Κατανομή Poisson (λ)

ν ($\to \infty$) Δοκιμές Bernoulli (p)

$p = p_\nu = \frac{\lambda}{\nu}$ $\quad p_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$

$X_\nu = \#$ επιτυχιών,

$X_\nu \sim b(\nu, \frac{\lambda}{\nu})$ δηλ.

$$P(X_\nu = x) = \binom{\nu}{x} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right)^{\nu - x}$$

$$x = 0, 1, \ldots, \nu$$

$$\lim_{\nu \to \infty} P(X_\nu = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots \quad \lambda > 0$$

Ορισμός: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$, όταν

$$f_X(x) = P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$\lambda > 0$$

$$\sum_x f_X(x) = 1.$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\left[1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots\right]$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{0} = 1$$

$$\mu = \sum_{\substack{x=0\\1}}^{\infty} x\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1} \cdot \lambda}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\cdots\right] = \lambda.$$

Νοε 4-3:25 μμ

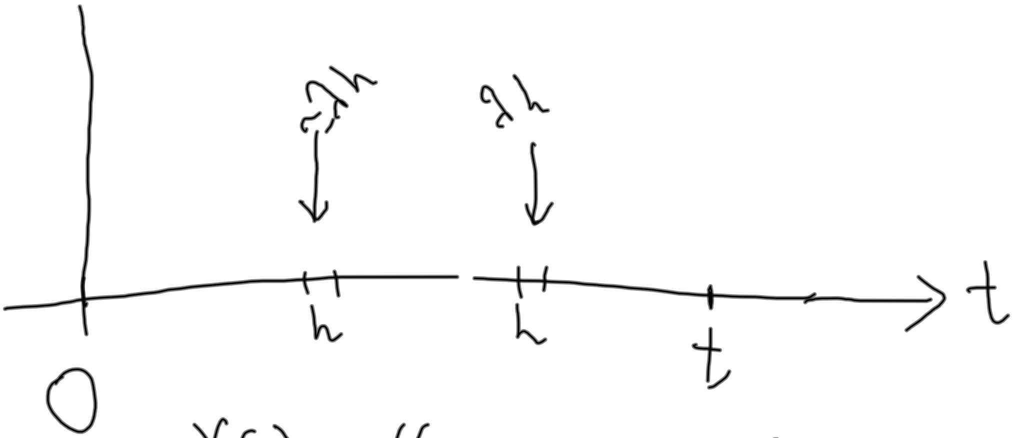
$$\sigma^2 = E(X^2) - \lambda^2 = E[X(X-1) + X] - \lambda^2$$
$$= \underbrace{E[X(X-1)]}_{\lambda^2} + \lambda - \lambda^2$$

$$\cdot\, E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$
$$= \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \cdot \lambda^2$$
$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots\right] = \lambda^2$$

Νοε 4-3:30 μμ

$X \sim Poisson(\lambda) \Rightarrow \mu = \lambda, \ \sigma^2 = \lambda$

$f_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \ x = 0, 1, \ldots$



$X(t) = \#$ συμβ. στο $[0, t]$.

Τότε $X(t) \sim Poisson(\lambda t)$

$X = X(1) \sim Poisson(\lambda) \quad (t=1)$

Διωνυμ.

$$\nu p_\nu = \nu \cdot \frac{\lambda}{\nu} = \lambda$$

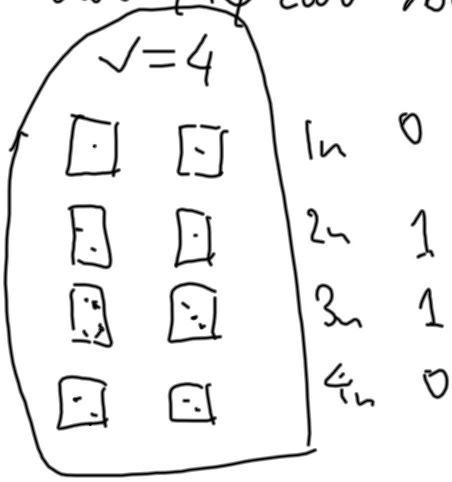
$$\nu p_\nu (1-p_\nu) = \nu \cdot \frac{\lambda}{\nu} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right) = \lambda\left(1-\frac{\lambda}{\nu}\right)$$

$$\longrightarrow \lambda$$

Ασκήσεις Κεφ. 3

3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.7, 3.10, 3.12, 3.16

3.1) Δύο ζάρια 12 φορές. Ποια η σ.π. του αριθμού X των ρίψεων που πρώτο > δεύτερου?



