Διακριτές Τ.μ.

$X \sim b(p)$ (Bernoulli με παρ. $p \in (0,1)$)

όταν $P(X=0) = 1-p$, $P(X=1) = p$.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p, & x=0 \\ p, & x=1 \end{cases}$$

$\mu = E(X) = p$ $\quad \sigma^2 = Var(X) = p(1-p)$.

Νοε 2-3:13 μμ

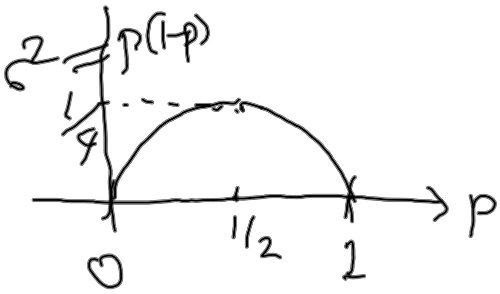
$$\mu = \sum_x x f(x) = 0 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - p^2 \quad (\text{αφού } \mu = p)$$

- $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x) = 0^2 \cdot f(0) + 1^2 \cdot f(1) = p$

$(X^2 = X$ επειδή $X \in \{0, 1\})$

$$\Rightarrow \sigma^2 = Var(X) = p - p^2 = p(1-p) \quad \square$$



Διωνυμική $b(\nu, p)$ $\quad \nu \in \{1, 2, \dots\}$

$p \in (0,1)$

$$b(p) \equiv b(1, p)$$

$X \sim b(\nu, p) \overset{\text{ορ}}{\Longleftrightarrow} X = \#$ επιτυχιών σε ν δοκ. Bernoulli(p)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{\nu}{x} p^{x} (1-p)^{\nu - x}$$

$$x = 0, 1, \ldots, \nu$$

Π.χ. $\nu = 1$ $\quad f(x) = \binom{1}{x} p^{x} (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$

$$= \begin{cases} 1-p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \end{cases} \qquad b(p)$$

$$\{X = x\}$$

Το $\{X=x\}$ αποτελείται από $\binom{\nu}{x}$

στοιχ. ενδεχόμενα, δηλ. αύξια των

ακολουθιών από 0 και 1 με

x "1" και $\nu-x$ "0"

$\binom{4}{2}=6$

π.χ. $x=2$, $\nu=4$

1100 1010 1001

0110 0101 0011

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_\nu$$

όπου X_i ανεξ. $b(p)$.

$$E(X) \stackrel{\bullet}{=} E(X_1) + \dots + E(X_\nu) = \nu \cdot p$$

$$Var(X) \stackrel{\text{ανεξ.}}{=} Var(X_1) + \dots + Var(X_\nu)$$

$$= \nu p (1-p)$$

$$X \sim b(\nu, p) \Rightarrow \mu = \nu \cdot p, \quad \sigma^2 = \nu \cdot p (1-p).$$

Noε 2-3:41 μμ

Γεωμετρική Κατανομή $G(p)$, $p \in (0,1)$.

(1ος) Σε ακολουθία ανεξ. δοκιμών $\{0,1,\dots\}$ $b(p)$ (με το ίδιο p), η X παριστάνει τον αριθμό <u>Αποτυχιών</u> ως την 1η Επιτυχία.

(2ος) Σε ακ. αν. δοκ. $b(p)$, η $Y \in \{1,2,\dots\}$ παριστάνει αριθμό <u>Δοκιμών</u> ως την 1η Επιτυχία

$$Y = X + 1. \quad [X \sim G(p),\ Y \sim G(p)]$$

$$f_X(x) = P(X = x) = P(\underbrace{0\,0\,0 \ldots 0}_{x}\cdot 1)$$
$$= (1-p)^x \cdot p$$

$$f_X(x) = p\,(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f_Y(y) = P(X+1 = y) = P(X = y-1) = p\,(1-p)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \overset{|p|<1}{=} p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1.$$

$\mu = ? \quad \sigma^2 = ? \quad X \sim G(p)$

$$\mu = \sum_x x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, p\, (1-p)^x = p \sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1} \cdot q$$

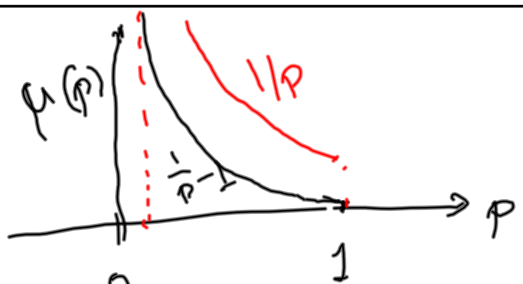
$$= p q \sum_{x=1}^{\infty} (q^x)' \qquad \frac{d}{dq} q^x = x\, q^{x-1} \qquad \frac{q = 1-p}{|q|<1}$$

$$= p q \sum_{x=0}^{\infty} (q^x)' = p q \left(\sum_0^{\infty} q^x \right)' = p q \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)'$$

$$= p q \cdot \frac{-1}{(1-q)^2} (-1) = \frac{p q}{(1-q)^2} = \frac{p q}{p^2} = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}.$$

