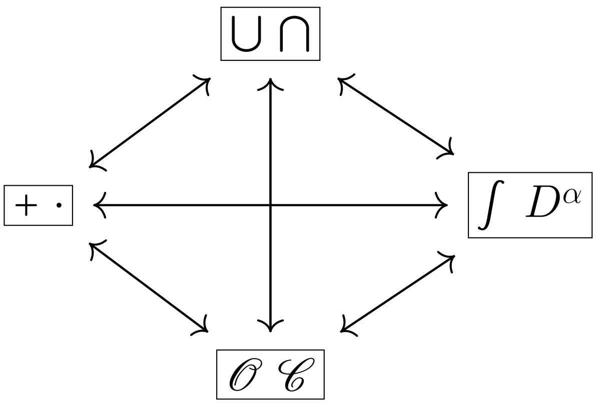
Θεωρία Κατανομών



Πρόχειρες Σημειώσεις

Νίκος Γιαλελής

Τμήμα Μαθηματικών
ΕΚΠΑ
Αθήνα, 2024

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Από τότε που ο Dirac πρότεινε την ομώνυμη περίεργη συνάρτηση, αυτή παρέμενε για πολύ καιρό ορφανή. Και αυτό γιατί η μεν φυσική κοινότητα την θεωρούσε πολύ θεωρητική και μαθηματικοποιημένη, ενώ η δε μαθηματική την απέρριπτε ως ένα φορμαλιστικό τέχνασμα χωρίς αυστηρό ορισμό. Κάτι σίγουρα δεν πήγαινε καλά, μιας και το αντικείμενο αυτό βρήκε αμέσως ευρεία εφαρμογή στην Φυσική και την Μηχανική σε σημείο που προήγαγε ουσιωδώς την εξέλιξή τους.

Το σενάριο ωστόσο είναι πλέον γνωστό, καθώς αποτελεί αποκλειστικά μαθηματική δουλειά ο προσδιορισμός των απροσδιόριστων ευρημάτων της εμπροσθοφυλακής των θετικών επιστημών, τα οποία αναδεικνύουν τα όρια των σύγχρονων Μαθηματικών. Όρια που επεκτείνονται με την δουλειά αυτή και έτσι προάγεται η εξέλιξη της ίδιας της μαθηματικής επιστήμης.

Στην προκειμένη, την δουλειά αυτή έφερε εις πέρας ο Schwartz, πατώντας σε προγενέστερο έργο της ρωσικής σχολής, και συγκεκριμένα του Sobolev, και αξιοποιώντας τοπολογικά και συναρτησιοαναλυτικά εργαλεία από το οπλοστάσιο της γαλλικής σχολής. Με το έργο του αυτό θεμελίωσε την Θεωρία Κατανομών, ή αλλιώς Θεωρία Γενικευμένων Συναρτήσεων, η οποία ήρθε για να εκσυγχρονίσει τον κλασικό Απειροστικό Λογισμό.

Έτσι, σύμφωνα με την νέα αυτή θεωρία, η συνάρτηση Dirac δεν είναι πλέον μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού τον Ευκλείδιο χώρο, αλλά μια κατανομή, και δη ιδιάζουσα, δλδ μια συνεχής και γραμμική συνάρτηση ορισμένη σε κατάλληλο τοπολογικό διανυσματικό χώρο.

Η Θεωρία Κατανομών βρίσκεται στον πυρήνα της σύγχρονης Ανάλυσης. Καταρχήν, διαπλέκει όλα τα κλασικά πεδία, δλδ την Τοπολογία, την Συναρτησιακή Ανάλυση, την Θεωρία Μέτρου, την Πραγματική/Μιγαδική Ανάλυση και τον Πλειογραμμικό Λογισμό. Επιπλέον, μέσω αυτής αποδεικνύονται κομψά και με συνέπεια όλα τα αποτελέσματα της Αρμονικής Ανάλυσης. Τέλος, θεμελιώνει την Θεωρία Διαφορικών Εξισώσεων.

Η θεωρία αυτή είναι και το αντικείμενο του παρόντος κειμένου, με απώτερο στόχο να δημιουργήσει (επιπλέον ☺) ανησυχίες στον σπουδαστή προχωρημένου προπτυχιακού και μεταπτυχιακού επιπέδου, έτσι ώστε να τον κινητοποιήσει να δομήσει, να ανασυνθέσει και να επεκτείνει τις υπάρχουσες αναλυτικές του γνώσεις και δεξιότητες.

Ως προς την δομή του, το κείμενο χωρίζεται σε πέντε μέρη, αφού εισαγωγικά παρατεθεί ο αξιοποιούμενος συμβολισμός. Στο πρώτο παρουσιάζουμε το απαραίτητο τοπολογικό υπόβαθρο το οποίο ξεφεύγει από την συνήθη ύλη που καλύπτεται σε αντίστοιχο προπτυχιακό μάθημα. Το δεύτερο αφορά λίγο πολύ σε γνωστούς χώρους, τους οποίους όμως εδώ μελετάμε με λεπτομέρεια. Στο τρίτο παραθέτουμε τους περίεργους μεν, βασικούς δε, χώρους της θεωρίας. Στο τέταρτο αναθεωρούμε την κλασική Αρμονική Ανάλυση υπό το πρίσμα της νέας θεωρίας, καθώς επίσης μελετάμε τις γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές σε όλο τον Ευκλείδιο χώρο. Στο πέμπτο εισάγουμε και μελετάμε τους βασικούς χώρους για την θεμελίωση των γραμμικών Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων σε αυθαίρετα χωρία, καθώς και τις ελλειπτικού τύπου τέτοιες εξισώσεις.

Συμβολισμός (κατά κύριο λόγο)

Σύνολα, συναρτήσεις και θεμελιώδεις δομές

1. i. Χρησιμοποιούμε τα I, J, S, U, V, W, X, Y και Z, με ή χωρίς δείκτη, για αυθαίρετα σύνολα.

   ii. Δεδομένου ενός I, χρησιμοποιούμε τα i και j με ή χωρίς δείκτη, για αυθαίρετα στοιχεία του I.

2. Για $I_0 \subseteq I$, συμβολίζουμε με

$$I_0{}^c = I \setminus I_0$$

το συμπλήρωμα του I_0 ως προς το I. Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός αυτός είναι πάντα προφανές το σύνολο I δεδομένου του I_0, οπότε δεν υπεισέρχεται το πρώτο σε αυτόν.

3. Έστω I.
   i. Γράφουμε $\mathscr{P}(I)$ για το δυναμοσύνολο του I.
   ii. Έστω $I_0 \subseteq I$.
      α΄. Γράφουμε
      $$\mathscr{P}\big(I \,\big|\, I_0\big) = \big\{J \in \mathscr{P}(I) \,\big|\, I_0 \subseteq J\big\} \subseteq \mathscr{P}(I).$$
      β΄. Αν $I_0 = \{i_0\}$, και δεν υπάρχει πιθανότητα παρεξήγησης, τότε γράφουμε σκέτο i_0 αντί για $\{i_0\}$ στην θέση του I_0 στην παραπάνω έκφραση.

4. Έστω X, Y και $f\colon X \to Y$. Γράφουμε
   i. $f^{\to}\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ για την εικόνα της f, δλδ
   $$f^{\to}(Z) = \{f(x) \in Y\}_{x \in Z}, \ \forall Z \subseteq X,$$
   ii. απλουστευτικά f αντί για $f^{\to}$ και
   iii. $f^{\leftarrow}\colon \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ για την αντίστροφη εικόνα της f, δλδ
   $$f^{\leftarrow}(Z) = \{x \in X\}_{f(x) \in Z}, \ \forall Z \subseteq Y.$$

5. Γράφουμε $\approx$ για να εκφράσουμε την ισοδυναμία δύο συνόλων, δλδ
   $$I_1 \approx I_2 \Leftrightarrow \exists f\colon I_1 \to I_2 \text{ τ.ω.: } 1-1 \ \& \text{ επί}.$$
   Μάλιστα για να αναδείξουμε μια αντίστοιχη γνωστή f γράφουμε $\overset{f}{\approx}$.

6. Έστω I. Γράφουμε
   $$\begin{aligned} \mathrm{id}_I\colon I &\to I \\ i &\mapsto \mathrm{id}_I(i) = i, \end{aligned}$$
   για την ταυτοτική συνάρτηση στον I. Προφανώς
   $$I \overset{\mathrm{id}_I}{\approx} I.$$

7. Έστω $I_0 \subseteq I$.
   i. α΄. Γράφουμε
      $$\begin{aligned} \iota\colon I_0 &\to I \\ i &\mapsto \iota(i) = \mathrm{id}_I(i) = i, \end{aligned}$$
      για την συνάρτηση εγκλεισμού $I_0 \subseteq I$.
      β΄. Για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε τον εγκλεισμό ο οποίος περιγράφεται, γράφουμε
      $$\iota_{I_0 \subseteq I}$$
      αντί για απλά ι.
   ii. α΄. Γράφουμε
      $$\begin{aligned} \rho\colon I &\to I_0 \\ i &\mapsto \rho(i) = \mathrm{id}_{I_0}(i) = i, \end{aligned}$$
      για την συνάρτηση αντίστροφου εγκλεισμού ή αλλιώς περιορισμού $I \supseteq I_0$.
      β΄. Για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε τον εγκλεισμό ο οποίος περιγράφεται, γράφουμε
      $$\rho_{I \supseteq I_0}$$
      αντί για απλά ρ.

iii. Ισχύει ότι
$$\rho \circ \iota = \mathrm{id}_{I_0},$$
δλδ αν $I_0 \neq \varnothing$, τότε

α΄. η ρ είναι η αριστερή αντίστροφη της ι και άρα η ι είναι $1-1$ και

β΄. η ι είναι η δεξιά αντίστροφη της ρ και άρα η ρ είναι επί.

8. Έστω $I_0 \subseteq I_1$ και I_2, καθώς επίσης $f\colon I_1 \to I_2$. Γράφουμε
$$f|_{I_0} = f \circ \iota, \text{ όπου } \iota \text{ η συνάρτηση εγκλεισμού } I_0 \subseteq I_1,$$
για τον περιορισμό της f στο I_0, δλδ
$$\begin{aligned} f|_{I_0} : I_0 &\to I_2 \\ x &\mapsto f|_{I_0}(x) = f(x). \end{aligned}$$
Συχνά χρησιμοποιούμε το περιορισμό απλά για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε σε ποιο σύνολο θεωρούμε ότι ορίζεται μία συνάρτηση.

9. Για κάθε $\{I_j\}_{j\in J}$, γράφουμε pr_{j_0}, όπου $j_0 \in J$, για την προβολή στην j_0-οστη συντεταγμένη, δλδ
$$\begin{aligned} \mathrm{pr}_{j_0}\colon \prod_{j\in J} I_j &\to I_{j_0} \\ i = (i_j)_{j\in J} &\mapsto \mathrm{pr}_{j_0}(i) = i_{j_0}. \end{aligned}$$

10. Για κάθε είτε **μερικά** είτε **ολικά διατεταγμένο** είτε **κατευθυνόμενο χώρο** $(I, \leq)$, όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για $(I, \leq)$.

11. i. α΄. Χαρακτηριστικό παράδειγμα μερικά διατεταγμένου χώρου αποτελεί ο $(\mathscr{P}(I), \subseteq)$.
    β΄. Γράφουμε $\subsetneq$ όταν ισχύει ότι $\subseteq$ και $\neq$.
  ii. α΄. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ολικά διατεταγμένου χώρου αποτελεί ο $(\mathbb{R}, \leq)$.
    β΄. Γράφουμε $<$ όταν ισχύει ότι $\leq$ και $\neq$.
  iii. Χαρακτηριστικό παράδειγμα κατευθυνόμενου χώρου αποτελεί ο $(\mathbb{N}, \leq)$.

12. i. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \subsetneq \mathbb{R}$ και $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \subsetneq \mathbb{R}$.
  ii. Γράφουμε k, l, m και n, με ή χωρίς δείκτη, για αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbb{N}$, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

13. Έστω $\{S_n\}_{n=1}^2 \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Γράφουμε
$$S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow a_1 \leq a_2,\ \forall \{a_n\}_{n=1}^2 \subseteq \mathbb{R},$$
καθώς επίσης
$$S_1 < S_2 \Leftrightarrow a_1 < a_2,\ \forall \{a_n\}_{n=1}^2 \subseteq \mathbb{R}.$$

14. i. Έστω μερικά διατεταγμένος χώρος $(I, \leq)$ και $I_0 \subseteq I$.
    α΄. Γράφουμε, σε περίπτωση ύπαρξης, $\operatorname{grea} I_0 \in I_0$ και $\operatorname{lea} I_0 \in I_0$ για το (μοναδικό) μέγιστο και το (μοναδικό) ελάχιστο, αντίστοιχα, στοιχείο του I_0.
    β΄. Γράφουμε, σε περίπτωση ύπαρξης, $\sup I_0 \in I$ και $\inf I_0 \in I$ για το (μοναδικό) ελάχιστο άνω φράγμα ή αλλιώς supremum και το (μοναδικό) μέγιστο κάτω φράγμα ή αλλιώς infimum, αντίστοιχα, του I_0.
  ii. Έστω I, μερικά διατεταγμένος χώρος $(I_0, \leq)$ και $f\colon I \to I_0$. Γράφουμε, σε περίπτωση ύπαρξης,
$$\sup(f) = \sup f(I) \ \&\ \inf(f) = \inf f(I),$$
για το supremum και το infimum, αντίστοιχα, της f.

iii. Έστω ολικά διατεταγμένος χώρος $(I, \leq)$ και $I_0 \subseteq I$. Θυμίζουμε ότι, σε περίπτωση ύπαρξης, το (μοναδικό) μεγιστικό και το (μοναδικό) ελαχιστικό στοιχείο του I_0 συμπίπτουν με το $\operatorname{grea} I_0$ και το $\operatorname{lea} I_0$, αντίστοιχα, τα οποία, σε αυτή την περίπτωση, καλούνται maximum και minimum, αντίστοιχα, του I_0 και τα συμβολίζουμε ως $\min I_0 \in I_0$ και $\max I_0 \in I_0$, αντίστοιχα.

15. i. Για κάθε **σώμα** $(I, +, \cdot)$, όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για $(I, +, \cdot)$.

    ii. Κατά την συνήθη πρακτική, παραλείπεται το $\cdot$ ενός σώματος εντός κάθε σχέσης στην οποία εμφανίζεται, εκτός και αν χρειάζεται να τονιστεί η παρουσία του.

16. Χαρακτηριστικά παραδείγματα σωμάτων αποτελούν τα

    i. $\mathbb{R}$ και

    ii. $\mathbb{C}$,

    εφοδιασμένα με τις αντίστοιχες συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

17. i. Το $\mathbb{F}$ σημαίνει είτε το σώμα $\mathbb{R}$, είτε το σώμα $\mathbb{C}$.

    ii. Τα στοιχεία του $\mathbb{F}$ καλούνται αριθμοί. Χρησιμοποιούμε τα ϱ, K, a, b, p, q, r, s, t, x, y και z, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετους αριθμούς.

    iii. Γράφουμε Re και Im για τις συναρτήσεις πραγματικού και φανταστικού, αντίστοιχα, μέρους στον $\mathbb{C}$, δλδ
    $$\mathrm{Re} = \mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \& \ \mathrm{Im} = \mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

    iv. Γράφουμε $\overline{\Diamond}$ για την συζυγή συνάρτηση στον $\mathbb{F}$, δλδ
    $$\begin{aligned} \overline{\Diamond} \colon \mathbb{F} &\to \mathbb{F} \\ x \mapsto \overline{x} &= \begin{cases} x, & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ (\mathrm{Re}(x), -\mathrm{Im}(x)), & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases} \end{aligned}$$

    Για κάθε $x \in \mathbb{C}$, το $\overline{x}$ καλείται συζυγές του x.

    v. Γράφουμε $|\Diamond|$ για την συνάρτηση απόλυτης τιμής στον $\mathbb{F}$, δλδ
    $$\begin{aligned} |\Diamond| \colon \mathbb{F} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| = (x\overline{x})^{\frac{1}{2}} &= \begin{cases} \left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ \left((\mathrm{Re}(x))^2 + (\mathrm{Im}(x))^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{C}. \end{cases} \end{aligned}$$

    Για κάθε $x \in \mathbb{F}$, το $|x|$ καλείται απόλυτη τιμή του x.

18. Έστω σώμα $(I, +, \cdot)$.

    i. Έστω $\{I_{ij}\}_{i,j=1}^{2,n} \subseteq \mathscr{P}(I)$.

    α΄. Γράφουμε
    $$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} I_{1j} I_{2j} &= I_{11} I_{21} + \cdots + I_{1n} I_{2n} = \\ &= \left\{ i \in I \;\middle|\; \exists \left((i_{1j})_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} I_{1j} \ \& \ (i_{2j})_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} I_{2j} \right) \text{ τ.ω.: } i = \sum_{j=1}^{n} i_{1j} i_{2j} \right\}. \end{aligned}$$

    Προφανώς η παραπάνω έκφραση είναι ανεξάρτητη της σειράς της άθροισης.

    β΄. Αν $I_{1j} = \{i_{1j}\}$ ($I_{2j} = \{i_{2j}\}$) για κάποιο $j \in \{1, \ldots, n\}$, και δεν υπάρχει πιθανότητα παρεξήγησης, τότε γράφουμε σκέτο i_{1j} (i_{2j}, αντίστοιχα) αντί για $\{i_{1j}\}$ ($\{i_{2j}\}$, αντίστοιχα) στην θέση του I_{1j} (I_{2j}, αντίστοιχα) στην παραπάνω έκφραση.

ii. Έστω

$$\{I_{1j}\}_{j=1}^{n} \subseteq \underbrace{\mathscr{P}(\ldots(\mathscr{P}}_{\#\ m+1}(I))\ldots)\ \&\ \{I_{2j}\}_{j=1}^{n} \subseteq \underbrace{\mathscr{P}(\ldots(\mathscr{P}}_{\#\ m+1}(I))\ldots).$$

Επαγωγικά συμβολίζουμε

$$\sum_{j=1}^{n} I_{1j}I_{2j} = I_{11}I_{21} + \cdots + I_{1n}I_{2n} =$$

$$= \left\{ J \in \underbrace{\mathscr{P}(\ldots(\mathscr{P}}_{\#\ m}(I))\ldots) \,\middle|\, \exists \left((J_{1j})_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} I_{1j}\ \&\ (J_{2j})_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} I_{2j} \right) \text{ τ.ω.: } J = \sum_{j=1}^{n} J_{1j}J_{2j} \right\},$$

με τις αντίστοιχες ιδιότητες και συμβάσεις να ισχύουν και εδώ.

iii. Έστω $J \subseteq I \setminus \{0_I\}$. Γράφουμε

$$\frac{1}{J} = \left\{ \frac{1}{j} \in I \right\}_{j \in J}.$$

19. Έστω $S \subseteq \mathbb{F}$. Γράφουμε

$$|S| = \{|a| \in \mathbb{R}\}_{a \in S}.$$

20. i. Για κάθε είτε **ψευδομετρικό** είτε **μετρικό χώρο** (I, f), όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για (I, f).

ii. Θυμίζουμε ότι ένας ψευδομετρικός χώρος (I, f) μετατρέπεται σε μετρικό χώρο (I, f) όταν

$$f(i_1, i_2) = 0 \Rightarrow i_1 = i_2,\ \forall i_j \in I,\ \forall j \in \{1, 2\}.$$

21. Χαρακτηριστικά παραδείγματα μετρικών χώρων αποτελούν

i. κάθε I εφοδιασμένο με την διακριτή μετρική, δλδ την

$$\begin{aligned} f\colon I^2 &\to \mathbb{R} \\ (i_1, i_2) &\mapsto f(i_1, i_2) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i_1 \neq i_2 \\ 0, & \text{αν } i_1 = i_2 \end{cases} \end{aligned}$$

και

ii. το $\mathbb{F}$ εφοδιασμένο, κατά την συνήθη πρακτική, με την μετρική $|\lozenge - \blacklozenge|$.

22. Έστω (I, f) ψευδομετρικός χώρος.

i. Γράφουμε την ανοικτή μπάλα στο I με κέντρο το $i_0 \in I$ και ακτίνα $\varrho \in [0, \infty]$ ως

$$B_f(i_0, \varrho) = \begin{cases} \{i_0\}, & \text{αν } \varrho = 0 \\ \left\{ i \in I \,\middle|\, f(i, i_0) < \varrho \right\}, & \text{αν } \varrho \in (0, \infty) \\ I, & \text{αν } \varrho = \infty \end{cases} \subseteq I.$$

ii. Όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά

$$B(i_0, \varrho) = B_f(i_0, \varrho),\ \forall i_0 \in I,\ \forall \varrho \in [0, \infty].$$

23. Έστω (I_1, f_1) και (I_2, f_2) ψευδομετρικοί χώροι.

i. Γράφουμε

$$Lip(I_1; I_2) = \left\{ f\colon I_1 \to I_2 \,\middle|\, f \text{ Lipschitz} \right\} =$$

$$= \left\{ f\colon I_1 \to I_2 \,\middle|\, \exists K \geq 0 \text{ τ.ω.: } f_2(f(i_{11}), f(i_{12})) \leq K f_1(i_{11}, i_{12}),\ \forall i_{j_j} \in I_1,\ \forall j \in \{1, 2\} \right\} =$$

$$= \left\{ f\colon I_1 \to I_2 \,\middle|\, \exists K \geq 0 \text{ τ.ω.: } \frac{f_2(f(i_{11}), f(i_{12}))}{f_1(i_{11}, i_{12})} \leq K,\ \forall i_{j_j} \in I_1,\ \forall j \in \{1, 2\},\ \text{τ.ω.: } i_{11} \neq i_{12} \right\}.$$

ii. Έστω $f \in Lip(I_1; I_2)$. Γράφουμε

$$Lip(f) = \inf\left\{K \geq 0 \,\middle|\, f_2(f(i_{11}), f(i_{12})) \leq K f_1(i_{11}, i_{12}),\ \forall i_{j_j} \in I_1,\ \forall j \in \{1,2\}\right\} =$$
$$= \sup\left\{\frac{f_2(f(i_{11}), f(i_{12}))}{f_1(i_{11}, i_{12})} \,\middle|\, i_{1j} \in I_1,\ \forall j \in \{1,2\},\ \text{τ.ω.: } i_{11} \neq i_{12}\right\}.$$

24. i. Για κάθε σώμα $(I_0, +_{I_0}, \cdot_{I_0})$ και για κάθε **διανυσματικό χώρο** $(I, +, (I_0, +_{I_0}, \cdot_{I_0}), \cdot)$, όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για $(I, +, (I_0, +_{I_0}, \cdot_{I_0}), \cdot)$.

ii. Κατά την συνήθη πρακτική, παραλείπεται το $\cdot$ ενός διανυσματικού χώρου εντός κάθε σχέσης στην οποία εμφανίζεται, εκτός και αν χρειάζεται να τονιστεί η παρουσία του.

25. i. Χαρακτηριστικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων αποτελούν οι

α'. $\mathbb{R}$ επί του εαυτού του,

β'. $\mathbb{C}$ επί του $\mathbb{F}$,

γ'. $\mathbb{R}^m = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}$ επί του $\mathbb{R}$,

δ'. $\mathbb{C}^m = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{C}^m$ επί του $\mathbb{F}$,

ε'. $\mathbb{R}^{n\times m} = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^n = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}$ επί του $\mathbb{R}$,

ϛ'. $\mathbb{C}^{n\times m} = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{C}^n = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{C}$ επί του $\mathbb{F}$,

εφοδιασμένοι με τις αντίστοιχες συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

ii. Θυμίζουμε ότι γενικά

$$\mathbb{F}^{n\times m} = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{F} \neq \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} \mathbb{F} = \mathbb{F}^{m\times n},$$

παρά μόνο αν $n = m$.

iii. Η διανυσματική δομή του $\mathbb{F}$ επί του εαυτού του εκφυλίζεται στην δομή σώματος του $\mathbb{F}$.

26. i. Κατά την συνήθη πρακτική, στους $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^m$ και $\mathbb{F}^{n\times m}$ παραλείπουμε το $\cdot$ εντός κάθε σχέσης στην οποία εμφανίζεται.

ii. α'. Τα στοιχεία του $\mathbb{F}^m$ καλούνται διανύσματα. Χρησιμοποιούμε τα x, y, z, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα διανύσματα.

β'. Χρησιμοποιούμε τα α και β, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $(\mathbb{N}_0)^m = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{N}_0$.

γ'. Τα στοιχεία του $\mathbb{F}^{n\times m}$ καλούνται πίνακες και συγκεκριμένα τα στοιχεία του $\mathbb{F}^{m\times m}$ καλούνται ορθογώνιοι πίνακες. Χρησιμοποιούμε τα A και B, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετους πίνακες.

27. i. Για $x \in \mathbb{F}^m$ γράφουμε

$$x = (x_i)_{i=1}^m \text{ με } x_i \in \mathbb{F},\ \forall i \in \{1, \ldots, m\},$$

για την ανάλυση του x σε συντεταγμένες (ή, εναλλακτικά, μεταβλητές).

ii. Για $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ γράφουμε

$$\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m,\ \text{με } \alpha_i \in \mathbb{N}_0,\ \forall i \in \{1, \ldots, m\},$$

για την ανάλυση του α σε συντεταγμένες.

iii. Για $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ γράφουμε

$$A = \left((a_{ij})_{i=1}^n\right)_{j=1}^m = (a_{ij})_{i,j=1}^{n,m} \text{ με } a_{ij} \in \mathbb{F},\ \forall\,(i,j) \in \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\},$$

για την ανάλυση του A σε συντεταγμένες.

28. i. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, τότε $A^{\mathrm{T}} = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{F}^{m\times n}$.
ii. Θυμίζουμε ότι για $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$ ισχύει ότι

$$\exists A^{-1} \Rightarrow \left(\exists\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \ \&\ \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\right).$$

iii. Αν $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$ και $\exists A^{-1}$, τότε γράφουμε $A^{-\mathrm{T}} \in \mathbb{F}^{m\times m}$ για τον πίνακα

$$A^{-\mathrm{T}} = \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}.$$

29. i. Κατά συντεταγμένη ορίζεται το συζυγές στοιχείο κάθε $x \in \mathbb{F}^m$, δλδ

$$\bar{x} = (\overline{x_i})_{i=1}^{m}.$$

ii. αʹ. Κατά συντεταγμένη ορίζεται το συζυγές στοιχείο κάθε $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, δλδ

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})_{i,j=1}^{n,m}.$$

βʹ. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, τότε προφανώς ισχύει ότι $\overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{A^{\mathrm{T}}}$.
γʹ. Αν $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, τότε γράφουμε $A^{\mathrm{H}} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ για τον συζυγή κατά Hermite του A, δλδ για τον πίνακα

$$A^{\mathrm{H}} = \overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{A^{\mathrm{T}}}.$$

30. Για κάθε $(A,B) \in \mathbb{F}^{k\times m} \times \mathbb{F}^{m\times n}$, γράφουμε

$$AB = \left(\sum_{l=1}^{m} a_{il} b_{lj}\right)_{i,j=1}^{k,n} \in \mathbb{F}^{k\times n},$$

για τον πολλαπλασιασμό του A επί του B. Θυμίζουμε ότι γενικά

$$AB \neq BA.$$

31. i. Γράφουμε $\det(\lozenge)$ για την διακρίνουσα στο $\mathbb{F}^{m\times m}$.
ii. Θυμίζουμε ότι για $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$ ισχύουν ότι
αʹ. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$,
βʹ. $\det\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \det(A)$ και άρα
γʹ. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-\mathrm{T}} \Rightarrow \det\left(A^{-\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

32. Γράφουμε S, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $\mathscr{P}(\mathbb{F}^m)$.

33. Έστω διανυσματικός χώρος $(I, +, I_0, \cdot)$.
i. Έστω $\left\{I_{0j}\right\}_{j=1}^{n} \times \{I_j\}_{j=1}^{n} \subseteq \mathscr{P}(I_0) \times \mathscr{P}(I)$.
αʹ. Γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{n} I_{0j} I_j = I_{01} I_1 + \cdots + I_{0n} I_n =$$
$$= \left\{ i \in I \;\middle|\; \exists\left((i_j)_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} I_j \ \&\ \left(i_{0j}\right)_{j=1}^{n} \in \prod_{j=1}^{n} I_{0j} \right) \text{ τ.ω.: } i = \sum_{j=1}^{n} i_{0j} i_j \right\}.$$

Προφανώς η παραπάνω έκφραση είναι ανεξάρτητη της σειράς της άθροισης.
βʹ. Αν $I_j = \{i_j\}$ ($I_{0j} = \left\{i_{0j}\right\}$) για κάποιο $j \in \{1, \ldots, n\}$, και δεν υπάρχει πιθανότητα παρεξήγησης, τότε γράφουμε σκέτο i_j (i_{0j}, αντίστοιχα) αντί για $\{i_j\}$ ($\left\{i_{0j}\right\}$, αντίστοιχα) στην θέση του I_j (I_{0j}, αντίστοιχα) στην παραπάνω έκφραση.

ii. Έστω
$$\{I_j\}_{j=1}^n \subseteq \underbrace{\mathscr{P}(\dots(\mathscr{P}}_{\#\ m+1}(I))\dots) \ \&\ \{I_{0j}\}_{j=1}^n \subseteq \underbrace{\mathscr{P}(\dots(\mathscr{P}}_{\#\ m+1}(I_0))\dots).$$

Επαγωγικά συμβολίζουμε

$$\sum_{j=1}^n I_{0j}I_j = I_{01}I_1 + \dots + I_{0n}I_n =$$
$$= \left\{ J \in \underbrace{\mathscr{P}(\dots(\mathscr{P}}_{\#\ m}(I))\dots) \,\middle|\, \exists \left((J_j)_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n I_j \ \&\ (J_{0j})_{j=1}^n \in \prod_{j=1}^n I_{0j} \right) \text{ τ.ω.: } J = \sum_{j=1}^n J_{0j}J_j \right\},$$

με τις αντίστοιχες ιδιότητες και συμβάσεις να ισχύουν και εδώ.

34. Έστω διανυσματικός χώρος $(I, +, I_0, \cdot)$.

i. α'. Έστω $J \subseteq I$. Θυμίζουμε ότι
$$J + \varnothing = \varnothing.$$

β'. Θυμίζουμε ότι
$$I_0 \varnothing = \varnothing.$$

ii. Έστω $\{J_{0n}\}_{n=1}^{n_0} \times J \subseteq \mathscr{P}(I_0) \times I$. Θυμίζουμε ότι (βλ Πρόταση 4.1.1)
$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} J_{0n} \right) J \subseteq \sum_{n=1}^{n_0} (J_{0n}J).$$

iii. Έστω $\{I_j\}_{j\in J} \cup \{I_\bullet\} \subseteq \mathscr{P}(I)$. Θυμίζουμε ότι
$$I_\bullet + \bigcup_{j\in J} I_j = \bigcup_{j\in J} (I_\bullet + I_j).$$

iv. Έστω $\{I_n\}_{n=1}^3 \subseteq \mathscr{P}(X)$. Θυμίζουμε ότι
$$(I_1 \cap I_2) + I_3 \subseteq (I_1 + I_3) \cap (I_2 + I_3)$$
και
$$(I_1 \cap I_3) + (I_2 \cap I_3) \subseteq (I_1 + I_2) \cap I_3.$$

35. Για $S \subseteq \mathbb{F}^m$ γράφουμε $\chi_S\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{R}$ για την χαρακτηριστική συνάρτηση του S, δλδ
$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in S, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

36. Έστω $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{F}^m$ και $f\colon S_0 \to \mathbb{F}$, γράφουμε $\mathring{f}^S$ για την μηδενική επέκταση της f στο S, δλδ
$$\begin{aligned} \mathring{f}^S &\colon S \to \mathbb{F} \\ x \mapsto \mathring{f}^S(x) &= \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in S_0 \\ 0, & \text{αν } x \in S \smallsetminus S_0. \end{cases} \end{aligned}$$

37. Έστω δύο διανυσματικοί χώροι επάνω στο ίδιο σώμα,
$$(I_1, +_{I_1}, (I_0, +_{I_0}, \cdot_{I_0}), \cdot_{I_1}) \ \&\ (I_2, +_{I_2}, (I_0, +_{I_0}, \cdot_{I_0}), \cdot_{I_2}).$$

i. Γράφουμε
$$L(I_1; I_2) = \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f \text{ γραμμική}\} =$$
$$= \left\{ f\colon I_1 \to I_2 \,\middle|\, f\left(\sum_{n=1}^{n_0} i_{0n} \cdot_{I_1} i_{1n} \right) = \sum_{n=1}^{n_0} (i_{0n} \cdot_{I_2} f(i_{1n})),\ \forall \{(i_{0n}, i_{1n})\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I_0 \times I_1 \right\}.$$

Προφανώς $\mathrm{id}_{I_1} \in L(I_1; I_1)$.

ii. Θυμίζουμε ότι η τετράδα $(L(I_1;I_2),+,\mathbb{F},\cdot)$, όπου

$$\begin{aligned}\lozenge+\blacklozenge\colon\ (L(I_1;I_2))^2&\to L(I_1;I_2)\\ (f_1,f_2)&\mapsto f_1+f_2\end{aligned}\quad\&\quad\begin{aligned}\lozenge\cdot\blacklozenge\colon\mathbb{F}\times L(I_1;I_2)&\to L(I_1;I_2)\\ (a,f)&\mapsto a\cdot f,\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}f_1+f_2\colon\ I_1&\to I_2\\ i&\mapsto(f_1+f_2)(i)=f_1(i)+_{I_2}f_2(i)\end{aligned}\quad\&\quad\begin{aligned}a\cdot f\colon I_1&\to I_2\\ i&\mapsto(a\cdot f)(i)=a\cdot_{I_2}f(i),\end{aligned}$$

αποτελεί διανυσματικό χώρο.

iii. Θυμίζουμε ότι οι ιδιότητες των ψευδονορμών παραμένουν αναλλοίωτες από γραμμικές αλλάγες μεταβλητών.

iv. Θυμίζουμε ότι τόσο η εικόνα όσο και η αντίστροφη εικόνα γραμμικών[1] συναρτήσεων αφήνουν αναλλοίωτη την κυρτότητα των συνόλων.

38. Γράφουμε απλουστευτικά

$$\mathrm{id}_m=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}.$$

39. i. Γράφουμε $\cong$ για εκφράσουμε την γραμμική ισομορφία δύο διανυσματικών χώρων επάνω στο ίδιο σώμα, δλδ αν I_1 & I_1 είναι δύο διανυσματικοί χώροι επάνω στο ίδιο σώμα, τότε

$$I_1\cong I_2\Leftrightarrow\exists f\in L(I_1;I_2)\text{ τ.ω.: }1-1\ \&\ \text{επί}.$$

Μάλιστα για να αναδείξουμε μια αντίστοιχη γνωστή f γράφουμε $\overset{f}{\cong}$ και ισχύει ότι

$$I_1\overset{f}{\cong}I_2\Rightarrow I_1\overset{f}{\approx}I_2.$$

Προφανώς

$$I_1\overset{\mathrm{id}_{I_1}}{\cong}I_1.$$

ii. Ισχύει ότι

$$\mathbb{F}^{n\times m}\cong\mathbb{F}^{nm}\cong\mathbb{F}^{m\times n}\ \&\ \mathbb{F}^1\cong\mathbb{F},$$

οπότε, μέσω αυτής της γραμμικής ισομορφικής ταύτισης, η πράξη του πολλαπλασιασμού δύο πινάκων γενικεύεται σε πράξη πολλαπλασιασμού μεταξύ πινάκων, διανυσμάτων ή αριθμών, η οποία και γενικεύει την συνήθη πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot$ μεταξύ αριθμών.

40. Για μια $f\in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ συμβολίζουμε με $(f)\in\mathbb{R}^{n\times m}$ τον επαγόμενο πίνακα της f, δλδ τον πίνακα παράστασης της f ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$, οπότε

$$f(x)=(f)\,x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^m.$$

Προφανώς

$$(\mathrm{id}_m)\,x=x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^m.$$

41. i. Για κάθε **διανυσματικό χώρο** είτε **με μη αρνητικά ορισμένη Hermite μορφή** είτε **με εσωτρικό γινόμενο (ή αλλιώς θετικά ορισμένη Hermite μορφή)** $(I,f,+,\cdot)$, όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για $(I,f,+,\cdot)$.

ii. Θυμίζουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος με μη αρνητικά ορισμένη Hermite μορφή $(I,f,+,\cdot)$ μετατρέπεται σε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(I,f,+,\cdot)$ όταν

$$f(i,i)=0\Rightarrow i=0,\ \ \forall i\in I.$$

42. i. Γράφουμε $\langle\lozenge,\blacklozenge\rangle_{\mathbb{F}^m}$ για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{F}^m$, δλδ για την συνάρτηση

$$\begin{aligned}\langle\lozenge,\blacklozenge\rangle_{\mathbb{F}^m}\colon(\mathbb{F}^m)^2&\to\mathbb{F}\\ (x,y)&\mapsto\langle x,y\rangle_{\mathbb{F}^m}=\sum_{i=1}^m\overline{x_i}y_i.\end{aligned}$$

[1] Γενικότερα, αφινικών.

ii. Θυμίζουμε ότι αν $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, τότε ισχύει ότι

$$\langle A\lozenge, \blacklozenge\rangle_{\mathbb{F}^m} = \left\langle \lozenge, A^{\mathrm{H}}\blacklozenge\right\rangle_{\mathbb{F}^m}.$$

43. i. α′. Για κάθε **διανυσματικό χώρο** είτε **με ψευδονόρμα** είτε **με νόρμα** $(I, f, +, \cdot)$, όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για $(I, f, +, \cdot)$.

β′. Θυμίζουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα $(I, f, +, \cdot)$ μετατρέπεται σε διανυσματικό χώρο με νόρμα $(I, f, +, \cdot)$ όταnν

$$f(i) = 0 \Rightarrow i = 0,\ \ \forall i \in I.$$

ii. α′. Θυμίζουμε ότι ένας διανυσματικός χώρος είτε με μη αρνητικά ορισμένη Hermite μορφή είτε με εσωτερικό γινόμενο $(I, f, +, \cdot)$ μετατρέπεται σε διανυσμαστικό χώρο είτε με ψευδονόρμα είτε με νόρμα, αντίστοιχα, $\left(I, (f(\lozenge, \lozenge))^{\frac{1}{2}}, +, \cdot\right)$.

β′. Κατά την συνήθη πρακτική, εφοδιάζουμε έναν διανυσματικό χώρο είτε με μη αρνητικά ορισμένη Hermite μορφή είτε με εσωτερικό γινόμενο με την αντίστοιχη είτε ψευδονόρμα είτε νόρμα.

iii. α′. Θυμίζουμε ότι ένας διανυσμαστικός χώρος είτε με ψευδονόρμα είτε με νόρμα $(I, f, +, \cdot)$ μετατρέπεται σε είτε ψευδομετρικό είτε μετρικό, αντίστοιχα, χώρο $(I, f(\lozenge - \blacklozenge))$.

β′. Κατά την συνήθη πρακτική, εφοδιάζουμε έναν διανυσματικό χώρο είτε με ψευδονόρμα είτε με νόρμα με την αντίστοιχη είτε ψευδομετρική είτε μετρική.

44. i. Συμβολίζουμε με $|\lozenge|$ την συνήθη νόρμα στον $\mathbb{F}^m$

$$\begin{aligned} |\lozenge| &: \mathbb{F}^m \to [0,\infty) \\ x &\mapsto |x| = (\langle x, x\rangle_{\mathbb{F}^m})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m \overline{x_i} x_i\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Η παραπάνω νόρμα αποτελεί την γενίκευση της απόλυτης τιμής στο $\mathbb{F}$.

ii. Αποκλειστικά στην περίπτωση του $(\mathbb{N}_0)^m$, και όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης, συμβολίζουμε επίσης με $|\lozenge|$ την συνάρτηση

$$\begin{aligned} |\lozenge| &: (\mathbb{N}_0)^m \to [0,\infty) \\ x &\mapsto |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i. \end{aligned}$$

Τοπολογική δομή και συνέχεια

1. Έστω I.

i. α′. Γράφουμε $\mathscr{O}(I) \subseteq \mathscr{P}(I)$, με ή χωρίς δείκτη στο $\mathscr{O}$, για αυθαίρετες τοπολογίες του I, με τα στοιχεία κάθε μιας από τις οποίες να καλούνται ανοικτά (ως προς την εκάστοτε $\mathscr{O}(I)$) υποσύνολα του I.

β′. Έστω $\mathscr{O}(I)$ και I_0. Γράφουμε

$$\mathscr{O}\big(I\,\big|\,I_0\big) = \mathscr{O}(I) \cap \mathscr{P}\big(I\,\big|\,I_0\big) \subseteq \mathscr{O}(I).$$

Στην περίπτωση όπου $I_0 = \{i_0\}$ και δεν υπάρχει πιθανότητα παρεξήγησης, γράφουμε σκέτο i_0 αντί για $\{i_0\}$ στην θέση του I_0 στην παραπάνω έκφραση. Μάλιστα, τα στοιχεία του $\mathscr{O}\big(I\,\big|\,i_0\big)$ καλούνται (ανοικτές[2]) περιοχές (ως προς την $\mathscr{O}(I)$) του i_0.

ii. Έστω $\mathscr{O}(I)$.

α′. Γράφουμε

$$\mathscr{C}(I) = \left\{J \in \mathscr{P}(I)\,\middle|\,J^c \in \mathscr{O}(I)\right\} \subseteq \mathscr{P}(I),$$

με ή χωρίς δείκτη στο $\mathscr{C}$, για το σύνολο των κλειστών (ως προς την $\mathscr{O}(I)$) υποσυνόλων του I.

[2] Έχει επικρατήσει σε τμήμα της βιβλιογραφίας να μην ταυτίζεται η έννοια της «περιοχής» με αυτή της «ανοικτής περιοχής», δλδ, δεδομένης μας τοπολογίας, το σύνολο των περιοχών περιλαμβάνει και μη ανοικτά σύνολα. Αποφεύγουμε αυτή την πρακτική, καθώς και μπελαλίδικη σε ό,τι αφορά τον συμβολισμό είναι και κάτι το ουσιαστικό τελικά στην θεωρία δεν προσφέρει.

β΄. Έστω I_0. Γράφουμε

$$\mathscr{C}\big(I\,\big|\,I_0\big) = \mathscr{C}(I) \cap \mathscr{P}\big(I\,\big|\,I_0\big) \subseteq \mathscr{C}(I).$$

Στην περίπτωση όπου $I_0 = \{i_0\}$ και δεν υπάρχει πιθανότητα παρεξήγησης, γράφουμε σκέτο i_0 αντί για $\{i_0\}$ στην θέση του I_0 στην παραπάνω έκφραση.

2. Για κάθε **τοπολογικό χώρο** $(I, \mathscr{O}(I))$, όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για $(I, \mathscr{O}(I))$.

3. Δεδομένου I, χαρακτηριστικά παραδείγματα τοπολογικών χώρων είναι

   i. ο διακριτός τοπολογικός χώρος
   $$(I, \mathscr{P}(I)),$$
   με την αντίστοιχη τοπολογία να καλείται διακριτή και

   ii. ο τετριμμένος τοπολογικός χώρος
   $$(I, \{\varnothing, I\}),$$
   με την αντίστοιχη τοπολογία να καλείται τετριμμένη.

4. Έστω $(I_1, \mathscr{O}(I_1))$ και $(I_2, \mathscr{O}(I_2))$, καθώς επίσης $f\colon I_1 \to I_2$. Για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε την τοπολογική δομή των εμπλεκόμενων τοπολογικών χώρων στον συμβολισμό της f, γράφουμε

$$f\colon I_1 \to (I_2, \mathscr{O}(I_2)),\ \ f\colon (I_1, \mathscr{O}(I_1)) \to I_2 \text{ ή/και } f\colon (I_1, \mathscr{O}(I_1)) \to (I_2, \mathscr{O}(I_2))$$

αντί για απλά $f\colon I_1 \to I_2$.

5. Έστω $(I, \mathscr{O}(I))$, $i \in I$ και $\{i_j\}\}_{j\in J} \subseteq I$ δίκτυο στο I.

   i. Γράφουμε $i_j \to i$ (ως προς την $\mathscr{O}(I)$) όταν
   $$\forall I_0 \in \mathscr{O}\big(I\,\big|\,i\big),\ \exists j_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{i_j\}_{j_0 \le j \in J} \subseteq I_0,$$
   οπότε και λέμε ότι η $\{i_j\}_{j\in J}$ συγκλίνει στο i (ως προς την $\mathscr{O}(I)$).

   ii. Γράφουμε είτε $i_j \overset{\mathscr{O}(I)}{\to} i$ είτε απλούστερα $i_j \overset{I}{\to} i$ αντί για μόνο $i_j \to i$, για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε την εξάρτηση της σύγκλισης από την τοπολογία του I.

6. i. Έστω είτε ψευδομετρικός είτε μετρικός χώρος (I, f). Συμβολίζουμε με $(I, \mathscr{O}_f(I))$ τον αντίστοιχο τοπολογικό χώρο είτε ψευδομετρικής είτε μετρικής, αντίστοιχα, τοπολογίας, με το σύνολο $\mathscr{O}_f(I)$ να καλείται είτε ψευδομετρική είτε μετρική, αντίστοιχα, τοπολογία του I, η οποία παράγεται (βλ, πχ, Ορισμό 2.2.1) από την βάση (βλ, πχ, Ορισμό 1.1.1 και Πρόταση 1.1.3)
   $$\{B_f(i, \varrho) \subseteq I\}_{(i,\varrho)\in I\times(0,\infty)} \subseteq \mathscr{P}(I).$$

   ii. Κατά την συνήθη πρακτική, εφοδιάζουμε έναν είτε ψευδομετρικό είτε μετρικό χώρο (I, f) με την είτε ψευδομετρική είτε μετρική, αντίστοιχα, τοπολογία.

7. Χρησιμοποιούμε το U, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα ανοικτά στοιχεία του $\mathscr{P}(\mathbb{F}^m)$.

8. Έστω I.

   i. Ένας τοπολογικός χώρος $(I, \mathscr{O}(I))$ καλείται είτε ψευδομετρικοποιήσιμος είτε μετρικοποιήσιμος όταν $\exists f\colon I^2 \to \mathbb{R}$ τ.ω.: το ζεύγος (I, f) να είναι είτε ψευδομετρικός είτε μετρικός, αντίστοιχα, χώρος τ.ω.:
   $$\mathscr{O}(I) = \mathscr{O}_f(I).$$

   ii. Θυμίζουμε ότι

      α΄. κάθε διακριτός τοπολογικός χώρος I είναι μετρικοποιήσιμος καθώς
      $$\mathscr{P}(I) = \mathscr{O}_f(I),$$
      όπου f η διακριτή μετρική στον I και

β′. κάθε τετριμμένος τοπολογικός χώρος I που περιέχει περισσότερα του ενός στοιχεία δεν είναι ψευδομετρικοποιήσιμος.

9. Έστω $(I, \mathscr{O}(I))$ και $I_0 \subseteq I$.

   i. α′. Γράφουμε
   $$I_0^\circ = \bigcup_{J \in \mathscr{O}(I) \cap \mathscr{P}(I_0)} J,$$
   για το εσωτερικό του I_0.

   β′. Για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε ότι το εσωτερικό του I_0 θεωρείται ως προς την τοπολογία του I, γράφουμε
   $$I_0^{\circ \mathscr{O}(I)},$$
   ή απλούστερα,
   $$I_0^{\circ I},$$
   αντί για σκέτα I_0°.

