu_1\mu_2]$$

$$= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \text{ καινούριο}$$

<u>Ορισμός:</u> Συνδιακύμανση ή συνδιασπορά των X_1, X_2 καλείται ο αριθμός $Cov(X_1,X_2)$ ή $\sigma_{12} \overset{\text{ορ}}{=} E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]$

Ιδιότητες: $Cov(\alpha X_1+\beta,\ \gamma X_2+\delta) = \alpha\cdot\gamma\ Cov(X_1, X_2)$ (1)

$Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - \mu_1\cdot\mu_2$ (2)

Απόδ: (2): $Cov(X_1, X_2) = E[(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)]$

$= E[X_1X_2 - \mu_2X_1 - \mu_1X_2 + \mu_1\mu_2]$

$\overset{\gamma\rho}{=} E(X_1X_2) - \mu_2\underset{\mu_1}{\underset{\parallel}{E(X_1)}} - \mu_1\underset{\mu_2}{\underset{\parallel}{E(X_2)}} + \mu_1\mu_2 = E(X_1X_2) - \mu_1\mu_2$

(1): $Cov(\alpha X_1+\beta,\ \gamma X_2+\delta) \overset{(2)}{=} E[(\alpha X_1+\beta)(\gamma X_2+\delta)] - E(\alpha X_1+\beta)\cdot E(\gamma X_2+\delta)$

$= \alpha\gamma\ E(X_1X_2) + \alpha\delta\ E(X_1) + \beta\gamma\ E(X_2) + \beta\delta - (\alpha\mu_1+\beta)(\gamma\mu_2+\delta)$

$= \alpha\gamma\ E(X_1X_2) + \cancel{\alpha\delta\mu_1} + \cancel{\beta\gamma\mu_2} + \cancel{\beta\delta} - \alpha\gamma\mu_1\mu_2 - \cancel{\alpha\delta\mu_1} - \cancel{\beta\gamma\mu_2} - \cancel{\beta\delta}$

$= \alpha\gamma\ (E(X_1X_2) - \mu_1\mu_2) = \alpha\gamma\ Cov(X_1, X_2).$

$$Var(X_1+X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2\,Cov(X_1,X_2)$$

$$Var(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \alpha_1^2\, Var(X_1) + \alpha_2^2\, Var(X_2) + 2\alpha_1\alpha_2\, Cov(X_1,X_2)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

πίνακας διασποράς
του (X_1, X_2)

$\underset{\sim}{\alpha}' \Sigma \underset{\sim}{\alpha} = Var(\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{X})$

$\underset{\sim}{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$\underset{\sim}{\alpha}' \underset{\sim}{X} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$

$\underset{\sim}{\alpha}' \Sigma \underset{\sim}{\alpha} \geq 0$

Πότε ισχύει ότι $Var(X_1+X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$;

Ισχύει αν και μόνο αν $Cov(X_1, X_2) = 0$.

Τότε οι τ.μ. X_1, X_2 λέγονται ασυσχέτιστες.

Ορισμός Συντελεστής συσχέτισης ρ ή $\rho(X_1, X_2)$ ή $Corr(X_1, X_2)$ ονομάζεται ο αριθμός

$$\rho = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1) \cdot Var(X_2)}} \in [-1, 1]$$

Πρέπει $0 < Var(X_i) < \infty$ $i = 1, 2$.

Ισχύει η ανισότητα C-S:

$$[\mathrm{Cov}(X_1,X_2)]^2 \leq \mathrm{Var}(X_1)\cdot \mathrm{Var}(X_2)$$

Διότι: $\mathrm{Var}\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1} - \lambda \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1-\mu}{\sigma_1}\right)$

$$+\lambda^2 \mathrm{Var}\left(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) - 2\lambda\, \mathrm{Cov}\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}, \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$= 1+\lambda^2 - 2\lambda \underbrace{\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sigma_1\sigma_2}}_{\rho} \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda\rho + 1 \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-2\rho)^2 - 4\cdot 1 \leq 0$$

$$4\rho^2 \leq 4 \quad \rho^2 \leq 1$$

Ισχύει $\rho(\alpha X_1+\beta, \gamma X_2+\delta) = \begin{cases} \rho(X_1, X_2), & \text{αν } \alpha\gamma>0 \\ -\rho(X_1,X_2) & \text{αν } \alpha\gamma<0 \end{cases}$

άρα $\rho^2(\alpha X_1+\beta, \gamma X_2+\delta) = \rho^2(X_1, X_2)$.

