ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΗΜΕΡ/ΝΙΑ 23.11.2011

Καταληκτική Ημερ/νία υποβολής

μέχρι και την **Δευτέρα 19.12.2011** και **ώρα 22:30**

Προσοχή **:** Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).
(Η ένδειξη ⋆ σημαίνει ότι το αντίστοιχο ερώτημα είναι προαιρετικό).

1η Άσκηση

ΑΜΕΣΟΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. **Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης)** LU
   - με μερική οδήγηση (χωρίς φυσική αντιμετάθεση)
2. **Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης) Cholesky** $\mathrm{LL^T}$

Να υλοποιηθούν σε γλώσσα προγραμματισμού **C** (ή και) σε MatLab οι αλγόριθμοι των ανωτέρω μεθόδων για

α) την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ και

β) τον υπολογισμό του αντιστρόφου $\mathbf{A}^{-1}$ του πίνακα $\mathbf{A}$.

Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις να χρησιμοποιήσετε αριθμητική διπλής ακρίβειας (double precision). Τα προγραμματά σας πρέπει να δίνουν στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

(i) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα,

(ii) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο ή τυχαίο πίνακα και

⋆ **(iii)** να εισάγει ένα πίνακα από αρχείο.

Να υπολογίσετε πειραματικά την υπολογιστική πολυπλοκότητα με τον υπολογισμό του *χρόνου εκτέλεσης (cputime)* του εφαρμοζόμενου αλγορίθμου καθώς και να εκτιμήσετε τον *αριθμό συνθήκης(condition number)* του πίνακα $\mathbf{A}$ και το *σφάλμα*

α) της λύσης $\mathbf{x}$ του γραμμικού συστήματος με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

(i) $\dfrac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$, όπου $||\delta\mathbf{x}|| = ||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}||_\infty$ το *απόλυτο σφάλμα*

⋆ **(ii)** $\dfrac{||\delta\mathbf{r}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$, όπου $||\delta\mathbf{r}|| = ||\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}||_\infty$ το *απόλυτο υπόλοιπο*

και $\hat{\mathbf{x}}$: η υπολογιζόμενη λύση από τον εφαρμοζόμενο αλγόριθμο,

β) του αντιστρόφου $\mathbf{A}^{-1}$ με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

(i) $||\mathbf{A}^{-1} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}||_\infty / ||\mathbf{A}^{-1}||_\infty$, το *απόλυτο σχετικό σφάλμα*

⋆ **(ii)** $||\mathbf{A}\hat{\mathbf{A}}^{-1} - \mathbf{I}||_\infty / ||\mathbf{A}^{-1}||_\infty$, το *απόλυτο σχετικό υπόλοιπο*

και $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$: ο υπολογιζόμενος αντίστροφος από τον εφαρμοζόμενο αλγόριθμο.

Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση (βλ. παρακάτω πίνακες 1 και 2) των αποτελεσμάτων σας και να σχολιάσετε τα συμπεράσματά σας.

1. Μέθοδος Παραγοντοποίησης LU *με μερική οδήγηση*

1.α Επίλυση του Γραμμικού Συστήματος $Ax = b$				
Διάσταση Πίνακα Α	***Απ. σχ. Σφάλμα*** $\frac{\|\|\delta \mathbf{x}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	⋆ ***Απ. σχ. Υπόλοιπο*** $\frac{\|\|\delta \mathbf{r}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	***Αριθμός Συνθήκης*** [1] ***cond(A)***	***Χρόνος***
100				
500				
1000				

1.β Υπολογισμός του αντιστρόφου A^{-1}				
Διάσταση Πίνακα Α	***Απ. σχ. Σφάλμα*** $\|\|\mathbf{A}^{-1} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}\|\|_\infty / \|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|_\infty$	⋆ ***Απ. σχ. Υπόλοιπο*** $\|\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{A}}^{-1} - \mathbf{I}\|\|_\infty / \|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|_\infty$	***Αριθμός Συνθήκης***	***Χρόνος***
100				
500				
1000				

2. Μέθοδος Παραγοντοποίησης Cholesky $\mathrm{LL}^{\mathbf{T}}$

2.α Επίλυση του Γραμμικού Συστήματος $Ax = b$				
Διάσταση Πίνακα Α	***Απ. σχ. Σφάλμα*** $\frac{\|\|\delta \mathbf{x}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	⋆ ***Απ. σχ. Υπόλοιπο*** $\frac{\|\|\delta \mathbf{r}\|\|_\infty}{\|\|\mathbf{x}\|\|_\infty}$	***Αριθμός Συνθήκης cond(A)***	***Χρόνος***
100				
500				
1000				