   γ′. Στην περίπτωση όπου (I, f) ψευδομετρικός χώρος και
   $$\mathscr{O}(I) = \mathscr{O}_f(I),$$
   συμπληρώνουμε τον παραπάνω συμβολισμό γράφοντας
   $$I_0^{\circ f},$$
   αντί για I_0°.

   ii. α′. Γράφουμε
   $$\overline{I_0} = \bigcap_{J \in \mathscr{C}(I \mid I_0)} J,$$
   για την κλειστή θήκη (ή αλλιως κλειστότητα) του I_0.

   β′. Για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε ότι η κλειστή θήκη του I_0 θεωρείται ως προς την τοπολογία του I, γράφουμε
   $$\overline{I_0}^{\mathscr{O}(I)},$$
   ή, απλόυστερα,
   $$\overline{I_0}^{I},$$
   αντί για σκέτα $\overline{I_0}$.

   γ′. Στην περίπτωση όπου (I, f) ψευδομετρικός χώρος και
   $$\mathscr{O}(I) = \mathscr{O}_f(I),$$
   συμπληρώνουμε τον παραπάνω συμβολισμό γράφοντας
   $$\overline{I_0}^{f},$$
   αντί για $\overline{I_0}$.

   iii. Γράφουμε
   $$\partial I_0 = \overline{I_0} \smallsetminus I_0^\circ,$$
   για το (τοπολογικό) σύνορο του I_0.

10. Έστω τοπολογικός χώρος I και $I_0 \subseteq I$. Λέμε ότι ο παραπάνω εγκλεισμός είναι πυκνός όταν
$$\overline{I_0} = I.$$

11. Για $S \subseteq \mathbb{F}^m$ και $\varepsilon > 0$ γράφουμε
$$S^\varepsilon = S + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{x \in S} B(0, \varepsilon) = S \cup \bigcup_{x \in \partial S} B(0, \varepsilon).$$
Προφανώς το S^ε είναι ανοικτό.

12. i. Έστω τοπολογικός χώρος I και $I_1, I_2 \in \mathscr{P}(I)$. Γράφουμε $I_1 \subset\subset I_2$ και λέμε ότι το I_1 περιέχεται συμπαγώς στο I_2 όταν
   α΄. $\overline{I_1} \subseteq I_2{}^{\circ}$ και
   β΄. το $\overline{I_1}$ είναι συμπαγές.
   ii. Θυμίζουμε ότι $S \subset\subset \mathbb{R}^m$ όταν το S είναι φραγμένο.

13. Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.
   i. Θυμίζουμε ότι $\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ τ.ω.: να είναι γνησίως αύξουσα, συμπαγώς περιεχόμενη και καλύπτουσα του U, δλδ να ισχύει ότι
   α΄. $U_i \subset\subset U_{i+1} \subset\subset U$, $\forall i \in \mathbb{N}$, και
   β΄. $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$.
   ii. Για κάθε $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ όπως στο σημείο i., γράφουμε
$$U_i \Rsh U.$$

14. Έστω $(I_1, \mathscr{O}(I_1))$ και $(I_2, \mathscr{O}(I_2))$.
   i. α΄. Γράφουμε
$$\begin{aligned}
C(I_1; I_2) &= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f \text{ συνεχής (παντού στο } I_1)\} = \\
&= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f^{\leftarrow}(J) \in \mathscr{O}(I_1),\ \forall J \in \mathscr{O}(I_2)\} = \\
&= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f^{\leftarrow}(J) \in \mathscr{C}(I_1),\ \forall J \in \mathscr{C}(I_2)\} = \\
&= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f \text{ συνεχής σε κάθε } i \in I_1\} = \\
&= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f^{\leftarrow}(J) \in \mathscr{O}(I_1 \,|\, i),\ \forall J \in \mathscr{O}(I_2 \,|\, f(i)),\ \forall i \in I_1\} = \\
&= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f^{\leftarrow}(J) \in \mathscr{C}(I_1 \,|\, i),\ \forall J \in \mathscr{C}(I_2 \,|\, f(i)),\ \forall i \in I_1\} = \\
&= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, \forall i \in I_1,\ \forall J_2 \in \mathscr{O}(I_2 \,|\, f(i)),\ \exists J_1 \in \mathscr{O}(X \,|\, i) \text{ τ.ω.: } f(J_1) \subseteq J_2\} = \\
&= \left\{f\colon I_1 \to I_2 \,\middle|\, f(i_j) \overset{\mathscr{O}(I_2)}{\to} f(i),\ \forall \text{ δίκτυο } \{i_j\}_{j \in J} \subseteq I_1 \text{ τ.ω.: } i_j \overset{\mathscr{O}(I_1)}{\to} i,\ \forall i \in I_1\right\}.
\end{aligned}$$
   β΄. Για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε την τοπολογική δομή των εμπλεκόμενων τοπολογικών χώρων στο αντίστοιχο σύνολο συνεχών συναρτήσεων, γράφουμε
$$C((I_1, \mathscr{O}(I_1)); I_2),\ C(I_1; (I_2, \mathscr{O}(I_2))) \text{ ή/και } C((I_1, \mathscr{O}(I_1)); (I_2, \mathscr{O}(I_2)))$$
   αντί για απλά $C(I_1; I_2)$.
   ii. Αν, για κάθε $j \in \{1, 2\}$, η $\mathscr{O}(I_j)$ είναι είτε ψευδομετρική είτε μετρική, τότε
$$Lip(I_1; I_2) \subseteq C(I_1; I_2).$$

15. Έστω τοπολογικός χώρος I και $f \in C(I; \mathbb{F})$. Γράφουμε $\operatorname{supp}(f)$ για τον φορέα της f, δλδ
$$\operatorname{supp}(f) = \overline{f^{\leftarrow}(\{0\}^c)} = \overline{\{i \in I \,|\, f(i) \neq 0\}},$$
όπου προφανώς το 0 εδώ συμβολίζει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{F}$. Περιφραστικά, αν $I \ni i \notin \operatorname{supp}(f)$, τότε $\exists I_0 \in \mathscr{O}(I \,|\, i)$ τ.ω.: $f|_{I_0} = 0$, δλδ το $I \smallsetminus \operatorname{supp}(f)$ είναι το μέγιστο ανοικτό υποσύνολο του J στο οποίο μηδενίζεται η f.

16. Έστω $(I_1, \mathscr{O}(I_1))$ και $(I_2, \mathscr{O}(I_2))$.
   i. Γράφουμε
$$\begin{aligned}
C_s(I_1; I_2) &= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f \text{ ακολουθιακά συνεχής (παντού στο } I_1)\} = \\
&= \{f\colon I_1 \to I_2 \,|\, f \text{ ακολουθιακά συνεχής σε κάθε } i \in I_1\} = \\
&= \left\{f\colon I_1 \to I_2 \,\middle|\, f(i_n) \overset{\mathscr{O}(I_2)}{\to} f(i),\ \forall \{i_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq I_1 \text{ τ.ω.: } i_n \overset{\mathscr{O}(I_1)}{\to} i,\ \forall i \in I_1\right\}.
\end{aligned}$$

ii. α′. Προφανώς, ισχύει πάντα ότι

$$C(I_1; I_2) \subseteq C_s(I_1; I_2).$$

β′. Στην περίπτωση όπου ο I_1 είναι ακολουθιακός[3] ισχύει, επιπλέον, ότι

$$C_s(I_1; I_2) \subseteq C(I_1; I_2) \Leftrightarrow C(I_1; I_2) = C_s(I_1; I_2).$$

17. Έστω δύο τοπολογικοί χώροι I_1, και I_2 τ.ω.: $I_1 \subseteq I_2$. Λέμε ότι ο παραπάνω εγκλεισμός είναι

i. συνεχής και γράφουμε

$$I_1 \hookrightarrow I_2,$$

όταν $\iota \in C(I_1; I_2)$ και

ii. ακολουθιακά συνεχής και γράφουμε

$$I_1 \hookrightarrow_s I_2,$$

όταν $\iota \in C_s(I_1; I_2)$.

18. Για κάθε **τοπολογικό διανυσματικό χώρο** $(I, \mathscr{O}(I), +, \cdot)$ (βλ τον Ορισμό 5.1.1), όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης γράφουμε απλουστευτικά I αντί για $(I, \mathscr{O}(I), +, \cdot)$.

19. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τοπολογικών διανυματικών χώρων αποτελούν οι διανυσματικοί χώροι με ψευδονόρμα (βλ την Πρόταση 5.3.3.1).

20. i. Έστω τοπολογικός χώρος I_1 και τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(I_2, \mathscr{O}(I_2), +_{I_2}, \cdot_{I_2})$. Θυμίζουμε ότι η τετράδα

$$\left(C(I_1; I_2), +, \mathbb{F}, \cdot\right),$$

όπου

$$\begin{aligned} \lozenge + \blacklozenge \colon \left(C(I_1; I_2)\right)^2 &\to C(I_1; I_2) \\ (f_1, f_2) &\mapsto f_1 + f_2 \end{aligned} \quad \& \quad \begin{aligned} \lozenge \cdot \blacklozenge \colon \mathbb{F} \times C(I_1; I_2) &\to C(I_1; I_2) \\ (a, f) &\mapsto a \cdot f, \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 \colon I_1 &\to I_2 \\ i &\mapsto (f_1 + f_2)(i) = f_1(i) +_{I_2} f_2(i) \end{aligned} \quad \& \quad \begin{aligned} a \cdot f \colon I_1 &\to I_2 \\ i &\mapsto (a \cdot f)(i) = a \cdot_{I_2} f(i), \end{aligned}$$

αποτελεί διανυσματικό χώρο.

ii. Αν

$$\mathscr{O}(I_2) = \mathscr{O}_f(I_2),$$

όπου f είναι είτε ψευδομετρική είτε μετρική στον I_2, τότε η τετράδα

$$\left(Lip(I_1; I_2), +|_{Lip(I_1; I_2)}, \mathbb{F}, \cdot|_{Lip(I_1; I_2)}\right),$$

όπου $+$ και $\cdot$ όπως στο σημείο i., αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο του $C(I_1; I_2)$.

21. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$.

i. Ο $Lip(S; \mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος του

$$\begin{aligned} &C(S; \mathbb{F}) = \\ &= \left\{ f \colon S \to \mathbb{F} \,\middle|\, \forall x \in S \ \& \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω.: } y \in S \ \& \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

ii. Γράφουμε

$$C_b(S; \mathbb{F}) = \left\{ f \in C(S; \mathbb{F}) \,\middle|\, \sup\left(|f|\right) < \infty \right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων $f \colon U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C_b(S; \mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος του $C(S; \mathbb{F})$.

[3] Θυμίζουμε ότι χαρακτηριστικά παραδείγματα ακολουθιακών τοπολογικών χώρων είναι οι πρώτοι αριθμήσιμοι τοπολογικοί χώροι και ειδικότερα οι ψευδομετρικοί χώροι (βλ, πχ, [28] (με την σημείωση ότι οι τοπολόγοι ορίζουν διαφορετικά τον χώρο Fréchet από τους συναρτησιοαναλύστες) και [27]).

iii. Γράφουμε

$$\begin{aligned}C_u(S;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ ομοιόμορφα συνεχής} \right\} = \\ &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω.: } x, y \in S \ \&\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S \ \&\ \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0 \right\},\end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C_u(S;\mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος του $C(S;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

α΄. ο $Lip(S;\mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος του $C_u(S;\mathbb{F})$ και

β΄. αν $S \subset\subset \mathbb{R}^m$, τότε ο $C_u(S;\mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος του $C_b(S;\mathbb{F})$.

iv. Γράφουμε

$$C_{b,u}(S;\mathbb{F}) = C_b(S;\mathbb{F}) \cap C_u(S;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των φραγμένων και ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C_{b,u}(S;\mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος τόσο του $C_b(S;\mathbb{F})$ όσο και του $C_u(S;\mathbb{F})$. Ένα από τα συμπεράσματα του παραπάνω σημείου γράφεται τώρα ως

$$S \subset\subset \mathbb{R}^m \Rightarrow C_u(S;\mathbb{F}) = C_{b,u}(S;\mathbb{F}).$$

22. Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Γράφουμε

$$C_0(U;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, \lim_{\operatorname{dist}(x,\partial U)\to 0} |f(x)| = 0 = \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| \right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ που μηδενίζονται στο σύνορο και στο άπειρο (το δεύτερο έχει νόημα όταnν το U δεν είναι φραγμένο). Προφανώς ο $C_0(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

23. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$.

i. Γράφουμε

$$\begin{aligned}C_c(S;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα} \right\} = \\ &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset S \right\},\end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα. Προφανώς ο $C_c(S;\mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος του $C_{b,u}(S;\mathbb{F})$ και ειδικότερα, όταν $S = U$, ο $C_c(S;\mathbb{F})$ του $C_0(S;\mathbb{F})$.

ii. Έστω $S_0 \subset\subset S$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}C_{S_0}(S;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in C_c(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ με φορέα περιεχόμενο εντός του } S_0 \right\} = \\ &= \left\{ f \in C_c(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subseteq S_0 \right\},\end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$ με φορέα περιεχόμενο εντός του $S_0 \subset\subset S$. Προφανώς ο $C_{S_0}(S;\mathbb{F})$ είναι (γνήσιος αν S ανοικτό) διανυσματικός υπόχωρος του $C_c(S;\mathbb{F})$.

24. Έστω δύο τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι I_1 και I_2.

i. Γράφουμε

$$CL(I_1;I_2) = C(I_1;I_2) \cap L(I_1;I_2).$$

ii. Θυμίζουμε ότι η τετράδα

$$\left(CL(I_1;I_2),\, +|_{CL(I_1;I_2)},\, \mathbb{F},\, \cdot|_{CL(I_1;I_2)} \right),$$

όπου + και · οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιαμού επί στοιχείο του $\mathbb{F}$ είτε του $L(I_1;I_2)$ είτε του $C(I_1;I_2)$, αποτελεί διανυσματικό υπόχωρο καθενός εκ των δύο προαναφερθέντων διανυσματικών χώρων.

25. Έστω τοπολογικός διανυσματικός χώρος I. Γράφουμε I' για τον δυϊκό διανυσματικό χώρο του I, δλδ
$$I' = CL(I;\mathbb{F}).$$

26. Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(I, \mathscr{O}(I), +, \cdot)$ καλείται είτε ψευδονορμοποιήσιμος είτε νορμοποιήσιμος όταнν $\exists f\colon I \to \mathbb{R}$ τ.ω.: το ζεύγος $(I, f, +, \cdot)$ να είναι διανυσματικός χώρος είτε με ψευδονόρμα είτε με νόρμα, αντίστοιχα, τ.ω.:
$$\mathscr{O}(I) = \mathscr{O}_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(I).$$

Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^m$

1. i. Γράφουμε $\mathscr{M}^m \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R}^m)$ για την σ-άλγεβρα των μετρήσιμων κατά Lebesgue $S \subseteq \mathbb{R}^m$.
   ii. Θυμίζουμε ότι το ζεύγος $(\mathbb{R}^m, \mathscr{M}^m)$ αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα μετρήσιμου χώρου.

2. i. Χρησιμοποιούμε το λ^m για το μέτρο Lebesgue, το οποίο έχει ως πεδίο ορισμού την $\mathscr{M}^m$.
   ii. Θυμίζουμε ότι η τριάδα $(\mathbb{R}^m, \mathscr{M}^m, \lambda^m)$ αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα χώρου μέτρου.

3. Για $S \in \mathscr{M}^m$, γράφουμε
$$M(S;\mathbb{F}) = \left\{f\colon S \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ μετρήσιμη κατά Lebesgue}\right\}.$$
Θυμίζουμε ότι το παραπάνω σύνολο, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Θυμίζουμε επίσης ότι
$$f, g \in M(S;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M(S;\mathbb{F}).$$

4. Για $S \in \mathscr{M}^m$, γράφουμε
$$\operatorname{ess\,sup}(f) = \inf\left\{K \in \mathbb{R} \,\middle|\, f(x) \le K,\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in S\right\},$$
για το ουσιώδες supremum της f. Θυμίζουμε ότι αν $f \in C(S;\mathbb{F})$, τότε
$$\operatorname{ess\,sup}(f) = \sup(f).$$

5. Γράφουμε
$$\begin{aligned}
M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ ταχέως φθίνουσα}\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{ess\,sup}\left(\left|(\mathrm{id}_m)^\alpha f\right|\right) < \infty,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{ess\,sup}\left(|\mathrm{id}_m|^n |f|\right) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{ess\,sup}\left(\left(1 + |\mathrm{id}_m|^n\right) |f|\right) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{ess\,sup}\left((1 + |\mathrm{id}_m|)^n |f|\right) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{ess\,sup}\left(\left(1 + |\mathrm{id}_m|^2\right)^n |f|\right) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le \frac{K}{\left(1 + |x|^2\right)^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le \frac{K}{(1 + |x|)^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le \frac{K}{1 + |x|^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m\right\},
\end{aligned}$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ταχέως φθινουσών μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι
$$M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, |f(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^n}\right), \text{ καθώς } |x| \to \infty, \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Θυμίζουμε επίσης ότι

$$f, g \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

6. Γράφουμε

$$\begin{aligned} M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ βραδέως αύξουσα} \right\} = \\ &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } \operatorname{ess\,sup}\left(\frac{|f|}{1+|\mathrm{id}_m|^n} \right) < \infty \right\} = \\ &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } \operatorname{ess\,sup}\left(\frac{|f|}{(1+|\mathrm{id}_m|)^n} \right) < \infty \right\} = \\ &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } \operatorname{ess\,sup}\left(\frac{|f|}{\left(1+|\mathrm{id}_m|^2\right)^n} \right) < \infty \right\} = \\ &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists\, (n \in \mathbb{N}_0 \ \&\ K > 0) \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le K\left(1+|x|^2\right)^n, \ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m \right\} = \\ &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists\, (n \in \mathbb{N}_0 \ \&\ K > 0) \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le K(1+|x|)^n, \ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m \right\} = \\ &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists\, (n \in \mathbb{N}_0 \ \&\ K > 0) \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le K\left(1+|x|^n\right), \ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m \right\}, \end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των βραδέως αυξουσών μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ και γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του $M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

$$M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| = O\left(|x|^n\right), \text{ καθώς } |x| \to \infty \right\}.$$

Θυμίζουμε επίσης ότι

$$f, g \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και

$$f \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \ \&\ g \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \ \Rightarrow fg \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

7. Για $S \in \mathscr{M}^m$ και $f \in M(S;\mathbb{F})$, γράφουμε

$$\operatorname{ess\,supp}(f) = S \smallsetminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}_f} U, \text{ όπου } \mathcal{U}_f = \left\{ U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(S) \,\middle|\, f|_U = 0, \ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού} \right\},$$

για τον ουσιώδη φορέα της f. Θυμίζουμε ότι αν $f \in C(S;\mathbb{F})$, τότε

$$\operatorname{ess\,supp}(f) = \operatorname{supp}(f).$$

8. Για $S \in \mathscr{M}^m$, γράφουμε

$$\begin{aligned} M_c(S;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ με συμπαγώς περιεχόμενο ουσιώδη φορέα} \right\} = \\ &= \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{ess\,supp}(f) \subset\subset S \right\}, \end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο ουσιώδη φορέα. Προφανώς ο $M_c(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(S;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

$$f, g \in M_c(S;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_c(S;\mathbb{F}),$$

καθώς επίσης

$$f \in M(S;\mathbb{F}) \ \&\ g \in M_c(S;\mathbb{F}) \ \Rightarrow fg \in M_c(S;\mathbb{F}).$$

9. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Θυμίζουμε ότι ο $C(S;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M(S;\mathbb{F})$ όταν $S \in \mathscr{M}^m$.

10. Έστω $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S_0 \to \mathbb{F}$. Θυμίζουμε ότι $\mathring{f}^S \in M(S;\mathbb{F})$ όταν $S_0, S \in \mathscr{M}^m$.

11. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Θυμίζουμε ότι $\chi_S \in M(S;\mathbb{F})$ όταν $S \in \mathscr{M}^m$.

12. Για $S \in \mathscr{M}^m$, γράφουμε

$$M_s(S;\mathbb{F}) = \left\{f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ απλή}\right\} = \left\{f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f(S) \text{ πεπερασμένα αριθμήσιμο}\right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των απλών μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $M_s(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(S;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι μία $f \in M(S;\mathbb{F})$ είναι απλή όταν $\exists!$ πεπερασμένη διαμέριση του S, $\{S_i\}_{i=1}^n \subsetneq \mathscr{M}^m \setminus \{\varnothing\}$, με την έννοια ότι τα S_i είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι το ίδιο το S, & $\exists!$ πεπερασμένη ακολουθία διάφορων μεταξύ τους αριθμών, $\{a_i\}_{i=1}^n \subsetneq \mathbb{F}$, τ.ω.:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{S_i},$$

όπου η παραπάνω παράσταση λέγεται κανονική μορφή της απλής f. Θυμίζουμε επίσης ότι

$$f, g \in M_s(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_s(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

13. Για $S \in \mathscr{M}^m$ και $f \in M(S;\mathbb{F})$, συμβολίζουμε εναλλακτικά

$$\int_S f(x)\mathrm{d}x = \int_S f\mathrm{d}\lambda^m.$$

Διαφορικοί τελεστές στον $\mathbb{R}^m$

1. Γράφουμε

$$\lozenge' = \frac{\mathrm{d}\lozenge}{\mathrm{d}x}$$

για τον κοινό διαφορικό τελεστή στον $\mathbb{R}$.

2. Για τον μερικό διαφορικό τελεστή ως προς την i-οστή συνιστώσα στον $\mathbb{R}^m$, με $i \in \{1,\dots,m\}$, γράφουμε

$$\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

3. Αν $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, τότε συμβολίζουμε ως

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\sum_{i=1}^m \alpha_i}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}$$

τον πολλαπλό μερικό διαφορικό τελεστή στον $\mathbb{R}^m$.

4. Συμβολίζουμε ως

$$\mathrm{grad} = \left(\partial^i\right)_{i=1}^m$$

την κλίση στον $\mathbb{R}^m$.

5. Συμβολίζουμε ως

$$\mathrm{div} = \sum_{i=1}^m \partial^i \circ \mathrm{pr}_i$$

την απόκλιση στον $\mathbb{R}^m$.

6. Γράφουμε

$$\Delta = \mathrm{div} \circ \mathrm{grad} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

για τον διαφορικό τελεστή Laplace στον $\mathbb{R}^m$.

7. Συμβολίζουμε ως

$$\mathrm{curl} = \left(\partial^2 \circ \mathrm{pr}_3 - \partial^3 \circ \mathrm{pr}_2, \partial^3 \circ \mathrm{pr}_1 - \partial^1 \circ \mathrm{pr}_2, \partial^2 \circ \mathrm{pr}_1 - \partial^3 \circ \mathrm{pr}_2\right)$$

τον στροβιλισμό στον $\mathbb{R}^3$.

8. Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και $k \in \mathbb{N}_0$.

i. Γράφουμε

$$C^k(U;\mathbb{F}) = \left\{f: U \to \mathbb{F} \,\middle|\, D^\alpha f \in C(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \leq k\right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των πεπερασμένα - τάξης k εδώ - συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C^k(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(U;\mathbb{F})$.

ii. Γράφουμε

$$C^k_b(U;\mathbb{F}) = \left\{f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in C_b(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \leq k\right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες διαφορίσεις. Προφανώς ο $C^k_b(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k(U;\mathbb{F})$.

iii. Γράφουμε

$$C^k_u(U;\mathbb{F}) = \left\{f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in C_u(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \leq k\right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k ομοιόμορφα συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C^k_u(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k(U;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι αν $U \subset\subset \mathbb{R}^m$, τότε ο $C^k_u(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_b(U;\mathbb{F})$.

iv. Γράφουμε

$$C^k_{b,u}(U;\mathbb{F}) = C^k_b(U;\mathbb{F}) \cap C^k_u(U;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k ομοιόμορφα συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες διαφορίσεις. Προφανώς ο $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος τόσο του $C^k_b(U;\mathbb{F})$ όσο και του $C^k_u(U;\mathbb{F})$. Το συμπέρασμα του παραπάνω σημείου γράφεται τώρα ως

$$U \subset\subset \mathbb{R}^m \Rightarrow C^k_u(U;\mathbb{F}) = C^k_{b,u}(U;\mathbb{F}).$$

v. Γράφουμε

$$C^k_0(U;\mathbb{F}) = \left\{f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in C_0(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \leq k\right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{F}$ με διαφορίσεις που μηδενίζονται στο σύνορο και στο άπειρο. Προφανώς ο $C^k_0(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

vi. Γράφουμε

$$C^k_c(U;\mathbb{F}) = C^k(U;\mathbb{F}) \cap C_c(U;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα. Προφανώς ο $C^k_c(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_0(U;\mathbb{F})$.

vii. Έστω $S \subset\subset U$. Γράφουμε

$$C^k_S(U;\mathbb{F}) = C^k(U;\mathbb{F}) \cap C_S(U;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f: U \to \mathbb{F}$ με φορέα περιεχόμενο εντός του $S \subset\subset U$. Προφανώς ο $C^k_S(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_c(U;\mathbb{F})$ και μάλιστα ισχύει ότι

$$C^k_c(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{S \subset\subset U} C^k_S(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0 \subset\subset U} C^k_{U_0}(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0 \subset\subset U} C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} C^k_{\overline{U_i}}(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U),\ \text{τ.ω.: } U_i \nearrow U.$$

9. Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

   i. Γράφουμε
$$C^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών (ή, αλλιώς, απείρως (συνεχώς) διαφορίσιμων) συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(U;\mathbb{F})$.

   ii. Γράφουμε
$$C_b^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_b^k(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες διαφορίσεις. Προφανώς ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty(U;\mathbb{F})$.

   iii. Γράφουμε
$$C_u^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_u^k(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με ομοιόμορφα συνεχείς διαφορίσεις. Προφανώς ο $C_u^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty(U;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι αν $U \subset\subset \mathbb{R}^m$, τότε ο $C_u^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$.

   iv. Γράφουμε
$$C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_{b,u}^k(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς διαφορίσεις. Προφανώς ο $C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος τόσο του $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ όσο και του $C_u^\infty(U;\mathbb{F})$. Το συμπέρασμα του παραπάνω σημείου γράφεται τώρα ως
$$U \subset\subset \mathbb{R}^m \Rightarrow C_u^\infty(U;\mathbb{F}) = C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F}).$$

   v. Γράφουμε
$$C_0^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με διαφορίσεις που μηδενίζονται στο σύνορο και στο άπειρο. Προφανώς ο $C_0^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F})$.

   vi. Γράφουμε
$$C_c^\infty(U;\mathbb{F}) = C^\infty(U;\mathbb{F}) \cap C_c(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα. Προφανώς ο $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_0^\infty(U;\mathbb{F})$.

   vii. Έστω $S \subset\subset U$. Γράφουμε
$$C_S^\infty(U;\mathbb{F}) = C^\infty(U;\mathbb{F}) \cap C_S(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φορέα περιεχόμενο εντός του $S \subset\subset U$. Προφανώς ο $C_S^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ και μάλιστα ισχύει ότι
$$\begin{aligned} C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &= \bigcup_{S \subset\subset U} C_S^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0 \subset\subset U} C_{U_0}^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0 \subset\subset U} C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F}) = \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\overline{U_i}}^\infty(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U),\ \text{τ.ω.: } U_i \nearrow U. \end{aligned}$$

10. Γράφουμε
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \right\},$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχώς διαφορίσιμων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ με ταχέως φθίνουσες διαφορίσεις, ο οποίος καλείται και ως διανυσματικός χώρος Schwartz. Προφανώς ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_0^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι
$$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow (fg) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$
Χαρακτηριστικά παραδείγματα στοιχείων του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ αποτελούν οι συναρτήσεις Gauss
$$\begin{aligned} f_A\colon \mathbb{R}^m &\to (0,1] \\ x &\mapsto f_A(x) = \mathrm{e}^{-\langle x, Ax\rangle_{\mathbb{R}^m}}, \end{aligned} \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ τ.ω.: } A = A^{\mathrm{T}} \ \&\ \langle x, Ax\rangle_{\mathbb{R}^m} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^m \smallsetminus \{0\}.$$

11. Γράφουμε
$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \right\},$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχώς διαφορίσιμων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ με βραδέως αύξουσες διαφορίσεις. Προφανώς ο $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ και γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του $C_0^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι
$$f, g \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow (fg) \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),$$
καθώς επίσης
$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \ \&\ g \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \ \Rightarrow (fg) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$
Χαρακτηριστικά παραδείγματα στοιχείων του $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ αποτελούν τα πολυώνυμα
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \\ \text{τ.ω.:} \\ |\alpha| \le n}} K_\alpha x^\alpha, \end{aligned} \quad \forall \left\{ K_\alpha \in \mathbb{R} \,\middle|\, \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le n \right\} \subsetneq \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Μέρος I

Τα προαπαιτούμενα

Κεφάλαιο 1

Κάποια βασικά (στην κυριολεξία) αποτελέσματα

Στο παρόν κείμενο, σε αντίθεση με την επικρατούσα πρακτική, η έννοια της βάσης ενός συνόλου προϋπάρχει αυτής του τοπολογικού χώρου (βλ, επίσης, την Σημείωση 2.3.1, αργότερα).

Με την παρουσίαση αποτελεσμάτων που αφορούν τις βάσεις συνόλων εδώ, ξεκινά να ξετυλίγεται το κουβάρι των προαπαιτούμενων για ό,τι ακολουθεί.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [36], [30], [11], [29], [1], [28], [13] και [9], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

1.1 Βάσεις συνόλων

Πρώτα δίνουμε το επόμενο άμεσο αποτέλεσμα, το οποίο είναι ουσιαστικό για την συνέχεια.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω*

1. X *και*
2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *τ.ω.:* $X = \bigcup_{Z \in Y} Z$.

Ισχύει ότι

$$Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \,\middle|\, x\right) \neq \varnothing,\ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big),\ \forall x \in X \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y,\ \exists \{W_i\}_{i \in I} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n = \bigcup_{i \in I} W_i.$$

Απόδειξη. Καταρχήν, η έκφραση αριστερά από την διπλή συνεπαγωγή έχει νόημα. Πράγματι,

$$x \in X = \bigcup_{Z \in Y} Z \Rightarrow \exists Z_x \in Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big),$$

οπότε

$$\forall x \in X,\ \exists \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big),$$

καθώς αρκεί να επιλέξουμε

$$\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} = \{Z_x\}.$$

Ελέγχουμε, στην συνέχεια, κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y$. Εξετάζουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

– Αν $\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n = \varnothing$, τότε αρκεί να επιλέξουμε $I = \varnothing$.

– Αν $\bigcap\limits_{n=1}^{n_0} Z_n = \varnothing$, τότε απευθείας από την υπόθεση, έχουμε ότι

$$\forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big),\ \exists W_x \in Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \,\middle|\, x\right),$$

οπότε

$$W_x \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n,\ \forall x \in \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \Leftrightarrow \bigcup_{x \in \bigcap\limits_{n=1}^{n_0} Z_n} W_x \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n,$$

καθώς επίσης

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n = \bigcup_{x \in \bigcap\limits_{n=1}^{n_0} Z_n} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in \bigcap\limits_{n=1}^{n_0} Z_n} W_x.$$

($\Leftarrow$) Έστω $x \in X$ και $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big)$. Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists \{W_i\}_{i \in I} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n = \bigcup_{i \in I} W_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } x \in W_{i_0},$$

οπότε όντως

$$Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \,\middle|\, x\right) \neq \varnothing.$$

□

Σημείωση 1.1.1. *Για την Πρόταση 1.1.1 αξιοποιήσαμε την σχέση*

$$\bigcup_{i \in \varnothing} I_i = \varnothing.$$

Η σχέση αυτή είναι αποδεκτή, εντούτοις αν δεν την λάβουμε υπόψη μας, τότε απλά το αποτέλεσμα ισχύει με την προσθήκη ότι επιπλέον Y τ.ω.: $\varnothing \in Y$.

Υπό το πρίσμα, λοιπόν, της ισοδυναμίας της Πρότασης 1.1.1, δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.1.1 (βάση συνόλου)**.** *Έστω*

i. X και

ii. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$.

Το Y καλείται βάση του X όταν

1. $X = \bigcup\limits_{Z \in Y} Z$ και

2. $Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{n_0} Z_n \,\middle|\, x\right) \neq \varnothing,\ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big),\ \forall x \in X$.

Σημείωση 1.1.2. *Μιας και η Πρόταση 1.1.1 είναι ουσιαστική για την συνέχεια, αν δεν λάβουμε υπόψη μας την σχέση*

$$\bigcup_{i \in \varnothing} I_i = \varnothing$$

(βλ. επίσης, την Σημείωση 1.1.1), τότε απλά στον Ορισμό 1.1.1 προσθέτουμε στις συνθήκες ότι επιπλέον $\varnothing \in Y$.

Το απλούστερο παράδειγμα βάσης αποτελεί το σύνολο των μονοσυνόλων υποσυνόλων ενός συνόλου.

Πρόταση 1.1.2 (βάση από μονοσύνολα)**.** *Έστω*

1. X και

2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ τ.ω.:

$$Y = \{\{x\} \subseteq X\}_{x \in X}.$$

Ισχύει ότι το Y είναι βάση του X.

Απόδειξη. Ελέγχουμε την ισχύ του Ορισμού 1.1.1.

- Έχουμε ότι
$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} = \bigcup_{\{x\} \in \{\{x\} \subseteq X\}_{x \in X}} \{x\} = \bigcup_{Z \in Y} Z.$$
- Έστω $x \in X$ και $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big)$. Τότε, αναγκαστικά,
$$\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} = \{x\}$$
και άρα
$$Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \,\middle|\, x\right) = \{\{x\}\} \neq \varnothing.$$

□

Χαρακτηριστικό παράδειγμα βάσης αποτελούν επίσης οι ανοικτές μπάλες πεπερασμένης ακτίνας σε ψευδομετρικό χώρο.

Πρόταση 1.1.3 (βάση ψευδομετρικού χώρου). *Έστω*

1. *(X, f) ψευδομετρικός χώρος και*
2. *$Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ τ.ω.:*
$$Y = \{B(x, \varrho) \subseteq X\}_{(x,\varrho) \in X \times (0,\infty)}.$$

Ισχύει ότι το Y είναι βάση του X.

Απόδειξη. Ελέγχουμε την ισχύ του Ορισμού 1.1.1.

- Παρατηρούμε ότι
$$\bigcup_{B(x,\varrho) \in Y} B(x,\varrho) = \bigcup_{(x,\varrho) \in X \times (0,\infty)} B(x,\varrho).$$
Έχουμε ότι
$$B(x,\varrho) \subseteq X,\ \forall\, (x,\varrho) \in X \times (0,\infty) \Leftrightarrow \bigcup_{(x,\varrho) \in X \times (0,\infty)} B(x,\varrho) \subseteq X,$$
καθώς επίσης
$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} B(x,1) = \bigcup_{(x,\varrho) \in X \times \{1\}} B(x,\varrho) \subseteq \bigcup_{(x,\varrho) \in X \times (0,\infty)} B(x,\varrho).$$
- Έστω $x \in X$ και $\{B(x_n, \varrho_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big)$. Έχουμε ότι
$$x \in B\big(x, \min\{\varrho_n - f(x, x_n)\}_{n=1}^{n_0}\big) \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} B(x_n, \varrho_n),$$
καθώς
$$\begin{aligned} f(x_n, y) \le f(x_n, x) + f(x, y) < f(x_n, x) + \varrho_n - f(x_n, x) = \varrho_n,& \\ \forall y \in B(x, \varrho_n - f(x, x_n)),\ \forall n \in \{1, \dots, n_0\} \Leftrightarrow& \\ \Leftrightarrow B(x, \varrho_n - f(x, x_n)) \subseteq B(x_n, \varrho_n),\ \forall n \in \{1, \dots, n_0\},& \end{aligned}$$
άρα
$$\begin{aligned} B\big(x, \min\{\varrho_n - f(x, x_n)\}_{n=1}^{n_0}\big) \subseteq B(x_n, \varrho_n),\ \forall n \in \{1, \dots, n_0\} \Leftrightarrow& \\ \Leftrightarrow B\big(x, \min\{\varrho_n - f(x, x_n)\}_{n=1}^{n_0}\big) \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} B(x_n, \varrho_n).& \end{aligned}$$

□

1.2 Τοπικές βάσεις συνόλων

Σε αντίθεση με τον Ορισμό 1.1.1, ο οποίος αφορά όλα τα στοιχεία $x \in X$, η έννοια των τοπικών βάσεων συνόλων εξαρτάται μονάχα από κάποιο από αυτά.

Ορισμός 1.2.1 (τοπική βάση συνόλου). *Έστω*

1. X,
2. $x \in X$ *και*
3. $Y \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big)$.

Το Y καλείται τοπική βάση του X γύρω από το x όταν

$$Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n\right) \neq \varnothing, \ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y.$$

Το απλούστερο παράδειγμα τοπικής βάσης αποτελεί κάθε σύνολο από κάποιο μονοσύνολο υποσύνολο ενός συνόλου.

Πρόταση 1.2.1 (τοπική βάση από μονοσύνολο). *Έστω*

1. X,
2. $x \in X$ *και*
3. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *τ.ω.:*

$$Y = \{\{x\}\}.$$

Ισχύει ότι το Y είναι τοπική βάση του X γύρω από το x.

Απόδειξη. Καθώς

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n = \{x\}, \ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y,$$

έπεται ότι

$$Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n\right) = Y \neq \varnothing,$$

δλδ η ισχύς του Ορισμού 1.2.1. □

Χαρακτηριστικά παράδειγματα τοπικών βάσεων αποτελούν επίσης οι οικογένειες των ανοικτών μπαλών πεπερασμένης ακτίνας σε ψευδομετρικό χώρο, τόσο αυτές που απλά περιέχουν το αντίστοιχο σημείο, όσο και αυτές με κέντρο το σημείο αυτό.

Πρόταση 1.2.2 (τοπικές βάσεις ψευδομετρικού χώρου). *Έστω*

i. (X, f) *ψευδομετρικός χώρος και*

ii. $x \in X$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $Y_1 \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big)$ *τ.ω.:*

$$Y_1 = \{B(y, \varrho) \subseteq X\}_{(y,\varrho)\in X\times(0,\infty)} \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big).$$

   Ισχύει ότι το Y_1 είναι τοπική βάση του X γύρω από το x.

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $\{a, b\} \subseteq [0, \infty]$ *τ.ω.:* $a < b$ *και*

   iv′. $Y_2 \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big)$ *τ.ω.:*

$$Y_2 = \{B(x, \varrho) \subseteq X\}_{\varrho\in(a,b)}.$$

Ισχύει ότι το Y_2 είναι τοπική βάση του X γύρω από το x.

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Καθώς (βλ την απόδειξη της Πρότασης 1.1.3)

$$x \in B\big(x, \min\{\varrho_n - f(x,x_n)\}_{n=1}^{n_0}\big) \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} B(x_n,\varrho_n),\ \ \forall \{B(x_n,\varrho_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y_1,$$

έπεται ότι

$$B\big(x, \min\{\varrho_n - f(x,x_n)\}_{n=1}^{n_0}\big) \in Y_1 \cap \mathscr{P}\Bigg(\bigcap_{n=1}^{n_0} B(x_n,\varrho_n)\Bigg)$$

και άρα η ισχύς του Ορισμού 1.2.1.

2. Καθώς

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} B(x,\varrho_n) = B\big(x, \min\{\varrho_n\}_{n=1}^{n_0}\big),\ \ \forall \{B(x,\varrho_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y_2,$$

έπεται ότι

$$Y_2 \cap \mathscr{P}\Bigg(\bigcap_{n=1}^{n_0} B(x_n,\varrho_n)\Bigg) = B\big(x, \min\{\varrho_n\}_{n=1}^{n_0}\big)$$

και άρα η ισχύς του Ορισμού 1.2.1.

□

Με το επόμενο, για το οποίο αξιοποιούμε την Πρότασης 1.1.1, τον Ορισμό 1.1.1 και τον Ορισμό 1.2.1, και το οποίο συνδέει στενά τις έννοιες των βάσεων και των τοπικών βάσεων ενός συνόλου, μπορούμε να επαληθεύσουμε την Πρόταση 1.2.1 από την Πρόταση 1.1.2 και το σημείο 1 της Πρότασης 1.2.2 από την Πρόταση 1.1.3.

Θεώρημα 1.2.1 (σχέση βάσης και τοπικών βάσεων συνόλου)**.** *Έστω*

1. *X και*
2. *$Y \subseteq \mathscr{P}(X)$.*

Ισχύει ότι

$$Y \text{ βάση του } X \Leftrightarrow Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \text{ τοπική βάση του } X \text{ γύρω από το } x,\ \ \forall x \in X.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έστω $x \in X$. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 1.1.1, έχουμε από υπόθεση ότι

$$\forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big),\ \exists \{W_i\}_{i\in I} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n = \bigcup_{i\in I} W_i.$$

Μιας και

$$\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n,$$

παίρνουμε ότι

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } x \in W_{i_0} \Rightarrow W_{i_0} \in Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big),$$

δλδ

$$W_{i_0} \in Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \cap \mathscr{P}\Bigg(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n\Bigg)$$

και το ζητούμενο έπεται με βάση τον Ορισμό 1.2.1.

($\Leftarrow$) Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του Ορισμού 1.1.1 ως εξής.

– Για κάθε $x \in X$, σταθεροποιούμε ένα $Z_x \in Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \subseteq Y$ και έτσι παίρνουμε ότι

$$X = \bigcup_{x\in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in X} Z_x \subseteq \bigcup_{Z\in Y} Z.$$

– Έστω $x \in X$ και $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}(X \,|\, x)$. Τότε

$$\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}(X \,|\, x),$$

οπότε παίρνουμε από υπόθεση ότι

$$Y \cap \mathscr{P}(X \,|\, x) \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n\right) \neq \varnothing \Rightarrow Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n\right) \neq \varnothing.$$

□

1.3 (Τοπικές) βάσεις διανυσματικών χώρων

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα του Ορισμού 1.1.1 και του Ορισμού 1.2.1.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω*

i. $(X, +, X_0, \cdot)$ *και*

ii. $x \in X$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *βάση του* X.

   Ισχύει ότι το $x + Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *είναι βάση του* X.

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $y \in X$ *και*

   iv′. $Y \subseteq \mathscr{P}(X \,|\, y)$ *τοπική βάση του* X *γύρω από το* y.

   Ισχύει ότι το $x + Y \subseteq \mathscr{P}(X \,|\, x + y)$ *είναι τοπική βάση του* X *γύρω από το* $x + y$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Από υπόθεση έχουμε, με βάση τον Ορισμό 1.1.1, ότι

   - $X = \bigcup_{Z \in Y} Z$ και
   - $Y \cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \,\middle|\, x\right) \neq \varnothing$, $\forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \cap \mathscr{P}(X \,|\, y)$, $\forall y \in X$.

   Ελέγχουμε, τώρα, την ισχύ των προϋποθέσεων του Ορισμού 1.1.1 για το $x + Y$.

   - Έχουμε, από πάνω και διαδοχικά, ότι

   $$X = \bigcup_{Z \in Y} Z \Rightarrow X = \bigcup_{x + Z \in x + Y} Z \Rightarrow X = x + X = x + \bigcup_{x + Z \in x + Y} Z \Rightarrow X = \bigcup_{x + Z \in x + Y} x + Z \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow X = \bigcup_{W \in x + Y} W,$$

   δλδ το ζητούμενο.

   - Έστω $y \in X$ και $\{W_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq (x + Y) \cap \mathscr{P}(X \,|\, x + y)$. Τότε

   $$\exists \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } W_n = x + Z_n,\ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\} \Rightarrow Z_n = -x + W_n,\ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\},$$

   οπότε από πάνω έχουμε ότι

   $$\exists V \in Y \text{ τ.ω.: } V \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} -x + W_n \Rightarrow \left(x + V \in x + Y \ \&\ x + V \subseteq x + \bigcap_{n=1}^{n_0} -x + W_n\right) \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow \left(x + V \in x + Y \ \&\ x + V \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} W_n\right),$$

άρα

$$(x+Y)\cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} W_n \,\middle|\, x+y\right) \neq \varnothing,$$

δλδ το ζητούμενο.

2. Από υπόθεση έχουμε, με βάση τον Ορισμό 1.2.1, ότι

$$Y\cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n\right) \neq \varnothing,\ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y.$$

Έστω, τώρα, $\{W_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq x+Y$. Τότε

$$\exists \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } W_n = x+Z_n,\ \forall n\in\{1,\ldots,n_0\} \Rightarrow Z_n = -x+W_n,\ \forall n\in\{1,\ldots,n_0\},$$

οπότε από πάνω έχουμε ότι

$$\exists V\in Y \text{ τ.ω.: } V\subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} -x+W_n \Rightarrow \left(x+V\in x+Y \;\&\; x+V\subseteq x+\bigcap_{n=1}^{n_0} -x+W_n\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x+V\in x+Y \;\&\; x+V\subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} W_n\right),$$

άρα

$$(x+Y)\cap \mathscr{P}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} W_n\right) \neq \varnothing,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Σημείωση 1.3.1. *Το Θεώρημα 1.3.1 δεν προϋποθέτει την δομή διανυσματικού χώρου στην ολότητά της, παρά μόνο την δομή ομάδας με την πράξη της πρόσθεσης.*

Κεφάλαιο 2

Κάποια βασικά τοπολογικά αποτελέσματα

Με την παρουσίαση επιλεγμένων αποτελεσμάτων από την Τοπολογία στο παρόν κεφάλαιο, συνεχίζεται να ξετυλίγεται το κουβάρι των προαπαιτούμενων για ό,τι ακολουθεί.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [36], [30], [11], [29], [1], [28], [13] και [9], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

2.1 Τομή τοπολογιών

Το επόμενο προκύπτει από απλή επαλήθευση των απαιτήσεων του ορισμού των τοπολογιών.

Πρόταση 2.1.1 (τομή τοπολογιών)**.** *Έστω* $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i\in I}$. *Ισχύει ότι το ζεύγος* $\left(X, \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X)\right)$ *είναι τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του ορισμού των τοπολογιών ως εξής.

- Καθώς
$$\{\varnothing, X\} \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I,$$
έχουμε ότι
$$\{\varnothing, X\} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X).$$

- Αν
$$\{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X) \Leftrightarrow \{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I,$$
τότε
$$\bigcap_{n=1}^{n_0} Y_n \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{n_0} Y_n \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X),$$
καθώς η $\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια τοπολογιών.

- Αν
$$\{Z_j\}_{j\in J} \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X) \Leftrightarrow \{Z_j\}_{j\in J} \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I,$$
τότε
$$\bigcup_{j\in J} Z_j \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I \Leftrightarrow \bigcup_{j\in J} Z_j \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X),$$
για τον ίδιο λόγο με πριν.

□

2.2 Παραγωγή τοπολογιών

Εδώ ορίζουμε και μελετάμε την έννοια της τοπολογίας παραγόμενης από υποσύνολο του δυναμοσυνόλου.

Το επόμενο αποτέλεσμα έχει νόημα υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.1.1.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω*

1. X,
2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *και*
3. $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i\in I}$ *τ.ω.:*[1]

$$\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I} = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, Y \subseteq \mathscr{O}(X)\right\}.$$

Ισχύει ότι

$$\operatorname{lea}\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X).$$

Απόδειξη. Πρώτα από όλα,

$$\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i\in I} \neq \varnothing,$$

καθώς

$$(X, \mathscr{P}(X)) \in \{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i\in I}$$

και επίσης γνωρίζουμε από την Πρόταση 2.1.1 ότι το σύνολο $\bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X)$ είναι όντως τοπολογία του X. Τώρα,

$$Y \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I \Leftrightarrow Y \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X) \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I,$$

άρα

$$\bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X) \in \{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I},$$

καθώς

$$Y \subseteq \bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X)$$

και έτσι έπεται το αποτέλεσμα, καθώς

$$\bigcap_{i\in I} \mathscr{O}_i(X) \subseteq \mathscr{O}_i(X),\ \forall i \in I.$$

□

Υπό την ισχύ της Πρότασης 2.2.1 δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 2.2.1 (παραγόμενη τοπολογία)**.** *Έστω*

1. X *και*
2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$.

Η τοπολογία του X $\operatorname{lea}\left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, Y \subseteq \mathscr{O}(X)\right\}$ *καλείται παραγόμενη από το* Y.