Θεώρημα: Αν οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε $\rho=0$ (δηλ. $Cov(X_1,X_2)=0$), εφ' όσον $E(X_1^2)<\infty$ και $E(X_2^2)<\infty$.

Πρόταση: Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_k$ είναι ανεξάρτητες και $g_i: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τότε

$$E[g_1(X_1)g_2(X_2)\cdots g_k(X_k)] = E(g_1(X_1))\cdot E(g_2(X_2))\cdot \ldots \cdot E(g_k(X_k)).$$

Απόδ. Πρότασης: $f(x_1,\dots,x_k) \overset{\text{ανεξ.}}{=} f_{X_1}(x_1)\cdots f_{X_k}(x_k)$.

Θεωρούμε $g(x_1,\dots,x_k) = g_1(x_1)\cdot\ldots\cdot g_k(x_k)$

$$E(g) = \int_{\mathbb{R}^k} g(x_1,\dots,x_k)\, f(x_1,\dots,x_k)\, dx_1\dots dx_k$$

$$= \int_{\mathbb{R}^k} f_{X_1}(x_1) g_1(x_1)\, f_{X_2}(x_2) g_2(x_2)\cdots f_{X_k}(x_k) g_k(x_k)\, dx_1\dots dx_k$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x_1) f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdot \ldots\ldots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x_k) f_{X_k}(x_k)\, dx_k$$

$$\left(\iint f(x) g(y)\, dy\, dx = \int f(x) \cdot \int g(y) \right)$$

$$= E(g_1(X_1)) \cdot \ldots \cdot E(g_k(X_k)).$$

Αν $X_1,\dots,X_k$ ανεξ. π.χ. $E(X_1\cdots X_k) = E(X_1)\cdots E(X_k)$

ή $E(\sin X_1 \cdot e^{X_2}) = E(\sin X_1)\cdot E(e^{X_2})$ κ.λπ.

Απόδ. Θεωρήματος: Αφού X_1, X_2 ανεξ. άρα

$$E(X_1X_2) = E(X_1)\cdot E(X_2) = \mu_1\cdot\mu_2.$$ Συνεπώς

$$Cov(X_1,X_2) = E(X_1X_2) - \mu_1\mu_2 = \mu_1\mu_2 - \mu_1\mu_2 = 0 \Rightarrow \rho = 0.$$

Τύπος αθροίσματος διασποράς:

$$Var(X_1 + \dots + X_k) = \sum_{i=1}^{k} Var(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum Cov(X_i, X_j)$$

$$Var(a_1X_1 + \dots + a_kX_k) = \sum_{i=1}^{k} a_i^2 Var(X_i) + 2\sum_{i<j}\sum a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

Νοε 29-6:21 μμ

Ασκήσεις 5.1, 5.2, 5.5, 5.7, 5.15

5.1) Ρίχνω διαδοχικά δύο ζάρια. Έστω X η ένδειξη του πρώτου ζαριού, $Y =$ η μεγαλύτερη ένδειξη.

Βρείτε την σ.π. $f(x,y)$ και την $f_Y(y)$.

$$\Omega = \{(i,j),\ i,j = 1,2,\dots,6\}$$

$X = i$, $Y = \max(i,j)$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)				
2	(2,1)					
3			$\cdot\,\cdot$			
4				$\cdot\,\cdot$		
5						
6						

$f(x,y)$ έχει νόημα για $x,y \in \{1,2,\dots,6\}$ με $x \le y$.

$x<y$: $\quad f(x,y) = P(X=x,\ Y=y) = P((x,y)) = \dfrac{1}{36}$

Για $x=y$: $f(x,y) = P(X=x,$ η μέγιστη ένδειξη να είναι $x)$

$$= P(\{(x,1),(x,2),\dots,(x,x)\}) = \frac{1}{36}+\dots+\frac{1}{36} = \frac{x}{36}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{36} & x<y \\ \frac{x}{36}=\frac{y}{36} & \text{αν } x=y \end{cases} \quad \Bigg| \quad x,y \in \{1,\dots,6\},\ x \le y$$

$$f_Y(y) = P(Y=y) = \sum_x f(x,y) \qquad y \in \{1,2,\dots,6\}$$

$$= \sum_{x=1}^{y} f(x,y) = f(1,y)+f(2,y)+\dots+f(y-1,y)+f(y,y)$$

$$= (y-1)\frac{1}{36} + \frac{y}{36} = \frac{2y-1}{36}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{2y-1}{36}, \quad y \in \{1,2,\dots,6\}}$$

