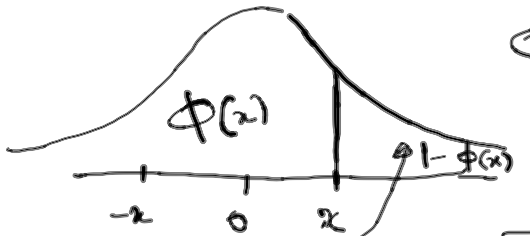
12ο 10/11/2017

$Z \sim N(0,1)$ όταν η πυκνότητα

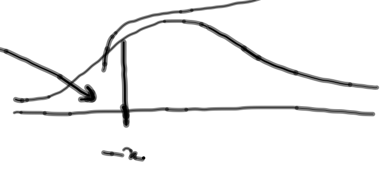
$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Γράφουμε $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ (η πυκνότητα της τυπ. κανονικής)



$$\Phi(x) = P(Z \le x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

$\Phi(-x) =$



$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$$

z	0	1	2	...	9
0.0	0.5				
0.1					
0.2					
⋮					
1.0					
1.1			0.88		
1.2					
⋮					
3.0	0.997			...	0.998

$\Phi(1.12) = 0.88$

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1-\Phi(1))$$
$$= 2\Phi(1) - 1 \simeq 65\% = 0.65$$
$$P(-2 \leq Z \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 95\% = 0.95$$
$$P(-3 \leq Z \leq 3) \simeq 99\%$$

Πρόταση: Αν $Z \sim N(0,1)$ τότε η τ.μ.

$X = \sigma Z + \mu$ $(\sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{R})$ ακολουθεί $N(\mu, \sigma^2)$.

Απόδ.: $F(x) = P(X \leq x) = P(\sigma Z + \mu \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

$$f(x) = F'(x) = \Phi'\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)' = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma}$$
$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad [X \sim N(\mu, \sigma^2)]$$

Πόρισμα: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma^2$

και $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Απόδ: $X = \sigma Z + \mu \quad Z \sim N(0,1), \quad Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

$$E(X) = E(\sigma Z + \mu) = \sigma \overset{0}{E(Z)} + \mu = \sigma \cdot 0 + \mu = \mu.$$

$$Var(X) = Var[\sigma Z + \mu] = \sigma^2 \, Var(Z) = \sigma^2 \cdot 1 = \sigma^2.$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Ποια η πιθανότητα η X να απέχει το πολύ μία τυπική απόκλιση από τη μέση τιμή της? Το πολύ 2; το πολύ 3;

$$P(|X-\mu| \le \sigma) = P(-\sigma \le X-\mu \le \sigma) = P\left(-1 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 1\right)$$

$$= P(-1 \le Z \le 1) \simeq 65\%$$

Όμοια $P(|X-\mu| \le 2\sigma) = P\left(-2 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le 2\right)$

$= 2\Phi(2) - 1 \simeq 95\%$

$P(|X-\mu| \le 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1 \simeq 99\%$

Έστω X μία (οποιαδήποτε) τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$.

Τότε η $Y \stackrel{\text{ορ}}{=} \frac{X-\mu}{\sigma}$ έχει $E(Y) = \frac{1}{\sigma}E(X) - \frac{\mu}{\sigma} = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$

και $Var(Y) = Var\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 Var(X) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$

Αυτό λέγεται τυποποίηση. π.χ. $X \sim Exp(\lambda)$

$\mu = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ $\quad \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-\frac{1}{\lambda}}{1/\lambda} = \lambda X - 1$

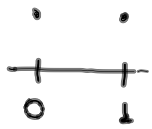
Νοε 10-3:42 μμ

Ασκήσεις κεφ 4.   4.1, 4.2, 4.5, 4.7, 4.8, 4.11 – 4.15
4.17, 4.18.

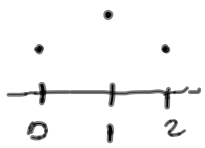
$\cancel{\frac{1}{1+x^2}}$?

e^{-x^2}

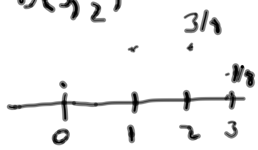
$b(1, \frac{1}{2})$

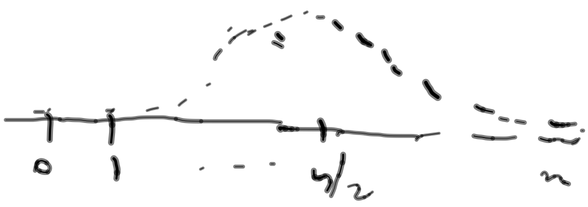


$b(2, \frac{1}{2})$



$b(3, \frac{1}{2})$





4.11) Βάρος νεογ. αγοριών ακολουθεί κανονική με μέση τιμή 3.4 Kg και τυπική απόκλιση 0.4 Kg.
Βάρος νεογ. κοριτσιών ακολουθεί κανονική με μέση τιμή 3.35 Kg και τυπική απόκλιση 0.35 Kg.
Να βρεθεί η πιθανότητα:
(α) Ένα αγόρι να έχει βάρος > 4 Kg.
(β) Ένα κορίτσι να έχει βάρος από 3 ως 3.7 Kg.