Το επόμενο είναι άμεσο από τον Ορισμό 2.2.1.

Πρόταση 2.2.2 (τοπολογία ως παραγόμενη τοπολογία)**.** *Έστω*

1. X,
2. $(X, \mathscr{O}_1(X))$ *και*
3. $(X, \mathscr{O}_2(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_2(X)$ *να παράγεται από το* $\mathscr{O}_1(X)$.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X).$$

[1] Κάθε σύνολο μπορεί να λάβει την μορφή συνόλου με δείκτη. Με τέτοια μορφή είναι συνήθως χρήσιμη για την απλοποίηση του συμβολισμού όταν τελούνται πράξεις μεταξύ των στοιχείων του συνόλου αυτού.

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 2.2.1 έχουμε ότι

$$\mathscr{O}_2(X) = \mathrm{lea}\left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \mathscr{O}_1(X) \subseteq \mathscr{O}(X)\right\}.$$

Ελέγχουμε, τώρα, κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Έχουμε ότι

$$\mathscr{O}_2(X) \in \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \mathscr{O}_1(X) \subseteq \mathscr{O}(X)\right\}$$

και το ζητούμενο έπεται.

($\supseteq$) Έχουμε ότι

$$\mathscr{O}_1(X) \in \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \mathscr{O}_1(X) \subseteq \mathscr{O}(X)\right\}$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

Σημείωση 2.2.1. *Παραφράζοντας την Πρόταση 2.2.2, συμπεραίνουμε ότι κάθε τοπολογία είναι η παραγόμενη τοπολογία από τον εαυτό της.*

Μία παραγόμενη τοπολογία έχει έναν συγκεκριμένο χαρακτηρισμό, όπως ακριβώς φαίνεται στο ακόλουθο άμεσο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2.1 (χαρακτηρισμός παραγόμενης τοπολογίας)**.** *Έστω*

i. X,

ii. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *και*

iii. $V \subseteq \mathscr{P}\left(X \,\middle|\, Y\right)$ *τ.ω.:*

$$V = \{X\} \cup \left\{\bigcup_{i \in I} \bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{i n_i} \subseteq X\right\}_{\{Z_{i n_i}\}_{n_i \in \{1,\dots,n_{0i}\}, i \in I} \subseteq Y}.$$

Ισχύουν ότι

1. *το ζεύγος* (X, V) *είναι τοπολογικός χώρος.*

2. *η* V *είναι η παραγόμενη από το* Y *τοπολογία του* X.

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Επαληθεύουμε τις προϋποθέσεις του ορισμού των τοπολογιών ως εξής.

   - $\{\varnothing, X\} \subseteq V$, καθώς για την περίπτωση όπου $\varnothing \in V$ αρκεί να επιλέξουμε $I = \varnothing$,
   - $\bigcap\limits_{n=1}^{n_0} W_n \in V$, $\forall \{W_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq V$, καθώς

$$\forall n \in \{1, \dots, n\}, \ \exists \left\{Z_{i_n m_{i_n}}\right\}_{m_{i_n} \in \{1,\dots,m_{0 i_n}\}, i_n \in I_n} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } W_n = \bigcup_{i_n \in I_n} \bigcap_{m_{i_n}=1}^{m_{0 i_n}} Z_{i_n m_{i_n}},$$

οπότε

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} W_n = \bigcap_{n=1}^{n_0} \bigcup_{i_n \in I_n} \bigcap_{m_{i_n}=1}^{m_{0 i_n}} Z_{i_n m_{i_n}} = \bigcap_{n=1}^{n_0} \left(\bigcup_{i_n \in I_n} U_{i_n} \cup \bigcup_{i_n \in I \setminus I_n} U_{i_{n1}}\right) = \bigcap_{n=1}^{n_0} \bigcup_{i_n \in I} S_n = \bigcap_{n=1}^{n_0} S_n \in V,$$

όπου

$$Y \in U_{i_n} = \bigcap_{m_{i_n}=1}^{m_{0 i_n}} Z_{i_n m_{i_n}}, \ \forall i_n \in I_n, \ \forall n \in \{1, \dots, n_0\},$$

$I = \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} I_n$, το $\prod\limits_{n=1}^{n_0} i_{n1} \in \prod\limits_{n=1}^{n_0} I_n$ είναι σταθεροποιημένο και

$$Y \ni S_n = \begin{cases} U_{i_n}, & \text{αν } i_n \in I_n \\ U_{i_{n1}}, & \text{αν } i_n \in I \setminus I_n, \end{cases} \quad \forall n \in \{1, \dots, n_0\}$$

και

- $\bigcup_{i\in I} W_i \in V,\ \forall \{W_i\}_{i\in I} \subseteq V$, καθώς

$$\forall i \in I,\ \exists \left\{Z_{j_i n_{j_i}}\right\}_{n_{j_i}\in\{1,\dots,n_{0j_i}\}, j_i\in J_i} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } W_i = \bigcup_{j_i\in J_i} \bigcap_{n_{j_i}=1}^{n_{0j_i}} Z_{j_i n_{j_i}},$$

οπότε

$$W_i = \bigcup_{j_i\in J_i} \left(\bigcap_{n_{j_i}}^{n_{0j_i}} Z_{j_i n_{j_i}} \cap \bigcap_{\substack{n_{j_i}=n_{0j_i}+1 \\ \text{και} \\ n_{0j_i}<m_{0i}}}^{m_{0i}} Z_{j_i n_{j_i 1}} \right) = \bigcup_{j_i\in J_i} \bigcap_{n_{j_i}=1}^{m_{0i}} U_{j_i},\ \forall i \in I,$$

όπου $\prod_{i\in I} m_{0i} = \prod_{i\in I} \max\left\{n_{0j_i}\right\}_{j_i\in J_i}$, το $\prod_{j_i\in J_i} n_{j_i 1} \in \prod_{j_i\in J_i} \left\{1,\dots,n_{0j_i}\right\}$ είναι σταθεροποιημένο και

$$Y \ni U_{j_i} = \begin{cases} Z_{j_i n_{j_i}}, & \text{αν } n_{j_i} \in \left\{1,\dots,n_{0j_i}\right\} \\ Z_{j_i n_{j_i 1}}, & \text{αν } n_{0j_i} < m_{0i} \text{ και } n_{j_i} \in \left\{n_{0j_i}+1,\dots,m_{0i}\right\}, \end{cases} \forall j_i \in J_i,\ \forall i \in I,$$

καθώς επίσης

$$W_i = \bigcup_{j_i\in J_i} \bigcap_{n_{j_i}=1}^{m_{0i}} U_{j_i} \cup \bigcup_{j_i\in J\smallsetminus J_i} \bigcap_{n_{j_i}=1}^{m_{0i}} U_{j_{i1}} = \bigcup_{j_i\in J} \bigcap_{n_{j_i}=1}^{m_{0i}} S_i = S_i,\ \forall i \in I,$$

όπου $J = \bigcup_{i\in I} J_i$, το $\prod_{i\in I} j_{i1} \in \prod_{i\in I} J_i$ είναι σταθεροποιημένο και

$$Y \ni S_i = \begin{cases} U_{j_i}, & \text{αν } j_i \in J_i \\ U_{j_{i1}}, & \text{αν } j_i \in J \smallsetminus J_i, \end{cases} \forall i \in I,$$

συνεπώς

$$\bigcup_{i\in I} W_i = \bigcup_{i\in I} S_i \in V.$$

2. Έστω $(X, \mathscr{O}(X))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}(X)$ να παράγεται από το Y και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathscr{O}(X) = V.$$

Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Καθώς $Y \subseteq V$ και V τοπολογία του X, έχουμε $\mathscr{O}(X) \subseteq V$ από τον ορισμό του $\mathscr{O}(X)$.

($\supseteq$) Από το ορισμό του $\mathscr{O}(X)$ έχουμε ότι $Y \subseteq \mathscr{O}(X)$, άρα αν $W \in V$, τότε

$$\exists \{Z_{n_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\}, i\in I} \subseteq \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } W = \bigcup_{i\in I} \bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{n_i}.$$

Καθώς $\mathscr{O}(X)$ είναι τοπολογία του X, συμπεραίνουμε έτσι ότι $W \in \mathscr{O}(X)$, οπότε $V \subseteq \mathscr{O}(X)$.

□

Σημείωση 2.2.2. *Δυο λόγια σχετικά με το Θεώρημα 2.2.1.*

1. *Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την σχέση*

$$\bigcup_{i\in\varnothing} I_i = \varnothing,$$

όπως άλλωστε κάναμε ήδη και στην αντίστοιχη της Πρότασης 1.1.1 (βλ. επίσης, την Σημείωση 1.1.1). Αν δεν την λάβουμε υπόψη μας, τότε απλά το αποτέλεσμα ισχύει για το σύνολο

$$V = \{\varnothing, X\} \cup \left\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{in_i} \subseteq X \right\}_{\{Z_{in_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\}, i\in I} \subseteq Y}.$$

2. *Έχει επικρατήσει σε τμήμα της βιβλιογραφίας, τα παραγωγά σύνολα τοπολογιών να καλούνται «υποβάσεις» των τοπολογιών αυτών. Μάλιστα, ο ορισμός των «υποβάσεων» δίνεται εκεί μέσω του ίδιου του χαρακτηρισμού του Θεωρήματος 2.2.1.*

Με χρήση του Ορισμού 2.2.1 και του Θεωρήματος 2.2.1, δείχνουμε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο μας επιτρέπει να ελέγχουμε την συνέχεια μιας συνάρτησης προς έναν τοπολογικό χώρο με παραγόμενη τοπολογία αξιοποιώντας μόνο το αντίστοιχο παραγωγό σύνολο.

Πρόταση 2.2.3 (παραγόμενη τοπολογία και συνέχεια). *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X))$,

ii. Y,

iii. $Z \subseteq Y$,

iv. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y)$ *να παράγεται από το* Z *και*

v. $f\colon X \to Y$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*
$$f \in C(X;Y) \Leftrightarrow \{f^{\leftarrow}(W) \subseteq X\}_{W \in Z} \subseteq \mathscr{O}(X).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   vi. $x \in X$.

   Ισχύει ότι
$$f \text{ συνεχής στο } x \Leftrightarrow \forall W \in Z \cap \mathscr{P}\big(Y \,\big|\, f(x)\big),\ \exists V \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big) \text{ τ.ω.: } f(V) \subseteq W.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Δείχνουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

   (⇒) Υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.2.1, έχουμε ότι $Z \subseteq \mathscr{O}(Y)$, άρα το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται απευθείας από την υπόθεση σε συνδυασμό με γνωστό χαρακτηρισμό της συνέχειας.

   (⇐) Έχουμε να δείξουμε ότι
$$f^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(X),\ \forall W \in \mathscr{O}(Y).$$
   Εξετάζουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

   – Αν $W = Y$, τότε $f^{\leftarrow}(W) = X \in \mathscr{O}(X)$, απευθείας από τον ορισμό των τοπολογιών.

   – Αν $W \neq Y$, τότε από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε ότι
$$\exists \big\{W_{in_i}\big\}_{n_i \in \{1,\ldots,n_{0i}\}, i \in I} \subseteq Z \text{ τ.ω.: } W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} W_{in_i}.$$
   Επομένως,
$$f^{\leftarrow}(W) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i \in I} \bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} W_{in_i}\right) = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} f^{\leftarrow}\big(W_{in_i}\big)$$
   και έτσι το ζητούμενο έπεται απο την υπόθεσης σε συνδυασμό με τον ορισμό των τοπολογιών.

2. Δείχνουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

   (⇒) Υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.2.1, έχουμε ότι $Z \subseteq \mathscr{O}(Y)$, άρα το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται απευθείας από την υπόθεση σε συνδυασμό με τον γνωστό σημειακό χαρακτηρισμό της συνέχειας.

   (⇐) Έχουμε να δείξουμε ότι
$$\forall W \in \mathscr{O}\big(Y \,\big|\, f(x)\big),\ \exists V \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big) \text{ τ.ω.: } f(V) \subseteq W.$$
   Εξετάζουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

– Αν $W = Y$, τότε αρκεί να επιλέξουμε $V = X \in \mathscr{O}(X)$.
– Αν $W \neq Y$, τότε από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε ότι

$$\exists \left\{W_{in_i}\right\}_{n_i \in \{1,\ldots,n_{0i}\}, i \in I} \subseteq Z \text{ τ.ω.: } W = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} W_{in_i}.$$

Επομένως,

$$\exists W_\bullet \in \left\{W_{in_i}\right\}_{n_i \in \{1,\ldots,n_{0i}\}, i \in I} \text{ τ.ω.: } W_\bullet \in Z \cap \mathscr{P}\big(Y \,\big|\, f(x)\big)$$

και έτσι το ζητούμενο έπεται απο την υπόθεση.

□

2.3 Παραγωγή τοπολογιών από βάσεις συνόλων

Όπως καταδεικνύεται εδώ, ο χαρακτηρισμός των παραγόμενων τοπολογιών του Θεωρήματος 2.2.1 μπορεί να απλουστευτεί στην περίπτωση που τα παραγωγά σύνολα είναι βάσεις.

Πριν όμως προχωρήσουμε στον χαρακτηρισμό αυτόν, παραθέτουμε, με χρήση του Θεωρήματος 2.2.1, τον ακριβή προσδιορισμό της παραγόμενης τοπολογία της βάσης της Πρότασης 1.1.2, μέσω του οποίου μπορούμε να επαλεύθουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω.

Πρόταση 2.3.1 (διακριτή τοπολογία ως παραγόμενη τοπολογία από βάση). *Έστω*

1. X,
2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *τ.ω.:*
$$Y = \{\{x\} \subseteq X\}_{x \in X}$$
και
3. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να παράγεται από το* Y.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}(X) = \mathscr{P}(X).$$

Απόδειξη. Καθώς

$$\forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y,\ \exists x \in X \text{ τ.ω.: } \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \in \{\varnothing, \{x\}\},$$

έπεται από το Θεώρημα 2.2.1 ότι

$$\mathscr{O}(X) = \left\{\bigcup_{i \in I} \{x_i\}\right\}_{\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X},$$

δλδ το ζητούμενο. □

Τώρα, υπό το πρίσμα του Ορισμού 1.1.1 και με χρήση της Πρότασης 1.1.1 έπεται το επόμενο, με το οποίο απλουστεύεται ο χαρακτηρισμός του Θεωρήματος 2.2.1 στην περίπτωση των βάσεων.

Θεώρημα 2.3.1 (πρώτος χαρακτηρισμός παραγόμενης τοπολογίας από βάση). *Έστω*

α΄. X *και*

β΄. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *τ.ω.:* $X = \bigcup_{Z \in Y} Z$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   β΄΄. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *βάση του* X *και*

   γ΄. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να παράγεται από το* Y.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}(X) = \left\{ \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X \right\}_{\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y}.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   γ'. ότι το ζεύγος $\left(X, \left\{ \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X \right\}_{\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y} \right)$ *είναι τοπολογικός χώρος.*

   Ισχύουν ότι

   i. το Y *είναι βάση του* X *και*

   ii. η $\left\{ \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X \right\}_{\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y}$ *παράγεται από το* Y*.*

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε ότι

$$\mathscr{O}(X) = \{X\} \cup V,$$

για

$$V = \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{n_i = 1}^{n_{0i}} Z_{i n_i} \subseteq X \right\}_{\{Z_{i n_i}\}_{n_i \in \{1, \ldots, n_{0i}\}, i \in I} \subseteq Y}$$

και από την Πρόταση 1.1.1 συμπεραίνουμε ότι

$$V = \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j_i \in J_i} Z_{i j_i} \subseteq X \right\}_{\{Z_{i j_i}\}_{j_i \in J_i, i \in I} \subseteq Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{j_i \in J_i} Z_{i j_i} \cup \bigcup_{j_i \in J \smallsetminus J_i} Z_{i j_{i1}} \right) \subseteq X \right\}_{\{Z_{i j_i}\}_{j_i \in J_i, i \in I} \subseteq Y} =$$

$$= \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j_i \in J} U_i \subseteq X \right\}_{\{U_i\}_{i \in I} \subseteq Y} = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \subseteq X \right\}_{\{U_i\}_{i \in I} \subseteq Y},$$

όπου $J = \bigcup_{i \in I} J_i$, $\prod_{i \in I} j_{i1} \in \prod_{i \in I} J_i$ είναι σταθεροποιημένο και

$$Y \ni U_i = \begin{cases} Z_{i j_i}, & \text{αν } j_i \in J_i \\ Z_{i j_{i1}}, & \text{αν } j_i \in J \smallsetminus J_i, \end{cases} \quad \forall i \in I.$$

Επιπλέον, από τον Ορισμό 1.1.1 έχουμε ότι

$$X = \bigcup_{U \in Y} U \Rightarrow X \in V$$

και το ζητούμενο έπεται.

2. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

   i. Έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y$. Αφού

$$\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \left\{ \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X \right\}_{\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y},$$

   παίρνουμε από υπόθεση ότι

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \Rightarrow \exists \{W_i\}_{i \in I} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n = \bigcup_{i \in I} W_i,$$

   οπότε το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 1.1.1.

   ii. Έπεται απευθείας από τον συνδυασμό του σημείου 1 και της μοναδικότητας της παραγόμενης τοπολογίας (όπως άλλωστε προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 2.2.1).

$\square$

Σημείωση 2.3.1. *Έχει επικρατήσει στην βιβλιογραφία, ο ορισμός των βάσεων να δίνεται μέσω του ίδιου του χαρακτηρισμού του Θεωρήματος 2.3.1. Το αποφεύγουμε ωστόσο εδώ λόγω του εξής περιορισμού που κάτι τέτοιο θέτει: η βάση στην περίπτωση αυτή ορίζεται με δεδομένη μια τοπολογία με την οποία εφοδιάζουμε το σύνολο. Αντιθέτως, εδώ ορίζουμε τις βάσεις απευθείας σε σύνολα (βλ τον Ορισμό 1.1.1) και όχι σε τοπολογικούς χώρους. Έτσι, για εμάς οι βάσεις όχι μόνο χαρακτηρίζουν τοπολογίες, αλλά τις παράγουν κιόλας.*

Με χρήση της Πρότασης 2.2.2 (βλ, επίσης, την Σημείωση 2.2.2) και του Θεωρήματος 2.3.1 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 2.3.2 (τοπολογία ως βάση)**.** *Έστω*

1. *X και*
2. *$(X, \mathscr{O}(X))$.*

Ισχύει ότι το $\mathscr{O}(X)$ είναι βάση του X.

Απόδειξη. Πρώτον, έχουμε ότι

$$X \in \mathscr{O}(X) \Rightarrow X = \bigcup_{Z \in \mathscr{O}(X)} Z.$$

Δεύτερον, έχουμε ότι

$$\mathscr{O}(X) = \left\{ \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X \right\}_{\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{O}(X)}.$$

Πράγματι, παρακάτω ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Αρκεί να επιλέξουμε

$$\{Z_i\}_{i \in I} = \{Z\}, \ \forall Z \in \mathscr{O}(X).$$

($\supseteq$) Απευθείας από τον ορισμό των τοπολογιών έχουμε ότι

$$\bigcup_{i \in I} Z_i \in \mathscr{O}(X), \ \forall \{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y.$$

Οπότε, υπό την ισχύ της Πρότασης 2.2.2, το μόνο που μας μένει είναι να εφαρμόσουμε το σημείο 2 του Θεωρήματος 2.3.1 για $Y = \mathscr{O}(X)$. $\square$

Σημείωση 2.3.2. *Υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.3.2, όλες οι ιδιότητες των βάσεων συνόλων που παρουσιάστηκαν στο §1 ισχύουν και για τις τοπολογίες συνόλων.*

Άλλη μια συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.1 είναι το ακόλουθο, το οποίο ξεφεύγει από το πλαίσιο των τοπολογικών χώρων, καθώς αφορά απλά σύνολα, και για το οποίο επίσης αξιοποιείται το Θεώρημα 2.2.1.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω*

α΄. *X και*

β΄. *$Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ τ.ω.: $X = \bigcup_{Z \in Y} Z$.*

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύουν ότι*
   i. *$Y \subseteq \left\{ \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \subseteq X \right\}_{\{Z_n\}_{n \in \{1,\dots,n_0\}} \subseteq Y}$ και*
   ii. *το $\left\{ \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \subseteq X \right\}_{\{Z_n\}_{n \in \{1,\dots,n_0\}} \subseteq Y} \subseteq \mathscr{P}(X)$ είναι βάση του X.*
2. *Έστω, επιπλέον,*

   γ΄. *$(X, \mathscr{O}_1(X))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}_1(X)$ να παράγεται από το Y και* *δ΄.* $(X, \mathscr{O}_2(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_2(X)$ *να παράγεται από το* $\left\{\bigcap\limits_{n=1}^{n_0} Z_n \subseteq X\right\}_{\{Z_n\}_{n\in\{1,\dots,n_0\}}\subseteq Y}$.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X).$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$U = \left\{\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \subseteq X\right\}_{\{Z_n\}_{n\in\{1,\dots,n_0\},i\in I}\subseteq Y}$$

και εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

   i. Έχουμε ότι

   $$U \supseteq \{Z \subseteq X\}_{\{Z\}\subseteq Y} = Y.$$

   ii. Μιας και

   $$X = \bigcup_{Z\in Y} Z \Rightarrow \{X\} \cup \left\{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{in_i} \subseteq X\right\}_{\{Z_{in_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\},i\in I}\subseteq Y} = \left\{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{in_i} \subseteq X\right\}_{\{Z_{in_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\},i\in I}\subseteq Y},$$

   έχουμε, σύμφωνα με το σημείο 1 του Θεωρήματος 2.2.1, ότι το ζεύγος

   $$\left(X, \left\{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{in_i} \subseteq X\right\}_{\{Z_{in_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\},i\in I}\subseteq Y}\right)$$

   είναι τοπολογικός χώρος. Έπεται έτσι το ζητούμενο απευθείας από το σημείο 2.i του Θεωρήματος 2.3.1.

2. Από το σημείο 2 του Θεωρήματος 2.2.1 έχουμε ότι

   $$\mathscr{O}_1(X) = \{X\} \cup \left\{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{in_i} \subseteq X\right\}_{\{Z_{in_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\},i\in I}\subseteq Y} = \left\{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{in_i} \subseteq X\right\}_{\{Z_{in_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\},i\in I}\subseteq Y}$$

   και επίσης από το σημείο 1 του Θεωρήματος 2.3.1 παίρνουμε ότι

   $$\mathscr{O}_2(X) = \left\{\bigcup_{i\in I}\bigcap_{n_i=1}^{n_{0i}} Z_{in_i} \subseteq X\right\}_{\{Z_{in_i}\}_{n_i\in\{1,\dots,n_{0i}\},i\in I}\subseteq Y},$$

   δλδ, εν τέλει, το ζητούμενο.

□

Παρακάτω ακολουθεί ακόμα ένας χαρακτηρισμός των παραγόμενων τοπολογιών από βάσεις, για τον οποίο γίνεται χρήση του Θεωρήματος 2.3.1.

Θεώρημα 2.3.2 (δεύτερος χαρακτηρισμός παραγόμενης τοπολογίας από βάση)**.** *Έστω*

α΄. X *και*

β΄. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *τ.ω.:* $X = \bigcup\limits_{Z\in Y} Z$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   β″. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ βάση του X και

   γ′. $(X, \mathscr{O}(X))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}(X)$ να παράγεται από το Y.

   Ισχύει ότι
$$Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing,\ \forall W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big),\ \forall x \in X.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   γ′. $(X, \mathscr{O}(X))$ τ.ω.:
$$Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing,\ \forall W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big),\ \forall x \in X.$$

   Ισχύουν ότι

   i. το Y είναι βάση του X και

   ii. η $\mathscr{O}(X)$ παράγεται από το Y.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 2.3.1, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\mathscr{O}(X) = \left\{\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X\right\}_{\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y} \Rightarrow Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing,\ \forall W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big),\ \forall x \in X.$$
   Πράγματι, έστω $x \in X$ και $W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big)$. Από υπόθεση έχουμε ότι
$$\exists \{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } W = \bigcup_{i \in I} Z_i \Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } x \in Z_{i_0},$$
   οπότε όντως
$$Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing.$$

2. Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 2.3.1, αρκεί να δείξουμε ότι
$$Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing,\ \forall W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big),\ \forall x \in X \Rightarrow \mathscr{O}(X) = \left\{\bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq X\right\}_{\{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y}.$$
   Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Έστω $W \in \mathscr{O}(X)$. Από υπόθεση έχουμε ότι
$$\forall x \in W,\ \exists Z_x \in Y \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x\big) \cap \mathscr{P}(W),$$
   οπότε το ζητούμενο έπεται από την ισότητα
$$W = \bigcup_{x \in W} Z_x.$$

   ($\supseteq$) Μιας και $Y \subseteq \mathscr{O}(X)$, έπεται άμεσα από τον ορισμό των τοπολογιών ότι
$$\bigcup_{i \in I} Z_i \in \mathscr{O}(X),\ \forall \{Z_i\}_{i \in I} \subseteq Y.$$

□

Τέλος, έπεται ο επόμενος χαρακτηρισμός των ανοικτών συνόλων παραγόμενης τοπολογίας από βάση, ουσιαστικά παραφράζοντας το Θεώρημα 2.3.2.

Πρόταση 2.3.4 (χαρακτηρισμός ανοικτών συνόλων παραγόμενης τοπολογίας από βάση)**.** *Έστω*

1. *X,*
2. *$Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ βάση του X,*

3. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να παράγεται από το* Y *και*
4. $W \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$W \in \mathscr{O}(X) \Leftrightarrow Y \cap \mathscr{P}(X|x) \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing, \ \forall x \in W.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έστω $x \in W \in \mathscr{O}(X)$. Απευθείας από το Θεώρημα 2.3.2 έπεται ζητούμενο.

($\Leftarrow$) Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\forall x \in W, \ \exists Z_x \in Y \cap \mathscr{P}(X|x) \cap \mathscr{P}(W),$$

άρα

$$W = \bigcup_{x \in W} Z_x \in \mathscr{O}(X),$$

απευθείας από τον ορισμό των τοπολογιών.

□

2.4 Τοπικές βάσεις τοπολογικών χώρων

Εδώ απομονώνουμε τον χαρακτηρισμό του Θεωρήματος 2.3.2 με σκοπό να εισάγουμε την έννοια της τοπικής βάσης, όχι ενός απλού συνόλου, αλλά ενός τοπολογικού χώρου αυτή την φορά.

Ξεκινάμε, λοιπόν, με το επόμενο ουσιαστικό, το οποίο έπεται με χρήση του Ορισμού 1.2.1 και του ορισμού των τοπολογιών.

Πρόταση 2.4.1. *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X))$,
2. $x \in X$ *και*
3. $Y \subseteq \mathscr{O}(X|x)$ *τ.ω.:*

$$Y \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing, \ \forall W \in \mathscr{O}(X|x).$$

Ισχύει ότι το Y *είναι τοπική βάση του* X *γύρω από το* x.

Απόδειξη. Έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq Y$. Αφού

$$\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{O}(X|x),$$

έπεται από τον ορισμό των τοπολογιών ότι

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n \in \mathscr{O}(X|x)$$

και άρα από υπόθεση συμπεραίνουμε ότι

$$\exists V \in Y \ \text{τ.ω.:} \ V \subseteq \bigcap_{n=1}^{n_0} Z_n,$$

δλδ την ισχύ του Ορισμού 1.2.1. □

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.4.1, ο επόμενος ορισμός είναι πλήρως δικαιολογημένος.

Ορισμός 2.4.1 (τοπική βάση τοπολογικού χώρου)**.** *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X))$,
ii. $x \in X$ *και*
iii. $Y \subseteq \mathscr{P}(X|x)$.

Το Y καλείται τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}(X))$ όταν

1. $Y \subseteq \mathscr{O}(X|x)$ *και*

2. $Y \cap \mathscr{P}(W) \neq \varnothing$, $\forall W \in \mathscr{O}(X|x)$.

Έτσι, υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.4.1, το ακόλουθο είναι άμεσο από το Θεώρημα 2.3.2.

Πρόταση 2.4.2 (τοπική βάση τοπολογικού χώρου από παραγωγό βάση)**.** *Έστω*

1. X,

2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *βάση του* X,

3. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να παράγεται από το* Y *και*

4. $x \in X$.

Ισχύει ότι το $Y \cap \mathscr{P}(X|x)$ *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* x.

Απόδειξη. Έπεται απευθείας από την εφαρμογή του Θεωρήματος 2.3.2. □

Το απλούστερο παράδειγμα τοπικής βάσης τοπολογικού χώρου αποτελεί κάθε σύνολο από κάποιο μονοσύνολο υποσύνολο ενός συνόλου εφοδιασμένο με την διακριτή του τοπολογία.

Πρόταση 2.4.3 (τοπική βάση διακριτού τοπολογικού χώρου από μονοσύνολο)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{P}(X))$,

2. $x \in X$ *και*

3. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *τ.ω.:*
$$Y = \{\{x\}\}.$$

Ισχύει ότι το Y *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{P}(X))$ *γύρω από το* x.

Απόδειξη. Έπεται απευθείας από την Πρόταση 2.3.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.4.2.

Εναλλακτικά:

Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του Ορισμού 2.4.1.

- Προφανώς έχουμε ότι
$$Y \subseteq \mathscr{P}(X|x),$$
δλδ το πρώτο ζητούμενο.

- Προφανώς έχουμε ότι
$$Y \cap \mathscr{P}(W) = Y \neq \varnothing,\ W \in \mathscr{O}(X|x),$$
δλδ το δεύτερο ζητούμενο.

□

Χαρακτηριστικά παράδειγματα τοπικών βάσεων τοπολογικού χώρου αποτελούν επίσης κάποιες (όχι όμως όλες!) οικογένειες των ανοικτών μπαλών πεπερασμένης ακτίνας σε ψευδομετρικό τοπολογικό χώρο, τόσο αυτές που απλά περιέχουν το αντίστοιχο σημείο, όσο και αυτές με κέντρο το σημείο αυτό.

Πρόταση 2.4.4 (τοπικές βάσεις ψευδομετρικού τοπολογικού χώρου)**.** *Έστω*

i. (X, f) *ψευδομετρικός χώρος και*

ii. $x \in X$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

iii. $Y_1 \subseteq \mathscr{P}(X|x)$ *τ.ω.:*

$$Y_1 = \{B(y,\varrho) \subseteq X\}_{(y,\varrho)\in X\times(0,\infty)} \cap \mathscr{P}(X|x).$$

Ισχύει ότι το Y_1 *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}_f(X))$ *γύρω από το* x.

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $\{a,b\} \subseteq [0,\infty]$ *τ.ω.:* $a < b$ *και*

   iv′. $Y_2 \subseteq \mathscr{P}(X|x)$ *τ.ω.:*
   $$Y_2 = \{B(x,\varrho) \subseteq X\}_{\varrho\in(a,b)}.$$

   Ισχύει ότι
   $$a = 0 \Leftrightarrow Y_2 \text{ τοπική βάση του } (X, \mathscr{O}_f(X)) \text{ γύρω από το } x.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Έπεται απευθείας από τον ορισμό των ψευδομετρικών τοπολογιών σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.4.2.

2. Η πρώτη προϋπόθεση του Ορισμού 2.4.1 έπεται άμεσα από τον ορισμό ψευδομετρικών τοπολογιών. Εξετάζουμε, τώρα, κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά ως προς την δεύτερη προϋπόθεση.

   ($\Rightarrow$) Έστω $W \in \mathscr{O}(X|x)$. Σύμφωνα με τον ορισμό των ψευδομετρικών τοπολογιών, έχουμε από το Θεώρημα 2.3.1 ότι
   $$\exists\,(U \subseteq X \;\&\; V \subseteq (0,\infty)) \text{ τ.ω.: } W = \bigcup_{(y,\varrho)\in U\times V} B(y,\varrho).$$
   Οπότε
   $$\exists\,(y,\varrho) \in U \times V \text{ τ.ω.: } x \in B(y,\varrho) \subseteq W$$
   και αρκεί να επιλέξουμε
   $$B(x, \varrho - f(y,x)) \in Y_2 \cap \mathscr{P}(W)$$
   για να πάρουμε το ζητούμενο.

   ($\Leftarrow$) Σταθεροποιώντας ένα $c \in (0,a)$ και την αντίστοιχη ανοικτή μπάλα $B(x,c) \in \mathscr{O}(X|x)$, έχουμε ότι
   $$Y_2 \cap \mathscr{P}(B(x,c)) = \varnothing$$
   και το ζητούμενο έπεται με απαγωγή σε άτοπο.

□

2.5 Κατασκευή βάσεων από τοπικές βάσεις τοπολογικών χώρων

Εδώ παρουσιάζουμε το αντίστροφο -τρόπον τινά- αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.2.1. Συγκεκριμένα, ενώ με το Θεώρημα 1.2.1 μπορούμε να κατασκευάσουμε τοπικές βάσεις ενός συνόλου από μία βάση αυτού, εδώ βλέπουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε μία βάση με την γνώση ειδικών τοπικών βάσεων. Οι τελευταίες δεν είναι άλλες από τοπικές βάσεις τοπολογικού χώρου, δλδ το τίμημα που πληρώνουμε για αυτή την αντίστροφη διαδικασία είναι η απαίτηση να προϋπάρχει τοπολογική δομή.

Έτσι, λοιπόν, υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.4.1, το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.1.

Θεώρημα 2.5.1 (κατασκευή βάσης από τοπικές βάσεις τοπολογικού χώρου). *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X))$ *και*

ii. $\prod_{x\in X} Y_x \subseteq \prod_{x\in X} \mathscr{P}(X|x)$ *τ.ω.: το* Y_x *να είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* x, $\forall x \in X$.

Ισχύουν ότι

1. *το* $\bigcup_{x\in X} Y_x \subseteq \mathscr{P}(X)$ *είναι βάση του* X *και*

2. *η* $\mathscr{O}(X)$ *παράγεται από το* $\bigcup_{x\in X} Y_x$.

Απόδειξη. Έστω $W \in \mathscr{O}(X)$. Από υπόθεση έχουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.1, ότι

$$\forall x \in W,\ \exists Z_x \in Y_x \cap \mathscr{P}(W),$$

οπότε

$$W = \bigcup_{x\in W} Z_x,$$

δλδ

$$\mathscr{O}(X) \subseteq \left\{\bigcup_{i\in I} Z_i \subseteq X\right\}_{\{Z_i\}_{i\in I}\subseteq \bigcup_{x\in X} Y_x}.$$

Από την άλλη, έχουμε, σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.1 σε συνδυασμό με τον ορισμό των τοπολογιών, ότι

$$\left\{\bigcup_{i\in I} Z_i \subseteq X\right\}_{\{Z_i\}_{i\in I}\subseteq \bigcup_{x\in X} Y_x} \subseteq \mathscr{O}(X).$$

Άρα, τελικά,

$$\mathscr{O}(X) = \left\{\bigcup_{i\in I} Z_i \subseteq X\right\}_{\{Z_i\}_{i\in I}\subseteq \bigcup_{x\in X} Y_x}$$

και τα ζητούμενα έπονται απευθείας από το Θεώρημα 2.3.1. □

Σημείωση 2.5.1. *Με το Θεώρημα 2.5.1 μπορούμε να ξεφύγουμε από τα πλαίσια του Θεωρήματος 1.2.1 κατά την κατασκευή βάσεων.*

Συγκεκριμένα μπορούμε να βρούμε τοπικές βάσεις που συναποτελούν μια βάση $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$, *χωρίς όμως να είναι απαραίτητα της μορφής*

$$Y \cap \mathscr{P}\big(X\,\big|\,x\big),\ \forall x \in X.$$

Χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι η ανακατασκευή της συνήθους βάσης,

$$Y = \{B(x,\varrho) \subseteq X\}_{(x,\varrho)\in X\times(0,\infty)},$$

ενός ψευδομετρικού τοπολογικού χώρου, X, *από τοπικές βάσεις της μορφής*

$$\{B(x,\varrho) \subseteq X\}_{\varrho\in(0,\infty)} \neq Y \cap \mathscr{P}\big(X\,\big|\,x\big),\ \forall x \in X.$$

Επίσης μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλες βάσεις διαφορετικές από μια δεδομένη παραγωγό βάση μιας κάποιας τοπολογίας. Χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι η κατασκευή της βάσης

$$\bigcup_{x\in X} \{B(x,\varrho_x) \subseteq X\}_{\varrho_x\in(0,b_x)} \subsetneq Y,\ \text{με } \{b_x\}_{x\in X} \subseteq (0,\infty].$$

2.6 Συγκλίνοντα δίκτυα

Χρήσιμα αποτελέσματα που αφορούν συγλίνοντα δίκτυα παρατίθενται στην παρούσα ενότητα.

2.6.1 Χαρακτηρισμός τοπολογιών μέσω συγκλινόντων δικτύων

Εδώ παραθέτουμε έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό της σύγκρισης τοπολογιών του ίδιου συνόλου μέσω συγκλινόντων δικτύων.

Πρώτα όμως θα χρειαστούμε τον παρακάτω χαρατηρισμό ανοικτών συνόλων μέσω συγκλινόντων δικτύων, ο οποίος με την σειρά του προκύπτει αξιοποιώντας τον γνωστό χαρακτηρισμό της κλειστότητας μέσω συγκλινόντων δικτύων.

Πρόταση 2.6.1.1 (χαρακτηρισμός ανοικτών συνόλων μέσω συγκλινόντων δικτύων)**.** *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X))$ *και*

ii. $Y \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$Y \in \mathscr{O}(X) \Leftrightarrow \forall x \in Y,\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } x_i \to x,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Y.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε ξεχωριστά κάθε συνεπαγωγή.

($\Rightarrow$) Άμεσο από τον ορισμό της σύγκλισης δικτύων.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δειχθεί η αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή, δλδ

$$\begin{aligned} Y^c \notin \mathscr{C}(X) \Leftrightarrow Y \notin \mathscr{O}(X) \Rightarrow& \\ \Rightarrow \exists x \in Y,\ \exists \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } &\big(x_i \to x\ \&\ \{x_i\}_{i_0\le i\in I} \nsubseteq Y,\ \forall i_0 \in I\big). \end{aligned}$$

Οπότε, μιας και

$$\begin{aligned} \exists x \in Y \text{ τ.ω.: } \exists \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq Y^c \text{ τ.ω.: } x_i \to x \Rightarrow& \\ \Rightarrow \exists x \in Y,\ \exists \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } &\big(x_i \to x\ \&\ \{x_i\}_{i_0\le i\in I} \nsubseteq Y,\ \forall i_0 \in I\big), \end{aligned}$$

αρκεί να δειχθεί ότι

$$Y^c \notin \mathscr{C}(X) \Rightarrow \exists x \in Y \text{ τ.ω.: } \exists \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq Y^c \text{ τ.ω.: } x_i \to x.$$

Πράγματι, από τον γνωστό χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων μέσω συγκλινόντων δικτύων εντός αυτού, έχουμε ότι

$$Y^c \in \mathscr{C}(X) \Leftrightarrow x \in Y^c,\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq Y^c \text{ τ.ω.: } x_i \to x,\ \forall x \in X,$$

άρα, ισοδύναμα, ότι

$$\begin{aligned} Y^c \notin \mathscr{C}(X) \Leftrightarrow \exists x \in X \text{ τ.ω.: } \exists \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq Y^c \text{ τ.ω.: } (x_i \to x\ \&\ x \in Y) \Leftrightarrow& \\ \Leftrightarrow \exists x \in Y \text{ τ.ω.: } \exists \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq Y^c \text{ τ.ω.: } x_i \to x& \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

Έτσι, με χρήση της Πρότασης 2.6.1.1 έπεται άμεσα το επόμενο.

Θεώρημα 2.6.1.1 (σύγκριση τοπολογιών μέσω σύγκλισης δικτύων)**.** *Έστω $(X, \mathscr{O}_1(X))$ και $(X, \mathscr{O}_2(X))$ δύο τοπολογικοί χώροι. Ισχύουν ότι*

1. $\mathscr{O}_1(X) \subseteq \mathscr{O}_2(X) \Leftrightarrow \Big(x_i \overset{\mathscr{O}_2(X)}{\to} x \Rightarrow x_i \overset{\mathscr{O}_1(X)}{\to} x,\ \forall x \in X,\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X\Big)$ *και*

2. $\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X) \Leftrightarrow \Big(x_i \overset{\mathscr{O}_2(X)}{\to} x \Leftrightarrow x_i \overset{\mathscr{O}_1(X)}{\to} x,\ \forall x \in X,\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X\Big)$.

Απόδειξη. Είναι προφανές πως αρκεί να δείξουμε μόνο το σημείο 1. Ως προς αυτό, ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έστω $x \in X$ και δίκτυο $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ τ.ω.:

$$x_i \overset{\mathscr{O}_2(X)}{\to} x \Leftrightarrow \forall Y \in \mathscr{O}_2\big(X \,|\, x\big),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0\le i\in I} \subseteq Y.$$

Έστω τώρα $Y \in \mathscr{O}_1\big(X \,|\, x\big)$, οπότε από υπόθεση έχουμε ότι

$$\mathscr{O}_1(X) \subseteq \mathscr{O}_2(X) \Rightarrow \mathscr{O}_1\big(X \,|\, x\big) \subseteq \mathscr{O}_2\big(X \,|\, x\big) \Rightarrow Y \in \mathscr{O}_2\big(X \,|\, x\big)$$

και άρα

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0\le i\in I} \subseteq Y,$$

δλδ τελικά

$$x_i \overset{\mathscr{O}_1(X)}{\to} x.$$

(⇐) Έστω $Y \in \mathscr{O}_1(X)$. Από την Πρόταση 2.6.1.1 έπεται ότι

$$\forall x \in Y,\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } x_i \overset{\mathscr{O}_1(X)}{\to} x,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Y.$$

Έστω τώρα $x \in Y$ και δίκτυο $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ τ.ω.: $x_i \overset{\mathscr{O}_2(X)}{\to} x$, οπότε από υπόθεση έχουμε ότι

$$x_i \overset{\mathscr{O}_1(X)}{\to} x$$

και άρα

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Y.$$

Έτσι, πάλι από Πρόταση 2.6.1.1 έπεται ότι

$$Y \in \mathscr{O}_2(X),$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Σημείωση 2.6.1.1. *Με το Θεώρημα 2.6.1.1 ανά χείρας, μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως μια τοπολογία ενός συνόλου αποκλειστικά μέσω της περιγραφής της σύγκλισης των (συγκλινόντων) δικτύων του. Αν μάλιστα ο τοπολογικός χώρος αυτός είναι ακολουθιακός, τότε στο παραπάνω συμπέρασμα μπορούμε ισοσδύναμα να αντικαταστήσουμε γενικά τα δίκτυα με κάτι ειδικότερο και συγκεκριμένα τις ακολουθίες.*

2.6.2 Χαρακτηρισμός σύγκλισης δικτύων μέσω (τοπικών) βάσεων

Εδώ αναδεικνύουμε την χρησιμότητα των (τοπικών) βάσεων συνόλων κατά την μελέτη συγκλινόντων δικτύων.

Με χρήση του Ορισμού 2.2.1 και της Πρότασης 2.3.4 έπεται άμεσα το επόμενο.

Θεώρημα 2.6.2.1 (χαρακτηρισμός σύγκλισης δικτύων ως προς τοπολογία παραγόμενη από βάση)**.** *Έστω*

1. X,
2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *βάση του* X,
3. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να παράγεται από το* Y,
4. $x \in X$ *και*
5. $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$x_i \to x \Leftrightarrow \forall Z \in Y \cap \mathscr{P}(X|x),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Z.$$

Απόδειξη. Αρχικά, εξ ορισμού έχουμε ότι

$$x_i \to x \Leftrightarrow \forall Z \in \mathscr{O}(X|x),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Z.$$

Ελέγχουμε, τώρα, κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

(⇒) Έπεται άμεσα καθώς

$$Y \cap \mathscr{P}(X|x) \subseteq \mathscr{O}(X|x),$$

σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1.

(⇐) Έστω $Z \in \mathscr{O}(X|x)$. Έχουμε τότε από την Πρόταση 2.3.4 ότι

$$\exists W \in Y \cap \mathscr{P}(X|x) \cap \mathscr{P}(Z),$$

οπότε από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq W \subseteq Z$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

Σημείωση 2.6.2.1. *Όταν ελέγχουμε την σύγκλιση δικτύων σε τοπολογικούς χώρους παραγόμενους από βάσεις, με το Θεώρημα 2.6.2.1 μπορούμε να περιοριστούμε στις αντίστοιχες τοπικές βάσεις γύρω από τα εν δυνάμει σημεία σύγκλισης, αντί για όλα τα ανοικτά που περιέχουν τα σημεία αυτά.*

Ισχύει όμως και το αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.6.2.1 αποτέλεσμα για τοπικές βάσεις τοπολογικού χώρου αυτή την φορά, όπως φαίνεται στο παρακάτω, για το οποίο αξιοποιείται ο Ορισμός 2.4.1.

Θεώρημα 2.6.2.2 (χαρακτηρισμός σύγκλισης δικτύων μέσω τοπικών βάσεων τοπολογικού χώρου)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X))$,
2. $x \in X$,
3. $Y \subseteq \mathscr{P}(X\,|\,x)$ *τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* x *και*
4. $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$x_i \to x \Leftrightarrow \forall Z \in Y,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \leq i \in I} \subseteq Z.$$

Απόδειξη. Αρχικά, εξ ορισμού έχουμε ότι

$$x_i \to x \Leftrightarrow \forall Z \in \mathscr{O}(X\,|\,x),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \leq i \in I} \subseteq Z.$$

Ελέγχουμε, τώρα, κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έπεται άμεσα καθώς

$$Y \subseteq \mathscr{O}(X\,|\,x),$$

σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.1.

($\Leftarrow$) Έστω $Z \in \mathscr{O}(X\,|\,x)$. Έχουμε τότε από τον Ορισμό 2.4.1 ότι

$$\exists W \in Y \cap \mathscr{P}(Z),$$

οπότε από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \leq i \in I} \subseteq W \subseteq Z$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

Σημείωση 2.6.2.2. *Όταν ελέγχουμε την σύγκλιση δικτύων σε κάποιο σημείο ενός τοπολογικού χώρου, με το Θεώρημα 2.6.2.2 μπορούμε να περιοριστούμε σε κάποια τοπική βάση του τοπολογικού χώρου αυτού γύρω από το εν δυνάμει σημείο σύγκλισης, αντί για όλα τα ανοικτά που περιέχουν το σημείο αυτό.*

Έτσι, από τον συνδυασμό της Πρότασης 2.4.4 και του Θεωρήματος 2.6.2.2 προκύπτει άμεσα η ισοδυναμία του γνωστού ορισμού της σύγκλισης ακολουθιών σε ψευδομετρικό χώρο και της σύγκλισης ακολουθιών σε τοπολογικό χώρο στην περίπτωση όπου ο χώρος αυτός είναι εφοδιασμένος με την ψευδομετρική του τοπολογία.

Πρόταση 2.6.2.1 (ισοδυναμία ορισμών σύγκλισης ακολουθιών σε ψευδομετρικό τοπολογικό χώρο)**.** *Έστω*

1. (X, f) *ψευδομετρικός χώρος,*
2. $x \in X$ *και*
3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$x_i \to x \text{ ως προς την } \mathscr{O}_f(X) \Leftrightarrow \forall \varrho > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } f(x_n, x) < \varrho,\ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0, \infty).$$

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.4.4, αρκεί να επιλέξουμε $Z = B(x, \varrho)$, με (αυθαίρετο) $\varrho > 0$, στο Θεώρημα 2.6.2.2. □

Κεφάλαιο 3

Επαγόμενοι τοπολογικοί χώροι

Η έννοια των τοπολογικών χώρων επαγόμενων από συναρτήσεις είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της θεωρίας που θα αναπτυχθεί. Έτσι, με το παρόν κεφάλαιο, αφού πρώτα προετοιμάσουμε το έδαφος, εισάγουμε και μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των τοπολογικών αυτών χώρων.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [36], [30], [11], [29], [1], [28], [13] και [9], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

3.1 Τοπολογικοί χώροι supremum και infimum

Απαραίτητοι για τον ορισμό των τοπολογικών χώρων επαγόμενων από συναρτήσεις, και συγκεκριμένα των αρχικών και τελικών τοπολικών χώρων, είναι οι εισαγωγή των τοπολογικών χώρων supremum και infimum, αντίστοιχα.

