ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΗΜΕΡ/ΝΙΑ: 19.12.2010

Καταληκτική ημερ/νία υποβολής

μέχρι και τη **Τετάρτη 18.1.2012**, **ώρα 22:30**

Προσοχή **:** Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).
(Η ένδειξη $\star$ σημαίνει ότι το αντίστοιχο ερώτημα είναι προαιρετικό).

2η Άσκηση

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

όπου $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$, $\mathbf{x} = (x_i) \in R^n$, $\mathbf{b} = (b_i) \in R^n$ και ο $\mathbf{A}$ είναι **πενταδιαγώνιος**, δηλαδη έχει την ακόλουθη *ειδική δομή*

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & r_1 & s_1 & & & & & & \\ l_2 & d_2 & r_2 & s_2 & & & & 0 & \\ k_3 & l_3 & d_3 & r_3 & s_3 & & & & \\ & k_4 & l_4 & d_4 & r_4 & s_4 & & & \\ & & k_5 & l_5 & d_5 & r_5 & s_5 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & k_{n-2} & l_{n-2} & d_{n-2} & r_{n-2} & s_{n-2} \\ & & & & & k_{n-1} & l_{n-1} & d_{n-1} & r_{n-1} \\ & & & & & & k_n & l_n & d_n \end{bmatrix}$$

Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα (1), λαμβάνοντας υπόψη την *ειδική δομή* του πίνακα $\mathbf{A}$, με τις ακόλουθες επαναληπτικές μεθόδους

1. **ESOR**.
2. **PSD** ($\star$ με προαιρετική τη χρήση του σχήματος Niethammer).

Να υλοποιηθούν σε γλώσσα **C**(ή C++) (ή και) σε MatLab οι αλγόριθμοι των ανωτέρω μεθόδων για $\tau = 0.1(0.1)1.9$ και $\omega = 0.1(0.1)1.9$ και να βρεθούν οι βέλτιστες τιμές τ_b και ω_b των αντιστοίχων παραμέτρων τ και ω. Λάβετε ως αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = \frac{1}{2}10^{-6}$.

Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις να χρησιμοποιήσετε αριθμητική διπλής ακρίβειας (double precision). Τα προγραμματά σας πρέπει να δίνουν στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

(i) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα,

(ii) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο (ή $\star$ τυχαίο) πενταδιαγώνιο πίνακα και

$\star$ **(iii)** να εισάγει ένα πενταδιαγώνιο πίνακα από αρχείο.

Υλοποίηση - Πειραματική μελέτη

1. Για την πειραματική επαλήθευση της ορθότητας των αλγορίθμων σας για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (1) θεωρήστε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι γνωστό (ως προσχεδιασμένη λύση), υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ και στη συνέχεια επιλύστε το γραμμικό σύστημα. Για παράδειγμα, αν $\mathbf{x} = (1, 1, \cdots, 1)^T$, τότε $b_i = k_i + l_i + d_i + r_i + s_i,\ i = 1(1)n$ (όπου $k_1 = l_1 = k_2 = s_{n-1} = r_n = s_n = 0$).

2. Για την πειραματική μελέτη σύγκλισης των ανωτέρω επαναληπτικών μεθόδων αφού θεωρήσετε ότι $\tau = 0.1(0.1)1.9,\ \omega = 0.1(0.1)1.9$ και $(k_i = -\alpha,\ i = 3(1)n),\ (l_i = -\beta,\ i = 2(1)n)$, $(d_i = 4,\ i = 1(1)n),\ (r_i = -\gamma,\ i = 1(1)n-1),\ (s_i = -\delta,\ i = 1(1)n-2)$, όπου

   (i) $\alpha = 0.1,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 0.3,\ \delta = 0.4$

   (ii) $\alpha = 0.4,\ \beta = 0.3,\ \gamma = 0.2,\ \delta = 0.1$

   (iii) $\alpha = 1.2,\ \beta = 0.9,\ \gamma = 0.6,\ \delta = 0.3$

   και $n = 10^2,\ n = 10^3,\ n = 10^4$, να υπολογιστούν

   α) οι βέλτιστες τιμές τ_b και ω_b των αντιστοίχων παραμέτρων τ και ω,

   β) ο αριθμός επαναλήψεων (itcount) ,

   γ) ο χρόνος εκτέλεσης (cputime).

3. Να γίνει κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας (βλ. όπως παρακάτω πίνακες) και να σχολιάσετε τα συμπεράσματά σας.