Νοε 2-4:15 μμ

$$\boxed{\mu = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1.}$$



$E(X) = E($του αριθμού αποτυχιών ως την 1η επιτ.$)$

$E(Y) =$ Αναμενόμενος αριθμός δοκ. ως την 1η επ.

$$= E(X+1) = 1 + E(X) = \boxed{\frac{1}{p} = E(Y)}$$

Διασπορά $\sigma^2 = \underline{E(X^2)} - \mu^2$ $\mu = \frac{1}{p} - 1$

$X^2 = X(X-1) + X$

$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X)$ $= \frac{1}{p} - 1$ γραμμικότητα.

2η $\underline{\text{καθοδική}}$ ροπή της X

$$\bullet\ E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\, p\,(1-p)^x$$

$$= p \sum_{x=0}^{\infty} \underbrace{x(x-1)}_{0 \text{ για } x=0,1} q^{x} = p \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\, q^{x}$$

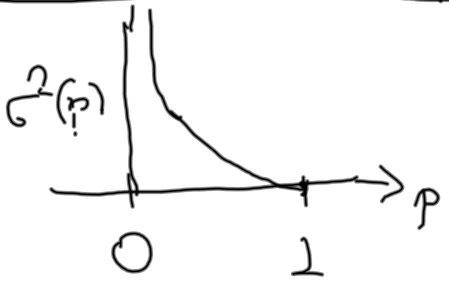
$$= p q^2 \sum_{x=2}^{\infty} \left(q^{x}\right)'' = p q^2 \sum_{x=0}^{\infty} \left(q^{x}\right)''$$

$$= p q^2 \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = p q^2 \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2p(1-p)^2}{p^3}$$

$$E\left(X(X-1)\right) = 2\left(\frac{1-p}{p}\right)^2$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{p} - 1, \qquad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}}$$

$X = \#$ αποτ.



$$E(Y) = \frac{1}{p}, \quad Var(Y) = Var(X+1) = Var(X)$$

$$= \frac{1-p}{p^2}$$

$$Var(aX+b) = a^2 \cdot Var(X)$$

(α) $A\Delta(r, p)$ = # Αποτυχιών ως την r επιτυχία $(r \geq 1)$ $(r > 0)$

X

(β) $A\Delta(r, p)$ = # Δοκιμών ως την r επιτ.

Pascal Y

(ΓΕ ανεξ. $b(p)$).

(α) $X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$Y = X + r$

(β) $Y \in \{r, r+1, \ldots\}$

Νοε 2-4:46 μμ

$$f_X(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x \qquad (*)$$

αποδ.

$$x = 0, 1, \ldots$$

$$f_Y(y) = f_X(y-r) = \binom{y-1}{y-r} p^r (1-p)^{y-r},$$

δοκ.

$$y = r, r+1, \ldots$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-r}{x} p^r (-q)^x = 1$$

Νοε 2-4:50 μμ

Έστω $X_1, \dots, X_r$ ανεξ. τ.μ. $\sim G(p)$

$$\boxed{X = X_1 + \dots + X_r}$$

$$E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_r) = \boxed{r \cdot \frac{1-p}{p} = \mu}$$

$$Var(X) \overset{\text{ανεξ.}}{=} Var(X_1) + \dots + Var(X_r)$$

$$= \boxed{r \cdot \frac{1-p}{p^2} = \sigma^2}$$

$(r=1,\ A\Delta(r,p) \equiv G(p))$

$$E(Y) = E(X+r) = r + E(X) = \frac{r}{p}.$$

$$Var(Y) = Var(X+r) = Var(X) = r \cdot \frac{1-p}{p^2}.$$

$X = \#$ αποτυχιών ως την r επιτ.

$r-1$ επιτ. x αποτ.

$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_\ \cdots\ \_\_}_{1η\quad 2η\quad\quad r+x-1}\ \underset{r+x}{E}$

$\{X=x\} = A \cap B \qquad A = \{\,r-1$ επιτ. στις $r+x-1$ δοκ$\}$

$P(X=x) = P(A)\cdot \underset{\stackrel{\shortparallel}{p}}{P(B)} \qquad B = \{$επιτ. στην $r+x$ δοκ$\}$

$P(r-1$ επιτ. στις $r+x-1$ δοκ.$)$

$$= \binom{r+x-1}{r-1} p^{r-1} (1-p)^{x} \quad \text{Διωνυμική}$$

$$P(A)\cdot P(B) = \binom{r+x-1}{x} p^{r-1} (1-p)^{x} \cdot p = f_X(x)$$

Νοε 2-5:04 μμ