3.1.1 Τοπολογικός χώρος supremum

Το παρακάτω έπεται άμεσα με χρήση της Πρότασης 2.1.1.

Πρόταση 3.1.1.1. *Έστω*

i. $\{(X,\mathscr{O}_i(X))\}_{i\in I}$ *και*

ii. $\{(X,\mathscr{O}_j(X))\}_{j\in J}$ *τ.ω.:*

$$\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J}=\left\{\mathscr{O}(X)\,\middle|\,\bigcup_{i\in I}\mathscr{O}_i(X)\subseteq\mathscr{O}(X)\right\}.$$

Ισχύουν ότι

1. $\exists\operatorname{lea}\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J}$ *και*

2. $\operatorname{lea}\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J}=\bigcap_{j\in J}\mathscr{O}_j(X).$

Απόδειξη. Πρώτα από όλα,

$$\{(X,\mathscr{O}_j(X))\}_{j\in J}\neq\varnothing,$$

καθώς

$$(X,\mathscr{P}(X))\in\{(X,\mathscr{O}_j(X))\}_{j\in J}$$

και ξέρουμε επίσης από την Πρόταση 2.1.1 ότι το $\bigcap_{j\in J}\mathscr{O}_j(X)$ είναι όντως τοπολογία του X. Τώρα, αν

$$\bigcup_{i\in I}\mathscr{O}_i(X)\subseteq\mathscr{O}_j(X),\ \forall j\in J\Leftrightarrow\mathscr{O}_i(X)\subseteq\bigcap_{j\in J}\mathscr{O}_j(X)\subseteq\mathscr{O}_j(X),\ \forall(i,j)\in I\times J,$$

τότε

$$\bigcap_{j\in J}\mathscr{O}_j(X)\in\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J},$$

καθώς
$$\mathscr{O}_i(X) \subseteq \bigcap_{j\in J} \mathscr{O}_j(X),\ \forall i \in I$$
και το ζητούμενο έπεται αφού
$$\bigcap_{j\in J} \mathscr{O}_j(X) \subseteq \mathscr{O}_j(X),\ \forall j \in J.$$

□

Άμεσα τώρα από την Πρόταση 3.1.1.1 έπεται το επόμενο, με το οποίο ουσιαστικά εισάγεται η έννοια της τοπολογίας supremum.

Πρόταση 3.1.1.2 (τοπολογία supremum)**.** *Έστω*

i. $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i\in I}$ *και*

ii. $\{(X, \mathscr{O}_j(X))\}_{j\in J}$ *τ.ω.:*

$$\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J} = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i(X) \subseteq \mathscr{O}(X)\right\}.$$

Ισχύουν ότι

1. $\exists \sup\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I}$,
2. *το* $\sup\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I}$ *είναι τοπολογία του* X *και*
3. $\sup\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I} = \bigcap_{j\in J} \mathscr{O}_j(X)$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.1.1.1 σε συνδυασμό με τον ορισμό του supremum. □

Με το επόμενο, για την απόδειξη του οποίου αξιοποιείται το Θεώρημα 2.2.1, χαρακτηρίζεται η τοπολογία supremum.

Πρόταση 3.1.1.3 (χαρακτηρισμός τοπολογίας supremum)**.** *Έστω*

1. $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i\in I}$ *και*
2. $(X, \mathscr{O}_0(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_0(X)$ *να παράγεται από το* $\bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i(X)$.

Ισχύει ότι
$$\sup\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I} = \mathscr{O}_0(X).$$

Απόδειξη. Πρώτον, το $\mathscr{O}_0(X)$ είναι άνω φράγμα του $\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I}$. Πράγματι,
$$\mathscr{O}_i(X) \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i(X) \subseteq \mathscr{O}_0(X),\ \forall i \in I,$$
εξ ορισμού της $\mathscr{O}_0(X)$. Δεύτερον,
$$\mathscr{O}_0(X) \subseteq \mathscr{O}(X),\ \forall \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: η } \mathscr{O}(X) \text{ είναι άνω φράγμα του } \{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I}.$$
Πράγματι, από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε ότι
$$\mathscr{O}_0(X) = \left\{\bigcup_{j\in J} \bigcap_{n_j=1}^{n_{0j}} Z_{j_{n_j}} \subseteq X\right\}_{\left\{Z_{j_{n_j}}\right\}_{n_j\in\{1,\dots,n_{0j}\},j\in J} \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathscr{O}_i(X)},$$
άρα
$$\mathscr{O}_0(X) \subseteq \left\{\bigcup_{j\in J} \bigcap_{n_j=1}^{n_{0j}} Z_{j_{n_j}} \subseteq X\right\}_{\left\{Z_{j_{n_j}}\right\}_{n_j\in\{1,\dots,n_{0j}\},j\in J} \subseteq \mathscr{O}(X)},\ \forall \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.:}$$
$$\text{τ.ω.: η } \mathscr{O}(X) \text{ είναι άνω φράγμα του } \{\mathscr{O}_i(X)\}_{i\in I}.$$

Αφού στην παραπάνω σχέση το $\mathscr{O}(X)$ είναι τοπολογία, συμπεραίνουμε ότι

$$\left\{ \bigcup_{j \in J} \bigcap_{n_j=1}^{n_{0j}} Z_{j n_j} \subseteq X \right\}_{\left\{ Z_{j n_j} \right\}_{n_j \in \{1,\ldots,n_{0j}\}, j \in J} \subseteq \mathscr{O}(X)} \subseteq \mathscr{O}(X)$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Χρήσιμος, τέλος, είναι και ο επόμενος χαρακτηρισμός της σύγκλισης δικτύων στην τοπολογία supremum, για τον οποίο αξιοποιούνται το Θεώρημα 2.2.1, το Θεώρημα 2.6.1.1 και η Πρόταση 3.1.1.3.

Πρόταση 3.1.1.4 (χαρακτηρισμός σύγκλισης δικτύων σε τοπολογικό χώρο supremum)**.** *Έστω*

1. $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i \in I}$,
2. $x \in X$ *και*
3. $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$x_j \overset{\mathscr{O}_i(X)}{\to} x,\ \forall i \in I \Leftrightarrow x_j \overset{\sup\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i \in I}}{\to} x.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Leftarrow$) Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.1.1.3, έχουμε ότι

$$\mathscr{O}_i(X) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i(X) \subseteq \sup\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i \in I},\ \forall i \in I,$$

οπότε από το Θεώρημα 2.6.1.1 παίρνουμε το ζητούμενο.

($\Rightarrow$) Έστω $Y \in \sup\{\mathscr{O}_i(X)\}_{i \in I}$ τ.ω.: $x \in Y$. Αρκεί να δειχθεί ότι

$$\exists j_0 \in J \text{ τ.ω.: } \{x_j\}_{j_0 \leq j \in J} \subseteq Y.$$

Πράγματι, υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.1.1.3 και του Θεωρήματος 2.2.1, έχουμε ότι

$$\exists \left\{ Z_{s n_s} \right\}_{n_s \in \{1,\ldots,n_{0s}\}, s \in S} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i(X) \text{ τ.ω.: } Y = \bigcup_{s \in S} \bigcap_{n_s=1}^{n_{0s}} Z_{s n_s} \ \&\ \exists s_0 \in S \text{ τ.ω.: } x \in \bigcap_{n_{s_0}=1}^{n_{0 s_0}} Z_{s_0 n_{s_0}}.$$

Άρα

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \bigcap_{n_{s_0}=1}^{n_{0 s_0}} Z_{s_0 n_{s_0}} \in \mathscr{O}_{i_0}(X|x)$$

και έτσι

$$\exists j_0 \in J \text{ τ.ω.: } \{x_j\}_{j_0 \leq j \in J} \subseteq \bigcap_{n_{s_0}=1}^{n_{0 s_0}} Z_{s_0 n_{s_0}}$$

από υπόθεση. Το ζητούμενο οπότε έπεται, καθώς

$$\bigcap_{n_{s_0}=1}^{n_{0 s_0}} Z_{s_0 n_{s_0}} \subseteq \bigcup_{s \in S} \bigcap_{n_s=1}^{n_{0s}} Z_{s n_s} = Y.$$

□

3.1.2 Τοπολογικός χώρος infimum

Κατά αντιστοιχία με την Πρόταση 3.1.1.1 και την Πρόταση 3.1.1.2, έπονται τα επόμενα δύο αποτελέσματα που αφορούν την τοπολογία infimum αυτή την φορά.

Πρόταση 3.1.2.1. *Λετ*

i. $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i \in I}$ *και* *ii.* $\{(X, \mathscr{O}_j(X))\}_{j \in J}$ *τ.ω.:*

$$\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j \in J} = \left\{ \mathscr{O}(X) \,\middle|\, \mathscr{O}(X) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathscr{O}_i(X) \right\}.$$

Ισχύουν ότι

1. $\exists\, \mathrm{grea}\, \{\mathscr{O}_j(X)\}_{j \in J}$ *και*

2. $\mathrm{grea}\, \{\mathscr{O}_j(X)\}_{j \in J} = \bigcap_{i \in I} \mathscr{O}_i(X)$.

Απόδειξη. Πρώτα από όλα,

$$\{(X, \mathscr{O}_j(X))\}_{j \in J} \neq \varnothing,$$

καθώς

$$(X, \{\varnothing, X\}) \in \{(X, \mathscr{O}_j(X))\}_{j \in J}$$

και ξέρουμε επίσης από την Πρόταση 2.1.1 ότι $\bigcap_{i \in I} \mathscr{O}_i(X)$ είναι όντως τοπολογία του X. Τώρα, αν

$$\mathscr{O}_j(X) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathscr{O}_i(X) \subseteq \mathscr{O}_i(X), \ \forall\, (i, j) \in I \times J,$$

τότε

$$\bigcap_{i \in I} \mathscr{O}_i(X) \in \{\mathscr{O}_j(X)\}_{j \in J},$$

καθώς

$$\bigcap_{i \in I} \mathscr{O}_i(X) \subseteq \mathscr{O}_i(X), \ \forall i \in I$$

και το ζητούμενο έπεται αφού

$$\mathscr{O}_j(X) \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathscr{O}_i(X), \ \forall j \in J.$$

□

Πρόταση 3.1.2.2 (τοπολογία infimum)**.** *Έστω* $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i \in I}$. *Ισχύουν ότι*

1. $\exists \inf \{\mathcal{O}_i(X)\}_{i \in I}$,

2. *το* $\inf \{\mathcal{O}_i(X)\}_{i \in I}$ *είναι τοπολογία του* X *και*

3. $\inf \{\mathcal{O}_i(X)\}_{i \in I} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i(X)$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.1.2.1 σε συνδυασμό με τον ορισμό του infimum. □

Ωστόσο, ασθενέστερο είναι το αντίστοιχο αποτέλεσμα της Πρότασης 3.1.1.4.

Πρόταση 3.1.2.3. *Έστω*

1. $\{(X, \mathscr{O}_i(X))\}_{i \in I}$,

2. $x \in X$ *και*

3. $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } x_j \overset{\mathscr{O}_{i_0}(X)}{\to} x \Rightarrow x_j \overset{\inf \{\mathscr{O}_i(X)\}_{i \in I}}{\to} x.$$

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.1.2.2, έχουμε ότι

$$\inf \{\mathscr{O}_i(X)\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{O}_i(X), \ \forall i \in I,$$

οπότε από το Θεώρημα 2.6.1.1 παίρνουμε το ζητούμενο. □

3.2 Τοπολογικοί χώροι επαγόμενοι από συναρτήσεις (μέρος I)

Όλη η προηγούμενη προετοιμασία είχε στόχο την ανάπτυξη της θεωρίας της παρούσας ενότητας.

3.2.1 Αρχικός τοπολογικός χώρος

Η διαδικασία που ακολουθείται εδώ αποσκοπεί στην τοπολόγηση του κοινού πεδίου ορισμού διάφορων συναρτήσεων προς τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός

Πρώτα ξεκινάμε με το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.2.1.1. *Έστω*

1. X,
2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *και*
3. $f\colon X \to Y$.

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(X, \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)}\right)$ *είναι τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του ορισμού των τοπολογιών ως εξής.

- Έχουμε ότι
$$\{\varnothing, X\} = \{f^{\leftarrow}(\varnothing), f^{\leftarrow}(Y)\} \subseteq \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)}.$$
- Έστω $\{W_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)}$. Τότε
$$\exists \{V_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{O}(Y) \text{ τ.ω.: } \prod_{n=1}^{n_0} W_n = \prod_{n=1}^{n_0} f^{\leftarrow}(V_n),$$
άρα
$$\bigcap_{n=1}^{n_0} W_n = \bigcap_{n=1}^{n_0} f^{\leftarrow}(V_n) = f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} V_n\right) \in \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathcal{O}(Y)},$$
καθώς το $\mathscr{O}(Y)$ είναι τοπολογία και έτσι $\bigcap_{n=1}^{n_0} V_n \in \mathscr{O}(Y)$.
- Έστω $\{W_i\}_{i \in I} \subseteq \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)}$. Τότε
$$\exists \{V_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{O}(Y) \text{ τ.ω.: } \prod_{i \in I} W_i = \prod_{i \in I} f^{\leftarrow}(V_i),$$
άρα
$$\bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{i \in I} f^{\leftarrow}(V_i) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \in \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)},$$
καθώς το $\mathscr{O}(Y)$ είναι τοπολογία και έτσι $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathscr{O}(Y)$.

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.2.1.1 και της Πρότασης 3.1.1.2 έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.2.1.1 (αρχική τοπολογία). *Έστω*

1. X,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i \in I}$,
3. $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.:*
$$\mathscr{O}(X) = \sup\left\{\{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)}\right\}_{i \in I}.$$

Η $\mathscr{O}(X)$ *καλείται αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την οικογένεια συναρτήσεων* $\{f_i\}_{i \in I}$.

Στην συνέχεια, παρουσιάζονται διάφοροι τύποι χαρακτηρισμού των αρχικών τοπολογιών και μελετώνται οι άμεσες συνέπειες τους.

Χαρακτηρισμός μέσω παραγωγού συνόλου

Με βάση τον Ορισμό 3.2.1.1, άμεσα από την Πρόταση 3.1.1.3 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 3.2.1.2 (χαρακτηρισμός αρχικής τοπολογίας μέσω παραγωγού συνόλου)**.** *Έστω*

1. X,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I}$,
3. $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.:* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύει ότι η $\mathscr{O}(X)$ *παράγεται από το* $\{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i), i\in I}$.

Απόδειξη. Έπεται απευθείας από τον Ορισμό 3.2.1.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.1.1.3, καθώς

$$\{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i), i\in I} = \bigcup_{i\in I} \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i)}.$$

□

Από τον συνδυασμό της Πρότασης 2.3.3 και της Πρότασης 3.2.1.2 προκύπτει το ακόλουθο.

Πρόταση 3.2.1.3. *Έστω*

i. X,

ii. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I}$,

iii. $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$ *και*

iv. $W \subseteq \mathscr{P}(W)$ *τ.ω:*

$$W = \left\{\bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X\right\}_{(V_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} \mathscr{O}(Y_{i_n}), \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι το* W *είναι βάση του* X.
2. *Έστω, επιπλέον,*

   v. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.:* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

   Ισχύει ότι η $\mathscr{O}(X)$ *παράγεται από την* W.

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.2.1.2, και μιας και

$$X = f_{i_0}^{\leftarrow}(Y_{i_0}) \subseteq \bigcup_{Z\in\{f_{i_0}^{\leftarrow}(V_{i_0})\subseteq X\}_{V_{i_0}\in\mathscr{O}(Y_{i_0})}} Z \subseteq \bigcup_{Z\in\{f_i^{\leftarrow}(V_i)\subseteq X\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i), i\in I}} Z, \ \forall i_0 \in I,$$

παίρνουμε από την Πρόταση 2.3.3 τα ζητούμενα. □

Άμεσος χαρακτηρισμός στην περίπτωση μιας συνάρτησης

Με χρήση της Πρότασης 2.2.2, της Πρότασης 3.2.1.1 και της Πρότασης 3.2.1.3 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 3.2.1.4. *Έστω*

1. X,
2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$,
3. $f\colon X \to Y$ *και*

4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από το μονοσύνολο* $\{f\}$.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}(X) = \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)}.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.2.1.3 έπεται ότι το $\{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)}$ παράγει την $\mathscr{O}(X)$. Επίσης, από την Πρόταση 3.2.1.1 έπεται ότι το $\{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)}$ είναι τοπολογία του X. Μένει, λοιπόν, να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.2.2 για να πάρουμε το ζητούμενο. □

Σημείωση 3.2.1.1. *Έστω*

1. X,
2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$,
3. $f \colon X \to Y$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.:* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από το μονοσύνολο* $\{f\}$.

Προς απλούστευση, αντί για «... που επάγεται από το μονοσύνολο $\{f\}$*» θα γράφουμε απλά «... που επάγεται από την (συνάρτηση)* f*».*

Χαρακτηρισμός μέσω ελάχιστου στοιχείου

Τώρα, με χρήση της Πρότασης 3.2.1.2 και του Ορισμού 2.2.1 έχουμε το επόμενο.

Πρόταση 3.2.1.5 (χαρακτηρισμός αρχικής τοπολογίας μέσω ελάχιστου στοιχείου)**.** *Έστω*

i. X,

ii. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i \in I}$,

iii. $\{f_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ *και*

iv. $(X, \mathscr{O}_0(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_0(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i \in I}$.

Ισχύουν ότι

1. $\exists \operatorname{lea} S_j,\ \forall j \in \{1,2,3\}$ *και*
2. $\mathscr{O}_0(X) = \operatorname{lea} S_j,\ \forall j \in \{1,2,3\}$,

όπου

$$S_1 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i), i \in I} \subseteq \mathscr{O}(X)\right\},$$

$$S_2 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{C}(Y_i), i \in I} \subseteq \mathscr{C}(X)\right\} \text{ και}$$

$$S_3 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, (f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(X; Y_i)\right\}.$$

Απόδειξη. Έχουμε τα παρακάτω.

- Απευθείας από την Πρόταση 3.2.1.2 σε συνδυασμό με τον Ορισμό 2.2.1 έπεται ότι
$$\exists \operatorname{lea} S_1 \ \&\ \mathscr{O}_0(X) = \operatorname{lea} S_1.$$
- Υπό το πρίσμα του πρώτου σημείου και του ορισμού των κλειστών συνόλων, για να δειχθεί ότι
$$\exists \operatorname{lea} S_2 \ \&\ \mathscr{O}_0(X) = \operatorname{lea} S_2,$$
αρκεί να ελέγξουμε ότι αν $i \in I$ και $W \subseteq X$, τότε
$$W \in \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{C}(Y_i)} \Leftrightarrow X \smallsetminus W \in \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)}.$$
Πράγματι,
$$W \in \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{C}(Y_i)} \Leftrightarrow W \in \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{Y_i \smallsetminus V_i \in \mathscr{O}(Y_i)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow W \in \{f_i^{\leftarrow}(Y_i \smallsetminus V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)} \Leftrightarrow W \in \{f_i^{\leftarrow}(Y_i) \smallsetminus f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow W \in \{X \smallsetminus f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)} \Leftrightarrow X \smallsetminus W \in \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)}.$$

- Έχουμε, από χαρακτηρισμούς της συνέχειας, ότι
$$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(X;Y_i) \Leftrightarrow \{f_i^{\leftarrow}(V_i)\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i),i\in I} \subseteq \mathscr{O}(X) \Leftrightarrow \{f_i^{\leftarrow}(V_i)\}_{V_i\in\mathscr{C}(Y_i),i\in I} \subseteq \mathscr{C}(X),$$
άρα από οποιοδήποτε από τα δύο πρώτα σημεία συμπεραίνουμε ότι
$$\exists\, \mathrm{lea}\, S_3 \;\&\; \mathscr{O}_0(X) = \mathrm{lea}\, S_3.$$

□

Ειδική περίπτωση χαρακτηρισμού μέσω ελάχιστου στοιχείου

Αξιοποιώντας την Πρόταση 2.2.3 και την Πρόταση 3.2.1.5, προκύπτει άμεσα το επόμενο.

Πρόταση 3.2.1.6 (ειδικός χαρακτηρισμός αρχικής τοπολογίας μέσω ελάχιστου στοιχείου)**.** *Έστω*

i. X *και* $\{Y_i\}_{i\in I}$,

ii. $\prod_{i\in I} Z_i \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$,

iii. $\{(Y_i,\mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I}$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y_i)$ *να παράγεται από το* Z_i, $\forall i\in I$,

iv. $\{f_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ *και*

v. $(X,\mathcal{O}_0(X))$ *τ.ω.: η* $\mathcal{O}_0(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύουν ότι

1. $\exists\, \mathrm{lea}\, S$ *και*
2. $\mathscr{O}_0(X) = \mathrm{lea}\, S$,

όπου
$$S = \left\{\{f_i^{\leftarrow}(V_i)\subseteq X\}_{V_i\in Z_i,i\in I} \subseteq \mathscr{O}(X)\right\}.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.2.1.5 έχουμε ότι
$$\exists\, \mathrm{lea}\left\{\mathscr{O}(X)\,\middle|\,(f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I} C(X;Y_i)\right\}$$
και ότι
$$\mathscr{O}_0(X) = \mathrm{lea}\left\{\mathscr{O}(X)\,\middle|\,(f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I} C(X;Y_i)\right\},$$
οπότε από χαρακτηρισμό της συνέχειας σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.2.3 παίρνουμε ότι
$$\mathscr{O}_0(X) = \left\{\mathscr{O}(X)\,\middle|\,\{f_i^{\leftarrow}(V_i)\subseteq X\}_{V_i\in Z_i,i\in I} \subseteq \mathscr{O}(X)\right\},$$
δλδ το ζητούμενο. □

Ειδική περίπτωση χαρακτηρισμού μέσω παραγωγού συνόλου

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.2.1, το επόμενο είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.2.1.6.

Πρόταση 3.2.1.7 (ειδικός χαρακτηρισμός αρχικής τοπολογίας μέσω παραγωγού συνόλου)**.** *Έστω*

1. X *και* $\{Y_i\}_{i\in I}$,
2. $\prod_{i\in I} Z_i \subseteq \prod_{i\in I} Y_i$,
3. $\{(Y_i,\mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I}$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y_i)$ *να παράγεται από το* Z_i, $\forall i\in I$,
4. $\{f_i\colon X\to Y_i\}_{i\in I}$ *και*
5. $(X,\mathscr{O}(X))$ *τ.ω.:* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύει ότι η $\mathscr{O}(X)$ παράγεται από το

$$\{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in Z_i, i \in I}.$$

Απόδειξη. Έπεται απευθείας από τον Ορισμό 2.2.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.2.1.6. □

Έτσι, το ειδικό αντίστοιχο της Πρότασης 3.2.1.3 έχει ως εξής.

Πρόταση 3.2.1.8. *Έστω*

i. X *και* $\{Y_i\}_{i \in I}$,

ii. $\prod_{i \in I} Z_i \subseteq \prod_{i \in I} Y_i$ *τ.ω.:*

$$I = \varnothing \Rightarrow \exists i_0 \in J \text{ τ.ω.: } Y_{i_0} = \bigcup_{Z \in Z_{i_0}} Z,$$

iii. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i \in I}$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y_i)$ *να παράγεται από το* Z_i, $\forall i \in I$,

iv. $\{f_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$ *και*

v. $W \subseteq \mathscr{P}(X)$ *τ.ω:*

$$W = \left\{ \bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X \right\}_{(V_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_{i_n}, \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι το W είναι βάση του X.*
2. *Έστω, επιπλέον,*

   viii. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.:* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i \in I}$.

   Ισχύει ότι η $\mathscr{O}(X)$ παράγεται από την W.

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.2.1.7, και μιας και

$$X = f_{i_0}^{\leftarrow}(Y_{i_0}) = f_{i_0}^{\leftarrow}\left(\bigcup_{Z \in Z_{i_0}} Z\right) = \bigcup_{Z \in Z_{i_0}} f_{i_0}^{\leftarrow}(Z) \subseteq \bigcup_{W \in \{f_{i_0}^{\leftarrow}(V_{i_0}) \subseteq X\}_{V_{i_0} \in Z_{i_0}}} W \subseteq \bigcup_{W \in \{f_i^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in Z_i, i \in I}} W,$$

στην περίπτωση όπου $I = \varnothing$, παίρνουμε από την Πρόταση 2.3.3 τα ζητούμενα. □

Χαρακτηρισμός μέσω σύγκλισης δικτύων

Ένας τρόπος χαρακτηρισμού κάθε τοπολογίας, άρα και της αρχικής, είναι μέσω του χαρακτηρισμού της σύγκλισης δικτύων υπό την έννοια της τοπολογίας αυτής (βλ το Θεώρημα 2.6.1.1 και Σημείωση 2.6.1.1) και τα αντίστοιχα δύο ακόλουθα αποτελέσματα έπονται με χρήση του Ορισμού 3.2.1.1, της Πρότασης 3.2.1.5 και της Πρότασης 3.2.1.4.

Πρόταση 3.2.1.9. *Έστω*

1. X,
2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$,
3. $f \colon X \to Y$,
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* f,
5. $x \in X$ *και*
6. $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$x_j \to x \Leftrightarrow f(x_j) \to f(x).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Παίρνουμε το ζητούμενο απευθείας από την Πρόταση 3.2.1.5 (για μονοσύνολο I) σε συνδυασμό με την αρχή της μεταφοράς.

($\Leftarrow$) Έστω $W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big)$ και πρέπει να δείξουμε ότι

$$\exists j_0 \in J \text{ τ.ω.: } \{x_j\}_{j_0 \le j \in J} \subseteq W.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 3.2.1.4, αναδιατυπώνουμε την παραπάνω υπόθεση ως

$$W \in \{f^{\leftarrow}(V) \subseteq X\}_{V \in \mathscr{O}(Y)} \ \&\ x \in W \Leftrightarrow \{x\} \subseteq W,$$

δλδ

$$\exists V \in \mathscr{O}(Y) \text{ τ.ω.: } W = f^{\leftarrow}(V) \ \&\ \{f(x)\} = f(\{x\}) \subseteq f(W),$$

οπότε

$$\{f(x)\} \subseteq f(f^{\leftarrow}(V)) = V \cap f(X) \subseteq V,$$

άρα

$$V \in \mathscr{O}\big(Y \,\big|\, f(x)\big).$$

Τώρα, από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists j_0 \in J \text{ τ.ω.: } \{f(x_j)\}_{j_0 \le j \in J} \subseteq V \Leftrightarrow \bigcup_{j_0 \le J \in J} \{f(x)\} \subseteq V \Leftrightarrow \bigcup_{j_0 \le J \in J} f(\{x_j\}) \subseteq V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f\left(\bigcup_{j_0 \le J \in J} \{x_j\}\right) \subseteq V \Leftrightarrow f\Big(\{x_j\}_{j_0 \le j \in J}\Big) \subseteq V \Rightarrow f^{\leftarrow}\Big(f\Big(\{x_j\}_{j_0 \le j \in J}\Big)\Big) \subseteq f^{\leftarrow}(V) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_j\}_{j_0 \le j \in J} \subseteq W.$$

$\square$

Πρόταση 3.2.1.10 (χαρακτηρισμός αρχικής τοπολογίας μέσω σύγκλισης δικτύων)**.** *Έστω*

1. X,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i \in I}$,
3. $\{f_i \colon X \to Y_i\}_{i \in I}$,
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i \in I}$,
5. $x \in X$ *και*
6. $\{x_j\}_{j \in J} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$x_j \to x \Leftrightarrow f_i(x_j) \to f_i(x), \ \forall i \in I.$$

Απόδειξη. Απευθείας από τον Ορισμό 3.2.1.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.1.1.4 παίρνουμε ότι

$$x_j \to x \Leftrightarrow x_j \overset{\{f_i{}^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)}}{\to} x, \ \forall i \in I,$$

οπότε αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$x_j \overset{\{f_i{}^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)}}{\to} x, \ \forall i \in I \Leftrightarrow f_i(x_j) \to f_i(x), \ \forall i \in I,$$

καθώς

$$\left(x_j \overset{\{f_i{}^{\leftarrow}(V_i) \subseteq X\}_{V_i \in \mathscr{O}(Y_i)}}{\to} x \Leftrightarrow f_i(x_j) \to f_i(x)\right), \ \forall i \in I,$$

το οποίο έπεται απευθείας από την Πρόταση 3.2.1.9. $\square$

Χαρακτηρισμός μέσω συνέχειας

Ο τελευταίος, αλλά εξίσου σημαντικός, τρόπος χαρακτηρισμού της αρχικής τοπολογίας περνάει μέσα από τον χαρακτηρισμό της συνέχειας συναρτήσεων προς τον αντίστοιχο τοπολογικό χώρο, και για το αντίστοιχο επόμενο αποτέλεσμα αξιοποιείται η Πρόταση 3.2.1.5 και, είτε η Πρόταση 2.2.3 και η Πρόταση 3.2.1.2, είτε η Πρόταση 3.2.1.10.

Πρόταση 3.2.1.11 (χαρακτηρισμός αρχικής τοπολογίας μέσω συνέχειας)**.** *Έστω*

1. X,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I} \cup \{(Z, \mathscr{O}(Z))\}$,
3. $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I} \cup \{f\colon Z \to X\}$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύει ότι η $\mathscr{O}(X)$ *χαρακτηρίζεται μοναδικά από την ιδιότητα*

$$f \in C(Z; X) \Leftrightarrow (f_i \circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Z; Y_i).$$

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε τον χαρακτηρισμό. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έπεται απευθείας από την Πρόταση 3.2.1.5 σε συνδυασμό με την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

($\Leftarrow$) Υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.2.3 και της Πρότασης 3.2.1.2, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{f^{\leftarrow}(f_i^{\leftarrow}(V_i))\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i), i\in I} \subseteq \mathscr{O}(Z)$$

αντί για

$$\{f^{\leftarrow}(W) \subseteq Z\}_{W\in\mathscr{O}(X)} \subseteq \mathscr{O}(Z),$$

δλδ όπως ο βασικός χαρακτηρισμός της συνέχειας απαιτεί. Πράγματι, από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\{f^{\leftarrow}(f_i^{\leftarrow}(V_i))\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i), i\in I} = \left\{(f_i \circ f)^{\leftarrow}(V_i)\right\}_{V_i\in\mathscr{O}(Y_i), i\in I} \subseteq \mathscr{O}(Z).$$

Εναλλακτικά:

Σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς έχουμε να δείξουμε ότι

$$f(z_j) \to f(z),\ \forall z \in Z,\ \forall \text{ δίκτυο } \{z_j\}_{j\in J} \subseteq Z \text{ τ.ω.: } z_j \to z.$$

Πράγματι, έστω $z \in Z$ και $\{z_j\}_{j\in J} \subseteq Z$ δίκτυο τ.ω.: $z_j \to z$. Τότε από την υπόθεση σε συνδυασμό με την αρχή της μεταφοράς έχουμε ότι

$$((f_i \circ f)(z_j) \to (f_i \circ f)(z) \Leftrightarrow f_i(f(z_j)) \to f_i(f(z)))\,,\ \forall i \in I,$$

άρα αξιοποιώντας την Πρόταση 3.2.1.10 παίρνουμε το ζητούμενο.

Έπειτα δείχνουμε την μοναδικότητα του χαρακτηρισμού. Πράγματι, έστω επίσης $(X, \mathscr{O}_0(X))$ τ.ω.:

$$f \in C(Z; (X, \mathscr{O}_0(X))) \Leftrightarrow (f_i \circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Z; Y_i).$$

Καθώς

$$C((X, \mathscr{O}(X)); (X, \mathscr{O}(X))) \ni \mathrm{id}_X \in C((X, \mathscr{O}_0(X)); (X, \mathscr{O}_0(X))),$$

έχουμε τότε από την συνεπαγωγή ($\Rightarrow$) που δείξαμε παραπάνω και την συνεπαγωγή ($\Rightarrow$) της υπόθεσης, αντίστοιχα, ότι

$$\prod_{i\in I} C((X, \mathscr{O}(X)); Y_i) \ni (f_i \circ \mathrm{id}_X)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C((X, \mathscr{O}_0(X)); Y_i).$$

Το μόνο που μας μένει τώρα είναι να θεωρήσουμε ότι το X είναι εφοδιασμένο με την $\mathscr{O}_0(X)$ και την $\mathscr{O}(X)$, αντίστοιχα, έτσι ώστε να συμπεράνουμε από την συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) που δείξαμε παραπάνω και την συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) της υπόθεσης, αντίστοιχα, ότι

$$C((X,\mathscr{O}(X));(X,\mathscr{O}_0(X))) \ni \mathrm{id}_X \in C((X,\mathscr{O}_0(X));(X,\mathscr{O}(X))).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$(\mathscr{O}_0(X) \subseteq \mathscr{O}(X) \ \&\ \mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}_0(X)) \Leftrightarrow \mathscr{O}_0(X) = \mathscr{O}(X).$$

□

Τέλος, με την χρήση της Πρότασης 3.2.1.11 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 3.2.1.12 (μεταβατικότητα των αρχικών τοπολογίων)**.** *Έστω*

1. X *και* $\{Y_i\}_{i\in I}$,
2. $\{f_i\colon X \to Y_i\}_{i\in I}$,
3. $\{(Z_{ij},\mathscr{O}(Z_{ij}))\}_{i\in I, j\in J}$,
4. $\{g_{ij}\colon Y_i \to Z_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$,
5. $(Y_i,\mathscr{O}(Y_i))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y_i)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* Y_i *που επάγεται από την* $\{g_{ij}\}_{j\in J}$, $\forall i \in I$,
6. $(X,\mathscr{O}_1(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_1(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$ *και*
7. $(X,\mathscr{O}_2(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_2(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{g_{ij}\circ f_i\}_{i\in I, j\in J}$.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X).$$

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.2.1.11, αρκεί να δειχθεί ότι κάποια από τις $\mathscr{O}_1(X)$ και $\mathscr{O}_2(X)$ ικανοποιεί την αντίστοιχη ιδιότητα του προαναφερθέντος αποτελέσματος που χαρακτηρίζει την άλλη. Έτσι, επιλέγοντας, για παράδειγμα, την $\mathscr{O}_1(X)$, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\left(f \in C(W;(X,\mathscr{O}_1(X))) \Leftrightarrow \left(g_{ij}\circ f_i \circ f\right)_{j\in J, i\in I} \in \prod_{i\in I}\prod_{j\in J} C\big(W;Z_{ij}\big)\right),\ \forall f\colon W \to X,\ \forall\,(W,\mathscr{O}(W)).$$

Πράγματι, έστω $(W,\mathscr{O}(W))$ και $f\colon W \to X$. Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 3.2.1.11 δις, έχουμε πρώτον ότι

$$f \in C(W;(X,\mathscr{O}_1(X))) \Leftrightarrow (f_i\circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(W;Y_i)$$

και δεύτερον ότι

$$(f_i\circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(W;Y_i) \Leftrightarrow \left(g_{ij}\circ f_i\circ f\right)_{j\in J, i\in I} \in \prod_{i\in I}\prod_{j\in J} C\big(W;Z_{ij}\big),$$

δλδ τελικά το ζητούμενο. □

3.3 Βασικές συνέπειες αρχικής τοπολογικής δομής

Εδώ εισάγουμε ορισμένες χρήσιμες συνέπειες της παραπάνω θεωρίας, οι οποίες είναι εκ των ων ουκ άνευ για ό,τι ακολουθεί.

3.3.1 Ανασύνθεση αριθμήσιμων ψευδομετρικών (μετρικών) σε μία

Το ακόλουθο εισαγωγικό αποτέλεσμα αποτελεί μια κλασική κατασκευή ψευδομετρικής (μετρικής) ανασυνθέτοντας ακολουθία ψευδομετρικών (μετρικών, αντίστοιχα).

Πρόταση 3.3.1.1. *Έστω*

i. $\{(X, f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *οικογένεια ψευδομετρικών (μετρικών) χώρων,*

ii. $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *τ.ω.:*

  α΄. $\phi(0) = 0$,

  β΄. ϕ *γνησίως αύξουσα κοντά στο 0,*

  γ΄. $\phi(\lozenge + \blacklozenge) \le \phi(\lozenge) + \phi(\blacklozenge)$ *και*

  δ΄. ϕ *φραγμένη*

και

iii. $\rho\colon X^2 \to [0,\infty)$ *τ.ω.:*

$$\rho = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \phi \circ f_k.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι το ζεύγος* (X, ρ) *είναι ψευδομετρικός (μετρικός, αντίστοιχα) χώρος.*

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iv. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x\} \subseteq X$.

   Ισχύει ότι

$$x_n \overset{\mathscr{O}_\rho(X)}{\to} x \Leftrightarrow x_n \overset{\mathscr{O}_{f_k}(X)}{\to} x, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Καταρχάς, λόγω της υπόθεσης δ΄ η ρ είναι καλά ορισμένη μιας και

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty.$$

Εξετάζουμε τώρα κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Είναι προφανές ότι έχουμε να ασχοληθούμε μόνο με την τριγωνική ανισότητα. Έστω, λοιπόν, $\{x, y, z\} \subseteq X$ και $k \in \mathbb{N}$. Έχουμε από την τριγωνική ανισότητα για την f_k και την ιδιότητα γ΄ της συνάρτησης ϕ ότι
$$\phi(f_k(x,y)) \le \phi(f_k(x,z)) + \phi(f_k(z,y)),$$
οπότε το μόνο που μας μένει είναι να προσθέσουμε ως προς όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και τα δύο μέρη της παραπάνω ανισότητας πολλαπλασιασμένα επί 2^{-k} για να εξάγουμε το ζητούμενο.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow f_k(x_n, x) \to 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$
Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

   (⇒) Άμεσα έχουμε ότι
$$\rho(x_n, x) \to 0 \Rightarrow \phi(f_k(x_n, x)) \to 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$$
   λόγω μη αρνητικότητας της ϕ. Τώρα, λόγω της συνέχειας (έπεται άμεσα από τις ιδιότητες α΄ και γ΄) καθώς και της ιδιότητας β΄ της ϕ, συμπεραίνουμε ότι
$$\phi(f_k(x_n, x)) \to \phi(0), \ \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f_k(x_n, x) \to 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Πρώτον, λόγω της ιδιότητας ε′ της ϕ έπεται ότι

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\phi(f_k(x_n,x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Δεύτερον, υπό το πρίσμα των ιδιοτήτων α′ και β′ της ϕ, επιλέγουμε το παραπάνω $k_0 \in \mathbb{N}$ να είναι αρκετά μεγάλο τ.ω.: να ορίζεται το

$$\phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2k_0}\right) > 0.$$

Από υπόθεση έπεται ότι

$$\forall k \leq k_0, \ \exists n_k \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } f_k(x_n,x) < \phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2k_0}\right), \ \forall n \geq n_k,$$

δλδ ισοδύναμα

$$\forall k \leq k_0, \ \exists n_k \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \phi(f_k(x_n,x)) < \frac{\varepsilon}{2k_0}, \ \forall n \geq n_k,$$

οπότε, θέτοντας $N = \max\{n_i\}_{i\in\{1,\ldots,k_0\}}$, παίρνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\phi(f_k(x_n,x)) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq N.$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(x_n,x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\phi(f_k(x_n,x)) < \varepsilon, \ \forall n \geq N,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Σημείωση 3.3.1.1. *Υπάρχουν πολλές συναρτήσεις ϕ, άρα και ρ, όπως στη Πρόταση 3.3.1.1. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι*

$$\phi(x) = \frac{x}{1+x}, \ \forall x \in [0,\infty)$$

και

$$\phi(x) = \min\{1,x\}, \ \forall x \in [0,\infty).$$

Έτσι, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 2.6.1.1, της Πρότασης 3.2.1.10 και της Πρότασης 3.3.1.1, εξάγουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3.1.1 (ανασύνθεση ψευδομετρικών (μετρικών) σε μία)**.** *Έστω*

i. $\{(X,f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *οικογένεια ψευδομετρικών (μετρικών) χώρων και*

ii. $(X,\mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την*

$$\{\mathrm{id}_X\colon X \to (X,\mathscr{O}_{f_k}(X))\}_{k=1}^{\infty}.$$

Ισχύουν ότι

1. *ο* $(X,\mathscr{O}(X))$ *είναι ψευδομετρικοποιήσιμος (μετρικοποιήσιμος, αντίστοιχα) και*

2. $\mathscr{O}(X) = \mathscr{O}_\rho(X)$, *όπου* ρ *όπως στην Πρόταση 3.3.1.1.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το σημείο 2. Έστω $x \in X$ και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ ακολουθία τ.ω.:

$$x_n \overset{\mathscr{O}_\rho(X)}{\to} x.$$

Από την Πρόταση 3.3.1.1 έχουμε ισοδύναμα ότι

$$x_n \overset{\mathscr{O}_{f_k}(X)}{\to} x, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

άρα από την Πρόταση 3.2.1.10 έχουμε ισοδύναμα ότι

$$x_n \overset{\mathscr{O}(X)}{\to} x.$$

Συμπερασματικά, από το Θεώρημα 2.6.1.1 (σε συνδυασμό με την Σημείωση 2.6.1.1) έπεται το ζητούμενο. □

Σημείωση 3.3.1.2. *Προφανώς, τόσο η Πρόταση 3.3.1.1 όσο και το Θεώρημα 3.3.1.1 ισχύουν και για πεπερασμένα αριθμήσιμη οικογένεια ψευδομετρικών (μετρικών) χώρων* $\{(X, f_k)\}_{k=1}^m$*, καθώς αρκεί να «γεμίσουμε» την άπειρη οικογένεια των προαναφερθέντων αποτελεσμάτων με άπειρα αντίγραφα κάποιου/ων από τους χώρους αυτούς. Μάλιστα στην περίπτωση πεπερασμένα αριθμήσιμης τέτοιας οικογένειας, μπορεί για συνάρτηση* ρ *να αξιοποιηθεί κάποια από τις ακόλουθες*

$$\rho = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{m} {f_k}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{με } p \in [1, \infty), \ \text{είτε} \\ \max \{f_k\}_{k \in \{1,\ldots,m\}}. \end{cases}$$

3.3.2 Τοπολογικός χώρος γινόμενο

Για τον επόμενο βασικό τοπολογικό χώρο αξιοποιείται η αρχική τοπολογική δομή που επάγεται από τις συναρτήσεις προβολής στην εκάστοτε συντεταγμένη pr.

Ορισμός 3.3.2.1 (τοπολογία γινόμενο)**.** *Έστω*

1. $(X_i, \mathscr{O}(X_i))_{i\in I}$ *και*
2. $\left(\prod\limits_{i\in I} X_i, \mathscr{O}\left(\prod\limits_{i\in I} X_i\right)\right)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}\left(\prod\limits_{i\in I} X_i\right)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* $\prod\limits_{i\in I} X_i$ *που επάγεται από την* $\left\{\mathrm{pr}_j\colon \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_j\right\}_{j\in I}$.

Η $\mathscr{O}\left(\prod\limits_{i\in I} X_i\right)$ *καλείται τοπολογία γινόμενο του* $\prod\limits_{i\in I} X_i$.

Για τον παραπάνω αρχικό τοπολογικό χώρο ισχύουν κανονικά όλα τα αντίστοιχα αποτελέσματα της §3.2.1. Σαν παράδειγμα δίνουμε μονάχα τον επόμενο χρήσιμο χαρακτηρισμό μιας βάσης του συνόλου γινόμενο που παράγει την αντίστοιχη τοπολογία.

Πρόταση 3.3.2.1. *Έστω*

i. $(X_i, \mathscr{O}(X_i))_{i\in I}$ *και*

ii. $Y \subseteq \mathscr{P}\left(\prod\limits_{i\in I} X_i\right)$ *τ.ω.:*

$$Y = \left\{ \prod_{i\in I} Z_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i \;\middle|\; \exists \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I \text{ τ.ω.: } \exists (W_{i_n})_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} \mathscr{O}(X_i) \text{ τ.ω.: } \right.$$
$$\left. \text{τ.ω.: } Z_i = \begin{cases} X_i, & \text{αν } i \notin \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \\ W_{i_n}, & \text{αν } i = i_n, \ \text{με } n \in \{1,\ldots,n_0\}, \end{cases} \forall i \in I \right\}.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι το* Y *είναι βάση του* $\prod\limits_{i\in I} X_i$.
2. *Έστω, επιπλέον,*

iii. $\left(\prod_{i\in I} X_i, \mathscr{O}\left(\prod_{i\in I} X_i\right)\right)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}\left(\prod_{i\in I} X_i\right)$ *να είναι η τοπολογία γινόμενο του* $\prod_{i\in I} X_i$.

Ισχύει ότι η $\mathscr{O}\left(\prod_{i\in I} X_i\right)$ *παράγεται από την* Y.

Απόδειξη. Αρκεί απλά να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.2.1.3, αφού όμως πρώτα παρατηρήσουμε ότι

$$\mathrm{pr}_j^{\leftarrow}(W_j) = \prod_{i\in I} Z_{j_i},\ \forall W_j \subseteq X_j,\ \forall j \in I,$$

όπου

$$Z_{j_i} = \begin{cases} X_i, & \text{αν } i \neq j \\ W_i, & \text{αν } i = j, \end{cases} \quad \forall\,(i,j) \in I^2,$$

οπότε

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} \mathrm{pr}_{i_n}^{\leftarrow}(W_{i_n}) = \prod_{i\in I} Z_i,\ \forall \prod_{n=1}^{n_0} W_{i_n} \subseteq \prod_{n=1}^{n_0} X_{i_n},\ \forall \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I,$$

όπου

$$Z_i = \begin{cases} X_i, & \text{αν } i \notin \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \\ W_{i_n}, & \text{αν } i = i_n, \text{ με } n \in \{1,\dots,n_0\}, \end{cases} \quad \forall i \in I.$$

□

Στην συνέχεια, περνάμε σε μια παρεμφερή διαδικασία με αυτή που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Πρόταση 3.3.2.2. *Έστω*

i. $\{(X_k, f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *οικογένεια ψευδομετρικών (μετρικών) χώρων,*

ii. $\phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *τ.ω.:*

α΄. $\phi(0) = 0$,

β΄. ϕ *γνησίως αύξουσα κοντά στο 0,*

γ΄. $\phi(\lozenge + \blacklozenge) \leq \phi(\lozenge) + \phi(\blacklozenge)$ *και*

δ΄. ϕ *φραγμένη*

και

iii. $\rho\colon \left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)^2 \to [0,\infty)$ *τ.ω.:*

$$\rho(\lozenge,\blacklozenge) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \phi \circ f_k(\mathrm{pr}_k(\lozenge), \mathrm{pr}_k(\blacklozenge)).$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι το ζεύγος* $\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k, \rho\right)$ *είναι ψευδομετρικός (μετρικός, αντίστοιχα) χώρος.*

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iv. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x\} \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} X_k$.