Επιτυχία: 1ο > 2ου , αλλιώς αποτυχία

$\nu = 12.$ $X = \#$ επιτυχιών

$X \sim b(\nu = 12, p = ?)$

$p = P(1o > 2ou) = \frac{15}{36}$

$(1,1), (1,2) \ldots (1,6)$

$(2,1), (2,2) \ldots (2,6)$

$\vdots$

$(6,1) \ldots$

$$P(X=x) = \binom{12}{x}\left(\frac{15}{36}\right)^{x}\left(1-\frac{15}{36}\right)^{12-x},$$

$$x = 0, 1, \ldots, 12$$

Νοε 4-3:46 μμ

3.2) Σε 10 ρίψεις μη αμερ. νομίσματος η πιθ. 5 κεφ είναι διπλάσια των 4 "Κ".

Ποια η πιθ. σε 5 ρίψεις να φέρω τουλ. 1 "Κ"?

X = # επιτ (=Κ) σε 10 δοκ.

$$X \sim b(10, p) \qquad P(X=5) = 2 \cdot P(X=4)$$

$$\binom{10}{5} p^5 (1-p)^{10-5} = 2 \cdot \binom{10}{4} p^4 (1-p)^{10-4}$$

$$\frac{\cancel{10!}}{5!\,5!} p^4 \cancel{(1-p)^5} \cdot p = 2 \cdot \frac{\cancel{10!}}{4!\,6!} p^4 \cancel{(1-p)^5} \cdot (1-p)$$

$$\frac{6!}{5!} = 6$$

$$6p = 10(1-p)$$

$$\Longrightarrow \boxed{p = 5/8}$$

Ζητείται η $P(Y \geq 1)$, $Y \sim b(5, \frac{5}{8})$

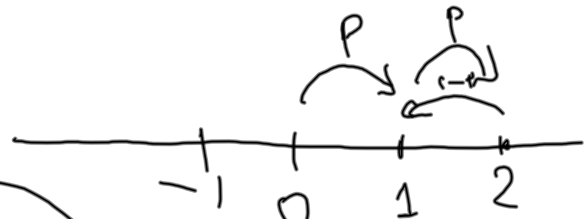
$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - (1-p)^5$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^5.$$

3.4 Σωμάτιο Σ ξεκινά από το 0, και σε κάθε βήμα κινείται αρ. με πιθ. $1-p$, δεξιά με πιθ. p. Έστω X_ν = η θέση του μετά από ν βήματα. Δείξτε ότι

η τ.μ. $Y_\nu = \dfrac{X_\nu + \nu}{2} \sim b(\nu, p)$

και $EX_\nu = (2p-1)\nu$, $Var X_\nu = 4\nu p(1-p)$.



$I_j \sim b(p)$ $\quad j = 1, 2, \ldots, \nu$

$$2I_j - 1 = \begin{cases} +1, & \text{αν } I_j = 1 \\ -1, & \text{αν } I_j = 0 \end{cases}$$

$$X_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} (2I_j - 1) = \underbrace{2(I_1 + \cdots + I_\nu) - \nu}$$

$Y_\nu \sim b(\nu, p)$

$$Y_\nu = \underbrace{I_1 + \cdots + I_\nu} = \frac{X_\nu + \nu}{2}$$

$$Y_\nu = \frac{X_\nu + \nu}{2} \sim b(\nu, p)$$

$$EY_\nu = \nu \cdot p, \quad Var(Y_\nu) = \nu p(1-p)$$

$$\boxed{X_\nu = 2Y_\nu - \nu}$$

$$E(X_\nu) = 2E(Y_\nu) - \nu = 2\nu p - \nu = \nu(2p-1)$$

$$Var(X_\nu) = Var(2Y_\nu - \nu) = 2^2 \cdot Var(Y_\nu)$$

$$= 4\nu p(1-p).$$

3.5] $p = 0.3$ Να υπολογ. ο αριθ- βολών ν που απαιτούνται ώστε η πιθ. να χτυπηθεί ο στόχος να είναι τουλ. 0.9

