14ο 24/11/2017

$F(x,y) \overset{op}{=} P(X\le x,\ Y\le y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$\forall$ B σύνολο Borel, $B\subseteq\mathbb{R}^2$ ισχύει ότι

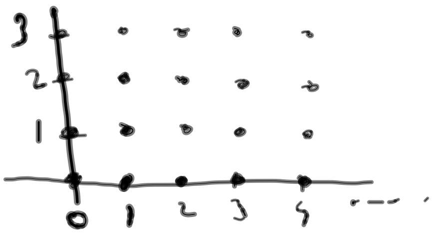
η $P\big((X,Y)\in B\big)$ καθορίζεται από την F.

<u>Διακριτές</u> Η (X,Y) καλείται διακριτό τυχαίο διάνυσμα

όταν $\exists\ S\subseteq\mathbb{R}^2$, S αριθμήσιμο, τέτοιο ώστε

$$P\big((X,Y)\in S\big)=1$$

S συνήθως είναι της μορφής $S=\{(i,j),\ i=0,1,\dots,\ j=0,1,\dots\}$



Συνάρτηση πιθανότητας διακριτού τ.δ. (X,Y):

$$f(x,y) \overset{\text{ορ}}{=} P(X=x,\ Y=y), \quad (x,y)\in S$$

Ιδιότητες: $f \geq 0$ και $\sum_{(x,y)\in S} f(x,y) = 1$

$$\sum_{y=0}^{\infty} f(x,y) = \sum_{y=0}^{\infty} P(X=x, Y=y) = P(X=x, Y\in \mathbb{N})$$
$$= P(X=x)$$

$$S \subseteq \mathbb{N}^2$$

Ισχύει: $$f_X(x) = \sum_y f(x,y)$$
$$f_Y(y) = \sum_x f(x,y)$$

Οι f_X, f_Y καλούνται περιθώριες σ.π., ενώ η f καλείται <u>από κοινού</u> σ.π. των X, Y.

π.χ. $(X,Y) \in \{0,1\}^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

X \ Y	0	1	
0	1/10	4/10	1/2
1	4/10	1/10	1/2
	1/2	1/2	

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & (x,y) = (0,0) \text{ ή } (1,1) \\ \frac{4}{10}, & (x,y) = (0,1) \text{ ή } (1,0) \end{cases}$$

$$\sum_{x=0}^{1} \sum_{y=0}^{1} f(x,y) = 1$$

$$P(X=x) = \sum_{y=0}^{1} f(x,y) = f(x,0) + f(x,1),$$

$$f_X(0) = f(0,0) + f(0,1) = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2}$$

$f_X(0) = f_X(1) = \frac{1}{2}$

$f_Y(0) = f_Y(1) = \frac{1}{2}$

δηλ. $X, Y \sim b(1, \frac{1}{2})$

Νοε 24-3:25 μμ

2ο παράδειγμα:

$X \backslash Y$	0	1	
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
	1/2	1/2	

και εδώ ισχύει

$X, Y \sim b(1/2)$

Οι περιθώριες f_X, f_Y δεν καθορίζουν την από κοινού $f(x,y)$. Η από κοινού καθορίζει τις περιθώριες.

<u>Ορισμός:</u> Η σ.κ. F καλείται συνεχής (ή το αντίστοιχο διάνυσμα (X,Y) καλείται συνεχές) όταν υπάρχει μία ολοκληρ. συνάρτηση $f \geq 0$ τέτοια ώστε

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y) = F(\infty,\infty) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t_1,t_2)\,dt_2\,dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t_1,t_2)\,dt_2\,dt_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} f .$$

Άρα $\int_{\mathbb{R}^2} f = 1.$

Ισχύει $\dfrac{\partial^2}{\partial_y \partial_x} F(x,y) = f(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial_x \partial_y} F(x,y)$

Νοε 24-3:37 μμ

Περιθώριες: $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} P(X \leq x, Y \leq y)$

$$= \lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f \dots$$

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2)\, dt_2\, dt_1}$$

$$f_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t_2)\, dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

Άρα $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$

Νοε 24-3:40 μμ

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \Rightarrow F'(x)=f(x)$$

Δεσμευμένες.

$$f_{X|Y}(x|y) \overset{op}{=} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad (y \text{ σταθερό: } f_Y(y)>0)$$

$$f_{Y|X}(y|x) \overset{op}{=} \frac{f(x,y)}{f_X(x)}. \qquad (x \text{ σταθερό: } f_X(x)>0)$$

Διακριτή: $P(X=x\,|\,Y=y)=P(A\,|\,B)$ $\qquad A=\{X=x\}$, $B=\{Y=y\}$

$$=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$(X_1, X_2, \dots, X_k) = \underset{\sim}{X}$ κ-διάστατη

$P(\underset{\sim}{X} \le \underset{\sim}{x}) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_k \le x_k) \qquad \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^k$

$\overset{\text{ορ}}{=} F(\underset{\sim}{x})$ (από κοινού σ.κ. των $X_1, \dots, X_k$)

$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \dots, \infty)$

$F_{X_2}(x_2) = F(\infty, x_2, \infty, \dots, \infty)$

κ.ο.κ.

σ.π. ή πυκνότητα ορίζεται ανάλογα π.χ.

πυκνότητα f:

$$F(\underset{\sim}{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, \ldots, t_k)\, dt_k \ldots dt_1, \quad \forall\ \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^k$$

$$f = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} F(\underset{\sim}{x})$$

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \sum\limits_{x_2} \cdots \sum\limits_{x_k} f(x_1, \ldots, x_k), & \underset{\sim}{X} \text{ διακριτό} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_k)\, dx_k \ldots dx_2 & \end{cases}$$

Ανεξαρτησία τ.μ.

Ορισμός: Οι $X_1, \ldots, X_k$ καλούνται ανεξάρτητες

όταν $F(x_1, \ldots, x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_k}(x_k)$ $(*)$

$\forall\ x_1, \ldots, x_k.$

Θεώρημα: Για $\forall\ B_1, \ldots, B_k \subseteq \mathbb{R}$, η

$$P\left((X_1, \ldots, X_k) \in B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k \right) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i \in B_i)$$

Νοε 24-4:02 μμ

Θεώρημα: Στη συνεχή ή τη διακριτή περίπτωση, η ανεξαρτησία ισοδυναμεί με:

$$\boxed{f(x_1, \ldots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_k}(x_k)}$$