   Ισχύει ότι

$$x_n \overset{\mathscr{O}_\rho\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)}{\to} x \Leftrightarrow \mathrm{pr}_k(x_n) \overset{\mathscr{O}_{f_k}(X_k)}{\to} \mathrm{pr}_k(x),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Καταρχάς, λόγω της υπόθεσης δ′ η ρ είναι καλά ορισμένη μιας και

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty.$$

Εξετάζουμε τώρα κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Είναι προφανές ότι έχουμε να ασχοληθούμε μόνο με την τριγωνική ανισότητα. Έστω, λοιπόν, $\{x, y, z\} \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ και $k \in \mathbb{N}$. Έχουμε από την τριγωνική ανισότητα για την f_k και την ιδιότητα γ′ της συνάρτησης ϕ ότι

$$\phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x), \mathrm{pr}_k(y))) \le \phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x), \mathrm{pr}_k(z))) + \phi(f_k(\mathrm{pr}_k(z), \mathrm{pr}_k(y))),$$

οπότε το μόνο που μας μένει είναι να προσθέσουμε ως προς όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και τα δύο μέρη της παραπάνω ανισότητας πολλαπλασιασμένα επί 2^{-k} για να εξάγουμε το ζητούμενο.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x)) \to 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Άμεσα έχουμε ότι

$$\rho(x_n, x) \to 0 \Rightarrow \phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x))) \to 0, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

λόγω μη αρνητικότητας της ϕ. Τώρα, λόγω της συνέχειας (έπεται άμεσα από τις ιδιότητες α′ και γ′) καθώς και της ιδιότητας β′ της ϕ, συμπεραίνουμε ότι

$$\phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x))) \to \phi(0), \ \forall k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x)) \to 0, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon > 0$. Πρώτον, λόγω της ιδιότητας ε′ της ϕ έπεται ότι

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k} \phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x))) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Δεύτερον, υπό το πρίσμα των ιδιοτήτων α′ και β′ της ϕ, επιλέγουμε το παραπάνω $k_0 \in \mathbb{N}$ να είναι αρκετά μεγάλο τ.ω.: να ορίζεται το

$$\phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2k_0}\right) > 0.$$

Από υπόθεση έπεται ότι

$$\forall k \le k_0, \ \exists n_k \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x)) < \phi^{-1}\left(\frac{\varepsilon}{2k_0}\right), \ \forall n \ge n_k,$$

δλδ ισοδύναμα

$$\forall k \le k_0, \ \exists n_k \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x))) < \frac{\varepsilon}{2k_0}, \ \forall n \ge n_k,$$

οπότε, θέτοντας $N = \max\{n_i\}_{i \in \{1, \ldots, k_0\}}$, παίρνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k} \phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x))) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \ge N.$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \phi(f_k(\mathrm{pr}_k(x_n), \mathrm{pr}_k(x))) < \varepsilon, \ \forall n \ge N,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Έτσι, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 2.6.1.1, της Πρότασης 3.2.1.10 και της Πρότασης 3.3.2.2, εξάγουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.3.2.1 (ψευδομετρική (μετρική) τοπολογία γινόμενο)**.** *Έστω*

i. $\{(X_k, f_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *οικογένεια ψευδομετρικών (μετρικών) χώρων και*

ii. $\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k, \mathscr{O}\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)\right)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)$ *να είναι η τοπολογία γινόμενο του* $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$.

Ισχύουν ότι

1. *ο* $\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k, \mathscr{O}\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)\right)$ *είναι ψευδομετρικοποιήσιμος (μετρικοποιήσιμος, αντίστοιχα) και*

2. $\mathscr{O}\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right) = \mathscr{O}_\rho\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)$, *όπου ρ όπως στην Πρόταση 3.3.2.2.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το σημείο 2. Έστω $x \in \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ και $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \prod_{k=1}^{\infty} X_k$ ακολουθία τ.ω.:

$$x_n \overset{\mathscr{O}_\rho\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)}{\to} x.$$

Από την Πρόταση 3.3.1.1 έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\mathrm{pr}_k(x_n) \overset{\mathscr{O}_{f_k}(X_k)}{\to} \mathrm{pr}_k(x), \ \forall k \in \mathbb{N},$$

άρα από την Πρόταση 3.2.1.10 έχουμε ισοδύναμα ότι

$$x_n \overset{\mathscr{O}\left(\prod_{k=1}^{\infty} X_k\right)}{\to} x.$$

Συμπερασματικά, από το Θεώρημα 2.6.1.1 (σε συνδυασμό με την Σημείωση 2.6.1.1) έπεται το ζητούμενο. □

Σημείωση 3.3.2.1. *Προφανώς, τόσο η Πρόταση 3.3.2.2 όσο και το Θεώρημα 3.3.2.1 ισχύουν και για πεπερασμένα αριθμήσιμη οικογένεια ψευδομετρικών (μετρικών) χώρων* $\{(X_k, f_k)\}_{k=1}^{m}$, *καθώς αρκεί να «γεμίσουμε» την άπειρη οικογένεια των προαναφερθέντων αποτελεσμάτων με άπειρα αντίγραφα κάποιου/ων από τους χώρους αυτούς. Μάλιστα στην περίπτωση πεπερασμένα αριθμήσιμης τέτοιας οικογένειας, μπορεί για συνάρτηση ρ να αξιοποιηθεί κάποια από τις ακόλουθες*

$$\rho(\lozenge, \blacklozenge) = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{m} {f_k}^p(\mathrm{pr}_k(\lozenge), \mathrm{pr}_k(\blacklozenge))\right)^{\frac{1}{p}}, \ \textit{με } p \in [1, \infty), \ \textit{είτε} \\ \max\{f_k(\mathrm{pr}_k(\lozenge), \mathrm{pr}_k(\blacklozenge))\}_{k \in \{1,\ldots,m\}}. \end{cases}$$

3.3.3 Σχετικός τοπολογικός χώρος

Για τον επόμενο βασικό τοπολογικό χώρο αξιοποιείται η αρχική τοπολογική δομή που επάγεται από την συνάρτηση εγκλεισμού ι.

Ορισμός 3.3.3.1 (σχετική τοπολογία)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X))$ *και*

2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *τ.ω.:*

   i. $Y \subseteq X$ *και*

   ii. η $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* Y *που επάγεται από την* $\iota\colon Y \to X$.

Η $\mathscr{O}(Y)$ καλείται σχετική τοπολογία του Y (ως προς την $\mathscr{O}(X)$), τα στοιχεία της οποίας τα καλούνται σχετικά ανοικτά σύνολα, ενώ τα συμπληρώματα (ως προς το Y) αυτών σχετικά κλειστά.

Στην συνέχεια παραθέτουμε δύο χρήσιμα αποτελέσματα ως άμεσες συνέπειες της Πρότασης 3.2.1.12 και τα οποία αφορούν την σχετική τοπολογία.

Πρόταση 3.3.3.1 (σχετική τοπολογία σχετικής τοπολογίας). *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X))$,
2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *τ.ω.:*
   i. $Y \subseteq$ *και*
   ii. *η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y

   και
3. $\{(Z, \mathscr{O}_n(Z))\}_{n=1}^{2}$ *τ.ω.:*
   i. $Z \subseteq Y$,
   ii. *η* $\mathscr{O}_1(Z)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Z *ως προς την* $\mathscr{O}(Y)$ *και*
   iii. *η* $\mathscr{O}_2(Z)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Z *ως προς την* $\mathscr{O}(X)$.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X).$$

Απόδειξη. Έπεται απευθείας από τον συνδυασμό της Πρότασης 3.2.1.12, του Ορισμού 3.3.3.1 και της ισότητας

$$\iota_{Z \subseteq X} = \iota_{Y \subseteq X} \circ \iota_{Z \subseteq Y}.$$

□

Πρόταση 3.3.3.2 (τοπολογία γινόμενο σχετικών τοπολογιών και σχετική τοπολογία τοπολογίας γινόμενο). *Έστω*

1. $\{(X_i, \mathscr{O}(X_i))\}_{i \in I}$,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i \in I}$ *τ.ω.:*
   i. $Y \subseteq X$ *και*
   ii. *η* $\mathscr{O}(Y_i)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y_i, $\forall i \in I$,

   και
3. $\left\{\left(\prod_{i \in I} Y_i, Z_n\right)\right\}_{n=1}^{2}$ *οικογένεια τοπολογικών χώρων τ.ω.:*
   i. $Z_1 = \mathscr{O}\left(\prod_{i \in I} Y_i\right)$ *και*
   ii. *η* Z_2 *να είναι η σχετική τοπολογία του* $\prod_{i \in I} Y_i$ *(ως προς την* $\mathscr{O}\left(\prod_{i \in I} X_i\right)$*).*

Ισχύει ότι

$$Z_1 = Z_2.$$

Απόδειξη. Έπεται απευθείας από τον συνδυασμό της Πρότασης 3.2.1.12, του Ορισμού 3.3.2.1 και του Ορισμού 3.3.3.1, καθώς επίσης της ισότητας

$$\mathrm{pr}_i \circ \iota_{\prod_{i \in I} Y_i \subseteq \prod_{i \in I} X_i} = \iota_{Y_i \subseteq X_i} \circ \mathrm{pr}_i, \quad \forall i \in I.$$

□

Για τον αρχικό τοπολογικό χώρο που εισάγαμε εδώ ισχύουν κανονικά όλα τα αντίστοιχα αποτελέσματα της §3.2.1. Σαν παράδειγμα δίνουμε μονάχα τον επόμενο χρήσιμο χαρακτηρισμό των σχετικά ανοικτών και σχετικά κλειστών συνόλων.

Πρόταση 3.3.3.3. *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X))$ *και*

ii. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *τ.ω.:*

α΄. $Y \subseteq X$ *και*

β΄. *η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y.

Ισχύουν ότι

1. $\mathscr{O}(Y) = \{Y \cap V \subseteq Y\}_{V \in \mathscr{O}(X)}$ *και*

2. $\mathscr{C}(Y) = \{Y \cap V \subseteq Y\}_{V \in \mathscr{C}(X)}$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Από την Πρόταση 3.2.1.4 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathscr{O}(Y) = \{\iota^{\leftarrow}(V) \subseteq Y\}_{V \in \mathscr{O}(X)} = \{\iota^{\leftarrow}(\iota(Y) \cap V) \subseteq Y\}_{V \in \mathscr{O}(X)} = \{\iota^{\leftarrow}(Y \cap V) \subseteq Y\}_{V \in \mathscr{O}(X)} = \\ = \{Y \cap V \subseteq Y\}_{V \in \mathscr{O}(X)}.\end{aligned}$$

2. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}W \in \mathscr{C}(Y) \Leftrightarrow Y \setminus W \in \mathscr{O}(YX) \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } Y \setminus W = Y \cap V \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } Y \setminus (Y \setminus W) = Y \setminus (Y \cap V) \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } W = Y \setminus V \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{C}(X) \text{ τ.ω.: } W = Y \setminus (X \setminus V) \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{C}(X) \text{ τ.ω.: } W = Y \cap V,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το πρώτο σημείο για την δεύτερη διπλή συνεπαγωγή.

□

Μάλιστα, άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.3.3.3 είναι το παρακάτω.

Πρόταση 3.3.3.4. *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X))$ *και*

ii. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *τ.ω.:*

α΄. $Y \subseteq X$ *και*

β΄. *η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y

και

iii. $Z \subseteq Y$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

ii. *γ΄.* $Y \in \mathscr{O}(X)$.

Ισχύει ότι

$$Z \in \mathscr{O}(Y) \Leftrightarrow Z \in \mathscr{O}(X).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

ii. *γ΄.* $Y \in \mathscr{C}(X)$.

Ισχύει ότι

$$Z \in \mathscr{C}(Y) \Leftrightarrow Z \in \mathscr{C}(X).$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Δείχνουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

(⇒) Από το σημείο 1 της Πρότασης 3.3.3.3 έχουμε ότι

$$\exists V \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } Z = Y \cap V,$$

οπότε από τον ορισμό τον τοπολογιών έπεται ότι

$$Z \in \mathscr{O}(X).$$

(⇐) Γράφοντας

$$Z = Y \cap Z,$$

παίρνουμε από υπόθεση σε συνδυασμό με το σημείο 1 της Πρότασης 3.3.3.3 ότι

$$Z \in \mathscr{O}(Y).$$

2. Δείχνουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

(⇒) Από το σημείο 2 της Πρότασης 3.3.3.3 έχουμε ότι

$$\exists V \in \mathscr{C}(X) \text{ τ.ω.: } Z = Y \cap V,$$

οπότε από ιδιότητα των κλειστών υποσυνόλων έπεται ότι

$$Z \in \mathscr{C}(X).$$

(⇐) Γράφοντας

$$Z = Y \cap Z,$$

παίρνουμε από υπόθεση σε συνδυασμό με το σημείο 2 της Πρότασης 3.3.3.3 ότι

$$Z \in \mathscr{C}(Y).$$

□

3.4 Τοπολογικοί χώροι επαγόμενοι από συναρτήσεις (μέρος II)

Εδώ εισάγουμε την «δυϊκή» έννοια της αρχικής τοπολογικής δομής όπως αυτή παρουσιάστηκε στην §3.2.1, και συγκεκριμένα αυτή της τελικής τοπολογικής δομής.

3.4.1 Τελικός τοπολογικός χώρος

Η διαδικασία που ακολουθείται εδώ αποσκοπεί στην τοπολόγηση του κοινού συνόλου τιμών διάφορων συναρτήσεων από τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός

Πρώτα ξεκινάμε με το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.4.1.1. *Έστω*

1. X,
2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *και*
3. $f : Y \to X$.

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(X, \left\{W \subseteq X \,\middle|\, f^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y)\right\}\right)$ *είναι τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του ορισμού των τοπολογιών ως εξής.

- Έχουμε ότι

$$f^{\leftarrow}(\varnothing) = \varnothing \in \mathscr{O}(Y) \ni Y = f^{\leftarrow}(X),$$

οπότε

$$\{\varnothing, X\} \subseteq \left\{W \subseteq X \,\middle|\, f^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y)\right\}.$$

- Έστω $\{W_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \{W \subseteq X \,|\, f^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y)\}$. Τότε
$$\{f^{\leftarrow}(W_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{O}(Y),$$
και αφού το $\mathscr{O}(Y)$ είναι τοπολογία έχουμε ότι
$$\bigcap_{n=1}^{n_0} f^{\leftarrow}(W_n) \in \mathscr{O}(Y) \Leftrightarrow f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{n=1}^{n_0} W_n\right) \in \mathscr{O}(Y),$$
άρα
$$\bigcap_{n=1}^{n_0} W_n \in \{W \subseteq X \,|\, f^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y)\}.$$

- Έστω $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \{W \subseteq X \,|\, f^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y)\}$. Τότε
$$\{f^{\leftarrow}(W_i)\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{O}(Y),$$
και αφού το $\mathscr{O}(Y)$ είναι τοπολογία έχουμε ότι
$$\bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(W_i) \in \mathscr{O}(Y) \Leftrightarrow f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{i\in I} W_i\right) \in \mathscr{O}(Y),$$
άρα
$$\bigcup_{i\in I} W_i \in \{W \subseteq X \,|\, f^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y)\}.$$

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.4.1.1 και της Πρότασης 3.1.2.2 έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.4.1.1 (τελική τοπολογία). *Έστω*

1. X,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I}$,
3. $\{f_i \colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.:*
$$\mathscr{O}(X) = \inf\left\{\{W \subseteq X \,|\, f_i^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y_i)\}\right\}_{i\in I}.$$

Η $\mathscr{O}(X)$ καλείται τελική τοπολογία του X που επάγεται από την οικογένεια συναρτήσεων $\{f_i\}_{i\in I}$.

Στην συνέχεια, παρουσιάζονται διάφοροι τύποι χαρακτηρισμού των τελικών τοπολογιών και μελετώνται οι άμεσες συνέπειες τους.

Άμεσος χαρακτηρισμός

Με βάση τον Ορισμό 3.2.1.1, άμεσα από την Πρόταση 3.1.2.2 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 3.4.1.2. *Έστω*

1. X,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I}$,
3. $\{f_i \colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η $\mathscr{O}(X)$ να είναι η τελική τοπολογία του X που επάγεται από την $\{f_i\}_{i\in I}$.*

Ισχύει ότι
$$\mathscr{O}(X) = \left\{W \subseteq X \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{O}(Y_i)\right\}.$$

Απόδειξη. Έπεται απευθείας από τον Ορισμό 3.4.1.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.1.2.2, καθώς

$$\left\{W \subseteq X \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i)\right\} = \bigcap_{i\in I}\{W \subseteq X \mid f_i^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y_i)\}.$$

□

Σημείωση 3.4.1.1. *Έστω*

1. X,
2. $(Y, \mathscr{O}(Y))$,
3. $f\colon Y \to X$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η τελική τοπολογία του* X *που επάγεται από το μονοσύνολο* $\{f\}$.

Πρός απλούστευση, αντί για «…που επάγεται από το μονοσύνολο $\{f\}$*» θα γράφουμε απλά «…που επάγεται από την (συνάρτηση)* f*».*

Χαρακτηρισμός μέσω μέγιστου συνόλου

Με χρήση της Πρότασης 3.4.1.2 και της Πρότασης 3.1.2.1 έχουμε το επόμενο.

Πρόταση 3.4.1.3 (χαρακτηρισμός τελικής τοπολογίας μέσω μέγιστου στοιχείου)**.** *Έστω*

i. X,

ii. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I}$,

iii. $\{f_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I}$ *και*

iv. $(X, \mathscr{O}_0(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η τελική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύουν ότι

1. $\exists\,\mathrm{grea}\, S_j,\ \forall j \in \{1,2,3\}$ *και*
2. $\mathscr{O}_0(X) = \mathrm{grea}\, S_j,\ \forall j \in \{1,2,3\}$,

όπου

$$S_1 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \prod_{i\in I}\{f_i^{\leftarrow}(W) \subseteq Y_i\}_{W\in\mathscr{O}(X)} \subseteq \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i)\right\},$$

$$S_2 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \prod_{i\in I}\{f_i^{\leftarrow}(W) \subseteq Y_i\}_{W\in\mathscr{C}(X)} \subseteq \prod_{i\in I}\mathscr{C}(Y_i)\right\} \text{ και}$$

$$S_3 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, (f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}C(Y_i; X)\right\}.$$

Απόδειξη. Έχουμε τα παρακάτω.

- Απευθείας από την Πρόταση 3.4.1.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.1.2.1 έπεται ότι

$$\exists\,\mathrm{grea}\left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \mathscr{O}(X) \subseteq \left\{W \subseteq X \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i)\right\}\right\} \ \&$$
$$\& \ \mathscr{O}_0(X) = \mathrm{grea}\left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, \mathscr{O}(X) \subseteq \left\{W \subseteq X \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i)\right\}\right\}.$$

  Καθώς

$$\mathscr{O}(X) \subseteq \left\{W \subseteq X \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i)\right\} \Leftrightarrow \prod_{i\in I}\{f_i^{\leftarrow}(W)\}_{W\in\mathscr{O}(X)} \subseteq \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i),$$

  παίρνουμε ότι

$$\exists\,\mathrm{grea}\, S_1 \ \& \ \mathscr{O}_0(X) = \mathrm{grea}\, S_1.$$

- Υπό το πρίσμα του πρώτου σημείου και του ορισμού των κλειστών συνόλων, για να δειχθεί ότι
$$\exists\, \mathrm{grea}\, S_2 \ \&\ \mathscr{O}_0(X) = \mathrm{grea}\, S_2,$$
αρκεί να ελέγξουμε ότι αν $i \in I$ και $W \subseteq X$, τότε
$$f_i^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{C}(Y_i) \Leftrightarrow f_i^{\leftarrow}(X \setminus W) \in \mathscr{O}(Y_i).$$
Πράγματι,
$$f_i^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{C}(Y_i) \Leftrightarrow Y_i \setminus f_i^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y_i) \Leftrightarrow f_i^{\leftarrow}(X) \setminus f_i^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}(Y_i) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_i^{\leftarrow}(X \setminus W) \in \mathscr{O}(Y_i).$$

- Έχουμε ότι
$$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i;X) \Leftrightarrow \prod_{i\in I} \{f_i^{\leftarrow}(W)\}_{W\in\mathscr{O}(X)} \subseteq \prod_{i\in I} \mathscr{O}(Y_i) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \prod_{i\in I} \{f_i^{\leftarrow}(W)\}_{W\in\mathscr{C}(X)} \subseteq \prod_{i\in I} \mathscr{C}(Y_i),$$
άρα από οποιοδήποτε από τα δύο πρώτα σημεία συμπεραίνουμε ότι
$$\exists\, \mathrm{grea}\, S_3 \ \&\ \mathscr{O}_0(X) = \mathrm{grea}\, S_3.$$

□

Χαρακτηρισμός μέσω συνέχειας

Το επόμενο είναι το αντίστοιχο της Πρότασης 3.2.1.11 και για το οποίο αξιοποιείται η Πρόταση 3.4.1.2 και η Πρόταση 3.4.1.3.

Πρόταση 3.4.1.4 (χαρακτηρισμός τελικής τοπολογίας μέσω συνέχειας)**.** *Έστω*

1. X,
2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))\}_{i\in I} \cup \{(Z, \mathscr{O}(Z))\}$,
3. $\{f_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I} \cup \{f\colon X \to Z\}$ *και*
4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η τελική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύει ότι η $\mathscr{O}(X)$ *χαρακτηρίζεται μοναδικά από την ιδιότητα*
$$f \in C(X;Z) \Leftrightarrow (f \circ f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i;Z).$$

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε τον χαρακτηρισμό. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έπεται απευθείας από την Πρόταση 3.4.1.3 σε συνδυασμό με την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\{f^{\leftarrow}(W) \subseteq X\}_{W\in\mathscr{O}(Z)} \subseteq \mathscr{O}(X).$$
Πράγματι, έστω $W \in \mathscr{O}(Z)$. Τότε από την υπόθεση έχουμε ότι
$$(f_i^{\leftarrow}(f^{\leftarrow}(W)))_{i\in I} = \big((f \circ f_i)^{\leftarrow}(W)\big)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{O}(Y_i).$$
Έτσι, το ζητούμενο έπεται απευθείας από την Πρόταση 3.4.1.2.

Έπειτα δείχνουμε την μοναδικότητα του χαρακτηρισμού. Πράγματι, έστω επίσης $(X, \mathscr{O}_0(X))$ τ.ω.:

$$f \in C((X, \mathscr{O}_0(X)); Z) \Leftrightarrow (f \circ f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(Y_i; Z).$$

Καθώς

$$C((X, \mathscr{O}(X)); (X, \mathscr{O}(X))) \ni \mathrm{id}_X \in C((X, \mathscr{O}_0(X)); (X, \mathscr{O}_0(X))),$$

έχουμε τότε από την συνεπαγωγή $(\Rightarrow)$ που δείξαμε παραπάνω και την συνεπαγωγή $(\Rightarrow)$ της υπόθεσης, αντίστοιχα, ότι

$$\prod_{i \in I} C(Y_i; (X, \mathscr{O}(X))) \ni (\mathrm{id}_X \circ f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(Y_i; (X, \mathscr{O}_0(X))).$$

Το μόνο που μας μένει τώρα είναι να θεωρήσουμε ότι το X είναι εφοδιασμένο με την $\mathscr{O}_0(X)$ και την $\mathscr{O}(X)$, αντίστοιχα, έτσι ώστε να συμπεράνουμε από την συνεπαγωγή $(\Leftarrow)$ που δείξαμε παραπάνω και την συνεπαγωγή $(\Leftarrow)$ της υπόθεσης, αντίστοιχα, ότι

$$C((X, \mathscr{O}_0(X)); (X, \mathscr{O}(X))) \ni \mathrm{id}_X \in C((X, \mathscr{O}(X)); (X, \mathscr{O}_0(X))).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$(\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}_0(X) \;\&\; \mathscr{O}_0(X) \subseteq \mathscr{O}(X)) \Leftrightarrow \mathscr{O}_0(X) = \mathscr{O}(X).$$

□

Τέλος, με την χρήση της Πρότασης 3.4.1.4 έπεται το αντίστοιχο της Πρότασης 3.2.1.12.

Πρόταση 3.4.1.5 (μεταβατικότητα των τελικών τοπολογιών). *Έστω*

1. $\{X\} \cup \{Y_i\}_{i \in I}$,
2. $\{f_i \colon Y_i \to X\}_{i \in I}$,
3. $\{(Z_{ij}, \mathscr{O}(Z_{ij}))\}_{i \in I, j \in J}$,
4. $\{g_{ij} \colon Z_{ij} \to Y_i\}_{i \in I, j \in J}$,
5. $(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y_i)$ *να είναι η τελική τοπολογία του* Y_i *που επάγεται από την* $\{g_{ij}\}_{j \in J}$, $\forall i \in I$,
6. $(X, \mathscr{O}_1(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_1(X)$ *να είναι η τελική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i \in I}$ *και*
7. $(X, \mathscr{O}_2(X))$ *τ..ω: η* $\mathscr{O}_2(X)$ *να είναι η τελική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i \circ g_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$.

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X).$$

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.4.1.4, αρκεί να δειχθεί ότι κάποια από τις $\mathscr{O}_1(X)$ και $\mathscr{O}_2(X)$ ικανοποιεί την αντίστοιχη ιδιότητα του προαναφερθέντος αποτελέσματος που χαρακτηρίζει την άλλη. Έτσι, επιλέγοντας, για παράδειγμα, την $\mathscr{O}_1(X)$, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\left(f \in C((X, \mathscr{O}_1(X)); W) \Leftrightarrow (f \circ f_i \circ g_{ij})_{j \in J, i \in I} \in \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} C(Z_{ij}; W) \right), \; \forall f \colon X \to W, \; \forall (W, \mathscr{O}(W)).$$

Πράγματι, έστω $(W, \mathscr{O}(W))$ και $f \colon W \to X$. Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 3.4.1.4 δις, έχουμε πρώτον ότι

$$f \in C(W; (X, \mathscr{O}_1(X))) \Leftrightarrow (f \circ f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(Y_i; W)$$

και δεύτερον ότι

$$(f \circ f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(Y_i; W) \Leftrightarrow (f \circ f_i \circ g_{ij})_{j \in J, i \in I} \in \prod_{i \in I} \prod_{j \in J} C(Z_{ij}; W),$$

δλδ τελικά το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 4

Κάποιες βασικές έννοιες των διανυσματικών χώρων

Εδώ περιγράφονται βασικά υποσύνολα των διανυσματικών χώρων, και συγκεκριμένα οι διανυσματικοί υπόχωροι, τα κυρτά υποσύνολα, τα ισορροπημένα, οι δίσκοι και τα απορροφητικά υποσύνολα. Επίσης εισάγεται το χρήσιμο συναρτησιοειδές Minkowski, το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με τα υποσύνολα αυτά.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [23], [3], [32] και [25], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

4.1 Διανυσματικοί υπόχωροι

Βασική είναι η επόμενη άμεση συνέπεια του ορισμού των διανυσματικών χώρων.

Πρόταση 4.1.1. *Έστω*

1. $(X, +_X, (X_0, +_{X_0}, \cdot_{X_0}), \cdot_X)$,
2. $Y \subseteq X$ *και*
3. $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0)$.

Ισχύει ότι

$$\left(\sum_{\substack{n=1 \\ (\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ +_{X_0})}}^{n_0} Z_n\right) Y \subseteq \sum_{\substack{n=1 \\ (\omega\varsigma\ \pi\rho o\varsigma\ +_X)}}^{n_0} (Z_n Y).$$

Απόδειξη. Για $n = 1$ δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Στην περίπτωση όπου $n_0 \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, αρκεί να δειχθεί το αποτέλεσμα μονάχα για $n_0 = 2$, καθώς έπεται μετά άμεσα με επαγωγή το ζητούμενο για αυθαίρετο τέτοιο n_0. Έστω, λοιπόν, $x \in (Z_1 +_{X_0} Z_2) Y$, δλδ

$$\exists \left((z_n)_{n=1}^2, y\right) \in \mathscr{P}\left(\prod_{n=1}^2 Z_n\right) \times Y \text{ τ.ω.: } x = (z_1 +_{X_0} z_2) y = \underbrace{z_1 y}_{\in Z_1 Y} +_X \underbrace{z_2 y}_{\in Z_2 Y} \in Z_1 Y +_X Z_2 Y,$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.1.1, ακολουθεί ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 4.1.1 (διανυσματική θήκη υποσυνόλου και διανυσματικός υπόχωρος)**.** *Έστω*

i. $(X, +, X_0, \cdot)$ *και*

ii. $Y \subseteq X$.

Θέτουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

iii. $Y \subseteq \operatorname{span} Y \subseteq X$ *τ.ω.:*[1]

$$\operatorname{span} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0)} \sum_{n=1}^{n_0} (Z_n Y).$$

Το $\operatorname{span} Y$ *καλείται διανυσματική (ή, αλλιώς, γραμμική) θήκη του* Y *(στον* X*).*

2. *Το* Y *καλείται διανυσματικός υπόχωρος (του* X*) όταν*

$$\operatorname{span} Y = Y.$$

Σημείωση 4.1.1. *Δυο λόγια σχετικά με τον Ορισμό 4.1.1.*

1. *Προκύπτει άμεσα ότι*
$$0_X \in \operatorname{span} Y, \ \forall Y \subseteq X.$$

2. *Το* $Y \subseteq X$ *είναι διανυσματικός υπόχωρος όταν*

$$\operatorname{span} Y \subseteq Y,$$

καθώς ο αντίστροφος εγκλεισμός πάντα, προφανώς, ισχύει.

Τα επόμενα δύο είναι άμεσα.

Πρόταση 4.1.2. *Έστω*

1. $(X, +, X_0, \cdot)$ *και*

2. $Y \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$Y \text{ διανυσματικός υπόχωρος} \Leftrightarrow \left(Y, +|_{Y^2}, X_0, \cdot|_{X_0 \times Y}\right) \text{ διανυσματικός χώρος.}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια των ορισμών. □

Πρόταση 4.1.3 (τομή και ένωση διανυσματικών θηκών υποσυνόλων)**.** *Έστω* $(X, +, X_0, \cdot)$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$. *Ισχύει ότι*

$$\bigcap_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \subseteq X \text{ διανυσματικός υπόχωρος.}$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *άυξον δίκτυο*[2]. *Ισχύει ότι*

$$\bigcup_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \subseteq X \text{ διανυσματικός υπόχωρος.}$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left(Z_n \bigcap_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \right) \subseteq \bigcap_{i \in I} \operatorname{span} Y_i, \ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0).$$

---

[1] Ισοδύναμα,

$$\operatorname{span} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\{z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq X_0} \sum_{n=1}^{n_0} (z_n Y).$$

[2] Δλδ

$$Y_i \subseteq Y_j, \ \forall (i, j) \in I^2 \text{ τ.ω.: } i \leq j.$$

Πράγματι, έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0)$ και

$$x \in \sum_{n=1}^{n_0} \left(Z_n \bigcap_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \right) \Leftrightarrow \exists \left((z_n)_{n=1}^{n_0}, \{y_n\}_{n=1}^{n_0} \right) \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_n \times \mathscr{P}\left(\bigcap_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \right) \text{ τ.ω.: } x = \sum_{n=1}^{n_0} z_n y_n.$$

Αφού

$$y_n \in \bigcap_{i \in I} \operatorname{span} Y_i, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\} \Leftrightarrow y_n \in \operatorname{span} Y_i, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\}, \ \forall i \in I,$$

έχουμε από τον Ορισμό 4.1.1 ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} z_n y_n \in \operatorname{span} Y_i, \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \operatorname{span} Y_i, \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \operatorname{span} Y_i,$$

δλδ το ζητούμενο.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left(Z_n \bigcup_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} \operatorname{span} Y_i, \ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0).$$

Πράγματι, έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0)$ και

$$x \in \sum_{n=1}^{n_0} \left(Z_n \bigcup_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \right) \Leftrightarrow \exists \left((z_n)_{n=1}^{n_0}, \{y_n\}_{n=1}^{n_0} \right) \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_n \times \mathscr{P}\left(\bigcup_{i \in I} \operatorname{span} Y_i \right) \text{ τ.ω.: } x = \sum_{n=1}^{n_0} z_n y_n.$$

Αφού

$$y_n \in \bigcup_{i \in I} \operatorname{span} Y_i, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\} \Leftrightarrow \exists \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I \text{ τ.ω.: } y_n \in \operatorname{span} Y_{i_n}, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\},$$

θέτοντας

$$i_0 = \operatorname{grea} \{i_n\}_{n=1}^{n_0},$$

έχουμε ότι

$$Y_{i_n} \subseteq Y_{i_0}, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\} \Rightarrow \operatorname{span} Y_{i_n} \subseteq \operatorname{span} Y_{i_0}, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\},$$

οπότε

$$y_n \in \operatorname{span} Y_{i_0}, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\},$$

άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.1.1, ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} z_n y_n \in \operatorname{span} Y_{i_0} \Leftrightarrow x \in \operatorname{span} Y_{i_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in I} \operatorname{span} Y_i,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.1.3, έπεται άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 4.1.4 (χαρακτηρισμός διανυσματικής θήκης υποσυνόλου μέσω ελάχιστου στοιχείου). *Έστω*

i. $(X, +, X_0, \cdot)$,

ii. $Y \subseteq X$ *και*

iii. $\{Z_i\}_{i \in I} = \left\{ Z \subseteq X \,\middle|\, Y \subseteq Z \text{ \& } Z \text{ διανυσματικός υπόχωρος} \right\}$.

Ισχύει ότι

$$\operatorname{span} Y \overset{1}{=} \operatorname{lea} \{Z_i\}_{i \in I} \overset{2}{=} \bigcap_{i \in I} Z_i.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε ισότητα ξεχωριστά.

$\left(\overset{1}{=}\right)$ Καταρχήν, άμεσα από την Πρόταση 4.1.3 έχουμε ότι

$$\operatorname{span} Y \in \{Z_i\}_{i\in I},$$

οπότε αρκεί έπειτα να δείξουμε ότι

$$\operatorname{span} Y \subseteq Z_i, \ \forall i \in I.$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$Y \subseteq Z_i, \ \forall i \in I \Rightarrow \operatorname{span} Y \subseteq \operatorname{span} Z_i = Z_i, \ \forall i \in I.$$

$\left(\overset{2}{=}\right)$ Δείχνουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

$\left(\overset{2}{\subseteq}\right)$ Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.1.3, παίρνουμε άμεσα ότι

$$\bigcap_{i\in I} Z_i \in \{Z_i\}_{i\in I},$$

συνεπώς έπεται το ζητούμενο από τον ίδιο τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

$\left(\overset{2}{\supseteq}\right)$ Έπεται άμεσα από το ότι

$$\bigcap_{i\in I} Z_i \subseteq Z_i, \ \forall i \in I,$$

σε συνδυασμό με τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

□

Με χρήση της Πρότασης 4.1.4, άμεσα έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 4.1.5 (διανυσματική θήκη πεπερασμένης ένωσης διανυσματικών θηκών υποσυνόλων). *Έστω*

i. $(X, +, X_0, \cdot)$,

ii. $\{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *και*

iii. $Y \subseteq X$ *τ.ω.:*

$$Y = \sum_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n.$$

Ισχύουν ότι

1. *το* Y *είναι διανυσματικός υπόχωρος και*

2. $Y = \operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n$.

Απόδειξη. Δείχνουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{m_0} (Z_m Y) \subseteq Y, \ \forall \{Z_n\}_{m=1}^{m_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0).$$

Πράγματι, έστω $\{Z_n\}_{m=1}^{m_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0)$ και

$$x \in \sum_{m=1}^{m_0} (Z_m Y) \Leftrightarrow \exists \left((z_m)_{m=1}^{m_0}, \{y_m\}_{m=1}^{m_0}\right) \in \prod_{m=1}^{m_0} Z_m \times \mathscr{P}(Y) \text{ τ.ω.: } x = \sum_{m=1}^{m_0} z_m y_m.$$

Αφού

$$y_m \in Y, \ \forall m \in \{1, \ldots, m_0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists (y_{mn})_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n \text{ τ.ω.: } y_m = \sum_{n=1}^{n_0} y_{mn}, \ \forall m \in \{1, \ldots, m_0\},$$

έχουμε ότι

$$x = \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{n=1}^{n_0} z_m y_{mn} = \sum_{n=1}^{n_0} \underbrace{\sum_{m=1}^{m_0} z_m y_{mn}}_{\in \operatorname{span} Y_n} \in Y,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον Ορισμό 4.1.1, και έτσι έπεται το ζητούμενο.

2. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   (⊆) Έστω

   $$x \in Y \Leftrightarrow \exists (y_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n \text{ τ.ω.: } x = \sum_{n=1}^{n_0} y_n.$$

   Αφού

   $$y_n \in \operatorname{span} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n, \ \forall n \in \{1, \dots, n_0\},$$

   έχουμε από τον Ορισμό 4.1.1 ότι

   $$x \in \operatorname{span} \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n,$$

   δλδ το ζητούμενο.

   (⊇) Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.1.4, αρκεί να δείξουμε ότι

   $$Y \in \left\{ Z \subseteq X \,\middle|\, \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n \subseteq Z \ \&\ Z \text{ διανυσματικός υπόχωρος} \right\},$$

   οπότε, λόγω του σημείου 1, μένει να δείξουμε ότι

   $$\bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n \subseteq Y.$$

   Πράγματι, έστω

   $$x \in \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{span} Y_n \Leftrightarrow \exists n_\bullet \{1, \dots, n_0\} \text{ τ.ω.: } x \in \operatorname{span} Y_{n_\bullet} = \operatorname{span} Y_{n_{\bullet m}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_{\bullet m}}}^{n_0} 0_X \subseteq Y,$$

   οπότε έπεται το ζητούμενο.

□

Τέλος, άμεσο είναι και το παρακάτω.

Πρόταση 4.1.6 (αναλλοίωτο διανυσματικών υποχώρων από γραμμικές εικόνες και αντίστροφές τους)**.** *Έστω*

i. $\{(X_n, +_n, X_0, \cdot_n)\}_{n=1}^{2}$ *και*

ii. $f \in L(X_1; X_2)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $Y \subseteq X_1$ *διανυσματικός υπόχωρος.*

   Ισχύει ότι

   $$f(Y) \subseteq X_2 \text{ διανυσματικός υπόχωρος.}$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $Y \subseteq X_2$ *διανυσματικός υπόχωρος.*

Ισχύει ότι

$$f^{\leftarrow}(Y) \subseteq X_1 \text{ διανυσματικός υπόχωρος.}$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (Z_n f(Y)) \subseteq f(Y), \ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0).$$

Πράγματι, έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0)$. Τότε, λόγω γραμμικότητας της f, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (Z_n f(Y)) = f\left(\sum_{n=1}^{n_0} (Z_n Y)\right) \subseteq f(Y),$$

όπου στον εγκλεισμό αξιοποιήσαμε την υπόθεση και τον Ορισμό 4.1.1.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (Z_n f^{\leftarrow}(Y)) \subseteq f^{\leftarrow}(Y), \ \forall \{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0).$$

Πράγματι, έστω $\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X_0)$. Τότε, λόγω γραμμικότητας της f, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (Z_n f^{\leftarrow}(Y)) = f^{\leftarrow}\left(\sum_{n=1}^{n_0} (Z_n Y)\right) \subseteq f^{\leftarrow}(Y),$$

όπου στον εγκλεισμό αξιοποιήσαμε την υπόθεση και τον Ορισμό 4.1.1.

□

4.2 Κυρτά υποσύνολα, $\mathfrak{C}$

Ξεκινάμε με τον ορισμό της παρούσας ενότητας.

Ορισμός 4.2.1 (κυρτή θήκη υποσυνόλου και κυρτό υποσύνολο)**.** *Έστω $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$. Θέτουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον, $Y \subseteq X$. Θέτουμε τα εξής.*

   i. *Έστω, επιπλέον, $Y \subseteq \operatorname{co} Y \subseteq X$ τ.ω.:*[3]

$$\operatorname{co} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n Y).$$

   Το $\operatorname{co} Y$ καλείται κυρτή θήκη του Y (στον X).

   ii. *Το Y καλείται κυρτό (υποσύνολο του X) όταν*

$$\operatorname{co} Y = Y.$$

2. *Γράφουμε*

$$\mathfrak{C}(X) = \left\{ Y \subseteq X \,\middle|\, Y \text{ κυρτό} \right\}.$$

[3] Ισοδύναμα,

$$\operatorname{co} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{a_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq [0,1] \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} a_n = 1}} \sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y).$$

Σημείωση 4.2.1. *Ο Ορισμός 4.2.1 θα μπορούσε, ισοδύναμα, να λέει ότι το Y είναι κυρτό όταvν*

$$\operatorname{co} Y \subseteq Y, \ \forall Y \subseteq X,$$

καθώς ο αντίστροφος εγκλεισμός πάντα, προφανώς, ισχύει.

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.1.1 και του Ορισμού 4.2.1, άμεσο είναι και το ακόλουθο.

Πρόταση 4.2.1 (διανυσματικοί υπόχωροι εντός κυρτών υποσυνόλων)**.** *Έστω $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$. Ισχύει ότι*

$$\{Y \subseteq X \,|\, Y \text{ διανυσματικός υπόχωρος}\} \subseteq \mathfrak{C}(X).$$

Απόδειξη. Άμεσος από τους ορισμούς. □

Το επόμενο είναι άμεσο.

Πρόταση 4.2.2 (τομή και ένωση κυρτών θηκών υποσυνόλων)**.** *Έστω $(X,+,X_0,\cdot)$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον, $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Ισχύει ότι*

$$\bigcap_{i\in I} \operatorname{co} Y_i \in \mathfrak{C}(X).$$

2. *Έστω, επιπλέον, $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ αύξον δίκτυο. Ισχύει ότι*

$$\bigcup_{i\in I} \operatorname{co} Y_i \in \mathfrak{C}(X).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left(S_n \bigcap_{i\in I} \operatorname{co} Y_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} \operatorname{co} Y_i, \ \forall \{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}.$$

Πράγματι, έστω

$$\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}$$

και

$$x \in \sum_{n=1}^{n_0} \left(S_n \bigcap_{i\in I} \operatorname{co} Y_i\right) \Leftrightarrow \exists \left((a_n)_{n=1}^{n_0}, \{y_n\}_{n=1}^{n_0}\right) \in \prod_{n=1}^{n_0} S_n \times \mathscr{P}\left(\bigcap_{i\in I} \operatorname{co} Y_i\right) \text{ τ.ω.: } x = \sum_{n=1}^{n_0} a_n y_n.$$

Αφού

$$y_n \in \bigcap_{i\in I} \operatorname{co} Y_i, \ \forall n \in \{1,\ldots,n_0\} \Leftrightarrow y_n \in \operatorname{co} Y_i, \ \forall n \in \{1,\ldots,n_0\}, \ \forall i \in I,$$

έχουμε από τον Ορισμό 4.2.1 ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n y_n \in \operatorname{co} Y_i, \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \operatorname{co} Y_i, \ \forall i \in I \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \operatorname{co} Y_i,$$

δλδ το ζητούμενο.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} \left(S_n \bigcup_{i\in I} \operatorname{co} Y_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} \operatorname{co} Y_i, \ \forall \{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}.$$

Πράγματι, έστω

$$\forall \{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}$$

και

$$x \in \sum_{n=1}^{n_0}\left(S_n \bigcup_{i\in I}\operatorname{co}Y_i\right) \Leftrightarrow \exists\left((a_n)_{n=1}^{n_0},\{y_n\}_{n=1}^{n_0}\right) \in \prod_{n=1}^{n_0} S_n \times \mathscr{P}\left(\bigcup_{i\in I}\operatorname{co}Y_i\right) \text{ τ.ω.: } x = \sum_{n=1}^{n_0} a_n y_n.$$

Αφού

$$y_n \in \bigcup_{i\in I}\operatorname{co}Y_i,\ \forall n \in \{1,\dots,n_0\} \Leftrightarrow \exists\{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I \text{ τ.ω.: } y_n \in \operatorname{co}Y_{i_n},\ \forall n \in \{1,\dots,n_0\},$$

θέτοντας

$$i_0 = \operatorname{grea}\{i_n\}_{n=1}^{n_0},$$

έχουμε ότι

$$Y_{i_n} \subseteq Y_{i_0},\ \forall n \in \{1,\dots,n_0\} \Rightarrow \operatorname{co}Y_{i_n} \subseteq \operatorname{co}Y_{i_0},\ \forall n \in \{1,\dots,n_0\},$$

οπότε

$$y_n \in \operatorname{co}Y_{i_0},\ \forall n \in \{1,\dots,n_0\},$$

άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.1, ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n y_n \in \operatorname{co}Y_{i_0} \Leftrightarrow x \in \operatorname{co}Y_{i_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I}\operatorname{co}Y_i,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.2.2, έπονται άμεσα τα δύο παρακάτω.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω*

i. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,

ii. $Y \subseteq X$ *και*

iii. $\{a_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq [0,\infty)$.

Ισχύει ότι

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} a_n\right)\operatorname{co}Y = \sum_{n=1}^{n_0}(a_n \operatorname{co}Y).$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Προκύπτει απευθείας από την Πρόταση 4.2.2.

($\supseteq$) Αν

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n = 0,$$

τότε δεν έχουμε να δείξουμε κάτι. Αν

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n \neq 0,$$

τότε από τον Ορισμό 4.2.1 έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0}\left(\frac{a_n}{\sum_{n=1}^{n_0} a_n}\operatorname{co}Y\right) \subseteq \operatorname{co}Y \Leftrightarrow \frac{1}{\sum_{n=1}^{n_0} a_n}\sum_{n=1}^{n_0}(a_n\operatorname{co}Y) \subseteq \operatorname{co}Y \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{n_0}(a_n\operatorname{co}Y) \subseteq \left(\sum_{n=1}^{n_0} a_n\right)Y.$$

□

Πρόταση 4.2.4 (χαρακτηρισμός κυρτής θήκης υποσυνόλου μέσω ελάχιστου στοιχείου)**.** *Έστω*

i. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,

ii. $Y \subseteq X$ *και*

iii. $\{Z_i\}_{i\in I} = \left\{Z \in \mathfrak{C}(X) \,\middle|\, Y \subseteq Z\right\}$.

Ισχύει ότι

$$\operatorname{co} Y \overset{1}{=} \operatorname{lea} \{Z_i\}_{i\in I} \overset{2}{=} \bigcap_{i\in I} Z_i.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε ισότητα ξεχωριστά.

$\left(\overset{1}{=}\right)$ Καταρχήν, άμεσα από την Πρόταση 4.2.2 έχουμε ότι

$$\operatorname{co} Y \in \{Z_i\}_{i\in I},$$

οπότε αρκεί έπειτα να δείξουμε ότι

$$\operatorname{co} Y \subseteq Z_i, \;\; \forall i \in I.$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$Y \subseteq Z_i, \;\; \forall i \in I \;\Rightarrow\; \operatorname{co} Y \subseteq \operatorname{co} Z_i = Z_i, \;\; \forall i \in I.$$

$\left(\overset{2}{=}\right)$ Δείχνουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

$\left(\overset{2}{\subseteq}\right)$ Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.2.2, παίρνουμε άμεσα ότι

$$\bigcap_{i\in I} Z_i \in \{Z_i\}_{i\in I},$$

συνεπώς έπεται το ζητούμενο από τον ίδιο τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

$\left(\overset{2}{\supseteq}\right)$ Έπεται άμεσα από το ότι

$$\bigcap_{i\in I} Z_i \subseteq Z_i, \;\; \forall i \in I,$$

σε συνδυασμό με τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

□

Με χρήση της Πρότασης 4.2.4, άμεσα έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 4.2.5 (κυρτή θήκη πεπερασμένης ένωσης κυρτών θηκών υποσυνόλων)**.** *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $\{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *και*

iii. $Y \subseteq X$ *τ.ω.:*

$$Y = \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n \operatorname{co} Y_n).$$

Ισχύουν ότι

1. $Y \in \mathfrak{C}(X)$ *και*

2. $Y = \operatorname{co} \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n$.