$Y = \#$ βολών ως την 1η επιτυχία

$$P(Y=y) = p\,(1-p)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \dots$$

$$\underbrace{P(Y \le \nu)}_{=\,1-P(Y>\nu)} \ge 0.9 \iff P(Y>\nu) \le 0.1$$

$$P(Y>\nu) = P(\text{οι πρώτες } \nu \text{ να αποτύχουν})$$
$$= (1-p)^\nu = (0.7)^\nu$$

$$(0.7)^\nu \leq 0.1 \iff \nu \underbrace{\log(0.7)}_{} \leq \log(0.1)$$
$$\iff \nu \geq \frac{\log(0.1)}{\log(0.7)} \simeq 6.45$$

Χρειάζονται τουλ. 7 βολές.

3.7 $p = 0.9$

(β) Ποιος ο μέσος αριθμ. βολών για να χτυπηθεί ο στόχος;

$X = \#$ δοκ. μέχρι να χτυπ. ο στόχος

$$P(X=x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \ldots$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.9} = 1.1111\ldots$$

3.10) 125 εργ., 50 γυν., 75 άνδρες.

Διαλέγω $\underline{5}$ εργ. Ποια η πιθ. οι 2 γυν.;

$$P(X=2) = \frac{\binom{50}{2}\cdot\binom{75}{3}}{\binom{125}{5}}$$

$$\simeq P(Y=2), \quad Y \sim b\left(\nu=5,\ p=\frac{50}{125}\right)$$

$$\binom{5}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \overset{2}{\cancel{10}}\cdot\frac{4\cdot 27}{5^{\cancel{5}4}} = \frac{2\cdot 4\cdot 27}{5^4} \quad \overset{\shortparallel}{2/5}$$

$\underline{3.12}$ $\underline{1, 2, \ldots, 10}$ $\longrightarrow$ 4 αριθμοί (χωρ. επαν)
(π.χ. 10, 2, 1, 7)

$X =$ ο μέγιστος των 4.

(α) $P(X=x)$? (β) $E(X)$, $Var(X)$

$$P(X \leq x) = \frac{\binom{x}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{(x)_4/4!}{(10)_4/4!} = \frac{(x)_4}{(10)_4}$$

$$P(X=x) = P(X \leq x) - P(X \leq x-1)$$

$$= \frac{(x)_4 - (x-1)_4}{(10)_4}, \quad x = 4, 5, \ldots, 10$$

$$\sum_{x=4}^{10} x f_X(x) = \dots = \frac{44}{5} = 8{,}8$$

$$\sigma^2 = \dots = \frac{44}{25}$$

$\boxed{3.16}$ Θάν/σε ένα μήνα $\sim$ Poisson.

Η πιθ. το πολύ 1 θάνατος είναι 4πλάσια της πιθ. να συμβούν ακριβώς 2 θάνατοι.

(α) Να μη συμβεί θαν. σε 1 μήνα.
(β) Το πολύ 2 θαν. σε 2 μήνες.

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ για κάποιο $\lambda > 0$.

Δεδ: $P(X \leq 1) = 4 \cdot P(X=2)$

$$P(X=0) + P(X=1) = 4 \cdot P(X=2)$$

$$e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 4 \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} = 2 e^{-\lambda} \lambda^2$$

$$1 + \lambda = 2\lambda^2 \qquad \lambda = 1, \ \lambda = -1/2 < 0$$

Άρα $X = X(1) \sim Poisson(1)$.

(β) P(το πολύ 2 θάν. σε 2 μήνες)

$$= P(Y \leq 2)$$

$$Y = X(2) \sim Poisson(2 \cdot \lambda) = Poisson(2)$$

$$t = 2$$

$$P(Y \leq 2) = e^{-2} + \underbrace{2 \cdot e^{-2}} + e^{-2} \cdot \frac{2^2}{2!} = 5e^{-2}.$$