Υπολογίστε την δεσμ. σ.π. $f_{X|Y}(x|y)$

για κάθε σταθερό $y \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \text{αν } x<y & \frac{1/36}{(2y-1)/36} = \frac{1}{2y-1} \\ \text{αν } x=y & \frac{x/36}{(2y-1)/36} = \frac{y}{2y-1} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2y-1}, & x=1,2,\ldots,y-1 \\ \frac{y}{2y-1}, & x=y \end{cases}$$

π.χ. $y=2$ $\quad f_{X|Y}(x|2) = \begin{cases} 1/3 & x=1 \\ 2/3 & x=2 \end{cases}$

$y=3$ $\quad f_{X|Y}(x|3) = \begin{cases} 1/5, & x=1,2, \\ 3/5, & x=3 \end{cases}$

5.2) $f(x,y) = 2e^{-x-2y}$, $x,y>0$.

(α) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;

(β) Βρείτε $P(X>2)$, $P(Y<1)$, $P(X>2, Y<1)$, $P(X>2 \mid Y<1)$

$P(X<Y)$.

$$f_X(x) \overset{x>0}{=} \int_0^\infty f(x,y)\,dy = 2e^{-x}\int_0^\infty e^{-2y}dy = e^{-x}\underbrace{\int_0^\infty 2e^{-2y}dy}_{Exp(2)} = e^{-x}$$

$X \sim Exp(1)$

$$f_Y(y) \overset{y>0}{=} \int_0^\infty f(x,y)\,dx = 2e^{-2y}\underbrace{\int_0^\infty e^{-x}dx}_{Exp(1)} = 2e^{-2y} \qquad y>0$$

$Y \sim Exp(2)$

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = e^{-x}\cdot 2e^{-2y} = 2e^{-x-2y} = f(x,y) \quad (x,y>0)$$

X, Y ανεξάρτητες. π.χ. $Var(X+Y) \overset{\text{ανεξ.}}{=} Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$

Νοε 29-6:43 μμ

$$P(X>2) = \int_2^\infty f_X(x)\,dx = \int_2^\infty e^{-x}\,dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_2^\infty = e^{-2}$$

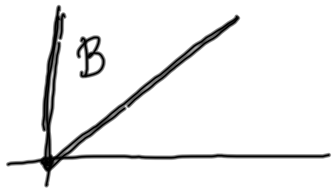
$$P(Y<1) = \int_0^1 f_Y(y)\,dy = 2\int_0^1 e^{-2y}\,dy = 1-e^{-2}.$$

$$P(X>2,\, Y<1) \overset{\text{ανεξ.}}{=} P(X>2)\cdot P(Y<1) = e^{-2}\left(1-e^{-2}\right).$$

$\left(P(X\in A,\, Y\in B) = P(X\in A)\cdot P(Y\in B)\right.$ για ανεξ. $\left.X, Y\right)$

$$P(X>2 \mid Y<1) = \frac{P(X>2,\, Y<1)}{P(Y<1)} = \frac{P(X>2)\cdot \cancel{P(Y<1)}}{\cancel{P(Y<1)}} = P(X>2) = e^{-2}$$

$P(X<Y) = P\left((X,Y)\in B\right)$ $\qquad B = \{(x,y)\in(0,\infty)^2 : x<y\}$



$$P\left((X,Y)\in B\right) = \iint_B f(x,y)\,dy\,dx$$

$$P(X<Y) = \iint_B 2e^{-x-2y}\, dy\, dx = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty 2e^{-x-2y} dy \right) dx$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-x} \left(\int_x^\infty e^{-2y} dy \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \int_x^\infty (-e^{-2y})' dy\ dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \cdot e^{-2x}\, dx = \int_0^\infty e^{-3x}\, dx = \frac{1}{3}$$

$$P(X<Y) = \frac{1}{3}.$$

Νοε 29-6:56 μμ