Απόδειξη. Δείχνουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\sum_{m=1}^{m_0} (S_m Y) \subseteq Y, \ \forall \{S_n\}_{m=1}^{m_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{m=1}^{m_0} S_m = \{1\}.$$
Πράγματι, έστω
$$\{S_n\}_{m=1}^{m_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{m=1}^{m_0} S_m = \{1\}$$
και
$$x \in \sum_{m=1}^{m_0} (S_m Y) \Leftrightarrow \exists \big((a_m)_{m=1}^{m_0}, \{y_m\}_{m=1}^{m_0}\big) \in \prod_{m=1}^{m_0} S_m \times \mathscr{P}(Y) \text{ τ.ω.: } x = \sum_{m=1}^{m_0} a_m y_m.$$
Αφού
$$y_m \in Y, \ \forall m \in \{1, \ldots, m_0\} \Leftrightarrow \exists \big(\{a_{mn}\}_{n=1}^{n_0}, (y_{mn})_{n=1}^{n_0}\big) \in \mathscr{P}([0,1]) \times \prod_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n \text{ τ.ω.:}$$
$$\text{τ.ω.: } \left(\sum_{n=1}^{n_0} a_{mn} = 1 \ \& \ y_m = \sum_{n=1}^{n_0} a_{mn} y_{mn}\right), \ \forall m \in \{1, \ldots, m_0\},$$
έχουμε, αξιοποιώντας τον Ορισμό 4.2.1 και τον ορισμό του Y, ότι
$$x = \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{n=1}^{n_0} a_m a_{mn} y_{mn} = \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{m=1}^{m_0} a_m a_{mn} y_{mn} = \sum_{n=1}^{n_0} \left(\sum_{m=1}^{m_0} a_m a_{mn}\right) \underbrace{\sum_{m=1}^{m_0} \frac{a_m a_{mn}}{\sum_{m=1}^{m_0} a_m a_{mn}} y_{mn}}_{\in Y} \in Y,$$
μιας και
$$\sum_{m=1}^{m_0} \frac{a_m a_{mn}}{\sum_{m=1}^{m_0} a_m a_{mn}} = 1 \ \& \ \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{m=1}^{m_0} a_m a_{mn} = 1,$$
και έτσι έπεται το ζητούμενο.

2. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Έστω
$$x \in Y \Leftrightarrow \exists \big(\{a_n\}_{n=1}^{n_0}, (y_n)_{n=1}^{n_0}\big) \in \mathscr{P}([0,1]) \times \prod_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n \text{ τ.ω.: } \left(\sum_{n=1}^{n_0} a_n = 1 \ \& \ x = \sum_{n=1}^{n_0} a_n y_n\right).$$
   Αφού
$$y_n \in \operatorname{co} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\},$$
   έχουμε από τον Ορισμό 4.2.1 ότι
$$x \in \operatorname{co} \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n,$$
   δλδ το ζητούμενο.

   ($\supseteq$) Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.2.4, αρκεί να δείξουμε ότι
$$Y \in \left\{Z \in \mathfrak{C}(X) \,\middle|\, \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n \subseteq Z\right\},$$
   οπότε, λόγω του σημείου 1, μένει να δείξουμε ότι
$$\bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n \subseteq Y.$$
   Πράγματι, έστω

$$x \in \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n \Leftrightarrow \exists n_\bullet \{1, \ldots, n_0\} \text{ τ.ω.: } x \in \operatorname{co} Y_{n_\bullet} = \operatorname{co} Y_{n_{\bullet m}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_{\bullet m}}}^{n_0} 0_X =$$

$$= 1 \operatorname{co} Y_{n_{\bullet m}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_{\bullet m}}}^{n_0} 0_{\mathbb{R}} \operatorname{co} Y_n \subseteq Y,$$

οπότε έπεται το ζητούμενο.

□

Επίσης, άμεσο είναι και το παρακάτω.

Πρόταση 4.2.6 (αναλλοίωτο κυρτών υποσυνόλων από αφινικές εικόνες και αντίστροφές τους)**.** *Έστω*

i. $\{(X_n, +_n, \mathbb{F}, \cdot_n)\}_{n=1}^{2}$ *και*

ii. $f\colon X_1 \to X_2$ *τ.ω.: η* f *να είναι αφινική.*

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $Y \in \mathfrak{C}(X_1)$.

   Ισχύει ότι
$$f(Y) \in \mathfrak{C}(X_2).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $Y \in \mathfrak{C}(X_2)$.

   Ισχύει ότι
$$f^{\leftarrow}(Y) \in \mathfrak{C}(X_1).$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό των αφινικών συναρτήσεων, γράφουμε

$$f = x_0 + g, \text{ όπου } x_0 \in X_1 \;\&\; g \in L(X_1; X_2),$$

και εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\sum_{n=1}^{n_0} (S_n f(Y)) \subseteq f(Y), \ \forall \{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}.$$
   Πράγματι, έστω
$$\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}.$$
   Τότε, λόγω γραμμικότητας της f, έχουμε ότι
$$\sum_{n=1}^{n_0} (S_n f(Y)) = \sum_{n=1}^{n_0} (S_n x_0 + S_n g(Y)) = x_0 + g\left(\sum_{n=1}^{n_0} (S_n Y)\right) \subseteq x_0 + g(Y) = f(Y),$$
   όπου στον εγκλεισμό αξιοποιήσαμε την υπόθεση και τον Ορισμό 4.1.1.

2. Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\sum_{n=1}^{n_0} (S_n f^{\leftarrow}(Y)) \subseteq f^{\leftarrow}(Y), \ \{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}.$$
   Πράγματι, έστω
$$\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}.$$

Τότε, λόγω γραμμικότητας της f, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0}(S_n f^{\leftarrow}(Y))\sum_{n=1}^{n_0}(-S_n x_0 + S_n g^{\leftarrow}(Y)) = -x_0 + \sum_{n=1}^{n_0}(S_n g^{\leftarrow}(Y)) = -x_0 + g^{\leftarrow}\left(\sum_{n=1}^{n_0}(S_n Y)\right) \subseteq$$
$$\subseteq -x_0 + g^{\leftarrow}(Y) = f^{\leftarrow}(Y),$$

όπου στον εγκλεισμό αξιοποιήσαμε την υπόθεση και τον Ορισμό 4.1.1.

□

4.3 Ισορροπημένα υποσύνολα, $\mathfrak{B}$

Ξεκινάμε με τον ορισμό της παρούσας ενότητας.

Ορισμός 4.3.1 (ισορροπημένη θήκη και ισορροπημένο υποσύνολο). *Έστω $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$. Θέτουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον, $Y \subseteq X$. Θέτουμε τα εξής.*
   i. *Έστω, επιπλέον, $Y \subseteq \operatorname{ba} Y \subseteq X$ τ.ω.:*[4]
   $$\operatorname{ba} Y = \overline{B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)}Y.$$
   Το $\operatorname{ba} Y$ καλείται ισορροπημένη θήκη του Y (στον X).
   ii. *Το Y καλείται ισορροπημένο (υποσύνολο του X) όταν*
   $$\operatorname{ba} Y = Y.$$
2. *Γράφουμε*
   $$\mathfrak{B}(X) = \left\{ Y \subseteq X \,\middle|\, Y \text{ ισορροπημένο} \right\}.$$

Σημείωση 4.3.1. *Δυο λόγια σχετικά με τον Ορισμό 4.3.1.*

1. *Προκύπτει άμεσα ότι*
   $$0_X \in \operatorname{ba} Y, \ \forall Y \subseteq X \text{ τ.ω.: } Y \neq \varnothing.$$
2. *Το $Y \subseteq X$ είναι ισορροπημένο όταν*
   $$\operatorname{ba} Y \subseteq Y,$$
   καθώς ο αντίστροφος εγκλεισμός πάντα, προφανώς, ισχύει.

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.1.1 και του Ορισμού 4.3.1, άμεσο είναι και το ακόλουθο.

Πρόταση 4.3.1 (διανυσματικοί υπόχωροι εντός ισορροπημένων υποσυνόλων). *Έστω $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$. Ισχύει ότι*

$$\left\{ Y \subseteq X \,\middle|\, Y \text{ διανυσματικός υπόχωρος} \right\} \subseteq \mathfrak{B}(X).$$

Απόδειξη. Άμεσος από τους ορισμούς. □

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.2.1 και του Ορισμού 4.3.1, άμεσο είναι και το ακόλουθο.

Πρόταση 4.3.2 (κυρτή θήκη ισορροπημένης θήκης υποσυνόλου). *Έστω $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$. Ισχύει ότι*

$$\left\{ Y \subseteq X \,\middle|\, \operatorname{co}\operatorname{ba} Y = Y \right\} = \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{B}(X).$$

Απόδειξη. Δείχνουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

---

[4] Προφανώς η κλειστότητα εδώ εννοείται ως προς την συνήθηκη μετρική τοπολογία του $\mathbb{F}$, δλδ

$$\overline{B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} = \left\{ a \in \mathbb{F} \,\middle|\, |a| \leq 1 \right\},$$

οπότε, ισοδύναμα,

$$\operatorname{ba} Y = \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{F} \\ \text{τ.ω.:} \\ |a| \leq 1}} aY.$$

($\subseteq$) Έστω $Y \subseteq X$. Απευθείας από τον Ορισμό 4.2.1 έπεται ότι

$$\operatorname{co}\operatorname{ba} Y \in \mathfrak{C}(X).$$

Για να δείξουμε, επιπλέον, ότι

$$\operatorname{co}\operatorname{ba} Y \in \mathfrak{B}(X),$$

αρκεί, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1, να πάρουμε ότι

$$\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}\operatorname{co}\operatorname{ba} Y = \operatorname{co}\operatorname{ba} Y.$$

Πράγματι έχουμε διαδοχικά, λόγω του Ορισμού 4.2.1 και του Ορισμού 4.3.1, ότι

$$\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}\operatorname{co}\operatorname{ba} Y = \overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n \operatorname{ba} Y) =$$

$$= \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} \left(S_n \overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)} \operatorname{ba} Y\right) = \operatorname{co}\left(\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}\operatorname{ba} Y\right) = \operatorname{co}\operatorname{ba} Y.$$

($\supseteq$) Έστω $Y \in \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{B}(X)$. Αφού $Y \in \mathfrak{B}(X)$, έχουμε ότι

$$\operatorname{co}\operatorname{ba} Y = \operatorname{co} Y,$$

οπότε, αφού $Y \in \mathfrak{C}(X)$, ότι

$$\operatorname{co}\operatorname{ba} Y = Y.$$

□

Άμεσο είναι επίσης το παρακάτω.

Πρόταση 4.3.3. *Έστω*

i. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$ *και*

ii. $Y \subseteq X$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον, ότι*

   iii. $\{a_n\}_{n=1}^{2} \subseteq \mathbb{F}$ *τ.ω.:*
   $$|a_1| \leq |a_2|.$$

   Ισχύει ότι
   $$a_1 \operatorname{ba} Y \subseteq a_2 \operatorname{ba} Y.$$

2. *Έστω, επιπλέον, ότι*

   iii′. $a \in \mathbb{F}$.

   Ισχύει ότι
   $$a \operatorname{ba} Y = |a| \operatorname{ba} Y.$$

3. *Ισχύει ότι*
   $$\operatorname{ba} Y = \partial B(0_{\mathbb{F}},1)\operatorname{ba} Y.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αν $a_2 = 0_{\mathbb{F}}$, τότε δεν έχουμε κάτι να δείξουμε. Αν $a_2 \neq 0_{\mathbb{F}}$, τότε απευθείας από τον Ορισμό 4.3.1 έχουμε ότι
   $$\frac{a_1}{a_2}\operatorname{ba} Y \subseteq \operatorname{ba} Y \Leftrightarrow a_1 \operatorname{ba} Y \subseteq a_2 \operatorname{ba} Y.$$

2. Προκύπτει άμεσα από την εφαρμογή του σημείου 1 τόσο για
$$a_1 = \frac{a}{|a|} \;\&\; a_2 = 1,$$
οσο και για
$$a_1 = \frac{|a|}{a} \;\&\; a_2 = 1.$$

3. Άμεση από την εφαρμογή του σημείου 2 $\forall a \in \partial B(0_{\mathbb{F}}, 1)$.

□

Η ισορροπία των υποσυνόλων παραμένει αναλλοίωτη, όχι μόνο από την τομή, όσο και για την ένωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 4.3.4 (τομή και ένωση ισορροπημένων θηκών υποσυνόλων)**.** *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$ *και*

ii. $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$.

Ισχύουν ότι

1. $\bigcap\limits_{i \in I} \operatorname{ba} Y_i \in \mathfrak{B}(X)$ *και*

2. $\bigcup\limits_{i \in I} \operatorname{ba} Y_i \in \mathfrak{B}(X)$.

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Έχουμε ότι
$$\overline{B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} \bigcap_{i \in I} \operatorname{ba} Y_i = \bigcap_{i \in I} \left(\overline{B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} \operatorname{ba} Y_i \right) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{ba} Y_i.$$

2. Έχουμε ότι
$$\overline{B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} \bigcup_{i \in I} \operatorname{ba} Y_i = \bigcup_{i \in I} \left(\overline{B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} \operatorname{ba} Y_i \right) = \bigcup_{i \in I} \operatorname{ba} Y_i.$$

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.3.4, έπεται άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 4.3.5 (χαρακτηρισμός ισορροπημένης θήκης υποσυνόλου μέσω ελάχιστου στοιχείου)**.** *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $Y \subseteq X$ *και*

iii. $\{Z_i\}_{i \in I} = \left\{ Z \in \mathfrak{B}(X) \,\middle|\, Y \subseteq Z \right\}$.

Ισχύει ότι
$$\operatorname{ba} Y \overset{1}{=} \operatorname{lea} \{Z_i\}_{i \in I} \overset{2}{=} \bigcap_{i \in I} Z_i.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε ισότητα ξεχωριστά.

$\left(\overset{1}{=}\right)$ Καταρχήν, άμεσα από το σημείο 1 της Πρότασης 4.3.4 έχουμε ότι
$$\operatorname{ba} Y \in \{Z_i\}_{i \in I},$$
οπότε αρκεί έπειτα να δείξουμε ότι
$$\operatorname{ba} Y \subseteq Z_i, \;\; \forall i \in I.$$
Πράγματι, έχουμε ότι
$$Y \subseteq Z_i, \;\; \forall i \in I \Rightarrow \operatorname{ba} Y \subseteq \operatorname{ba} Z_i = Z_i, \;\; \forall i \in I.$$

$\binom{2}{=}$ Δείχνουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

$\binom{2}{\subseteq}$ Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.3.4, παίρνουμε άμεσα ότι

$$\bigcap_{i\in I} Z_i \in \{Z_i\}_{i\in I},$$

συνεπώς έπεται το ζητούμενο από τον ίδιο τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

$\binom{2}{\supseteq}$ Έπεται άμεσα από το ότι

$$\bigcap_{i\in I} Z_i \subseteq Z_i, \ \forall i \in I,$$

σε συνδυασμό με τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

□

Τέλος, άμεσο είναι και το ακόλουθο.

Πρόταση 4.3.6 (αναλλοίωτο ισορροπημένων υποσυνόλων από γραμμικές εικόνες και αντίστροφές τους)**.** *Έστω*

i. $\{(X_n, +_n, \mathbb{F}, \cdot_n)\}_{n=1}^2$ *και*

ii. $f \in L(X_1; X_2)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $Y \in \mathfrak{B}(X_1)$.

   Ισχύει ότι
$$f(Y) \in \mathfrak{B}(X_2).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $Y \in \mathfrak{B}(X_2)$.

   Ισχύει ότι
$$f^{\leftarrow}(Y) \in \mathfrak{B}(X_1).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Έχουμε ότι
$$\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} f(Y) = f\left(\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} Y\right) = f(Y).$$

2. Έχουμε ότι
$$\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} f^{\leftarrow}(Y) = f^{\leftarrow}\left(\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} Y\right) = f^{\leftarrow}(Y).$$

□

4.4 Δίσκοι, $\mathfrak{D}$

Ξεκινάμε με τον ορισμό της παρούσας ενότητας.

Ορισμός 4.4.1 (δισκοθήκη (♩) και δίσκος)**.** *Έστω* $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$. *Θέτουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $Y \subseteq X$. *Θέτουμε τα εξής.*

i. Έστω, επιπλέον, $Y \subseteq \operatorname{di} Y \subseteq X$ τ.ω.:[5]

$$\operatorname{di} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} |S_n| \leq \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n Y).$$

Το $\operatorname{di} Y$ καλείται δισκοθήκη (ή, αλλιώς, απόλυτα κυρτή θήκη) του Y (στον X).

ii. Το Y καλείται δίσκος ((ή αλλιώς, απόλυτα κυρτό υποσύνολο) του X) όταν

$$\operatorname{di} Y = Y.$$

2. *Γράφουμε*

$$\mathfrak{D}(X) = \left\{ Y \subseteq X \,\middle|\, Y \text{ δίσκος} \right\}.$$

Σημείωση 4.4.1. *Δυο λόγια σχετικά με τον Ορισμό 4.4.1.*

1. *Προκύπτει άμεσα ότι*

$$0_X \in \operatorname{di} Y, \ \forall y \subseteq X \text{ τ.ω.: } Y \neq \varnothing.$$

2. *Το $Y \subseteq X$ είναι ισορροπημένο όταν*

$$\operatorname{di} Y \subseteq Y,$$

καθώς ο αντίστροφος εγκλεισμός πάντα, προφανώς, ισχύει.

Συνδυάζοντας τον Ορισμό 4.2.1, τον Ορισμό 4.3.1, την Πρόταση 4.3.2 και τον Ορισμό 4.4.1, έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 4.4.1 (χαρακτηρισμός δισκοθήκης μέσω κυρτής και ισορροπημένης θήκης και χαρακτηρισμός δίσκων μέσω κυρτών και ισορροπημένων υποσυνόλων)**.** *Έστω $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω επιπλέον, $Y \subseteq X$. Ισχύει ότι*

$$\operatorname{di} Y = \operatorname{co} \operatorname{ba} Y.$$

2. *Ισχύει ότι*

$$\mathfrak{D}(X) \overset{i}{=} \left\{ Y \subseteq X \,\middle|\, \operatorname{co} \operatorname{ba} Y = Y \right\} \overset{ii}{=} \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{B}(X).$$

Απόδειξη. Δείχνουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Από τον Ορισμό 4.4.1 έχουμε ότι

$$\operatorname{di} Y = \{0_X\} \cup \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \{0_X\} < \sum_{n=1}^{n_0} |S_n| \leq \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n Y) =$$

$$= \{0_X\} \cup \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \{0_X\} < \sum_{n=1}^{n_0} |S_n| \leq \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} \left(\frac{S_n}{\sum_{n=1}^{n_0} |S_n|} \sum_{n=1}^{n_0} |S_n| Y \right).$$

   Θέτοντας

$$Z_n = \frac{S_n}{\sum_{n=1}^{n_0} |S_n|}, \ \forall \{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } \{0_X\} < \sum_{n=1}^{n_0} |S_n| \leq \{1\},$$

[5] Ισοδύναμα,

$$\operatorname{di} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{a_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathbb{F} \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| \leq 1}} \sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y).$$

έχουμε ότι

$$\operatorname{di} Y \subseteq \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} |Z_n| = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} \left(Z_n \overline{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} Y \right) = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} |Z_n| = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} \left(|Z_n| \frac{Z_n}{|Z_n|} \overline{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} Y \right) = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}([0,1]) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} \left(S_n \overline{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} Y \right),$$

οπότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.1 και τον Ορισμό 4.3.1, ότι

$$\operatorname{di} Y \subseteq \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}([0,1]) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n \operatorname{ba} Y) = \operatorname{co} \operatorname{ba} Y.$$

(⊇) Από τον Ορισμό 4.2.1 και τον Ορισμό 4.3.1 έχουμε ότι

$$\operatorname{co} \operatorname{ba} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}([0,1]) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} \left(S_n \overline{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} Y \right).$$

Θέτοντας

$$Z_n = S_n \overline{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, 1)} \subseteq \mathbb{F}, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\}, \ \forall \{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\},$$

παρατηρούμε ότι

$$|Z_n| = S_n, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\},$$

συνεπώς

$$\operatorname{co} \operatorname{ba} Y = \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{Z_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} |Z_n| = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (Z_n Y),$$

άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.4.1,

$$\operatorname{co} \operatorname{ba} Y \subseteq \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneqq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} |S_n| \leq \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n Y) = \operatorname{di} Y.$$

2. Η $\left(\overset{\text{i}}{=}\right)$ αποτελεί παράφραση του σημείου 1 και η $\left(\overset{\text{ii}}{=}\right)$ είναι το αποτέλεσμα της Πρότασης 4.3.2.

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.4.1, το ακόλουθο είναι άμεσο από την Πρόταση 4.2.1 και την Πρόταση 4.3.1.

Πρόταση 4.4.2 (διανυσματικοί υπόχωροι εντός ισορροπημένων υποσυνόλων)**.** *Έστω* $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$. *Ισχύει ότι*

$$\left\{ Y \subseteq X \,\middle|\, Y \text{ διανυσματικός υπόχωρος} \right\} \subseteq \mathfrak{D}(X).$$

Απόδειξη. Άμεσος από τους ορισμούς. □

Από τον Ορισμό 4.2.1, την Πρόταση 4.2.3, την Πρόταση 4.3.3 και την Πρόταση 4.4.1 προκύπτει άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 4.4.3. *Έστω*

i. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,

ii. $Y \subseteq X$ *και*

iii. $\{a_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathbb{F}$.

Ισχύει ότι

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|\right) \operatorname{di} Y = \sum_{n=1}^{n_0} (a_n \operatorname{di} Y).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.4.1 έχουμε ότι

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|\right) \operatorname{di} Y = \left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|\right) \operatorname{co}\operatorname{ba} Y,$$

οπότε, από την Πρόταση 4.2.3, ότι

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|\right) \operatorname{di} Y = \sum_{n=1}^{n_0} (|a_n| \operatorname{co}\operatorname{ba} Y) = \sum_{\substack{n=1\\ a_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} (|a_n| \operatorname{co}\operatorname{ba} Y) = \sum_{\substack{n=1\\ a_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} \left(a_n \frac{|a_n|}{a_n} \operatorname{co}\operatorname{ba} Y\right).$$

Συνεπώς, παίρνουμε από τον Ορισμό 4.2.1 ότι

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|\right) \operatorname{di} Y &= \sum_{\substack{n=1\\ a_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} \left(a_n \frac{|a_n|}{a_n} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1])\\ \text{τ.ω.:}\\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n \operatorname{ba} Y)\right) = \\ &= \sum_{\substack{n=1\\ a_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} \left(a_n \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1])\\ \text{τ.ω.:}\\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} \left(S_n \frac{|a_n|}{a_n} \operatorname{ba} Y\right)\right),\end{aligned}$$

άρα, από την Πρόταση 4.3.3, ότι

$$\left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n|\right) \operatorname{di} Y = \sum_{\substack{n=1\\ a_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} \left(a_n \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1])\\ \text{τ.ω.:}\\ \sum_{n=1}^{n_0} S_n = \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n \operatorname{ba} Y)\right) = \sum_{\substack{n=1\\ a_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} (a_n \operatorname{co}\operatorname{ba} Y) = \sum_{\substack{n=1\\ a_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} (a_n \operatorname{di} Y).$$

□

Από την Πρόταση 4.2.2, την Πρόταση 4.3.5 και την Πρόταση 4.4.1 έπεται άμεσα το επόμενο.

Πρόταση 4.4.4 (τομή και ένωση δισκοθηκών υποσυνόλων)**.** *Έστω* $(X,+,X_0,\cdot)$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$. *Ισχύει ότι*

$$\bigcap_{i\in I} \operatorname{di} Y_i \in \mathfrak{D}(X).$$

2. *Έστω, επιπλέον, $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ άυξον δίκτυο. Ισχύει ότι*
$$\bigcup_{i\in I} \operatorname{di} Y_i \in \mathfrak{D}(X).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.4.1 έχουμε ότι
$$\operatorname{di} Y_i \in \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{B}(X), \ \ \forall i \in I,$$
οπότε, από την Πρόταση 4.2.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.3.5, ότι
$$\bigcap_{i\in I} \operatorname{di} Y_i \in \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{B}(X)$$
για το σημείο 1 και
$$\bigcup_{i\in I} \operatorname{di} Y_i \in \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{B}(X)$$
για το σημείο 2. □

Το ακόλουθο έπεται με χρήση της Πρότασης 4.4.4.

Πρόταση 4.4.5 (χαρακτηρισμός δισκοθήκης υποσυνόλου μέσω ελάχιστου στοιχείου)**.** *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $Y \subseteq X$ *και*

iii. $\{Z_i\}_{i\in I} = \left\{Z \in \mathfrak{D}(X) \,\middle|\, Y \subseteq Z\right\}$.

Ισχύει ότι
$$\operatorname{di} Y \overset{1}{=} \operatorname{lea} \{Z_i\}_{i\in I} \overset{2}{=} \bigcap_{i\in I} Z_i.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε ισότητα ξεχωριστά.

$\left(\overset{1}{=}\right)$ Καταρχήν, άμεσα από την Πρόταση 4.4.4 έχουμε ότι
$$\operatorname{di} Y \in \{Z_i\}_{i\in I},$$
οπότε αρκεί έπειτα να δείξουμε ότι
$$\operatorname{di} Y \subseteq Z_i, \ \ \forall i \in I.$$
Πράγματι, έχουμε ότι
$$Y \subseteq Z_i, \ \forall i \in I \ \Rightarrow \ \operatorname{di} Y \subseteq \operatorname{di} Z_i = Z_i, \ \ \forall i \in I.$$

$\left(\overset{2}{=}\right)$ Δείχνουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

$\left(\overset{2}{\subseteq}\right)$ Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.4.4, παίρνουμε άμεσα ότι
$$\bigcap_{i\in I} Z_i \in \{Z_i\}_{i\in I},$$
συνεπώς έπεται το ζητούμενο από τον ίδιο τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

$\left(\overset{2}{\supseteq}\right)$ Έπεται άμεσα από το ότι
$$\bigcap_{i\in I} Z_i \subseteq Z_i, \ \ \forall i \in I,$$
σε συνδυασμό με τον ορισμό του ελάχιστου στοιχείου.

□

Με χρήση της Πρότασης 4.4.5, άμεσα έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 4.4.6 (δισκοθήκη πεπερασμένης ένωσης δισκοθηκών υποσυνόλων)**.** *Έστω*

i. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,

ii. $\{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *και*

iii. $Y \subseteq X$ *τ.ω.:*

$$Y = \bigcup_{\substack{\{S_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \\ \text{τ.ω.:} \\ \sum_{n=1}^{n_0} |S_n| \leq \{1\}}} \sum_{n=1}^{n_0} (S_n \operatorname{di} Y_n).$$

Ισχύουν ότι

1. $Y \in \mathfrak{D}(X)$ *και*

2. $Y = \operatorname{di} \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{di} Y_n$.

Απόδειξη. Δείχνουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{m_0} (S_m Y) \subseteq Y,\ \forall \{S_n\}_{m=1}^{m_0} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } \sum_{m=1}^{m_0} |S_m| \leq \{1\}.$$

Πράγματι, έστω

$$\{S_n\}_{m=1}^{m_0} \subsetneq \mathscr{P}([0,1]) \text{ τ.ω.: } \sum_{m=1}^{m_0} S_m = \{1\}$$

και

$$x \in \sum_{m=1}^{m_0} (S_m Y) \Leftrightarrow \exists \left((a_m)_{m=1}^{m_0}, \{y_m\}_{m=1}^{m_0}\right) \in \prod_{m=1}^{m_0} S_m \times \mathscr{P}(Y) \text{ τ.ω.: } x = \sum_{m=1}^{m_0} a_m y_m.$$

Αφού

$$y_m \in Y,\ \forall m \in \{1,\dots,m_0\} \Leftrightarrow \exists \left(\{a_{mn}\}_{n=1}^{n_0}, (y_{mn})_{n=1}^{n_0}\right) \in \mathscr{P}(\mathbb{F}) \times \prod_{n=1}^{n_0} \operatorname{di} Y_n \text{ τ.ω.:}$$
$$\text{τ.ω.: } \left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_{mn}| \leq 1 \ \&\ y_m = \sum_{n=1}^{n_0} a_{mn} y_{mn}\right),\ \forall m \in \{1,\dots,m_0\},$$

έχουμε ότι

$$x = \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{n=1}^{n_0} a_m a_{mn} y_{mn} = \sum_{n=1}^{n_0} \sum_{m=1}^{m_0} a_m a_{mn} y_{mn}$$

και θέτουμε

$$b_n = \sum_{m=1}^{m_0} |a_m a_{mn}|,\ \forall n \in \{1,\dots,n_0\}.$$

Οπότε, αξιοποιώντας τον Ορισμό 4.4.1 και τον ορισμό του Y, παίρνουμε ότι

$$x = \sum_{\substack{n=1 \\ b_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} b_n \underbrace{\sum_{m=1}^{m_0} \frac{a_m a_{mn}}{b_n} y_{mn}}_{\in Y} \in Y,$$

μιας και

$$\sum_{m=1}^{m_0} \left|\frac{a_m a_{mn}}{b_n}\right| = 1 \ \&\ \sum_{\substack{n=1 \\ b_n \neq 0_{\mathbb{F}}}}^{n_0} b_n = \sum_{n=1}^{n_0} b_n \leq 1,$$

και έτσι έπεται το ζητούμενο.

2. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Έστω

$$x \in Y \Leftrightarrow \exists \left(\{a_n\}_{n=1}^{n_0}, (y_n)_{n=1}^{n_0} \right) \in \mathscr{P}(\mathbb{F}) \times \prod_{n=1}^{n_0} \operatorname{di} Y_n \text{ τ.ω.: } \left(\sum_{n=1}^{n_0} |a_n| \leq 1 \;\&\; x = \sum_{n=1}^{n_0} a_n y_n \right).$$

Αφού

$$y_n \in \operatorname{di} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{co} Y_n, \;\; \forall n \in \{1, \ldots, n_0\},$$

έχουμε από τον Ορισμό 4.4.1 ότι

$$x \in \operatorname{di} \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{di} Y_n,$$

δλδ το ζητούμενο.

($\supseteq$) Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.4.5, αρκεί να δείξουμε ότι

$$Y \in \left\{ Z \in \mathfrak{D}(X) \;\middle|\; \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{di} Y_n \subseteq Z \right\},$$

οπότε, λόγω του σημείου 1, μένει να δείξουμε ότι

$$\bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{di} Y_n \subseteq Y.$$

Πράγματι, έστω

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{n=1}^{n_0} \operatorname{di} Y_n \Leftrightarrow \exists n_\bullet \{1, \ldots, n_0\} \text{ τ.ω.: } x \in \operatorname{di} Y_{n_\bullet} = \operatorname{di} Y_{n_{\bullet m}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_{\bullet m}}}^{n_0} 0_X = \\ = 1 \operatorname{di} Y_{n_{\bullet m}} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_{\bullet m}}}^{n_0} 0_{\mathbb{F}} \operatorname{di} Y_n \subseteq Y, \end{aligned}$$

οπότε έπεται το ζητούμενο.

□

Τέλος, υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.4.1, το επόμενο έπεται άμεσα από την Πρόταση 4.2.6 και την Πρόταση 4.3.6.

Πρόταση 4.4.7 (αναλλοίωτο δίσκων από γραμμικές εικόνες και αντίστροφές τους)**.** *Έστω*

i. $\{(X_n, +_n, \mathbb{F}, \cdot_n)\}_{n=1}^{2}$ *και*

ii. $f \in L(X_1; X_2)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $Y \in \mathfrak{D}(X_1)$.

   Ισχύει ότι

$$f(Y) \in \mathfrak{D}(X_2).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $Y \in \mathfrak{D}(X_2)$.

   Ισχύει ότι

$$f^{\leftarrow}(Y) \in \mathfrak{D}(X_1).$$

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 4.4.1, τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 4.2.6 σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.3.6. □

4.5 Απορροφητικά υποσύνολα, $\mathfrak{A}$

Ξεκινάμε με τον ορισμό της παρούσας ενότητας.

Ορισμός 4.5.1 (απορρόφηση υποσυνόλου από υποσύνολο και απορροφητικό υποσύνολο)**.** *Έστω* $(X,+\mathbb{F},\cdot)$*. Θέτουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_n\}_{n=1}^{2} \subseteq \mathscr{P}(X)$*. Το* Y_1 *απορροφά το* Y_2*, ή, αλλιώς, το* Y_2 *απορροφάται από το* Y_1 *όταvv*
$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0) \smallsetminus \{0_{\mathbb{F}}\}\right) Y_2 \subseteq Y_1.$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $Y \subseteq X$*. Το* Y *καλείται απορροφητικό ((ή, αλλιώς, απορροφούν, ή, αλλιώς, ακτινικό (στο* 0_X*)) υποσύνολο του* X*) όταvv*
$$Y \text{ απορροφά το } \{x\}, \ \forall x \in X.$$

3. *Γράφουμε*
$$\mathfrak{A}(X) = \left\{Y \subseteq X \,\middle|\, Y \text{ απορροφητικό}\right\}.$$

Σημείωση 4.5.1. *Δυο λόγια σχετικά με τον Ορισμό 4.5.1.*

1. *Το* $Y_1 \in \mathscr{P}\left(X \,\middle|\, 0_X\right)$ *απορροφά το* $Y_2 \subseteq X$ *όταvv*
$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0) Y_2 \subseteq Y_1.$$
Σε κάθε περίπτωση, το $Y_1 \subseteq X$ *απορροφά το* $Y_2 \subseteq X$ *όταvv*
$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } Y_2 \subseteq \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0)\right)^c Y_1.$$

2. *Προκύπτει άμεσα ότι*
$$\left(0_X \in Y \ \& \ X = \bigcup_{\varrho>0} B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho) Y = \bigcup_{\varrho>0} \varrho Y\right), \ \forall Y \in \mathfrak{A}(X).$$

3. *Παραφράζοντας τον παραπάνω ορισμό, ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου είναι απορροφητικό όταvv κάθε στοιχείο του διανυσματικού χώρου μπορεί να συρρικνωθεί εντός του υποσυνόλου αυτού, ή, ισοδύναμα, όταvv για κάθε στοιχείο του διανυσματικού χώρου το υποσύνολου αυτό μπορεί να διασταλεί έτσι ώστε να το ενσωματώσει.*

Άμεσο από τον Ορισμό 4.1.1 και τον Ορισμό 4.5.1 είναι το παρακάτω.

Πρόταση 4.5.1 (διανυσματικοί υπόχωροι εντός απορροφητικών υποσυνόλων)**.** *Έστω*

1. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$ *και*

2. $Y \in \mathfrak{A}(X)$.

Ισχύει ότι
$$\operatorname{span} Y = X.$$

Απόδειξη. Άμεση από τους ορισμούς. □

Η απορροφητικότητα των υποσυνόλων παραμένει αναλλοίωτη, για την πεπερασμένη τομή και την αυθαίρετη ένωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 4.5.2 (τομή και ένωση απορροφητικών υποσυνόλων)**.** *Έστω* $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$*. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathfrak{A}(X)$*. Ισχύει ότι*
$$\bigcap_{n=1}^{n_0} Y_n \in \mathfrak{A}(X).$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{A}(X)$. *Ισχύει ότι*
$$\bigcup_{i\in I} Y_i \in \mathfrak{A}(X).$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Έστω $x \in X$. Από τον Ορισμό 4.5.1 έχουμε ότι
$$\exists \{\varrho_{0n}\}_{n=1}^{n_0} \subseteq (0,\infty) \text{ τ.ω.: } x \in \varrho_n Y_n,\ \forall \varrho_n \geq \varrho_{0n},\ \forall n \in \{1,\dots,n_0\},$$
συνεπώς, επιλέγοντας
$$\varrho_0 = \max\{\varrho_{0n}\}_{n=1}^{n_0},$$
συμπεραίνουμε ότι
$$x \in \varrho \bigcap_{n=1}^{n_0} Y_n,\ \forall \varrho \geq \varrho_0 \Leftrightarrow x \in \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)\right)^c \bigcap_{n=1}^{n_0} Y_n,$$
δλδ το ζητούμενο.

2. Άμεσο από τον Ορισμό 4.5.1, καθώς κάθε στοιχείο του X απορροφάται από όλα, άρα από κάποιο από, τα Y_i, με $i \in I$.

□

Τέλος, άμεσο είναι και το ακόλουθο.

Πρόταση 4.5.3 (αναλλοίωτο απορροφητικών υποσυνόλων από γραμμικές εικόνες και αντίστροφές τους). *Έστω*

i. $\{(X_n, +_n, \mathbb{F}, \cdot_n)\}_{n=1}^2$ *και*

ii. $f \in L(X_1; X_2)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. f *επί και*

   iv. $Y \in \mathfrak{A}(X_1)$.

   Ισχύει ότι
$$f(Y) \in \mathfrak{A}(X_2).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $Y \in \mathfrak{A}(X_2)$.

   Ισχύει ότι
$$f^{\leftarrow}(Y) \in \mathfrak{A}(X_1).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Έστω $y \in X_2$. Αφού f είναι επί, έχουμε ότι
$$\exists x \in X_1 \text{ τ.ω.: } f(x) = y.$$
Έτσι, αφού $Y \in \mathfrak{A}(X_1)$, παίρνουμε από τον Ορισμό 4.5.1 ότι
$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)x \subseteq Y \Rightarrow f\left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)x\right) \subseteq f(Y) \Leftrightarrow B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)y \subseteq f(Y),$$
όπου αξιοποιήσαμε την γραμμικότητα της f για την ισοδυναμία, και άρα έπεται έτσι το ζητούμενο.

2. Έστω $x \in X_1$. Αφού $Y \in \mathfrak{A}(X_2)$, παίρνουμε από τον Ορισμό 4.5.1 ότι
$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)f(x) \subseteq Y \Rightarrow f^{\leftarrow}\left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)f(x)\right) \subseteq f^{\leftarrow}(Y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)f^{\leftarrow}(f(x)) \subseteq f^{\leftarrow}(Y) \Rightarrow B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)x \subseteq f^{\leftarrow}(Y),$$
όπου αξιοποιήσαμε την γραμμικότητα της f για την ισοδυναμία, και άρα έπεται έτσι το ζητούμενο.

□

4.6 Συναρτησοειδές Minkowski, $\mu_\Diamond$

Εδώ εισάγουμε και μελετάμε το χρήσιμο συναρτησοειδές Minkowski.

Υπό το πρίσμα του ορισμού των απορροφητικών συνόλων, προκύπτει το παρακάτω.

Πρόταση 4.6.1. *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $Y \in \mathfrak{A}(X)$,

iii. $x \in X$ *και*

iv. $\{S_n\}_{n=1}^2 \subseteq \mathscr{P}((0,\infty))$ *τ.ω.:*

$$S_1 = \left\{\varrho > 0 \,\middle|\, x \in \varrho Y\right\} \ \& \ S_2 = \left\{\varrho > 0 \,\middle|\, \varrho x \in Y\right\}.$$

Ισχύουν ότι

1. $\inf S_1 \in [0,\infty)$ & $\sup S_2 \in (0,\infty]$,

2. $\inf\left\{\varrho > 0 \,\middle|\, x \in \varrho Y\right\} = \left(\sup\left\{\varrho > 0 \,\middle|\, \varrho x \in Y\right\}\right)^{-1}$,

3. $x \in Y \Rightarrow (\inf S_1 \leq 1 \ \& \ \sup S_2 \geq 1)$ *και*

4. $x = 0_X \Rightarrow (\inf S_1 = 0 \ \& \ \sup S_2 = \infty)$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Υπό το πρίσμα του ορισμού των infimum και supremum, αρκεί να δείξουμε ότι

$$S_1 \neq \varnothing \neq S_2,$$

το οποίο έπεται άμεσα από τον ορισμό των απορροφητικών συνόλων.

2. Ελέγχουμε κάθε ανισότητα ξεχωριστά.

($\leq$) Από τον ορισμό του infimum έχουμε ότι

$$\inf S_1 \leq \varrho, \Leftrightarrow \frac{1}{\varrho} \leq \frac{1}{\inf S_1}, \ \forall \varrho \in S_1,$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\frac{1}{\inf S_1} \text{ άνω φράγμα του } \left\{\frac{1}{\varrho} > 0\right\}_{\varrho \in S_1} = \{\varrho > 0\}_{\frac{1}{\varrho} \in S_1} = \{\varrho > 0\}_{\varrho \in S_2} = S_2.$$

Άρα, από τον ορισμό του supremum συμπεραίνουμε ότι

$$\sup S_2 \leq \frac{1}{\inf S_1} \Leftrightarrow \inf S_1 \leq \frac{1}{\sup S_2}.$$

($\geq$) Από τον ορισμό του supremum έχουμε ότι

$$\varrho \leq \sup S_2, \Leftrightarrow \frac{1}{\sup S_2} \leq \frac{1}{\varrho}, \ \forall \varrho \in S_2,$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\frac{1}{\sup S_2} \text{ κάτω φράγμα του } \left\{\frac{1}{\varrho} > 0\right\}_{\varrho \in S_2} = \{\varrho > 0\}_{\frac{1}{\varrho} \in S_2} = \{\varrho > 0\}_{\varrho \in S_1} = S_1.$$

Άρα, από τον ορισμό του infimum συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{\sup S_2} \leq \inf S_1.$$

3. Υπό το πρίσμα του σημείου 2, αρκεί να δείξουμε μόνο ότι
$$\inf S_1 \le 1.$$
Πράγματι, έστω, αντίθετα, ότι
$$1 < \inf S_1,$$
άρα, από τον ορισμό του infimum έχουμε ότι
$$1 < \varrho,\ \forall \varrho \in S_1,$$
το οποίο είναι άτοπο, καθώς ισχύει ότι
$$x \in 1Y.$$

4. Υπό το πρίσμα του σημείου 2, αρκεί να δείξουμε μόνο ότι
$$\inf S_1 = 0.$$
Πράγματι, έχουμε ότι
$$S_1 = \left\{\varrho > 0 \middle| 0_X \in \varrho Y\right\} = (0,\infty)\,,$$
άρα
$$\inf S_1 = 0.$$

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.6.1, ακολουθεί ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 4.6.1 (συναρτησοειδές Minkowski απορροφητικού υποσυνόλου διανυσματικού χώρου)**.** *Έστω*

1. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,
2. $Y \in \mathfrak{A}(X)$ *και*
3. *συνάρτηση*
$$\begin{aligned} \mu_Y\colon X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mu_Y(x) = \inf\left\{\varrho > 0 \middle| x \in \varrho Y\right\}. \end{aligned}$$

Η μ_Y καλείται συναρτησοειδές Minkowski του Y.

Αξιοποιώντας την Πρόταση 4.6.1, προκύπτει το επόμενο.

Πρόταση 4.6.2. *Έστω*

1. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$ *και*
2. $Y \in (\mathfrak{C}(X) \cup \mathfrak{B}(X)) \cap \mathscr{P}\left(X \middle| 0_X\right)$.

Ισχύει ότι
$$\left\{x \in X \middle| \mu_Y(x) < 1\right\} \subseteq Y.$$

Απόδειξη. Καταρχήν, έχουμε ότι
$$\left\{x \in X \middle| \mu_Y(x) < 1\right\} \neq \varnothing,$$
καθώς από το σημείο 4 της Πρότασης 4.6.1 έπεται ότι
$$\mu_Y(0_X) = 0 \Rightarrow 0_X \in \left\{x \in X \middle| \mu_Y(x) < 1\right\}.$$
Έστω, λοιπόν, $x \in X$ τ.ω.:
$$\mu_Y(x) < 1,$$
δλδ, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6.1 σε συνδυασμό με τον ορισμό του infimum,
$$\exists \varrho_0 \in (0,1)\ \text{τ.ω.: } x \in \varrho_0 Y.$$
Χωρίζουμε, έπειτα, τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν $Y \in \mathfrak{C}(X) \cap \mathscr{P}(X \mid 0_X)$, τότε έχουμε ότι
$$x \in \varrho_0 Y = \varrho_0 Y + (1-\varrho_0) Y \{0_X\} \subseteq Y.$$
- Αν $Y \in \mathfrak{B}(X)$, τότε έχουμε ότι
$$x \in \varrho_0 Y \subseteq Y.$$

□

Σημείωση 4.6.1. *Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.6.1, το συμπέρασμα της Πρότασης 4.6.2 ισχυροποιείται ως εξής*
$$\{x \in X \mid \mu_Y(x) < 1\} \subseteq Y \subseteq \{x \in X \mid \mu_Y(x) \leq 1\}.$$

Τώρα, άμεσα είναι τα ακόλουθα δύο.

Πρόταση 4.6.3. *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $Y \in \mathfrak{A}(X)$,

iii. $x \in X$ *και*

iv. $a \in \mathbb{F}$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον, ότι*

   iv′. $a \geq 0$.

   Ισχύει ότι
$$\mu_Y(ax) = a\mu_Y(x).$$

2. *Έστω, επιπλέον, ότι*

   ii″. $Y \in \mathfrak{B}(X) \cap \mathfrak{A}(X)$.

   Ισχύει ότι
$$\mu_Y(ax) = |a| \, \mu_Y(x).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Από τον Ορισμό 4.6.1 έχουμε ότι
$$\mu_Y(ax) = \inf\{\varrho > 0 \mid ax \in \varrho Y\} = \inf\left\{\varrho > 0 \,\middle|\, x \in \frac{\varrho}{a} Y\right\} = a \inf\left\{\frac{\varrho}{a} > 0 \,\middle|\, x \in \frac{\varrho}{a} Y\right\} = a\mu_Y(x).$$

2. Όπως και στο σημείο 1, συμπεραίνουμε ότι
$$\mu_Y(ax) = \inf\left\{\varrho > 0 \,\middle|\, x \in \frac{\varrho}{a} Y\right\},$$
   οπότε, αφού $Y \in \mathfrak{B}(X)$, έχουμε ότι
$$\mu_Y(x) = \inf\left\{\varrho > 0 \,\middle|\, \left|\frac{\varrho}{a}\right| Y\right\} = \inf\left\{\varrho > 0 \,\middle|\, x \in \frac{\varrho}{|a|} Y\right\} = |a| \inf\left\{\frac{\varrho}{|a|} > 0 \,\middle|\, x \in \frac{\varrho}{|a|} Y\right\} = |a| \, \mu_Y(x).$$

□

Πρόταση 4.6.4. *Έστω*

1. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,
2. $Y \in \mathfrak{C}(X) \cap \mathfrak{A}(X)$ *και*

3. $\{x_n\}_{n=1}^{2} \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$\mu_Y(x+y) \leq \mu_Y(x) + \mu_Y(y).$$

Απόδειξη. Αφού $Y \in \mathfrak{A}(X)$, έχουμε ότι

$$\exists \{\varrho_n\}_{n=1}^{2} \subseteq (0,\infty) \text{ τ.ω.: } (x_n)_{n=1}^{2} \in \prod_{n=1}^{2} (\varrho_n Y)$$

και για την ακρίβεια, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6.1, ότι

$$(x_n)_{n=1}^{2} \in \prod_{n=1}^{2} (\varrho_n Y), \ \forall (\varrho_n)_{n=1}^{2} \in \prod_{n=1}^{2} (\mu_Y(x_n), \infty).$$

Έτσι, αφού $Y \in \mathfrak{C}(X)$, έχουμε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.3 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.2.1), ότι

$$x_1 + x_2 \in \varrho_1 Y + \varrho_2 Y = (\varrho_1 + \varrho_2) Y, \ \forall (\varrho_n)_{n=1}^{2} \in \prod_{n=1}^{2} (\mu_Y(x_n), \infty),$$

οπότε, σύμφωνα πάλι με τον Ορισμό 4.6.1, ότι

$$\mu_Y(x_1 + x_2) \leq \varrho_1 + \varrho_2, \ \forall (\varrho_n)_{n=1}^{2} \in \prod_{n=1}^{2} (\mu_Y(x_n), \infty).$$

Συνεπώς, από το ορισμό του infimum, έπεται ότι

$$\mu_Y(x_1 + x_2) \leq \inf \{\varrho_1 + \varrho_2 > 0\}_{(\varrho_n)_{n=1}^{2} \in \prod_{n=1}^{2} (\mu_Y(x_n), \infty)} = \mu_Y(x_1) + \mu_Y(x_2).$$

□

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.6.1, από την Πρόταση 4.6.1, την Πρόταση 4.6.3 και την Πρόταση 4.6.4 έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Πρόταση 4.6.5 ($\mu_\Diamond$ ανοικτού δίσκου ως ψευδονόρμα)**.** *Έστω*

1. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$ *και*

2. $Y \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X)$.

