10ο 3/11/2017

3.1| Δύο ζάρια ρίχνονται 12 φορές. Βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας του αριθμού X των ρίψεων που το πρώτο ζάρι υπερβαίνει το 2ο. Βρείτε και τον αναμενόμενο αριθμό φορών, καθώς και τη διασπορά.

$$S_X = \{0, 1, \ldots, 12\}$$

$p = P$(το πρώτο ζάρι υπερβαίνει το δεύτερο)

$X = \#$ επιτ. σε 12 δοκιμές Bernoulli(p)

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3), & \ldots & (1,6) \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,6) \\
\vdots & & \vdots & & \\
(6,1) & (6,2) & (6,3), & \ldots & (6,6)
\end{array}$$

Συνολικά: $\dfrac{36-6}{2} = 15 \qquad p = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12} \qquad 1-p = \dfrac{7}{12}$

$$X \sim b\left(n=12,\ p=\frac{5}{12}\right)$$

$$\text{σ.π.} \quad f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,\ldots,n$$

$$= \binom{12}{x} \left(\frac{5}{12}\right)^x \left(\frac{7}{12}\right)^{12-x}, \quad x = 0,1,\ldots,12$$

$$\mu = E(X) = n \cdot p = 12 \cdot \frac{5}{12} = 5$$

$$\sigma^2 = np \cdot (1-p) = 12 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{12}$$

3.2) Σε 10 ρίψεις μη αμερόληπτου νομίσματος η πιθ. 5 κεφαλών είναι διπλάσια της πιθανότητας 4 κεφαλών. Να υπολογίσουμε την πιθ. σε 5 ρίψεις να εμφανισθεί τουλάχιστον μία κεφαλή.

$X = \#$ επιτυχιών στις 10 ρίψεις (επιτυχία = κεφαλή)

Έστω p η πιθ. κεφαλής, $p \in (0,1)$.

$$X \sim b(10, p) \Rightarrow P(X=x) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10.$$

$$P(X=5) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^5, \quad P(X=4) = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$$

$P(X=5) = 2 \cdot P(X=4)$ από υπόθεση

$\binom{10}{5} p^5 (1-p)^5 = 2 \cdot \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$ απλ. $\underline{p^4 (1-p)^5}$

$$\frac{\cancel{10!}}{5!\,5!}\, p = 2 \cdot \frac{\cancel{10!}}{4!\,6!}\,(1-p)$$

$$\frac{6!}{5!}\, p = 2 \cdot \frac{5!}{4!}\,(1-p) \qquad 6p = 10(1-p)$$

$$16p = 10 \qquad p = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$X \sim b\left(10, \frac{5}{8}\right).$

Βρείτε την πιθ. σε 5 δοκ. να έχω τουλ. 1 κεφαλή.

<u>Επίσης</u>, Βρείτε την πιθ. σε 5 δοκ. να έχω τουλ. 2 κεφαλές.

Έστω Y η τ.μ. που μετράει τον αριθμό κεφ. σε 5 δοκιμές

$$Y \sim b(5,p) = b\left(5, \frac{5}{8}\right)$$

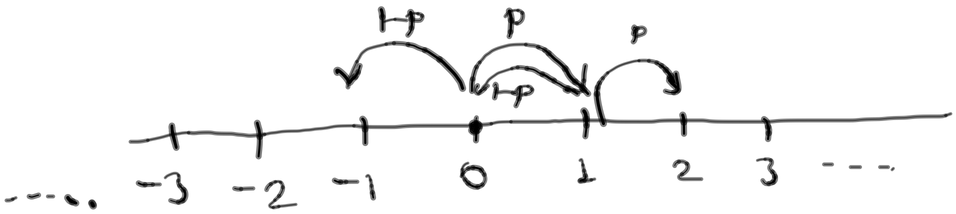
$$P(Y \geq 1) = f_Y(1) + \dots + f_Y(5) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y \leq 0)$$
$$= 1 - P(Y=0) = 1 - (1-p)^5 = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^5.$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - (1-p)^5 - \binom{5}{1} p^1 (1-p)^4$$
$$= 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^5 - 5 \cdot \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^4 = 1 - \frac{3^4}{8^5} \cdot (3+25).$$

3.4) Σωμάτιο Σ κινείται αριστερά με πιθ. $1-p$ ή δεξιά με πιθ. p. Έστω X_ν η θέση του Σ μετά από ν βήματα (ξεκινάει από το 0).

Δείξτε ότι η τ.μ. $Y_\nu = \dfrac{X_\nu+\nu}{2} \sim b(\nu,p)$

και άρα $E(X_\nu)=\nu(2p-1)$, $Var(X_\nu)=4\nu p(1-p)$.