2.β Υπολογισμός του αντιστρόφου A^{-1}				
Διάσταση Πίνακα Α	***Απ. σχ. Σφάλμα*** $\|\|\mathbf{A}^{-1} - \hat{\mathbf{A}}^{-1}\|\|_\infty / \|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|_\infty$	⋆ ***Απ. σχ. Υπόλοιπο*** $\|\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{A}}^{-1} - \mathbf{I}\|\|_\infty / \|\|\mathbf{A}^{-1}\|\|_\infty$	***Αριθμός Συνθήκης***	***Χρόνος***
100				
500				
1000				

Υπόδειξη : Για την πειραματική επαλήθευση της ορθότητας των αλγορίθμων σας **1. LU** και **2.** $\mathbf{LL^T}$

α) για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ θεωρήστε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι γνωστό (ως προσχεδιασμένη λύση), υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και στη συνέχεια επιλύστε το γραμμικό σύστημα. (Για παράδειγμα, αν $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)^T$, τότε $\mathbf{b}_i = (\mathbf{A} * \mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$) και

β) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου $\mathbf{A}^{-1}$ του πίνακα $\mathbf{A}$ λάβετε παραδείγματα πινάκων, στα οποία εκ των προτέρων γνωρίζετε τον αντίστροφο πίνακα $\mathbf{A}^{-1}$.

Ορισμός

[1] ***Αριθμός συνθήκης***(condition number) του A: $cond(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$

(Ενδεικτικές) Εφαρμογές

1. Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης) LU
με μερική οδήγηση (χωρίς φυσική αντιμετάθεση)

α) Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$

Εφαρμογή 1.a.1 : $\quad \mathbf{n = 5}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & -3 & 1 \\ 8 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & -5 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 15 \\ 11 \\ 18 \\ 26 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 1.a.2 : $\quad \mathbf{n = 8}, \quad A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 10 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 3 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -15 & -1 & 4 & -2 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 3 & -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -6 \\ -22 \\ 19 \\ -19 \\ 26 \\ 55 \\ -25 \\ 17 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 1.a.3 : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο 10×10 πίνακας του Hilbert με στοιχεία

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, 10$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Εφαρμογή 1.a.4 : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι $n \times n$, όπου $n = 100,\ 500,\ 1000$ με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & \text{αν} \quad i = j \\ \dfrac{1}{i+j-1}, & \text{αν} \quad i \neq j \end{cases}$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Εφαρμογή 1.a.5 : Δημιουργία ενός τυχαίου $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$, όπου $n = 100,\ 500,\ 1000$ με τη βοήθεια της συνάρτησης rand( ). (*Υπόδειξη*: Ορίστε στην MatLab τον πίνακα $\mathbf{A} = rand(n, n) + (n-1) * eye(n)$). Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

β) Υπολογισμός του αντιστρόφου A^{-1}

Εφαρμογή 1.6.1: $\mathbf{n = 4}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 1.6.2 : Ο $\mathbf{A}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας του Pei, όπου $n = 100,\ 500,\ 1000,$ με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & \text{αν} \quad i = j \\ 1, & \text{αν} \quad i \neq j \end{cases}$$

και ο αντίστροφός του $\mathbf{A^{-1}}$ έχει στοιχεία

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{2}{2n-1}, & \text{αν} \quad i = j \\ -\dfrac{1}{(n-1)(2n-1)}, & \text{αν} \quad i \neq j \end{cases}$$

Εφαρμογή 1.6.3 : Ο $\mathbf{A}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας του Hilbert, όπου $n = 10,\ 50,\ 100,$ με στοιχεία

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

και ο αντίστροφός του $\mathbf{A^{-1}}$ έχει στοιχεία

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}(n+i-1)!(n+j-1)!}{(i+j-1)\left[(i-1)!(j-1)!\right]^2(n-i)!(n-j)!}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Εφαρμογή 1.6.4 : Δημιουργία ενός τυχαίου $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$, όπου $n = 100,\ 500,\ 1000$ με τη βοήθεια της συνάρτησης rand( )(όπως στην εφαρμογή 1.a.5). Για την πειραματική επαλήθευση υπολογίστε τον αντίστροφο $\mathbf{B} = \mathbf{\hat{A}^{-1}}$ και στη συνέχεια υπολογίστε τον $\mathbf{AB}$.