Ισχύει ότι το μ_Y είναι ψευδονόρμα του X.

Απόδειξη. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του ορισμού των ψευδονορμών ως εξής.

- Από το σημείο 1 της Πρότασης 4.6.1 έχουμε ότι

$$\mu_Y(X) \subseteq [0,\infty).$$

- Από το σημείο 2 της Πρότασης 4.6.3 έχουμε ότι

$$\mu_Y(ax) = |a| \, \mu_Y(x), \ \forall a \in \mathbb{F}, \ \forall x \in X.$$

- Από το σημείο 2 της Πρότασης 4.6.4 έχουμε ότι

$$\mu_Y(x_1 + x_2) \leq \mu_Y(x_1) + \mu_Y(x_2), \ \forall \{x_n\}_{n=1}^{2} \subseteq X.$$

□

Κεφάλαιο 5

Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι

Εδώ εισάγουμε την έννοια των τοπολογικών διανυσματικών χώρων και μελετάμε τις βασικές ιδιότητες. Όπως γίνεται φανερό από το ίδιο το όνομά τους, αποτελούν κράμα της τοπολογικής δομής με την διανυσματική δομή. Αποτελούν δε θεμέλιο λίθο της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [36], [23], [18], [16], [1], [2], [25], [24], [15] ,[32], [9] και [10], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

5.1 Συνθήκη συμβατότητας

Η σύζευξη μεταξύ της τοπολογικής δομής και της διανυσματικής δομής επέρχεται μέσω της ικανοποίησης συγκεκριμένης συνθήκης συμβατότητας μεταξύ τους.

Ορισμός 5.1.1 (τοπολογικός διανυσματικός χώρος)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X))$,
2. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$ *και*
3. *ότι ικανοποιείται η συνθήκη συμβατότητας (μεταξύ των παραπάνω δομών), δλδ*
   i. $\lozenge + \blacklozenge \in C\big(\big(X^2, \mathscr{O}\big(X^2\big)\big); X\big)$, *όπου* $\mathscr{O}\big(X^2\big)$ *η τοπολογία γινόμενο του* X^2 *και*
   ii. $\lozenge \cdot \blacklozenge \in C((\mathbb{F} \times X, \mathscr{O}(\mathbb{F} \times X)); X)$, *όπου* $\mathscr{O}(\mathbb{F} \times X)$ *η τοπολογία γινόμενο του* $\mathbb{F} \times X$.

Η τετράδα $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *καλείται τοπολογικός διανυσματικός χώρος (επί του* $\mathbb{F}$*) και η* $\mathscr{O}(X)$ *συμβατή (ως προς την διανυσματική δομή του* X*).*

Αξιοποιώντας την Πρόταση 3.2.1.11, τον Ορισμό 3.3.2.1 και τον Ορισμό 5.1.1, έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 5.1.1. *Έστω* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. *Ισχύουν ότι*

1. $\sum\limits_{n=1}^{n_0} \lozenge_n \in C(X^{n_0}; X)$,
2. $(\lozenge_n \blacklozenge_n)_{n=1}^{n_0} \in C(\mathbb{F}^{n_0} \times X^{n_0}; X^{n_0})$ *και*
3. $\sum\limits_{n=1}^{n_0} \lozenge_n \blacklozenge_n \in C(\mathbb{F}^{n_0} \times X^{n_0}; X)$.

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Για $n_0 = 1$ το αποτέλεσμα είναι άμεσο από την συνέχεια της ταυτοτικής συνάρτησης από και προς τον ίδιο τοπολογικό χώρο. Τώρα, $\forall n_0 \in \mathbb{N} \cap [2, \infty)$, λόγω του Ορισμού 5.1.1 και της σχέσης
$$\sum_{n=1}^{n_0} \lozenge_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} \lozenge_n + \lozenge_{n_0}, \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \cap [2, \infty),$$
το ζητούμενο έπεται άμεσα με επαγωγή στο n_0.

2. Έπεται από την Πρόταση 3.2.1.11 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 3.3.2.1) σε συνδυασμό με τον εγκλεισμό
$$\{\lozenge_n\blacklozenge_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq C(\mathbb{F}\times X;X),$$
όπως αυτό εξασφαλίζεται από τον Ορισμό 5.1.1.

3. Για $n_0 = 1$ το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από τον Ορισμό 5.1.1. Έστω, τώρα, $n_0 \in \mathbb{N}\cap[2,\infty)$. Γράφοντας
$$\sum_{n=1}^{n_0} \lozenge_n\blacklozenge_n = \left(\sum_{n=1}^{n_0} \triangledown_n\right)\circ(\lozenge_n\blacklozenge_n)_{n=1}^{n_0},$$
το ζητούμενο προκύπτει από τα σημεία 1 και 2 μαζί με την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

□

5.2 Χαρακτηρισμός σύγκλισης δικτύων σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους

Εδώ δίνουμε έναν βασικό χαρακτηρισμό της σύγκλισης δικτύων σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Πρώτα, όμως, απαιτείται το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα, το οποίο έπεται άμεσα από τον Ορισμό 5.1.1 και την Πρόταση 3.2.1.10.

Πρόταση 5.2.1. *Έστω*

i. $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   ii. $\{x,y\}\subseteq X$ *και*

   iii. $\{x_i\}_{i\in I}\subseteq X$ *και* $\{y_i\}_{i\in I}\subseteq X$ *δίκτυα.*

   Ισχύει ότι
   $$(x_i\to x \;\&\; y_i\to y) \Rightarrow x_i+y_i\to x+y.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   ii′. $a\in\mathbb{F}$ *και* $x\in X$ *και*

   iii′. $\{a_i\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{F}$ *και* $\{x_i\}_{i\in I}\subseteq X$ *δίκτυα.*

   Ισχύει ότι
   $$(a_i\to a \;\&\; x_i\to x) \Rightarrow a_ix_i\to ax.$$

3. *Έστω, επιπλέον,*

   ii″. $\{a_n\}_{n=1}^{n_0}\subsetneq\mathbb{F}$ *και* $\{x_n\}_{n=1}^{n_0}\subsetneq X$ *και*

   iii″. $\{a_{ni}\}_{i\in I}\subseteq\mathbb{F}$ *και* $\{x_{ni}\}_{i\in I}\subseteq X$ *δίκτυα,* $\forall n\in\{1,\dots,n_0\}$.

   Ισχύει ότι
   $$(a_{ni}\to a \;\&\; x_{ni}\to x)\,,\ \forall n\in\{1,\dots,n_0\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{n_0} a_{ni}x_{ni}\to\sum_{n=1}^{n_0} a_nx_n.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Από την Πρόταση 3.2.1.10 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 3.3.2.1) έχουμε ότι
$$(x_i\to x \;\&\; y_i\to y) \Leftrightarrow (x_i,y_i)\to(x,y)\,,$$
οπότε το ζητούμενο έπεται από την συνέχεια της $\lozenge+\blacklozenge$ (σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1) και την αρχή της μεταφοράς.

2. Από την Πρόταση 3.2.1.10 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 3.3.2.1) έχουμε ότι

$$(a_i \to a \ \&\ x_i \to x) \ \Leftrightarrow\ (a_i, x_i) \to (a, x)\,,$$

οπότε το ζητούμενο έπεται από την συνέχεια της $\lozenge \cdot \blacklozenge$ (σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1) και την αρχή της μεταφοράς.

3. Από υπόθεση σε συνδυασμό με την εφαρμογή n_0 φορές του σημείου 2 έχουμε ότι

$$a_{ni}x_{ni} \to a_n x_n, \ \forall n \in \{1, \ldots, n_0\}\,,$$

οπότε, εφαρμόζοντας επαγωγικά $n_0 - 1$ φορές το σημείο 1, παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Άμεση συνέπεια, λοιπόν, της Πρότασης 5.2.1 είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 5.2.1 (χαρακτηρισμός σύγκλισης δικτύων σε τοπολογικό διανυσματικό χώρο)**.** *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,

ii. $x \in X$,

iii. $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$x_i - x \to 0_X \overset{1}{\Leftrightarrow} x_i \to x \overset{2}{\Leftrightarrow} x - x_i \to 0_X\,.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

$\left(\overset{1}{\Rightarrow}\right)$ Θέτουμε

$$y_1 = 0_X \ \&\ y_2 = x$$

και

$$(y_{1i} = x_i - x \ \&\ y_{2i} = x)\,, \ \forall i \in I\,.$$

Από υπόθεση και την Πρόταση 5.2.1 έπεται ότι

$$y_{1i} \to y_1 \ \&\ y_{2i} \to y_2,$$

οπότε από το ίδιο πάλι αποτέλεσμα έπεται ότι

$$y_{1i} + y_{2i} \to y_1 + y_2,$$

δλδ το ζητούμενο.

$\left(\overset{1}{\Leftarrow}\right)$ Θέτουμε

$$y_1 = x \ \&\ y_2 = x$$

και

$$(y_{1i} = x_i \ \&\ y_{2i} = x)\,, \ \forall i \in I\,.$$

Από υπόθεση και την Πρόταση 5.2.1 έπεται ότι

$$y_{1i} \to y_1 \ \&\ y_{2i} \to y_2,$$

οπότε από το ίδιο πάλι αποτέλεσμα έπεται ότι

$$y_{1i} - y_{2i} \to y_1 - y_2,$$

δλδ το ζητούμενο.

$\left(\overset{2}{\Rightarrow}\right)$ Θέτουμε

$$y_1 = x \;\&\; y_2 = x$$

και

$$\left(y_{1_i} = x \;\&\; y_{2_i} = x_i\right), \;\; \forall i \in I.$$

Από υπόθεση και την Πρόταση 5.2.1 έπεται ότι

$$y_{1_i} \to y_1 \;\&\; y_{2_i} \to y_2,$$

οπότε από το ίδιο πάλι αποτέλεσμα έπεται ότι

$$y_{1_i} - y_{2_i} \to y_1 - y_2,$$

δλδ το ζητούμενο.

$\left(\overset{2}{\Leftarrow}\right)$ Θέτουμε

$$y_1 = x \;\&\; y_2 = 0_X$$

και

$$\left(y_{1_i} = x \;\&\; y_{2_i} = x - x_i\right), \;\; \forall i \in I.$$

Από υπόθεση και την Πρόταση 5.2.1 έπεται ότι

$$y_{1_i} \to y_1 \;\&\; y_{2_i} \to y_2,$$

οπότε από το ίδιο πάλι αποτέλεσμα έπεται ότι

$$y_{1_i} - y_{2_i} \to y_1 + y_2,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Σημείωση 5.2.1. *Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 δεν χρειάστηκε πλήρως η διανυσματική δομή του X, παρα μόνο η δομή ομάδας αυτού μέσω της πρόσθεσης $\lozenge + \blacklozenge$ και της πράξης αντίθετο $-\lozenge$. Μάλιστα υπάρχει μια γενικότερη δομή από αυτή των τοπολογικών διανυσματικών χώρων, και συγκεκριμένα αυτή των τοπολογικών ομάδων με την πράξη της πρόσθεσης και της πράξης αντίθετο (βλ, πχ, [23]), η οποία όμως δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν κείμενο.*

5.3 Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Εδώ παραθέτουμε τρία βασικά παραδείγματα τοπολογικών διανυσματικών χώρων.

5.3.1 Τετριμμένος τοπολογικός διανυσματικός χώρος

Χαρακτηριστικό παράδειγμα τοπολογικού διανυσματικού χώρου αποτελεί οποιοσδήποτε διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με την τετριμμένη τοπολογία, όπως άλλωστε φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 5.3.1.1 (τετριμμένος τοπολογικός διανυσματικός χώρος)**.** *Έστω $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$. Ισχύει ότι η τετράδα $(X, \{\varnothing, X\}, +, \cdot)$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Για κάθε σύνολο Y και συνάρτηση $f\colon Y \to X$, έχουμε ότι

$$f^{\leftarrow}(\varnothing) = \varnothing \;\&\; f^{\leftarrow}(X) = Y.$$

Μιας και το $\{\varnothing, Y\}$ περιέχεται σε οποιαδήποτε τοπολογία του Y, έπεται ότι

$$f \in C(Y; X).$$

Στην περίπτωσή μας, αρκεί απλά να θεωρήσουμε ότι $Y = X^2$. □

5.3.2 Διανυσματικοί υπόχωροι τοπολογικών διανυσματικών χώρων ως τέτοιοι

Επίσης χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου χώρου αποτελούν οι υπόχωροι τοπολογικών διανυσματικών χώρων εφοδιασμένων με την αντίστοιχη σχετική τοπολογία, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 5.3.2.1 (διανυσματικός υπόχωρος τοπολογικού διανυσματικού χώρου ως τέτοιος). *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,

2. $(Y, +|_Y, \mathbb{F}, \cdot|_Y)$ *διανυσματικός υπόχωρος του* X *και*

3. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y.

Ισχύει ότι η τετράδα $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ *είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελεγθεί η συνθήκη συμβατότητας μεταξύ της τοπολογικής και της διανυσματικής δομής του Y.

- Για να πάρουμε ότι $\lozenge +|_Y \blacklozenge \in C\big(\big(Y^2, \mathscr{O}\big(Y^2\big)\big); Y\big)$, όπου $\mathscr{O}\big(Y^2\big)$ η τοπολογία γινόμενο του Y^2, αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον βασικό χαρακτηρισμό της συνέχειας, ότι

  $$\left\{(\lozenge +|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Z)\right\}_{Z \in \mathscr{O}(Y)} \subseteq \mathscr{O}\big(Y^2\big),$$

  ή, ισοδύναμα, κάνοντας χρήση της Πρότασης 3.3.3.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.3.3.3, ότι

  $$\left\{(\lozenge +|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Z)\right\}_{Z \in \mathscr{O}(Y)} \subseteq \left\{Y^2 \cap Z\right\}_{Z \in \mathscr{O}(X^2)}.$$

  Πράγματι, έστω $Z \in \mathscr{O}(Y)$, δλδ

  $$\exists V \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } Z = Y \cap V.$$

  Έχουμε έτσι ότι

  $$(\lozenge +|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Z) = (\lozenge +|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Y) \cap (\lozenge +|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(V) = Y^2 \cap (\lozenge + \blacklozenge)^{\leftarrow}(V)$$

  και το ζητούμενο έπεται από την συνθήκη συμβατότητας για τον X.

- Για να πάρουμε ότι $\lozenge \cdot|_Y \blacklozenge \in C((\mathbb{F} \times Y, \mathscr{O}(\mathbb{F} \times Y)); Y)$, όπου $\mathscr{O}(\mathbb{F} \times Y)$ η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{F} \times Y$, αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με τον βασικό της συνέχειας, ότι

  $$\left\{(\lozenge \cdot|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Z)\right\}_{Z \in \mathscr{O}(Y)} \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{F} \times Y),$$

  ή, ισοδύναμα και σύμφωνα με τα ίδια επιχειρήματα με πριν, ότι

  $$\left\{(\lozenge \cdot|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Z)\right\}_{Z \in \mathscr{O}(Y)} \subseteq \{(\mathbb{F} \times Y) \cap Z\}_{Z \in \mathscr{O}(\mathbb{F} \times X)}.$$

  Πράγματι, έστω $Z \in \mathscr{O}(Y)$, δλδ

  $$\exists V \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } Z = Y \cap V.$$

  Έχουμε έτσι ότι

  $$(\lozenge \cdot|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Z) = (\lozenge \cdot|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(Y) \cap (\lozenge \cdot|_Y \blacklozenge)^{\leftarrow}(V) = \mathbb{F} \times Y \cap (\lozenge \cdot \blacklozenge)^{\leftarrow}(V)$$

  και το ζητούμενο έπεται από την συνθήκη συμβατότητας για τον X.

$\square$

5.3.3 Διανυσματικοί χώροι με ψευδονόρμα ως τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι

Επίσης χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου χώρου αποτελεί ο $\mathbb{F}^m$ με την συνήθη μετρική τοπολογία και την συνήθη διανυσματική δομή του. Γενικότερα, όλοι οι διανυσματικοί χώροι με ψευδονόρμα είναι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 5.3.3.1 (διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα ως τοπολογικός διανυσματικός χώρος)**.** *Έστω $(X, f, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα. Ισχύει ότι η τετράδα $\big(X, \mathscr{O}_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(X), +, \cdot\big)$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Αρκεί να ελεγχθεί η συνθήκη συμβατότητας μεταξύ της τοπολογικής και της διανυσματικής δομής του X.

- Για να πάρουμε ότι $\lozenge + \blacklozenge \in C\big(\big(X^2, \mathscr{O}\big(X^2\big)\big); X\big)$, όπου $\mathscr{O}\big(X^2\big)$ η τοπολογία γινόμενο του X^2, αρκεί, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, να δείξουμε ότι

  $$x_n + y_n \to x + y, \ \forall\, (x, y) \in X^2, \ \forall \text{ ακολουθία } \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^2 \text{ τ.ω.: } (x_n, y_n) \to (x, y)\,,$$

  ή, ισοδύναμα λόγω της Πρότασης 3.2.1.10 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 3.3.2.1), ότι

  $$x_n + y_n \to x + y, \ \forall\, (x, y) \in X^2, \ \forall \text{ ακολουθία } \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^2 \text{ τ.ω.:}$$
  $$\text{τ.ω.: } (x_n \to x \ \&\ y_n \to y)\,,$$

  ή, ισοδύναμα, λόγω του Θεωρήματος 5.2.1, ότι

  $$x_n + y_n - (x + y) \to 0_X, \ \forall\, (x, y) \in X^2, \ \forall \text{ ακολουθία } \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^2 \text{ τ.ω.:}$$
  $$\text{τ.ω.: } x_n - x \to 0_X \leftarrow y_n - y,$$

  ή, ισοδύναμα, λόγω γνωστού αποτελέσματος για την σύγκλιση ακολουθιών σε ψευδομετρικούς χώρους, ότι

  $$f(x_n + y_n - (x + y)) \to 0_{\mathbb{R}}, \ \forall\, (x, y) \in X^2, \ \forall \text{ ακολουθία } \{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X^2 \text{ τ.ω.:}$$
  $$\text{τ.ω.: } f(x_n - x) \to 0_{\mathbb{R}} \leftarrow f(y_n - y).$$

  Πράγματι, αφού η f είναι ψευδονόρμα, το ζητούμενο έπεται άμεσα από την τριγωνική ανισότητα

  $$f(x_n + y_n - (x + y)) = f(x_n - x + y_n - y) \le f(x_n - x) + f(y_n - y).$$

- Για να πάρουμε ότι $\lozenge \cdot \blacklozenge \in C((\mathbb{F} \times X, \mathscr{O}(\mathbb{F} \times X)); X)$, όπου $\mathscr{O}(\mathbb{F} \times X)$ η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{F} \times X$, αρκεί, σύμφωνα με τα ίδια επιχειρήματα με πριν, να δείξουμε ότι

  $$f(a_n x_n - a x) \to 0_{\mathbb{R}}, \ \forall\, (a, x) \in \mathbb{F} \times X, \ \forall \text{ ακολουθία } \{(a_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{F} \times X \text{ τ.ω.:}$$
  $$\text{τ.ω.: } |a_n - a| \to 0_{\mathbb{R}} \leftarrow f(x_n - x).$$

  Πράγματι, αφού η f είναι ψευδονόρμα, το ζητούμενο έπεται άμεσα από την τριγωνική ανισότητα σε συνδυασμό με την απόλυτη ομογένεια

  $$f(a_n x_n - a x) = f(a_n x_n - a_n x + a_n x - a x) \le f(a_n x_n - a_n x) + f(a_n x - a x) =$$
  $$= |a_n|\, f(x_n - x) + |a_n - a|\, f(x).$$

□

5.4 Συμβατές πράξεις μεταξύ ανοικτών συνόλων

Εδώ καταδεικνύουμε ότι οι συμβατές πράξεις ενός τοπολογικού διανυσματικού χώρου αφήνουν αναλλοίωτη την αντίστοιχη τοπολογία.

Έτσι, με την χρήση της Πρότασης 2.6.1.1 και της Πρότασης 5.2.1 παίρνουμε τα επόμενα δύο.

Πρόταση 5.4.1. *Έστω $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $x \in X$. *Ισχύει ότι*
$$x + \mathscr{O}(X \,|\, \lozenge) = \mathscr{O}(X \,|\, x + \lozenge).$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $Y \subseteq X$. *Ισχύει ότι*
$$Y + \mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(X).$$

3. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X)$. *Ισχύει ότι*
$$Y_1 + Y_2^\circ \subseteq (Y_1 + Y_2)^\circ.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Δείχνουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Μιας και προφανώς ισχύει ότι
$$x + \mathscr{P}(X \,|\, \lozenge) \subseteq \mathscr{P}(X \,|\, x + \lozenge),$$
   αρκεί να δείξουμε ότι
$$x + \mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(X).$$
   Έστω, λοιπόν, $Z \in \mathscr{O}(X)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\forall y \in x + Z,\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i \in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } x_i \to y,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq x + Z.$$
   Έστω, λοιπόν,
$$y \in x + Z \Leftrightarrow y - x \in Z$$
   και δίκτυο $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ τ.ω.: $x_i \to y$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.1 έπεται ότι
$$x_i - x \to y - x,$$
   οπότε, αφού $Z \in \mathscr{O}(X)$, συμπεραίνουμε από την Πρόταση 2.6.1.1 ότι
$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Z \Leftrightarrow \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq x + Z,$$
   δλδ το ζητούμενο.

   ($\supseteq$) Αρκεί να θέσουμε $-x$ και $x + \lozenge$ αντί για x και $\lozenge$, αντίστοιχα, στην σχέση του εγκλεισμού $\subseteq$.

2. Έστω $Z \in \mathscr{O}(X)$. Γράφοντας
$$Y + Z = \bigcup_{y \in Y} (y + Z),$$
   το ζητούμενο έπεται απευθείας από τον ορισμό των τοπολογιών σε συνδυασμό με το σημείο 1.

3. Έχουμε ότι
$$Y_2^\circ \subseteq Y_2 \Rightarrow Y_1 + Y_2^\circ \subseteq Y_1 + Y_2,$$
   καθώς επίσης, λόγω του σημείου 2, ότι
$$Y_1 + Y_2^\circ \in \mathscr{O}(X),$$
   οπότε, συνδυάζοντας τα παραπάνω, έπεται το ζητούμενο.

□

Σημείωση 5.4.1. *Σύμφωνα με χαρακτηρισμό της συνέχειας, άμεση απόρροια του σημείου 1 της Πρότασης 5.4.1*[1] *αποτελεί η ιδιότητα*
$$x + \lozenge \in C(X; X),\ \forall x \in \mathbb{X}.$$

[1] Για την ακρίβεια, εδώ αρκεί μονάχα ο εγκλεισμός
$$x + \mathscr{O}(X \,|\, \lozenge) \subseteq \mathscr{O}(X \,|\, x + \lozenge).$$

Πρόταση 5.4.2. *Έστω $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύουν ότι*
   i. $(\mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}) \mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}(X)$ *και*
   ii. $\mathbb{F}\mathscr{O}(X \mid 0_X) \subseteq \mathscr{O}(X \mid 0_X)$.
2. *Έστω, επιπλέον, $(a, Y) \in (\mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}) \times \mathscr{O}(X)$. Ισχύει ότι*
$$aY^\circ = (aY)^\circ.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.
   i. Έστω $(a, Z) \in (\mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}) \times \mathscr{O}(X)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.6.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\forall y \in aZ,\ \forall \text{ δίκτυο } \{y_i\}_{i \in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } y_i \to y,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{y_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq aZ.$$
   Έστω, λοιπόν, $y \in aZ$, οπότε
$$\exists x \in W \text{ τ.ω.: } y = ax,$$
   καθώς επίσης $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq X$ δίκτυο τ.ω.: $y_i \to y = ax$. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.2.1 έπεται ότι
$$\frac{1}{a} y_i \to x,$$
   οπότε, αφού $Z \in \mathscr{O}(X)$, συμπεραίνουμε από την Πρόταση 2.6.1.1 ότι
$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \left\{\frac{1}{a} y_i\right\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Z \Leftrightarrow \{y_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq aZ,$$
   δλδ το ζητούμενο.
   ii. Έπεται άμεσα από το σημείο 1 σε συνδυασμό με την προφανή σχέση
$$\mathbb{F}\mathscr{P}(X \mid 0_X) \subseteq \mathscr{P}(X \mid 0_X).$$
2. Εξετάζουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.
   (⊆) Έχουμε ότι
$$Y^\circ \subseteq Y \Leftrightarrow aY^\circ \subseteq aY,$$
   καθώς επίσης, λόγω του σημείου 1.i, ότι
$$aY^\circ \in \mathscr{O}(X),$$
   οπότε, συνδυάζοντας τα παραπάνω, έπεται το ζητούμενο.
   (⊇) Αξιοποιώντας τον εγκλεισμό (⊆) για $\frac{1}{a}$ και aY αντί για a και Y, αντίστοιχα, έπεται ότι
$$\frac{1}{a}(aY)^\circ \subseteq \left(\frac{1}{a} aY\right)^\circ = Y^\circ \Leftrightarrow (aY)^\circ \subseteq aY^\circ.$$

□

Σημείωση 5.4.2. *Σύμφωνα με χαρακτηρισμό της συνέχειας, άμεση απόρροια του σημείου 1.i της Πρότασης 5.4.2 αποτελεί η ιδιότητα*
$$a\Diamond \in C(X; X),\ \forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\},$$
καθώς επίσης, σύμφωνα με τον σημειακό χαρακτηρισμό της συνέχειας, άμεση απόρροια του σημείου 1.ii αποτελεί η συνέχεια της παραπάνω συνάρτησης, $\forall a \in \mathbb{F}$ μεν, αλλά μονάχα στο 0_X δε.

Τώρα, αξιοποιώντας τα παραπάνω, εξάγουμε δύο χρήσιμα αποτελέσματα.

Πρόταση 5.4.3. *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,

2. $Y \in \mathfrak{B}(X)$ *τ.ω.:* $0_X \in Y^\circ$.

Ισχύει ότι

$$Y^\circ \in \mathfrak{B}(X).$$

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\}$ τ.ω.: $|a| \leq 1$. Έχουμε ότι

$$Y^\circ \subseteq Y \Leftrightarrow aY^\circ \subseteq aY,$$

καθώς επίσης, λόγω υπόθεσης, ότι

$$aY \subseteq Y,$$

άρα

$$aY^\circ \subseteq Y.$$

Επιπλέον, από το σημείο 1.i της Πρόταση 5.4.2 έπεται ότι

$$aY^\circ \in \mathscr{O}(X).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έπεται ότι

$$aY^\circ \subseteq Y^\circ, \ \forall a \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\} \text{ τ.ω.: } |a| \leq 1.$$

Μιας και $0_X \in Y^\circ$, έπεται τελικά ότι

$$aY^\circ \subseteq Y^\circ, \ \forall a \in \mathbb{F} \text{ τ.ω.: } |a| \leq 1,$$

δλδ τελικά το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.4.4. *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*

2. $Y \in \mathfrak{C}(X)$.

Ισχύει ότι

$$Y^\circ \in \mathfrak{C}(X).$$

Απόδειξη. Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{n_0} \in [0,1]^n$ τ.ω.:

$$\sum_{n=1}^{n_0} a_n = 1.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y^\circ) \subseteq Y^\circ.$$

Πράγματι, από το σημείο 2 την Πρόταση 5.4.2 έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y^\circ) = \sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y)^\circ,$$

οπότε, εφαρμόζοντας επαγωγικά $n_0 - 1$ φορές το σημείο 3 της Πρότασης 5.4.1, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y^\circ) \subseteq \left(\sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y) \right)^\circ.$$

Επιπλέον, από υπόθεση έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{n_0} (a_n Y) = Y,$$

συνεπώς, συνδυάζοντας τα παραπάνω, έπεται το ζητούμενο. □

Σημείωση 5.4.3. *Τα αντίστοιχα αποτελέσματα της παρούσας ενότητας, για κλειστά σύνολα αντί για ανοικτά και για κλειστότητες συνόλων αντί για εσωτερικά, επίσης ισχύουν.*

5.5 Χαρακτηρισμός συμβατών τοπολογιών

Όπως καταδεικνύουμε εδώ, όλες οι συμβατές τοπολογίες κάθε τοπολογικού διανυσματικού χώρου περιγράφονται πλήρως από τα ανοικτά σύνολα που περιέχουν το μηδενικό στοιχείο.

Με την χρήση της Πρότασης 5.2.1 παίρνουμε το δεύτερο.

Θεώρημα 5.5.1 (χαρακτηρισμός συμβατών τοπολογιών)**.** *Έστω* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. *Ισχύει ότι*

$$\mathscr{O}(X) = \bigcup_{x \in X} \big(x + \mathscr{O}(X \,|\, 0_X)\big).$$

Απόδειξη. Από το σημείο 1 της Πρότασης 5.4.1 έχουμε ότι

$$x + \mathscr{O}(X \,|\, x) = x + \mathscr{O}(X \,|\, 0_X), \ \forall x \in X,$$

οπότε το ζητούμενο έπεται από την προφανή ισότητα

$$\mathscr{O}(X) = \bigcup_{x \in X} \mathscr{O}(X \,|\, x).$$

□

Σημείωση 5.5.1. *Η αξία του Θεωρήματος 5.5.1 έγκειται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να περιγράψουμε πλήρως μια συμβατή τοπολογία γνωρίζοντας μονάχα τις (ανοικτές) περιοχές του μηδενικού στοιχείου.*

5.6 Περιοχές του μηδενικού στοιχείου (μέρος I)

Στην §5.5 διαπιστώσαμε την σημασία των (ανοικτών) περιοχών του αντίστοιχου μηδενικού στοιχείου για έναν τοπολογικό διανυσματικό χώρο. Οφείλουμε, λοιπόν, να γίνουμε αναλυτικότεροι σχετικά με αυτά σύνολα, παραθέτοντας εδώ χρήσιμα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Για το επόμενο γίνεται χρήση του Ορισμού 5.1.1 και της Πρότασης 3.3.2.1.

Πρόταση 5.6.1. *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*
2. $Y \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X)$.

Ισχύει ότι

$$\exists Z \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } Z + Z \subseteq Y.$$

Απόδειξη. Από την συνέχεια της $\lozenge + \blacklozenge$ στο $(0_X, 0_X)$, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1, ισχύει ότι

$$\exists W \in \mathscr{O}\big(X^2 \,\big|\, (0_X, 0_X)\big) \text{ τ.ω.: } \ (\lozenge + \blacklozenge)(W) \subseteq Y.$$

Εξάλλου, από την Πρόταση 3.3.2.1 έπεται ότι

$$\exists \{Z_1, Z_2\} \subseteq \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } Z_1 \times Z_2 \subseteq W,$$

άρα, υπό το πρίσμα του ορισμού των τοπολογιών, θέτοντας

$$Z = Z_1 \cap Z_2 \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X),$$

συμπεραίνουμε ότι

$$Z \times Z \subseteq W.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$(\lozenge + \blacklozenge)(Z \times Z) \subseteq (\lozenge + \blacklozenge)(W) \subseteq Y \Rightarrow Z + Z \subseteq Y.$$

□

Για το ακόλουθο, εκτός των προαναφερθέντων, γίνεται επίσης χρήση του Ορισμού 2.4.1 και της Πρότασης 2.4.4.

Πρόταση 5.6.2. *Έστω* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. *Ισχύει ότι*

$$\mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \subseteq \mathfrak{A}(X).$$

Απόδειξη. Έστω $Y \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$ και $x \in X$. Από την συνέχεια της $\lozenge \cdot \blacklozenge$ στο $(0_{\mathbb{F}}, x)$, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1, ισχύει ότι

$$\exists W \in \mathscr{O}\big(\mathbb{F} \times X \,\big|\, (0_{\mathbb{F}}, x)\big) \text{ τ.ω.: } (\lozenge \cdot \blacklozenge)(W) \subseteq Y.$$

Εξάλλου, από την Πρόταση 3.3.2.1 έπεται ότι

$$\exists\, (Z_1, Z_2) \in \mathscr{O}\big(\mathbb{F} \,\big|\, 0_{\mathbb{F}}\big) \times \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big) \text{ τ.ω.: } Z_1 \times Z_2 \subseteq W,$$

καθώς επίσης, από τον Ορισμό 2.4.1 και την Πρόταση 2.4.4 έπεται ότι

$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \subseteq Z_1,$$

δλδ, συνολικά,

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \times Z_2 \subseteq W,$$

άρα συμπεραίνουμε ότι

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \times \{x\} \subseteq W.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$(\triangledown \cdot \blacktriangledown)\big(B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \times \{x\}\big) \subseteq (\triangledown \cdot \blacktriangledown)(W) \subseteq Y \;\Rightarrow\; B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) x \subseteq Y.$$

□

Τώρα, για το παρακάτω αξιοποιούνται όλα τα προαπαιτούμενα της Πρότασης 5.6.2, καθώς επίσης και η Πρόταση 5.4.2.

Πρόταση 5.6.3. *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*
2. $Y \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$.

Ισχύει ότι

$$\mathfrak{B}(X) \cap \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \cap \mathscr{P}(Y) \neq \varnothing.$$

Απόδειξη. Από την συνέχεια της $\lozenge \cdot \blacklozenge$ στο $(0_{\mathbb{F}}, 0_X)$, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.1.1, ισχύει ότι

$$\exists W \in \mathscr{O}\big(\mathbb{F} \times X \,\big|\, (0_{\mathbb{F}}, 0_X)\big) \text{ τ.ω.: } (\lozenge \cdot \blacklozenge)(W) \subseteq Y.$$

Εξάλλου, από την Πρόταση 3.3.2.1 έπεται ότι

$$\exists\, (Z_1, Z_2) \in \mathscr{O}\big(\mathbb{F} \,\big|\, 0_{\mathbb{F}}\big) \times \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.: } Z_1 \times Z_2 \subseteq W,$$

καθώς επίσης, από τον Ορισμό 2.4.1 και την Πρόταση 2.4.4 έπεται ότι

$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \subseteq Z_1,$$

δλδ, συνολικά,

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \times Z_2 \subseteq W.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$(\triangledown \cdot \blacktriangledown)\big(B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \times Z_2\big) \subseteq (\triangledown \cdot \blacktriangledown)(W) \subseteq Y \;\Rightarrow\; B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Z_2 \subseteq Y.$$

Μιας και

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Z_2 = \bigcup_{a \in B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)} a Z_2,$$

έχουμε από την Πρόταση 5.4.2 σε συνδυασμό με τον ορισμό των τοπολογιών ότι

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Z_2 \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big).$$

Μένει, λοιπόν, να δείξουμε ότι

$$B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0)Z_2\in\mathfrak{B}(X).$$

Πράγματι, προκύπτει άμεσα ότι

$$\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0)=B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0),$$

άρα

$$\overline{B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0)Z_2=B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},\varrho_0)Z_2,$$

δλδ το ζητούμενο. □

Τέλος, το επόμενο, το οποίο ουσιαστικά αποτελεί μια ειδική περίπτωση της Πρότασης 5.6.3, είναι κατασκευαστικό και προκύπτει με χρήση της Πρόταση 4.2.2, της Πρότασης 4.3.3, της Πρότασης 5.4.3, της Πρότασης 5.4.4 και βεβαίως της Πρότασης 5.6.3.

Πρόταση 5.6.4. *Έστω*

1. $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$ *και*
2. $Y\in\mathfrak{C}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)$.

Ισχύει ότι

$$\mathfrak{D}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)\cap\mathscr{P}(Y)\neq\varnothing.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$Z=\bigcap_{a\in\partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}aY\subseteq X.$$

Παρατηρούμε τα εξής.

- $Z\subseteq Y$, καθώς

$$\bigcap_{a\in\partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}aY\subseteq 1Y=Y.$$

- $0_X\in Z$, καθώς

$$0_x\in Y\ \Rightarrow\ 0_X\in\mathbb{F}Y\ \Rightarrow 0_X\in\bigcap_{a\in\partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}aY.$$

- $Z\in\mathfrak{C}(X)$, καθώς η τομή αφήνει αναλλοίωτο το $\mathfrak{C}(X)$, όπως προκύπτει από την Πρόταση 4.2.2 (σε συνδυασμό με τον Ορισμό 4.2.1).

- $Z\in\mathfrak{B}(X)$, καθώς από την μία έχουμε ότι

$$bZ=\bigcap_{a\in\partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}baY=\bigcap_{a\in\partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)}|b|\,aY=|b|\,Z,\ \ \forall b\in\mathbb{F}\ \text{τ.ω.:}\ \ |b|\leq 1$$

  και από την άλλη, αφού $Z\in\mathfrak{C}(X)\cap\mathscr{P}(X\,|\,0_X)$, ότι

$$|b|\,Z=|b|\,Z+(1-|b|)\,0_X\subseteq Z,$$

  οπότε, συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε το ζητούμενο.

Τώρα, θεωρώντας το $Z^\circ\subseteq X$, έχουμε τα κάτωθι.

- $Z^\circ\in\mathscr{O}(X)$.
- $Z^\circ\subseteq Y$, καθώς

$$Z^\circ\subseteq Z\subseteq Y.$$

- $0_X\in Z^\circ$, καθώς από την Πρόταση 5.6.3 έχουμε ότι

$$\exists W\in\mathfrak{B}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)\cap\mathscr{P}(Y),$$

  οπότε έχουμε, πρώτον, ότι

$$W=\partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)W,$$

λόγω του σημείου 3 της Πρότασης 4.3.3 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.3.1), και έτσι, δεύτερον, ότι

$$W \subseteq Y \Rightarrow \partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)W \subseteq Y \Leftrightarrow W \subseteq \partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)Y \Leftrightarrow W \subseteq \bigcap_{a\in\partial B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)} aY = Z,$$

συνεπώς, τρίτον, ότι

$$W \in \mathscr{O}(X) \Rightarrow W \subseteq Z^{\circ},$$

άρα, τέταρτον,

$$0_X \in W \Rightarrow 0_X \in Z^{\circ}.$$

- $Z^{\circ} \in \mathfrak{B}(X)$, καθώς

$$Z \in \mathfrak{B}(X) \ \& \ 0 \in Z^{\circ},$$

  σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.4.3.

- $Z^{\circ} \in \mathfrak{C}(X)$, καθώς

$$Z \in \mathfrak{C}(X),$$

  σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.4.4.

Συμπερασματικά,

$$Z^{\circ} \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathscr{O}\big(X \big| 0_X\big) \cap \mathscr{P}(Y),$$

δλδ το ζητούμενο. □

5.7 (Τοπικές) βάσεις τοπολογικών διανυσματικών χώρων

Οι (τοπικές) βάσεις ενός τοπολογικού χώρου, ο οποίος όμως είναι συμβατός με κάποια διανυσματική δομή, παρουσιάζουν ορισμένα χρήσιμα χαρακτηριστικά που δεν τα διαθέτουν οι αντίστοιχες απλών τοπολογικών χώρων και με τα οποία πραγματεύεται η παρούσα ενότητα.

5.7.1 Τοπικές βάσεις τοπολογικών διανυσματικών χώρων

Όπως φαίνεται εδώ, είναι δυνατό να βρεθεί τοπική βάση ενός τοπολογικού διανυσματικού χώρου γύρω από κάθε στοιχείο του με την γνώση μονάχα μιας τοπικής βάσης του χώρου αυτού γύρω από το μηδενικό στοιχείο του.

Έτσι, λοιπόν, υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.4.1, το επόμενο έπεται με χρήση του Θεωρήματος 5.5.1.

Θεώρημα 5.7.1.1. *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,

ii. $Y \subseteq \mathscr{P}\big(X \big| 0_X\big)$ *τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X *και*

iii. $x \in X$.

Ισχύει ότι το $x + Y \subseteq \mathscr{P}\big(X \big| x\big)$ *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* x.

Απόδειξη. Ελέγχουμε την ισχύ των προϋποθέσεων του Ορισμού 2.4.1.

- Μιας και

$$Y \subseteq \mathscr{O}\big(X \big| 0_X\big) \Rightarrow x + Y \subseteq x + \mathscr{O}\big(X \big| 0_X\big),$$

  έχουμε, με χρήση του σημείου 2 του Θεωρήματος 5.5.1, ότι

$$x + Y \subseteq \mathscr{O}\big(X \big| \{x\}\big),$$

  δλδ το ζητούμενο.

- Έστω $W \in \mathscr{O}(X|x)$, άρα
$$-x + W \in \mathscr{O}(X|0_X),$$
σύμφωνα με το σημείο 2 του Θεωρήματος 5.5.1, οπότε από υπόθεση παίρνουμε ότι
$$\exists Z \in Y \cap \mathscr{P}(-x+W) \Rightarrow x + Z \in (x+Y) \cap \mathscr{P}(W),$$
δλδ το ζητούμενο.

$\square$

Σημείωση 5.7.1.1. *Υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.4.1 και του Ορισμού 2.4.1, το Θεώρημα 5.7.1.1 έρχεται σε συμφωνία με το σημείο 2 του Θεωρήματος 1.3.1.*

5.7.2 Κατασκευή βάσεων από τοπικές βάσεις τοπολογικών διανυσματικών χώρων

Εδώ καταδεικνύεται η απλούστευση της διαδικασίας ανακατασκευής βάσης από τοπικές βάσεις ενός τοπολογικού διανυσματικού χώρου. Η απλούστευση αυτή σχετίζεται με την επάρκεια της γνώσης μονάχα μιας τοπικής βάσης γύρω από το μηδενικό στοιχείο του χώρου και όχι μιας γύρω από κάθε στοιχείο αυτού.

Αξιοποιώντας, λοιπόν, το Θεώρημα 2.5.1 και το Θεώρημα 5.7.1.1, έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.7.2.1 (κατασκευή βάσης από τοπικές βάσεις τοπολογικού διανυσματικού χώρου)**.** *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,

ii. $Y \subseteq \mathscr{P}(X|0_X)$ *τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X.

Ισχύουν ότι

1. *το* $\bigcup_{x\in X}(x+Y) \subseteq \mathscr{P}(X)$ *είναι βάση του* X *και*

2. *η* $\mathscr{O}(X)$ *παράγεται από το* $\bigcup_{x\in X}(x+Y)$.

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 2.5.1, αρκεί να παρατηρήσουμε, με βάση το Θεώρημα 5.7.1.1, ότι, $\forall x \in X$, το $x + Y \subseteq \mathscr{P}(X|x)$ είναι τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}(X))$ γύρω από το x. $\square$

Σημείωση 5.7.2.1. *Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.5.1 (βλ, επίσης, την Σημείωση 5.5.1), η αξία του Θεωρήματος 5.7.2.1 έγκειται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να περιγράψουμε πλήρως μια συμβατή τοπολογία γνωρίζοντας μονάχα μια τοπική βάση του αντίστοιχου τοπολογικού διανυσματικού χώρου γύρω από το μηδενικό στοιχείο.*

5.7.3 Ύπαρξη (τοπικών) βάσεων τοπολογικών διανυσματικών χώρων

Εδώ καταδεικνύουμε την ύπαρξη τόσο τοπικών βάσεων όσο και βάσης για κάθε τοπολογικό διανυσματικό χώρο. Προς τούτο, αρκεί, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.7.2.1 (βλ, επίσης, την Σημείωση 5.7.2.1), να δείξουμε μονάχα την ύπαρξη τοπικής βάσης γύρω από το μηδενικό στοιχείο. Μάλιστα, η τοπική βάση αυτή διαθέτει συγκεκριμένα χρήσιμα χαρακτηριστικά, όπως φαίνεται παρακάτω.

Έτσι, αξιοποιώντας τον Ορισμό 2.4.1, την Πρόταση 5.6.2 και την Πρόταση 5.6.3, έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.7.3.1 ((τοπική) βάση τοπολογικού διανυσματικού χώρου απο ισορροπημένα και απορροφητικά (ανοικτά) υποσύνολα)**.** *Έστω* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. *Ισχύει ότι το*
$$\mathfrak{B}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}(X|0_X) \subseteq \mathscr{P}(X|0_X)$$
είναι τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X.

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.4.1, απευθείας από την Πρόταση 5.6.3 έπεται ότι το

$$\mathfrak{B}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)$$

είναι τοπική βάση του $(X,\mathscr{O}(X))$ γύρω από το 0_X. Επίσης, από την Πρόταση 5.6.2 έπεται ότι

$$\mathscr{O}(X\,|\,0_X)=\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X),$$

δλδ

$$\mathfrak{B}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)=\mathfrak{B}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X).$$

□

5.8 Περιοχές του μηδενικού στοιχείου (μέρος II)

Εδώ συνεχίζουμε την μελέτη των (ανοικτών) περιοχών του μηδενικού στοιχείου, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.7.3.1 αυτή την φορά. Έτσι, το επόμενο, για το οποίο γίνεται χρήση της Πρότασης 5.4.2, της Πρότασης 5.6.1 και του Θεωρήματος 5.7.3.1, ισχυροποιεί, μεταξύ άλλων, την πρώτη.

Πρόταση 5.8.1. *Έστω*

i. $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$,

ii. $Y\in\mathscr{O}(X\,|\,0_X)$ *και*

iii. $\{a_n\}_{n=1}^{n_0}\subsetneq\mathbb{F}$.

Ισχύει ότι

$$\exists Z\in\mathfrak{B}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)\ \textit{τ.ω.:}\ \sum_{n=1}^{n_0}(a_nZ)\subseteq Y.$$

Απόδειξη. Καταρχήν, για $n_0=1$, χωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις.

- Αν
$$a_1=0,$$
τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, καθώς η
$$0_X\in Y$$
αληθεύει.

- Αν
$$a_1\neq 0,$$
τότε από την Πρόταση 5.4.2 έχουμε ότι
$$\frac{1}{a_1Y}\in\mathscr{O}(X\,|\,0_X)$$
και επίσης, από το Θεωρήματος 5.7.3.1, ότι
$$\exists Z\in\mathfrak{B}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)\cap\mathscr{P}\Big(\frac{1}{a_1}Y\Big).$$
Άρα
$$a_1Z\subseteq a_1\frac{1}{a_1}Y=Y,$$
δλδ το ζητούμενο.

Έπειτα, $\forall n_0\in\mathbb{N}\cap(2,\infty)$, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για $n_0=2$, καθώς μετά επαγωγικά έπεται το αποτέλεσμα για αυθαίρετο τέτοιο n_0. Χωρίζουμε, τώρα, τις εξής περιπτώσεις.

- Αν
$$a_1 = 0 = a_2,$$
τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, καθώς η
$$0_X \in Y$$
αληθεύει.
- Αν κάποιο από τα a_1 και a_2 είναι μη μηδενικά, τότε χωρίζουμε, εκ νέου, τις εξής περιπτώσεις.
  - Αν
  $$|a_1| \leq |a_2|,$$
  τότε έπεται ότι
  $$a_2 \neq 0_{\mathbb{F}},$$
  όποτε έχουμε ότι
  $$\left|\frac{a_1}{a_2}\right| \leq 1$$
  και, έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι
  $$\exists Z \in \mathfrak{B}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right) \text{ τ.ω.: } \frac{a_1}{a_2} Z + Z \subseteq \frac{1}{a_2} Y.$$
  Αφού παρατηρήσουμε, από την Πρόταση 5.4.2, ότι
  $$\frac{1}{a_1} Y \in \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right),$$
  από την Πρότασης 5.6.1 έχουμε ότι
  $$\exists W \in \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right) \text{ τ.ω.: } W + W \subseteq \frac{1}{a_2} Y$$
  και επίσης, από το Θεώρημα 5.7.3.1, ότι
  $$\exists Z \in \mathscr{B}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right) \cap \mathscr{P}(W).$$
  Αφού $Z \in \mathfrak{B}(X)$, έπεται από υπόθεση ότι
  $$\frac{a_1}{a_2} Z \subseteq Z,$$
  συνεπώς, παίρνουμε ότι
  $$\frac{a_1}{a_2} Z + Z = (\lozenge + \blacklozenge) \left(\frac{a_1}{a_2} Z \times Z\right) \subseteq (\lozenge + \blacklozenge)\,(Z \times Z) \subseteq (\lozenge + \blacklozenge)\,(W \times W) = W + W \subseteq \frac{1}{a_2} Y,$$
  δλδ το ζητούμενο.
  - Αν
  $$|a_2| \leq |a_1|,$$
  τότε επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για a_1 και a_2 στην θέση των a_2 και a_1, αντίστοιχα.