Έστω X = βάρος ενός νεογ. αγοριού $X \sim N(3.4, 0.4^2)$

Y = —"— —"— κοριτσιού $Y \sim N(3.35, 0.35^2)$

(α) $P(X>4) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4-3.4}{0.4}\right) = P(Z>1.5) = 1-\Phi(1.5)$

$= 1-0.9332 = 0.0668 \simeq 7\%$

(β) $P(3 < Y < 3{,}7) = P\left(\frac{3-3.35}{0.35} < \frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{3.7-3.35}{0.35}\right)$

$= P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$

$= \Phi(1) - (1-\Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1$

$\simeq 0{,}68$

4.12 Ύψος ανδρών ακολουθεί κανονική με μέση τιμή 175 cm, τυπική απόκλιση 5 cm. Να βρεθούν:

(α) Το ποσοστό ανδρών με ύψος το πολύ 175 cm

(β) Το ποσοστό ανδρών με ύψος από 170 ως 180 cm

(γ) Την πιθανότητα, αν διαλέξουμε τυχαία 6 άνδρες, 2 ακριβώς από αυτούς να είναι κοντύτεροι του μέσου ύψους.

(α) $P(X \le 175) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{175-175}{5}\right) = P(Z \le 0)$

$= \Phi(0) = 1/2$

(β) $P(170 < X < 180) = P\left(\frac{170-175}{5} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{180-175}{5}\right)$

$= P(-1 < Z < 1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.68.$

(γ) $X_1, \ldots, X_6$ στα ύψη των 6 ανδρών που επιλέχθηκαν

Θέτω $Y_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_i \le \mu = 175 \\ 0, & \text{αν } X_i > \mu = 175 \end{cases}$ $\quad i = 1, 2, \ldots, 6$

$Y = Y_1 + \ldots + Y_6 \sim b(6, p) \qquad p = P(X_i \le 175) \overset{(α)}{=} P(Z \le 0) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P(Y=2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64}.$

4.13) Να ν κανον. κατανομή με μέση τιμή 140 και τυπική απόκλιση 7. (τα ίδια)

(δ) Να βρείτε την πιθ. το επίπεδο να είναι μικρότερο του 130 ή μεγαλύτερο του 160.

$$P(\{X \leq 130\} \cup \{X \geq 160\}) = P\left(\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{130-140}{7}\right\} \cup \left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{160-140}{7}\right\}\right)$$

$$= P\left(\left\{Z \leq -\frac{10}{7}\right\} \cup \left\{Z \geq \frac{20}{7}\right\}\right) = P\left(Z \leq -\frac{10}{7}\right) + P\left(Z \geq \frac{20}{7}\right)$$

$$- P\Big(\underbrace{\cancel{\left\{Z \leq -\tfrac{10}{7}\right\} \cap \left\{Z \geq \tfrac{20}{7}\right\}}}_{=\emptyset}\Big) = \Phi\left(-\frac{10}{7}\right) + \left(1 - \Phi\left(\frac{20}{7}\right)\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{10}{7}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{20}{7}\right) = 2 - \Phi\left(\frac{10}{7}\right) - \Phi\left(\frac{20}{7}\right).$$

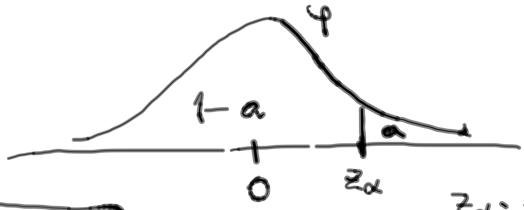
4.14) X χοληστερόλη $\sim$ Normal

μέση τιμή 250, τυπ. απόκλ. 50

(β) Να βρεθεί η τιμή της χοληστερόλης c τέτοια ώστε στο 10% των ατόμ. η χοληστερόλη να υπερβαίνει το c.

$c = ?$ $\quad P(X > c) = 0.10$

$$0.10 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{c-250}{50}\right) = P\left(Z > \frac{c-250}{50}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{c-250}{50}\right)$$



$$\boxed{\Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha}$$

z_α: το άνω α-ποσοστ. σημείο της κανον. $N(0,1)$

$$P\left(Z > \frac{c-250}{50}\right) = 0.10$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-250}{50} = z_{0.10}$$

$$c = 250 + z_{0.10} \cdot 50$$

Για ποιό z, $\Phi(z) = 0.9$ $\quad z_{0.10} \simeq 1.28$

Διότι $\Phi(1.28) \simeq 0.90$

$$c = 250 + (1.28) \cdot 50 = 314$$

4.21 Χρόνος επισκευής X ακολουθεί ομοιόμορφη στο $(1,3)$. Βρείτε:

(α) Το μέσο χρόνο επισκευής.

(β) Το μέσο κόστος επισκευής, αν το κόστος Y συνδέεται με το χρόνο επισκευής X από τη σχέση $Y = 5 + 3X^2$.

(α) $X \sim U(1,3) \Rightarrow \mu = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1+3}{2} = 2.$ $\quad (\alpha = 1,\ \beta = 3)$

(β) $E(Y) = E(5+3X^2) = 5 + 3 \cdot E(X^2) = 5 + 3(\mu^2 + \sigma^2)$

$(E(X^2) - \mu^2 = \sigma^2)$ $\qquad = 5 + 3\left(2^2 + \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}\right)$

$= \dots = 18.$