2. Μέθοδος Παραγοντοποίησης(ή Τριγωνικής Διαχώρισης) Cholesky $\mathrm{LL^T}$

α) Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $\mathrm{Ax = b}$

Εφαρμογή 2.a.1 : $\mathbf{n = 4}$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$

Εφαρμογή 2.a.2 : $\mathbf{n = 5}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$,

όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ο 5×5 πίνακας του Moler.

Εφαρμογή 2.a.3 : $\mathbf{n=5}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 35 \\ 70 \\ 126 \end{bmatrix}$,

όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ο 5×5 πίνακας του Pascal.

Εφαρμογή 2.a.4 : $\mathbf{n=8}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & 36 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 & 84 & 120 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 & 210 & 330 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 & 462 & 792 \\ 1 & 7 & 28 & 84 & 210 & 462 & 924 & 1716 \\ 1 & 8 & 36 & 120 & 330 & 792 & 1716 & 3432 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 36 \\ 120 \\ 330 \\ 792 \\ 1716 \\ 3432 \\ 6435 \end{bmatrix}$,

όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ο 8×8 πίνακας του Pascal.

Εφαρμογή 2.a.5 : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι ο $n \times n$ πίνακας του Pascal, όπου $n = 100,\ 500,\ 1000,$ με στοιχεία

$$a_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}, \quad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1,\ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Εφαρμογή 2.a.6 : Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι $n \times n$, όπου $n = 100,\ 500,\ 1000$ με στοιχεία

$$a_{ij} = \begin{cases} n, & \text{αν} \quad i = j \\ \dfrac{1}{i+j-1}, & \text{αν} \quad i \neq j \end{cases}$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1,\ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Εφαρμογή 2.a.7 : Δημιουργία ενός τυχαίου συμμετρικού και θετικά ορισμένου $n \times n$ πίνακα $\mathbf{A}$, όπου $n = 100,\ 500,\ 1000$ με τη βοήθεια της συνάρτησης rand( ). (*Υπόδειξη*: Ορίστε στην MatLab τον πίνακα $\mathbf{A} = gallery('moler', n, rand)$). Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1,\ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

β) Υπολογισμός του αντιστρόφου A^{-1}

Εφαρμογές : ***1.6.1, 1.6.2, 1.6.3, 2.a.4, 2.a.5, 2.a.6, 2.a.7.***

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης Άσκησης

Σημείωση : Όλες οι υλοποιήσεις των ασκήσεων να γίνουν σε C (ή C++) (ή και) σε MatLab.

***Προσοχή* :** Η άσκηση είναι **ατομική** (δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του και να παρουσιάσει στην παρούσα εργασία την προσωπική του προσπάθεια).

Καταληκτική ημερομηνία υποβολής:

Ο κάθε φοιτητής θα πρέπει εμπρόθεσμα να υποβάλει ηλεκτρονικά την **1η Άσκηση** στην e_class του μαθήματος μέχρι και την **Δευτέρα 19.12.2011** και **ώρα 22:30**.

Η **1η Άσκηση** πρέπει να περιλαμβάνει:

1. ένα αρχείο για τη κάθε μέθοδο με όνομα ask1_method.i, (όπου method το όνομα της μεθόδου και όπου i η ένδειξη του αντιστοίχου ερωτήματος, δηλ. 1.α, 1.β, 2.α, 2.β, (π.χ. ask1_LU_1_β), που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο κώδικα για κάθε ερώτημα και
2. ένα μόνο αρχείο κειμένου(για όλα τα ερωτήματα) με όνομα ask1_apotel(.doc σε word) για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, τα σχόλια και τα συμπεράσματά σας.

Για την υποβολή στην e_class πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα ASK_1_xxxxxxx.zip, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα αρχεία με τον **πηγαίο**(source) **κώδικα** (και όχι εκτελέσιμα αρχεία) και το **αρχείο κειμένου** με την ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Προσοχή: Είναι απαραίτητο στην αρχή του κάθε αρχείου (**κώδικα** και **κειμένου**) να αναγράφετε το ονοματεπώνυμό σας και τον ΑΜ.