Πίνακες Αποτελεσμάτων

*Πίνακας (**Εφαρμογή** 1)*

Επίλυση του $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ (Όνομα επαναλ. μεθόδου)									
Διάσταση A	**Παράμετροι**				**Βέλτιστη τιμή**	**Βέλτιστη τιμή**	**Αριθμός επαναλήψεων**	**Χρόνος εκτέλεσης**
	α	β	γ	δ	τ_b	ω_b	*itcount*	*cputime*
$n = 10^2$	0.1	0.2	0.3	0.4				
	0.4	0.3	0.2	0.1				
	1.2	0.9	0.6	0.3				
$n = 10^3$	0.1	0.2	0.3	0.4				
	0.4	0.3	0.2	0.1				
	1.2	0.9	0.6	0.3				
$n = 10^4$	0.1	0.2	0.3	0.4				
	0.4	0.3	0.2	0.1				
	1.2	0.9	0.6	0.3				

Πίνακας (***Εφαρμογή* 2**)

Επίλυση του $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ **(Όνομα επαναλ. μεθόδου)**					
Διάσταση A	**Παράμετροι** (με δική σας επιλογή) α β γ δ	**Βέλτιστη τιμή** τ_b	**Βέλτιστη τιμή** ω_b	**Αριθμός επαναλήψεων** *itcount*	**Χρόνος εκτέλεσης** *cputime*
$n = 10^2$					
$n = 10^3$					
$n = 10^4$					

⋆ *Πίνακας* (***Εφαρμογή* 3**)

Επίλυση του $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ **(Όνομα επαναλ. μεθόδου)**					
Διάσταση A	**Παράμετροι** (με τη χρήση της rand()) α β γ δ	**Βέλτιστη τιμή** τ_b	**Βέλτιστη τιμή** ω_b	**Αριθμός επαναλήψεων** *itcount*	**Χρόνος εκτέλεσης** *cputime*
$n = 10^2$					
$n = 10^3$					
$n = 10^4$					

(Ενδεικτικές) Εφαρμογές

Επίλυση ενός ***πενταδιαγώνιου*** γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

Εφαρμογή 1(i) : $n = 5, \quad \alpha = 0.1,\ \beta = 0.2,\ \gamma = 0.3,\ \delta = 0.4,$

$$\begin{bmatrix} 4 & -0.3 & -0.4 & 0 & 0 \\ -0.2 & 4 & -0.3 & -0.4 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & 4 & -0.3 & -0.4 \\ 0 & -0.1 & -0.2 & 4 & -0.3 \\ 0 & 0 & -0.1 & -0.2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3 \\ 3.1 \\ 3 \\ 3.4 \\ 3.7 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 1(ii) : $n = 10, \quad \alpha = 0.4,\ \beta = 0.3,\ \gamma = 0.2,\ \delta = 0.1,$

$$\begin{bmatrix} 4 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3 & 4 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & -0.3 & 4 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & -0.3 & 4 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & -0.3 & 4 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.3 & 4 & -0.2 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.3 & 4 & -0.2 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.3 & 4 & -0.2 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.3 & 4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.7 \\ 3.4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3.1 \\ 3.3 \end{bmatrix}$$

Εφαρμογή 2 : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι $n \times n$ *πενταδιαγώνιος*, όπου $n = 10^2,\ 10^3,\ 10^4$ με στοιχεία, όπου τα $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ είναι της δικής σας επιλογής. Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

$\star$ ***Εφαρμογή 3*** : Δημιουργία ενός τυχαίου $n \times n$ *πενταδιαγώνιου* πίνακα $\mathbf{A}$, όπου $n = 10^2,\ 10^3,\ 10^4$ με τη χρήση της συνάρτησης rand(). Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμ. συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Οδηγίες για την παράδοση της 2ης Άσκησης

Σημείωση : Όλες οι υλοποιήσεις των ασκήσεων να γίνουν σε C (ή C++) (ή και) σε MatLab.

Προσοχή **:** Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του και να παρουσιάσει στην παρούσα εργασία την προσωπική του προσπάθεια).

Καταληκτική ημερομηνία υποβολής:

Ο κάθε φοιτητής θα πρέπει εμπρόθεσμα να υποβάλει ηλεκτρονικά την **2η Άσκηση** στην e_class του μαθήματος μέχρι και τη **Τετάρτη 18.1.2012** και **ώρα 22:30**.

Η **2η Άσκηση** θα πρέπει να περιλαμβάνει ένα τουλάχιστον αρχείο με όνομα ask_method(.c ή .cpp), (όπου method το όνομα της μεθόδου,(π.χ. ask2_PSD), που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο κώδικα για κάθε μέθοδο και ένα μόνο αρχείο κειμένου με όνομα ask2_apotel (.doc σε word) για την περιγραφή των αλγορίθμων, την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, τα σχόλια και τα συμπεράσματά σας.

Για την υποβολή στην e_class πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα ASK_2_xxxxxxx.zip, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα αρχεία με τον **πηγαίο**(source) **κώδικα** (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και το **αρχείο κειμένου** με την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Προσοχή: Είναι απαραίτητο στην αρχή του κάθε αρχείου (**κώδικα** και **κειμένου**) να αναγράφετε το ονοματεπώνυμό σας και τον ΑΜ.