Στο j-οστό βήμα, έστω $Y_j \sim b(p)$

δηλ. $P(Y_j=1)=p \quad P(Y_j=0)=1-p$.

Αν $Y_j=1$, το Σ μετακινείται $+1$

$Y_j=0$, το Σ μετακινείται -1

Άρα η μετακίνηση: $2Y_j-1$ (στο j βήμα)

$$X_\nu = (2Y_1-1)+(2Y_2-1)+\dots+(2Y_\nu-1)$$

$$= 2(Y_1+\dots+Y_\nu)-\nu$$

$$\boxed{Y_1+\dots+Y_\nu = \frac{\nu+X_\nu}{2}} \qquad Y_1+\dots+Y_\nu \sim b(\nu,p)$$

$$\frac{\nu + X_\nu}{2} \sim b(\nu, p)$$

$$Y = \frac{\nu + X_\nu}{2} \Rightarrow E(Y) = \nu \cdot p$$

$$\nu p = E\left(\frac{\nu + X_\nu}{2}\right) = \frac{\nu}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot E(X_\nu)$$

$$2\nu p = \nu + E(X_\nu) \Rightarrow E(X_\nu) = 2\nu p - \nu$$

$$= \boxed{\nu(2p-1) = E(X_\nu)}$$

$$Var(Y) = \nu p(1-p)$$

$$= Var\left(\frac{\nu + X_\nu}{2}\right) = Var\left(\frac{1}{2} X_\nu + \frac{\nu}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var(X_\nu)$$ ιδιότητες διασπ.

$$\Rightarrow \boxed{Var(X_\nu) = 4\nu p(1-p)}$$

Νοε 3-3:57 μμ

3.5) Η πιθανότητα επιτυχούς βολής κατά στόχου είναι $p=0.3$. Να βρεθούν

(a) ο μέσος αριθμός βολών μέχρι να χτυπηθεί ο στόχος

(β) ο ελάχιστος αριθμός v βολών που απαιτούνται ώστε η πιθ. να χτυπηθεί ο στόχος να είναι τουλάχιστον 0.90. (90%).

$Y = \#$ δοκιμών ως την 1η επιτυχία

$S_Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $Y \sim G(p)$, $P(Y=y) = p(1-p)^{y-1}$, $y = 1, 2, \ldots$

(α) μέσος αριθμός βολών $= E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{10}{3} = 3.333\ldots$

(β) $\nu = ?$

$$P(Y \leq \nu) \geq 0.9$$

$$1 - P(Y > \nu) \geq 0.9$$

$$P(Y > \nu) \leq 1 - 0.9 = 0.1$$

$$P(Y > \nu) \leq 0.1 \qquad (*)$$

$P(Y>\nu) = P($στις ν πρώτες δοκιμές να μην επιτευχθεί ο στόχος$)$

$$= (1-p)^\nu$$

$$(1-p)^\nu \leq 0.1 \qquad (0.7)^\nu \leq 0.1$$

$$\nu \log(0.7) \leq \log(0.1) \qquad \nu \geq \frac{\log(0.1)}{\log(0.7)} \simeq 6.45$$

Άρα $\nu = 7$

3.7) Η πιθ. επιτυχούς βολής είναι 0.9. Βρείτε

(α) P(να απαιτηθούν 5 το πολύ βολές για να χτυπηθεί ο στόχος)

(β) τον μέσο αριθμό βολών μέχρι να χτυπηθεί ο στόχος

(γ) τον μέσο αριθμό βολών μέχρι να χτυπηθεί ο στόχος 20 φορές.

$Y = \#$ βολών μέχρι την πρώτη επιτυχία.

$S_Y = \{1, 2, \ldots\}$ $\quad f_Y(y) = p(1-p)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \ldots \quad G(p=0.9)$

(α) $P(Y \leq 5) = 1 - P(Y > 5) = 1 - P(\text{οι πρώτες 5 απέτυχαν}) = 1 - (1-p)^5$

$= 1 - 10^{-5} = 0.99999$ $\qquad$ (β) $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{100}{90} = \frac{10}{9} = 1.111\ldots$

Νοε 3-4:26 μμ

(γ) $Z = \#$ βολών μέχρι να επιτ. ο στόχος 20 φορές

$Z \sim$ Pascal δηλ. ΑΔ $(r=20,\ p=0.9)$

$S_Z = \{20, 21, \dots\}$

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{19} p^{20} (1-p)^{z-20}, \quad z = 20, 21, \dots$$

$$E(Z) = r \cdot \frac{1}{p} = 20 \cdot \frac{100}{90} = 20 \cdot \frac{10}{9} = \frac{200}{9} \simeq 22.22\dots$$

3.12 Σε μία κάλπη με σφαιρίδια με τους αριθμούς 1, 2, …, 10 εξάγονται χωρίς επανάθεση 4 σφαιρίδια.
Έστω $X =$ ο μεγαλύτερος αριθμός που θα εξαχθεί.

Βρείτε

(α) Την σ.π. $f_X(x)$ της X

(β)* $E(X)$, $Var(X)$.

---

1 2 .... 10 $\xrightarrow{4}$

$S_X = \{4, 5, \dots, 10\}$

$x \in \{4, 5, \dots, 10\}$

$$f_X(x) = P(\text{ο μεγ.} = x) = \frac{1 \cdot \binom{x-1}{3}}{\binom{10}{4}}$$

10 $\xrightarrow{\text{1 τρόπος}}$

1, ..., 9 : 3 $\xrightarrow{\binom{9}{3}}$ {10, 2, 7, 8}

$1 \cdot \binom{9}{3}$ για μέγιστο $x=10$

7 $\xrightarrow{\text{1 τρ.}}$

1 2 .. 6 : 3 $\xrightarrow{\binom{6}{3}}$ {7 ...} $= 1 \cdot \binom{6}{3}$

$$f_X(x) = \frac{\binom{x-1}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{(x-1)_3}{3!}\,\frac{4!}{(10)_4} = \frac{4}{(10)_4}\,(x-1)_3$$

$$(\nu)_\kappa = \underbrace{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-\kappa+1)}_{\kappa\ \text{παρ.}}$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}\cdot(x-1)(x-2)(x-3), \qquad x=4,5,\dots,10}$$

(β) $$E(X) = \sum_{x=4}^{10} x\cdot\frac{4}{(10)_4}\,(x-1)_3 = \frac{4}{(10)_4}\sum_{x=4}^{10} x\,(x-1)_3$$

$$= \frac{4}{(10)_4}\sum_{x=4}^{10}(x)_4$$

$\sum_{x=a}^{b}(x)_\kappa$ μοιάζει $\int_a^b x^\kappa\,dx = \frac{b^{\kappa+1}-a^{\kappa+1}}{\kappa+1}$

$$\sum_{x=a}^{b} \Delta g(x) = \sum_{x=a}^{b} \left(g(x+1) - g(x)\right) = \left(g(a+1) + \dots + g(b) + \underline{g(b+1)}\right)$$

$$- \left(\underline{g(a)} + \dots + g(b)\right)$$

$$\Delta g(x) = g(x+1) - g(x)$$

$$= g(b+1) - g(a)$$

$$\Delta (x)_k = (x+1)_k - (x)_k$$

$$= (x+1) \cdot \underbrace{x \cdot (x-1) \dots (x-k+2)}_{(x)_{k-1}} - \underbrace{x(x-1) \dots (x-k+2)}_{(x)_{k-1}} (x-k+1)$$

$$= (x)_{k-1} \left[\underbrace{(x+1) - (x-k+1)}_{k}\right] = k\,(x)_{k-1}$$

$$\Delta (x)_k = k\,(x)_{k-1} \qquad (x^k)' = k\,x^{k-1}$$

$$(x)_k = \frac{\Delta (x)_{k+1}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \Delta (x)_k$$

Νοε 3-4:51 μμ

$$\sum_{x=a}^{b} (x)_k = \frac{1}{k+1} \sum_{x=a}^{b} \Delta (x)_{k+1} = \frac{1}{k+1}\left((b+1)_{k+1} - (a)_{k+1} \right)$$

$a = 4,\ b = 10$

$k = 4$

$$\sum_{x=4}^{10} (x)_4 = \frac{1}{5}\left((11)_5 - \cancel{(4)_5}^{\,0} \right)$$

$$= \frac{(11)_5}{5}$$

$$\Rightarrow \mu = E(X) = \frac{4}{(10)_4} \cdot \frac{(11)_5}{5} = \frac{4}{\cancel{(10)_4}} \cdot \frac{11 \cdot \cancel{(10)_4}}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

$$E[X(X+1)] = \frac{4}{(10)_4} \sum_{x=4}^{10} \underbrace{x(x+1)\,(x-1)_3}_{(x+1)_5}$$

$$= \frac{4}{(10)_4} \sum_{x=5}^{11} (x)_5 = \cdots = \text{γνωστό} = 88$$

$$\sigma^2 = E[X(X+1)] - \mu - \mu^2$$

$$= \cdots = \frac{44}{25}.$$