□

Σημείωση 5.8.1. *Σύμφωνα με τον σημειακό χαρακτηρισμό της συνέχειας, άμεση απόρροια του σημείου 2 της Πρότασης 5.8.1 αποτελεί η συνέχεια της* $\sum_{n=1}^{n_0} (a_n \lozenge_n) \colon X^{n_0} \to X$ *στο* $\left(\underbrace{0_X, \ldots, 0_X}_{\# n_0}\right)$, $\forall \{a_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathbb{F}$.

5.9 Αρχικοί τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι (μέρος I)

Στην παρούσα ενότητα εξειδικεύουμε την μελέτη ειδικών αρχικών τοπολογικών δομών, και συγκεκριμένα ενδιαφερόμαστε για αυτές που επάγονται είτε από ψευδονόρμες είτε από γραμμικές συναρτήσεις. Οι ειδικές συναρτήσεις αυτές μας εξασφαλίζουν ότι οι αρχικές τοπολογικές δομές που επάγουν είναι συμβατές με τις αντίστοιχες προϋπάρχουσες διανυσματικές δομές.

5.9.1 Αρχικός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από ψευδονόρμες

Οπώς καταδεικνύουμε εδώ, το παράδειγμα της Πρότασης 5.3.3.1 δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση του παρακάτω γενικότερου αποτελέσματος.

Έτσι, για το επόμενο αξιοποιούνται όλα τα προαπαιτούμενα της Πρότασης 5.3.3.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.4.2, το Θεώρημα 2.6.1.1 και την Πρότασης 3.2.1.8.

Πρόταση 5.9.1.1 (αρχικός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από ψευδονόρμες)**.** *Έστω*

i. $\{(X, f_i, +, \cdot)\}_{i\in I}$ *οικογένεια διανυσματικών χώρων με ψευδονόρμα και*

ii. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι η τετράδα* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

2. *Έστω, επιπλέον, ότι*

   iii. $\exists i_0 \in I$ *τ.ω.:*
$$\{f_i\}_{i\in I} = \{f_{i_0}\}.$$
   Ισχύει ότι
$$\mathscr{O}(X) = \mathscr{O}_{f_{i_0}(\lozenge - \blacklozenge)}(X).$$

3. *Έστω, επιπλέον,*

   iii″. $W_0 \subseteq \mathscr{P}(X \,|\, 0_X)$ *τ.ω.:*
$$W_0 = \left\{\bigcap_{n=1}^{n_0} B_{f_{i_n}(\lozenge - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_n) \subseteq X\right\}_{\{\varrho_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq (0,\infty), \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}.$$
   Ισχύει ότι το W_0 *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να ελεγθεί η συνθήκη συμβατότητας μεταξύ της τοπολογικής και της διανυσματικής δομής του X.

   - Επιχειρηματολογώντας όπως στην Πρόταση 5.3.3.1, για να πάρουμε ότι
$$\lozenge + \blacklozenge \in C\big((X^2, \mathscr{O}(X^2)); X\big)$$
     αρκεί να δείξουμε ότι
$$x_j + y_j - (x+y) \to 0_X, \ \forall\, (x,y) \in X^2, \ \forall \text{ δίκτυο } \{(x_j, y_j)\}_{j\in J} \subseteq X^2 \text{ τ.ω.:}$$
$$\text{τ.ω.: } x_j - x \to 0_X \leftarrow y_j - y,$$
     ή, ισοδύναμα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1.10, ότι
$$f_i(x_j + y_j - (x+y)) \to 0_{\mathbb{R}}, \ \forall\, (x,y) \in X^2, \ \forall \text{ ακολουθία } \{(x_j, y_j)\}_{j\in J} \subseteq X^2 \text{ τ.ω.:}$$
$$\text{τ.ω.: } f(x_j - x) \to 0_{\mathbb{R}} \leftarrow f(y_j - y), \ \forall i \in I.$$
     Πράγματι, αφού κάθε f_i, με $i \in I$, είναι ψευδονόρμα, το ζητούμενο έπεται άμεσα από την τριγωνική ανισότητα
$$f_i(x_j + y_j - (x+y)) = f(x_j - x + y_j - y) \leq f(x_j - x) + f(y_j - y).$$

- Επιχειρηματολογώντας όπως στην Πρόταση 5.3.3.1, για να πάρουμε ότι

  $$\lozenge \cdot \blacklozenge \in C((\mathbb{F} \times X, \mathscr{O}(\mathbb{F} \times X)) ; X),$$

  αρκεί να δείξουμε ότι

  $$f_i(a_j x_j - ax) \to 0_{\mathbb{R}},\ \forall\, (a,x) \in \mathbb{F} \times X,\ \forall \text{ δίκτυο } \{(a_j, x_j)\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{F} \times X \text{ τ.ω.:}$$
  $$\text{τ.ω.: } |a_j - a| \to 0_{\mathbb{R}} \leftarrow f(x_j - x),\ \forall i \in I.$$

  Πράγματι, αφού κάθε f_i, με $i \in I$, είναι ψευδονόρμα, το ζητούμενο έπεται άμεσα από την τριγωνική ανισότητα σε συνδυασμό με την απόλυτη ομογένεια

  $$f_i(a_j x_j - ax) = f_i(a_j x_j - a_j x + a_j x - ax) \le f_i(a_j x_j - a_j x) + f_i(a_j x - ax) =$$
  $$= |a_j|\, f_i(x_j - x) + |a_j - a|\, f_i(x),\ \forall i \in I.$$

2. Έστω ότι η οικογένεια $\{f_i\}_{i \in I}$ είναι μονοσύνολο με

   $$\{f_i\}_{i \in I} = \{f_{i_0}\},$$

   για κάποιο $i_0 \in I$. Από το Θεώρημα 5.2.1 έχουμε ότι

   $$\left(x_j \overset{\mathscr{O}(X)}{\to} x \Leftrightarrow x_j - x \overset{\mathscr{O}(X)}{\to} 0_X\right),\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_j\}_{j \in J} \subseteq X,\ \forall x \in X,$$

   συνεπώς, από την Πρόταση 3.2.1.10 έχουμε ότι

   $$\left(x_j \overset{\mathscr{O}(X)}{\to} x \Leftrightarrow f_{i_0}(x_j - x) \to 0_{\mathbb{R}}\right),\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_j\}_{j \in J} \subseteq X,\ \forall x \in X,$$

   άρα

   $$\left(x_j \overset{\mathscr{O}(X)}{\to} x \Leftrightarrow x_j \overset{\mathscr{O}_{f_{i_0}(\lozenge - \blacklozenge)}(X)}{\to} x\right),\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_j\}_{j \in J} \subseteq X,\ \forall x \in X$$

   και έτσι το ζητούμενο έπεται με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.6.1.1.

3. Υπό το πρίσμα του ορισμού των ψευδομετρικών τοπολογιών και της Πρότασης 3.2.1.8, έχουμε ότι το $W \subseteq \mathscr{P}(X)$ με

   $$W = \left\{\bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X\right\}_{\{V_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(a,b) \subseteq \mathbb{R}\}_{a \in \mathbb{R}, b \in (0,\infty)}, \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}$$

   αποτελεί βάση του X η οποία μάλιστα παράγει την $\mathscr{O}(X)$. Οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.2 έπεται ότι το $W \cap \mathscr{P}(X \,|\, 0_X)$ είναι τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}(X))$ γύρω από το x, οπότε αρκεί να δειχθεί ότι

   $$W_0 = W \cap \mathscr{P}(X \,|\, 0_X).$$

   Πράγματι, έχουμε ότι

   $$W \cap \mathscr{P}(X \,|\, 0_X) =$$
   $$= \left\{\bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X \,\middle|\, 0_X \in \bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n)\right\}_{\{V_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(a,b) \subseteq \mathbb{R}\}_{a \in \mathbb{R}, b \in (0,\infty)}, \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I} =$$
   $$= \left\{\bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X \,\middle|\, \{f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X \,|\, 0_X)\right\}_{\{V_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \{B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(a,b) \subseteq \mathbb{R}\}_{a \in \mathbb{R}, b \in (0,\infty)}, \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}.$$

   Μιας και κάθε f_i, με $i \in I$, είναι ψευδονόρμα, ισχύει ότι

   $$f_i(0_X) = 0_{\mathbb{R}},\ \forall i \in I,$$

   οπότε

$$\{f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \Rightarrow \big\{V_n = B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(a_n, b_n)\big\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}\big(\mathbb{R} \,\big|\, 0_{\mathbb{R}}\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big(\{a_n - b_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq (-\infty, 0_{\mathbb{R}}) \;\&\; \{a_n + b_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq (0_{\mathbb{R}}, \infty)\big),$$

συνεπώς

$$\big\{f_{i_n}{}^{\leftarrow}\big(B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(a_n, b_n)\big)\big\}_{n=1}^{n_0} = \big\{\{x \in X \,|\, f_{i_n}(x) \in B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(a_n, b_n)\}\big\}_{n=1}^{n_0} =$$
$$= \left\{\left\{x \in X \,\middle|\, \underbrace{a_n - b_n}_{<0} < f_{i_n}(x) < \underbrace{a_n + b_n}_{=:\varrho_n > 0}\right\}\right\}_{n=1}^{n_0} = \big\{B_{f_{i_n}(\lozenge - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_n)\big\}_{n=1}^{n_0}$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

5.9.2 Αρχικός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από γραμμικές συναρτήσεις

Για το επόμενο γίνεται χρήση της Πρότασης 3.2.1.5 και της Πρότασης 3.2.1.11.

Πρόταση 5.9.2.1 (αρχικός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από γραμμικές συναρτήσεις)**.** *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i), +_i, \cdot_i)\}_{i \in I}$,

iii. $(f_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} L(X; Y_i)$ *και*

iv. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i \in I}$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι η τετράδα* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*
2. *Έστω, επιπλέον,*

   v. $\prod_{i \in I} Z_i \subseteq \prod_{i \in I} Y_i$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y_i)$ *να παράγεται από το* Z_i, $\forall i \in I$, *και*

   vi. $W_0 \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$ *τ.ω.:*

$$W_0 = \left\{\bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X\right\}_{(V_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_{i_n} \cap \mathscr{P}(Y_i \,|\, 0_{Y_i}), \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}.$$

   Ισχύει ότι το W_0 *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Αρκεί να ελεγχθεί η συνθήκη συμβατότητας μεταξύ της τοπολογικής και της διανυσματικής δομής του X.

   - Για να πάρουμε ότι $\lozenge + \blacklozenge \in C\big(\big(X^2, \mathscr{O}(X^2)\big); X\big)$, όπου $\mathscr{O}\big(X^2\big)$ η τοπολογία γινόμενο του X^2, αρκεί, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1.11, να δείξουμε ότι

$$(f_i \circ (\lozenge + \blacklozenge))_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C\big(X^2; Y_i\big).$$

     Πράγματι, από την γραμμικότητα της κάθε f_i, με $i \in I$, έχουμε ότι

$$(f_i \circ (\lozenge + \blacklozenge))_{i \in I} = (f_i(\lozenge + \blacklozenge))_{i \in I} = (f_i(\lozenge) +_i f_i(\blacklozenge))_{i \in I} = \left((\triangledown +_i \blacktriangledown) \circ \underbrace{(f_i(\lozenge), f_i(\blacklozenge))}_{=:\phi_i(\lozenge, \blacklozenge)}\right)_{i \in I}.$$

Επιπλέον,

$$((\lozenge +_i \blacklozenge))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C\big({Y_i}^2; Y_i\big),$$

αφού καθε Y_i, με $i \in I$, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος, καθώς επίσης

$$(\phi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C\big(X^2; {Y_i}^2\big)$$

λόγω της Πρότασης 3.2.1.11 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 3.3.2.1) σε συνδυασμό με την συνέχεια της κάθε f_i, με $i \in I$, όπως αυτή εξασφαλίζεται από την Πρόταση 3.2.1.5. Άρα το ζητούμενο προκύπτει από τα παραπάνω δύο μαζί με την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

- Για να πάρουμε ότι $\lozenge\cdot\blacklozenge \in C((\mathbb{F}\times X, \mathscr{O}(\mathbb{F}\times X)); X)$, όπου $\mathscr{O}(\mathbb{F}\times X)$ η τοπολογία γινόμενο του $\mathbb{F}\times X$, αρκεί, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.1.11, να δείξουμε ότι

  $$(f_i \circ (\lozenge\cdot\blacklozenge))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(\mathbb{F}\times X; Y_i).$$

  Πράγματι, από την γραμμικότητα της κάθε f_i, με $i \in I$, έχουμε ότι

  $$(f_i \circ (\lozenge\cdot\blacklozenge))_{i\in I} = (f_i(\lozenge\cdot\blacklozenge))_{i\in I} = (\lozenge \cdot_i f_i(\blacklozenge))_{i\in I} = (\mathrm{id}_{\mathbb{F}}(\lozenge) \cdot_i f_i(\blacklozenge))_{i\in I} =$$
  $$= \left((\triangledown \cdot_i \blacktriangledown) \circ \underbrace{(\mathrm{id}_{\mathbb{F}}(\lozenge), f_i(\blacklozenge))}_{=:\psi_i(\lozenge,\blacklozenge)} \right)_{i\in I}.$$

  Επιπλέον,

  $$(\lozenge \cdot_i \blacklozenge)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(\mathbb{F}\times Y_i; Y_i),$$

  αφού καθε Y_i, με $i \in I$, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος, καθώς επίσης

  $$(\psi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(\mathbb{F}\times X; \mathbb{F}\times Y_i)$$

  λόγω της Πρότασης 3.2.1.11 (υπό το πρίσμα του Ορισμού 3.3.2.1) σε συνδυασμό με την συνέχεια της $\mathrm{id}_{\mathbb{F}}\colon \big(\mathbb{F}, \mathscr{O}_{|\lozenge-\blacklozenge|}(\mathbb{F})\big) \to \big(\mathbb{F}, \mathscr{O}_{|\lozenge-\blacklozenge|}(\mathbb{F})\big)$ και της κάθε f_i, με $i \in I$, όπου η τελευταία εξασφαλίζεται από την Πρόταση 3.2.1.5. Άρα το ζητούμενο προκύπτει από τα παραπάνω δύο μαζί με την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

2. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.2.1.8, έχουμε ότι το $W \subseteq \mathscr{P}(X)$ με

$$W = \left\{ \bigcap_{n=1}^{n_0} {f_{i_n}}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X \right\}_{(V_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_{i_n}, \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}$$

αποτελεί βάση του X η οποία μάλιστα παράγει την $\mathscr{O}(X)$. Οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.2 έπεται ότι το $W \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$ είναι τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}(X))$ γύρω από το x, οπότε αρκεί να δειχθεί ότι

$$W_0 = W \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big).$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$W \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big) = \left\{ \bigcap_{n=1}^{n_0} {f_{i_n}}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X \,\middle|\, 0_X \in \bigcap_{n=1}^{n_0} {f_{i_n}}^{\leftarrow}(V_n) \right\}_{(V_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_{i_n}, \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I} =$$
$$= \left\{ \bigcap_{n=1}^{n_0} {f_{i_n}}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X \,\middle|\, \{{f_{i_n}}^{\leftarrow}(V_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \right\}_{(V_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_{i_n}, \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I}.$$

Εξάλλου έχουμε ότι

$$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} L(X; Y_i) \Rightarrow f_i(0_X) = 0_{Y_i},\ \forall i \in I,$$

οπότε

$$\{{f_{i_n}}^{\leftarrow}(V_n)\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \Rightarrow \prod_{n=1}^{n_0} V_n \subseteq \prod_{n=1}^{n_0} \mathscr{P}\big(Y_i \,\big|\, 0_{Y_i}\big)$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

5.10 Χαρακτηρισμός συνέχειας ειδικών συναρτήσεων

Τα αποτελέσματα της §5.9 εξασφαλίζουν την συνέχεια είτε ψευδονορμών είτε γραμμικών συναρτήσεων. Οφείλουμε, λοιπόν, να γίνουμε αναλυτικότεροι ως προς τον χαρακτηρισμό της συνέχειας των ειδικών συναρτήσεων αυτών. Όπως θα δούμε, λοιπόν, παρακάτω, η συνέχειά τους χαρακτηρίζεται πλήρως από την σημειακή τους συνέχεια στο μηδενικό στοιχείο. Τονίζεται ότι η ιδιότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από την εκάστοτε επιλογή της τοπολογίας του αντίστοιχου διανυσματικού χώρου, φτάνει μόνο αυτή να είναι συμβατή με την διανυσματική του δομή.

5.10.1 Συνεχείς ψευδονόρμες

Με χρήση της αντίστροφης τριγωνικής ανισότητας, της Πρότασης 5.2.1 και του Θεωρήματος 5.2.1 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 5.10.1.1 (συνεχής ψευδονόρμα)**.** *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*

ii. $(X, f, +, \cdot)$ *διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα.*

Ισχύει ότι

$$f \in C(X; \mathbb{R}) \Leftrightarrow f \text{ συνεχής στο } 0_X.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Από υπόθεση, σε συνδυασμό με χαρακτηρισμό της συνέχειας, έχουμε ότι η f είναι συνεχής $\forall x \in X$, άρα και στο 0_X.

($\Leftarrow$) Από υπόθεση, σε συνδυασμό με την σημειακή αρχή της μεταφοράς, έχουμε, ισοδύναμα, ότι

$$f(y_i) \to f(0_X) = 0_{\mathbb{R}}, \ \forall \text{ δίκτυο } \{y_j\}_{j \in J} \subseteq X \text{ τ.ω.: } y_j \to 0_X.$$

Έστω, λοιπόν, $x \in X$ και $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ δίκτυο τ.ω.: $x_i \to x$. Αρκεί να δείξουμε, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, ότι

$$f(x_i) \to f(x) \Leftrightarrow |f(x_i) - f(x)| \to 0_{\mathbb{R}}.$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα, συμπεραίνουμε ότι

$$|f(x_i) - f(x)| \le f(x_i - x) \to 0_{\mathbb{R}}, \Leftrightarrow f(x_i) - f(x) \to 0_{\mathbb{R}},$$

μιας και

$$x_i - x \to 0_X,$$

λόγω της Πρότασης 5.2.1, άρα το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 5.2.1.

□

Ως συνέπεια της Πρότασης 5.10.1.1, σε συνδυασμό με το αναλλοίωτο των ιδιοτήτων των ψευδονορμών από γραμμικές αλλαγές μεταβλητών, την Πρόταση 3.2.1.11 και το Θεώρημα 5.2.1, έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 5.10.1.2 (χαρακτηρισμός συνέχειας γραμμικής συνάρτησης προς διανυσματικό χώρο με ψευδονόρμες)**.** *Έστω*

1. $\{(X, f_i, +, \cdot)\}_{i \in I}$ *οικογένεια διανυσματικών χώρων με ψευδονόρμα,*
2. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i \in I}$,
3. $(Y, \mathscr{O}(Y))$ *και*
4. $f \in L(Y; X)$.

Ισχύει ότι

$$f \in C(Y; X) \Leftrightarrow f \in C\big(Y; \big(X, \mathscr{O}_{f_i(\lozenge - \blacklozenge)}(X)\big)\big), \ \forall i \in I.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.2.1.11 έπεται ότι

$$f \in C(Y;X) \Leftrightarrow (f_i \circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y;\mathbb{R}).$$

Μιας και οι ιδιότητες των ψευδονορμών παραμένουν αναλλοίωτες από γραμμικές αλλαγές μεταβλητών, έπεται ότι

$$\{f_i \circ f\}_{i\in I} \text{ οικογένεια ψευδονορμών του } Y,$$

άρα, συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε από την Πρόταση 5.10.1.1 ότι

$$f \in C(Y;X) \Leftrightarrow f_i \circ f \text{ συνεχής στο } 0_Y,\ \forall i \in I.$$

Εξάλλου, από το Θεώρημα 5.2.1 έχουμε ότι

$$(y_j \to y \Leftrightarrow y_j - y \to 0_Y),\ \forall \text{ δίκτυο } \{y_j\}_{j\in J} \subseteq Y,\ \forall y \in Y.$$

Συνεπώς, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &f \in C(Y;X) \Leftrightarrow \\ &\quad\Leftrightarrow f_i(f(y_j - y)) \to f_i(f(0_Y)),\ \forall \text{ δίκτυο } \{y_j\}_{j\in J} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } y_j \to y,\ \forall y \in Y,\ \forall i \in I \Leftrightarrow \\ &\qquad\Leftrightarrow f_i(f(y_j) - f(y)) \to 0_{\mathbb{R}},\ \forall \text{ δίκτυο } \{y_j\}_{j\in J} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } y_j \to y,\ \forall y \in Y,\ \forall i \in I, \end{aligned}$$

οπότε από γνωστό αποτέλεσμα για την σύγκλιση σε ψευδομετρικούς χώρους συμπεραίνουμε ότι

$$f \in C(Y;X) \Leftrightarrow f(y_j) \overset{\mathscr{O}_{f_i(\lozenge - \blacklozenge)}(X)}{\to} f(y),\ \forall \text{ δίκτυο } \{y_j\}_{j\in J} \subseteq Y \text{ τ.ω.: } y_j \to y,\ \forall y \in Y,\ \forall i \in I,$$

δλδ, πάλι από την αρχή της μεταφοράς, το ζητούμενο. □

5.10.2 Συνεχείς γραμμικές συναρτήσεις, CL

Αντίστοιχη, αλλά πιο ισχυρή, ιδιότητα με αυτή της Πρότασης 5.10.1.1 για τις ψευδονόρμες ισχύει και για τις γραμμικές.

Γενικός χαρακτηρισμός

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.2.1, του Θεωρήματος 5.2.1 και της αρχής της μεταφοράς έπεται άμεσα το επόμενο.

Πρόταση 5.10.2.1 (συνέχεια και γραμμικότητα)**.** *Έστω $(X, \mathscr{O}(X), +_X, \cdot_X)$ και $(Y, \mathscr{O}(Y), +_Y, \cdot_Y)$. Ισχύει ότι*

$$CL(X;Y) \overset{1}{=} \{f \in L(X;Y) \,|\, f \textit{ συνεχής στο } 0_X\} \overset{2}{=} \{f \in L(X;Y) \,|\, f \textit{ συνεχής σε κάποιο } x \in X\}.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε ισότητα ξεχωριστά.

1. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Προφανής, καθώς
   $$CL(X;Y) = \{f \in L(X;Y) \,|\, f \text{ συνεχής στο } x,\ \forall x \in X\}.$$

   ($\supseteq$) Έστω $f \in L(X;Y)$ τ.ω.:
   $$f \text{ συνεχής στο } 0_X \Leftrightarrow f(x_i) \to f(0_X) = 0_Y,\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } x_i \to 0_X,$$
   $x \in X$ και δίκτυο $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ τ.ω.: $x_i \to x$. Αρκεί να δειχθεί ότι
   $$f(x_i) \to f(x).$$
   Πράγματι, λόγω της Πρότασης 5.2.1 έχουμε ότι
   $$x_i -_X x \to 0_X,$$
   άρα από πάνω έπεται ότι
   $$f(x_i -_X x) \to 0_Y \Leftrightarrow f(x_i) -_Y f(x) \to 0_Y,$$
   οπότε το ζητούμενο έπεται με την χρήση του Θεωρήματος 5.2.1.

2. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Προφανής.

   ($\supseteq$) Έστω $x \in X$, $f \in L(X;Y)$ τ.ω.:

$$f \text{ συνεχής στο } x \in X \Leftrightarrow f(x_i) \to f(x),\ \forall \text{ δίκτυο } \{x_i\}_{i\in I} \subseteq X \text{ τ.ω.: } x_i \to x$$

   και δίκτυο $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ τ.ω.: $x_i \to 0_X$. Αρκεί να δειχθεί ότι

$$f(x_i) \to 0_Y.$$

   Πράγματι, λόγω της Πρότασης 5.2.1 έχουμε ότι

$$x_i +_X x \to x,$$

   άρα από πάνω έπεται ότι

$$f(x_i +_X x) \to f(x) \Leftrightarrow f(x_i) +_Y f(x) \to f(x),$$

   οπότε το ζητούμενο έπεται με την χρήση πάλι της Πρότασης 5.2.1.

□

Σημείωση 5.10.2.1. *Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.10.2.1, παίρνουμε από την Σημείωση 5.8.1 ότι*

$$\sum_{n=1}^{n_0} (a_n \Diamond_n) \in C(X^{n_0};X),\ \forall \{a_n\}_{n=1}^{n_0} \subsetneq \mathbb{F}.$$

Συνδυάζοντας, μάλιστα, αυτό με την Σημείωση 5.4.1 και την ιδιότητα της σύνθεσης να αφήνει αναλλοίωτη την συνέχεια των συναρτήσεων, συμπεραίνουμε ότι

$$x + \sum_{n=1}^{n_0} (a_n \Diamond_n) \in C(X^{n_0};X),\ \forall \left(x, \{a_n\}_{n=1}^{n_0}\right) \in X \times \mathscr{P}(\mathbb{F}).$$

Ειδικός χαρακτηρισμός για τους διανυσματικούς χώρους με νόρμα και ψευδονόρμα

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.3.1, το ακόλουθο έπεται άμεσα με χρήση της Πρότασης 5.10.2.1.

Πρόταση 5.10.2.2 (συνέχεια και γραμμικότητα σε διανυσματικούς χώρους με νόρμα και ψευδονόρμα)**.** *Έστω*

i. $(X, f_X, +_X, \cdot_X)$ *διανυσματικός χώρος με νόρμα και*

ii. $(Y, f_Y, +_Y, \cdot_Y)$ *διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα.*

Ισχύει ότι

$$CL(X;Y) \overset{1}{=} \left\{f \in L(X;Y) \,\middle|\, \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } f_Y(f(x)) \le K f_X(x),\ \forall x \in X\right\} \overset{2}{=} Lip(X;Y) \cap L(X;Y).$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε ισότητα ξεχωριστά.

1. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.3.1, από την Πρόταση 5.10.2.1 έπεται ότι

$$CL(X;Y) = \left\{f \in L(X;Y) \,\middle|\, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω.: } (x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) < \delta \Rightarrow f_Y(f(x)) < \varepsilon)\right\}.$$

   Ελέγχουμε τώρα κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Αν

$$x = 0_X \Leftrightarrow f_X(x) = 0,$$

   τότε το ζητούμενο έπεται άμεσα από την σχέση

$$f_Y(f(x)) = f_Y(f(0_X)) = f_Y(0_Y) = 0.$$

Αν
$$x \neq 0_X \Leftrightarrow f_X(x) \neq 0,$$
τότε σταθεροποιούμε ένα $\varepsilon > 0$ (το οποίο είναι ανεξάρτητο του x) και ένα αντίστοιχο $\delta > 0$. Αφού
$$f_X\left(\frac{\delta}{2f_X(x)} \cdot_X x\right) = \frac{\delta}{2} < \delta,$$
έχουμε ότι
$$f_Y\left(f\left(\frac{\delta}{2f_X(x)} \cdot_X x\right)\right) < \varepsilon \Leftrightarrow f_Y(f(x)) < \frac{2\varepsilon}{\delta} \cdot_Y f_X(x)$$
και το ζητούμενο έπεται για
$$K = \frac{2\varepsilon}{\delta}.$$

($\supseteq$) Για κάθε $\varepsilon > 0$ αρκεί να επιλέξουμε
$$\delta = \frac{\varepsilon}{K}.$$

2. Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Αρκεί αντί για x να θέσουμε $x_1 -_X x_2$ και να κάνουμε χρήση της γραμμικότητας της f.

   ($\supseteq$) Προφανής.

□

5.11 Τοπολογικός διανυσματικός χώρος CL

Η διανυσματική δομή με την οποία εφοδιάζεται το $CL(X;Y)$, όπου X και Y διανυσματικοί χώροι, είναι η προφανής, με την μηδενική συνάρτηση να παίζει τον ρόλο του μηδενικού στοιχείου. Εδώ πηγαίνουμε ένα βήμα παραπέρα, εφοδιάζοντας τον χώρο αυτόν και με συμβατή τοπολογική δομή, όταν οι X και Y είναι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι.

5.11.1 Ομοιόμορφη τοπολογική δομή

Στην ειδική περίπτωση του χώρου των συνεχών και γραμμικών συναρτήσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων με νόρμα και ψευδονόρμα (νόρμα) ισχύει ότι μπορεί και ο ίδιος να μετατραπεί σε διανυσματικό χώρο με ψευδονόρμα (νόρμα, αντίστοιχα), όπως φαίνεται στο παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.11.1.1. *Έστω*

α΄. $(X, f_X, +_X, \cdot_X)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα και

β΄. $(Y, f_Y, +_Y, \cdot_Y)$ διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα (νόρμα).

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   γ΄. $f \in CL(X;Y)$.

   Ισχύουν ότι

   i.
   $$a(f) = b(f) = c(f) = d(f),$$
   όπου
   $$\begin{aligned} a(f) &= \sup\left\{f_Y(f(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) \leq 1\right\}, \\ b(f) &= \sup\left\{f_Y(f(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) = 1\right\}, \\ c(f) &= \sup\left\{\frac{f_Y(f(x))}{f_X(x)} \,\middle|\, x \in X \smallsetminus \{0_X\}\right\} \text{ και} \\ d(f) &= \inf\left\{K > 0 \,\middle|\, f_Y(f(x)) \leq K f_X(x),\ \forall x \in X\right\}, \end{aligned}$$

   και

ii. $f_Y(f(x)) \le a(f) f_X(x),\ \forall x \in X.$

2. *Ισχύει ότι η συνάρτηση*

$$\begin{aligned} f_{CL(X;Y)} \colon CL(X;Y) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto f_{CL(X;Y)}(f) = a(f) \end{aligned}$$

είναι ψευδονόρμα (νόρμα, αντίστοιχα) του $CL(X,Y)$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

   i. Αρκεί να δειχθεί ότι
   $$a(f) \overset{\bullet_1}{\ge} b(f) \overset{\bullet_2}{\ge} c(f) \overset{\bullet_3}{\ge} d(f) \overset{\bullet_4}{\ge} a(f).$$
   Ελέγχουμε κάθε ανισότητα ξεχωριστά.

   $\bullet_1$ Έπεται άμεσα από τον προφανή εγκλεισμό
   $$\left\{ f_Y(f(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) \le 1 \right\} \subseteq \left\{ f_Y(f(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) = 1 \right\}.$$

   $\bullet_2$ Έπεται άμεσα από την σχέση
   $$b(f) \ge f_Y\left(f\left(\frac{1}{f_X(x)} \cdot_X x \right) \right) = f_Y\left(\frac{1}{f_X(x)} \cdot_Y f(x) \right) = \frac{f_Y(f(x))}{f_X(x)},\ \forall x \in X \smallsetminus \{0_X\}.$$

   $\bullet_3$ Αφού
   $$\begin{cases} \frac{f_Y(f(x))}{f_X(x)} \le c(f) \Rightarrow f_Y(f(x)) \le c(f) f_X(x), & \text{αν } x \in X \smallsetminus \{0_X\} \\ 0 = 0 \Rightarrow f_Y(0_Y) = c(f) f_X(0_X) \Rightarrow f_Y(f(x)) = c(f) f_X(x), & \text{αν } x = 0_X, \end{cases}$$
   συμπεραίνουμε ότι
   $$c(f) \in \left\{ K > 0 \,\middle|\, f_Y(f(x)) \le K f_X(x),\ \forall x \in X \right\}$$
   και το ζητούμενο έπεται.

   $\bullet_4$ Έπεται άμεσα από την σχέση
   $$\begin{aligned} \left(f_Y(f(x)) \le K,\ \forall x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) \le 1 \Rightarrow a(f) \le K \right),\ \forall K > 0 \text{ τ.ω.:} \\ \text{τ.ω.: } f_Y(f(x)) \le K f_X(x),\ \forall x \in X. \end{aligned}$$

   ii. Έπεται από την σχέση
   $$\begin{cases} \frac{f_Y(f(x))}{f_X(x)} \le c(f) \Rightarrow f_Y(f(x)) \le c(f) f_X(x), & \text{αν } x \in X \smallsetminus \{0_X\} \\ 0 = 0 \Rightarrow f_Y(0_Y) = c(f) f_X(0_X) \Rightarrow f_Y(f(x)) = c(f) f_X(x), & \text{αν } x = 0_X, \end{cases}$$
   σε συνδυασμό με το σημείο i.

2. Ελέγχουμε τις προϋποθέσεις του ορισμού των ψευδονορμών (νορμών, αντίστοιχα) ως εξής.

   - Έπεται άμεσα ότι
   $$f_{CL(X;Y)}(CL(X;Y)) \subseteq [0, \infty).$$

   - Έχουμε ότι
   $$\begin{aligned} f_{CL(X;Y)}(tf) &= \sup \left\{ f_Y(tf(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) \le 1 \right\} = \\ &= \sup \left\{ |t| f_Y(f(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) \le 1 \right\} = \\ &= \sup |t| \left\{ f_Y(f(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) \le 1 \right\} = \\ &= |t| \sup \left\{ f_Y(f(x)) \,\middle|\, x \in X \text{ τ.ω.: } f_X(x) \le 1 \right\} = |t| f_{CL(X;Y)}(f)\ \forall t \in \mathbb{F},\ \forall f \in CL(X;Y). \end{aligned}$$

- Έστω $x \in X$. Αξιοποιώντας το σημείο 1.ii, έχουμε ότι

$$f_Y((f_1+f_2)(x)) = f_Y(f_1(x)+f_2(x)) \leq f_Y(f_1(x)) + f_Y(f_2(x)) \leq$$
$$\leq f_{CL(X;Y)}(f_1)f_X(x) + f_{CL(X;Y)}(f_2)f_X(x) = \big(f_{CL(X;Y)}(f_1) + f_{CL(X;Y)}(f_2)\big)f_X(x),$$
$$\forall \{f_n\}_{n=1}^2 \subseteq CL(X;Y).$$

  Άρα, πάλι από το ίδιο αποτέλεσμα, παίρνουμε ότι

$$f_{CL(X;Y)}(f_1+f_2) \leq f_{CL(X;Y)}(f_1) + f_{CL(X;Y)}(f_2), \ \forall \{f_n\}_{n=1}^2 \subseteq CL(X;Y).$$

(•) Έστω $f \in CL(X;Y)$. Αξιοποιώντας το σημείο 1.ii, έχουμε ότι

$$f_{CL(X;Y)}(f) = 0 \Rightarrow f_Y(f(x)) \leq f_{CL(X;Y)}(f)f_X(x) = 0, \ \forall x \in X, \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x) = 0_Y, \ \forall x \in X \Rightarrow f = 0.$$

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.3.1 και του Θεωρήματος 5.11.1.1, προκύπτει ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 5.11.1.1 (ομοιόμορφος τοπολογικός διανυσματικός χώρος CL). *Έστω*

1. *$(X, f_X, +_X, \cdot_X)$ διανυσματικός χώρος με νόρμα,*
2. *$(Y, f_Y, +_Y, \cdot_Y)$ διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα (νόρμα) και*
3. *$f_{CL(X;Y)}\colon CL(X;Y) \to \mathbb{R}$ ψευδονόρμα (νόρμα, αντίστοιχα) του $CL(X;Y)$ όπως στο Θεώρημα 5.11.1.1.*

Ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $\big(CL(X;Y), \mathscr{O}_{f_{CL(X;Y)}(\lozenge - \blacklozenge)}(CL(X;Y)), +, \cdot\big)$ καλείται ομοιόμορφος και η ψευδομετρική (μετρική, αντίστοιχα) τοπολογία $\mathscr{O}_{f_{CL(X;Y)}(\lozenge - \blacklozenge)}(CL(X;Y))$ ομοιόμορφη.

5.11.2 Ασθενής′ τοπολογική δομή

Σε αντίθεση με την τοπολογία της §5.11.1, η νέα τοπολογία δεν απαιτεί κάποια ειδική μορφή των εμπλεκόμενων X και Y.

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.9.2.1, προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 5.11.2.1 (ασθενής′ τοπολογικός διανυσματικός χώρος CL). *Έστω*

1. *X και Y τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι και*
2. *$(CL(X;Y), \mathscr{O}(CL(X;Y)))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}(CL(X;Y))$ να είναι η αρχική τοπολογία του $CL(X;Y)$ που παράγεται από την*

$$\big\{\phi_x \in L(CL(X;Y);Y) \,\big|\, \phi_x(f) = f(x), \ \forall f \in CL(X;Y)\big\}_{x \in X}.$$

Ο $(CL(X;Y), \mathscr{O}(CL(X;Y)), +, \cdot)$ και η $\mathscr{O}(CL(X;Y))$ καλούνται ασθενείς′.

Για τον ασθενή′ τοπολογικό διανυσματικό χώρο CL ισχύουν κανονικά όλα τα αντίστοιχα αποτελέσματα της §3.2.1.

5.12 Τοπικά κυρτοί τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι (μέρος I)

Εδώ εισάγουμε και μελετάμε την έννοια του τοπικά κυρτού τοπολογικού διανυσματικού χώρου.

5.12.1 (Τοπικές) βάσεις τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.7.3.1, ο ακόλουθος ορισμός είναι αποδεκτός.

Ορισμός 5.12.1.1 (τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος). *Έστω $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$. Ο $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$ καλείται τοπικά κυρτός όταν*

$$\exists Y \subseteq \mathscr{P}\big(X\,\big|\,0_X\big) \text{ τοπική βάση του } (X,\mathscr{O}(X)) \text{ γύρω από το } 0_X \text{ τ.ω.: } Y \subseteq \mathfrak{C}(X).$$

Με χρήση της Πρότασης 5.6.4, το Θεώρημα 5.7.3.1 εξειδικεύεται περαιτέρω στην περίπτωση των τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων.

Θεώρημα 5.12.1.1 (τοπική βάση απο (ανοικτούς) δίσκους γύρω από το μηδενικό στοιχείο τοπολογικού διανυσματικού χώρου). *Έστω $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$ τοπικά κυρτός. Ισχύει ότι το*

$$\mathfrak{D}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)\subseteq\mathscr{P}\big(X\,\big|\,0_X\big)$$

είναι τοπική βάση του $(X,\mathscr{O}(X))$ γύρω από το 0_X.

Απόδειξη. Έστω $W\in\mathscr{O}\big(X\,\big|\,x\big)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.12.1.1 έχουμε ότι

$$\exists Y\subseteq\mathfrak{C}(X)\cap\mathscr{P}\big(X\,\big|\,0_X\big) \text{ τοπική βάση του } (X,\mathscr{O}(X)) \text{ γύρω από το } 0_X,$$

άρα, σύμφωνα με την πρώτη προϋπόθεση του Ορισμού 2.4.1, έπεται ότι

$$\exists Y\subseteq\mathfrak{C}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big) \text{ τοπική βάση του } (X,\mathscr{O}(X)) \text{ γύρω από το } 0_X$$

και, σύμφωνα με την δεύτερη, ότι

$$\exists Z\in Y\cap\mathscr{P}(W).$$

Αξιοποιώντας την Πρότασης 5.6.4, συμπεραίνουμε ότι

$$\exists V\in\mathfrak{D}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)\cap\mathscr{P}(Z)\subseteq\mathfrak{D}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)\cap\mathscr{P}(W),$$

δλδ το

$$\mathfrak{D}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)$$

είναι τοπική βάση του $(X,\mathscr{O}(X))$ γύρω από το 0_X. Επίσης, από την Πρόταση 5.6.3 έπεται ότι

$$\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)=\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big),$$

δλδ

$$\mathfrak{D}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)=\mathfrak{D}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big).$$

□

5.12.2 Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Ο Ορισμός 5.12.1.1 είναι μεν αποδεκτός, έχει όμως νόημα; Στο ερώτημα αυτό απαντάμε καταφατικά με τα παρακάτω χαρακτηριστικά παραδείγματα τοπικά κυρτών διανυσματικών χώρων, τα οποία ουσιαστικά ισχυροποιούν τα αποτελέσματα της §5.3.

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.1.1, το πρώτο είναι άμεσο.

Πρόταση 5.12.2.1 (τετριμμένος τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος). *Ισχύει ότι ο $(X,\{\varnothing,X\},+,\cdot)$ είναι τοπικά κυρτός.*

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο, καθώς

$$\{\varnothing,X\}\subseteq\mathfrak{C}(X).$$

□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.2.1, αυτή την φορά, άμεσο είναι και το δεύτερο.

Πρόταση 5.12.2.2. *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,
2. $(Y, +|_Y, \mathbb{F}, \cdot|_Y)$ *διανυσματικός υπόχωρος του* X *και*
3. $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y.

Ισχύει ότι ο $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ *είναι τοπικά κυρτός.*

Απόδειξη. Πρώτον, έχουμε ότι
$$Y \subseteq \mathfrak{C}(X),$$
καθώς ο Y είναι διανυσματικός χώρος. Δεύτερον, από την Πρόταση 3.3.3.3 παίρνουμε ότι
$$\mathscr{O}(Y) = \{Y \cap V \subseteq Y\}_{V \in \mathscr{O}(X)}.$$
Τρίτον, υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.4.1 και του Ορισμού 5.12.1.1, από υπόθεση έχουμε ότι
$$\exists Z \subseteq \mathfrak{C}(X) \cap \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \text{ τοπική βάση του } (X, \mathscr{O}(X)) \text{ γύρω από το } 0_X.$$
Έτσι, τέταρτον, σύμφωνα με τον συνδυασμό της Πρότασης 4.2.2 και της Πρότασης 4.2.1, αρκεί να δείξουμε ότι το
$$Z_0 = \{Y \cap V \subseteq Y\}_{V \in Z} \subseteq \mathscr{O}\big(Y \,\big|\, 0_X\big)$$
αποτελεί τοπική βάση του $(Y, \mathscr{O}(Y))$ γύρω από το 0_X. Ως προς αυτό, απομένει η επαλήθευση της δεύτερης προϋπόθεσης του Ορισμού 2.4.1. Πράγματι, έστω $W \in \mathscr{O}\big(Y \,\big|\, 0_X\big)$, δλδ
$$\exists V \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.: } W = Y \cap V.$$
Αφού το Z είναι τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}(X))$ γύρω από το 0_X, παίρνουμε ότι
$$\exists V_0 \in Z \text{ τ.ω.: } V_0 \subseteq V.$$
Για να εξάγουμε, λοιπόν, το ζητούμενο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι
$$Y \cap V_0 \in Z_0 \cap \mathscr{P}(W).$$
□

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.4.4 και της Πρότασης 5.3.3.1, αυτή την φορά, άμεσο είναι και το τρίτο.

Πρόταση 5.12.2.3 (διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα ως τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος)**.** *Έστω* $(X, f, +, \cdot)$ *διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα. Ισχύει ότι ο* $\big(X, \mathscr{O}_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(X), +, \cdot\big)$ *είναι τοπικά κυρτός.*

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 2.4.4, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι
$$\big\{B_{f(\lozenge-\blacklozenge)}(0_X, \varrho)\big\}_{\varrho \in (0,\infty)} \subseteq \big\{B_{f(\lozenge-\blacklozenge)}(x, \varrho)\big\}_{x \in X, \varrho \in (0,\infty)} \subseteq \mathfrak{C}(X).$$
□

5.13 Περιοχές του μηδενικού στοιχείου (μέρος ΙΙΙ)

Εδώ συνεχίζουμε την μελέτη των (ανοικτών) περιοχών του μηδενικού στοιχείου, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.12.1.1 και της Πρότασης 5.12.2.2 αυτή την φορά. Έτσι, έπεται το επόμενο, για το οποίο γίνεται χρήση ενός ευρέος φάσματος αποτελεσμάτων, και συγκεκριμένα της Πρότασης 3.3.3.3, του Ορισμού 4.2.1, της Πρόταση 4.2.2, της Πρότασης 4.2.5, του Ορισμού 4.3.1, της Πρότασης 4.3.4, της Πρότασης 5.3.2.1, της Πρότασης 5.4.1, της Πρότασης 5.4.2, της Πρόταση 5.6.2, του Θεωρήματος 5.12.1.1 και της Πρότασης 5.12.2.2.

Πρόταση 5.13.1. *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *τοπικά κυρτός,*

ii. $(Y, +|_Y, \mathbb{F}, \cdot|_Y)$ *διανυσματικός υπόχωρος του* X, *iii.* $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y *και*

iv. $Z \in \mathfrak{D}(Y) \cap \mathscr{O}(Y \,|\, 0_X)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*
$$\exists W \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } Z = Y \cap W.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   v. $x \in X \setminus \overline{Y}$.

   Ισχύει ότι
$$\exists U \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } (Z = Y \cap U \ \&\ x \in X \setminus U).$$

Απόδειξη. Καταρχήν, λόγω της Πρότασης 5.3.2.1, η τετράδα $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος, καθώς επίσης, λόγω της Πρότασης 5.12.2.2, ο $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ είναι τοπικά κυρτός, οπότε λόγω του Θεωρήματος 5.12.1.1 η ύπαρξη ενός τέτοιου $Z \subseteq Y$ έχει νόημα. Έπειτα, ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Από την Πρόταση 3.3.3.3 έχουμε ότι
$$\exists W_0 \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } Z = Y \cap W_0.$$

   Μιας και δεν ξέρουμε ότι $W_0 \in \mathfrak{C}(X)$ για να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.2.1 και την Πρόταση 4.2.2 για να πάρουμε το ζητούμενο, πάμε ένα βήμα παραπέρα. Έτσι, αφού ο $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ είναι τοπικά κυρτός, από το Θεώρημα 5.12.1.1 έχουμε ότι
$$\exists W_1 \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \cap \mathscr{P}(W_0),$$
   άρα
$$Y \cap W_1 \subseteq Z.$$
   Θέτοντας, λοιπόν,
$$W = \operatorname{co}(Z \cup W_1),$$
   έχουμε τα εξής.

   - $W \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X)$, το οποίο άμεσα προκύπτει, υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.2.1, από τον συνδυασμό της Πρότασης 5.4.1 και της Πρότασης 5.4.2 με τον ορισμό των τοπολογιών.
   - $W \in \mathfrak{A}(X)$, σύμφωνα με το παραπάνω και την Πρόταση 5.6.2.
   - $W \in \mathfrak{D}(X)$, λόγω της Πρότασης 4.4.1 και των παρακάτω.
     - $W \in \mathfrak{C}(X)$, προφανώς, λόγω του ίδιου του Ορισμού 4.2.1.
     - $W \in \mathfrak{B}(X)$, το οποίο άμεσα έπεται, υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.2.1, από τον Ορισμό 4.3.1 και την Πρόταση 4.3.4.

   Μένει, επομένως, να δείξουμε ότι
$$Z = Y \cap W.$$
   Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Από την μία έχουμε ότι
$$Z \subseteq Y$$
   και από την άλλη
$$Z \subseteq Z \cup W_1 \subseteq \operatorname{co}(Z \cup W_1) = W,$$
   άρα έπεται το ζητούμενο.

($\subseteq$) Έστω $z \in Y \cap W$. Αφού $z \in W$, έπεται από την Πρόταση 4.2.5 ότι

$$\exists \left(a, (z_n)_{n=1}^{2}\right) \in [0,1] \times (Z \times W_1) \text{ τ.ω.: } z = az_1 + (1-a)\, z_2.$$

Αν $a = 1$, τότε

$$z = az_1 \in Z,$$

καθώς $Z \in \mathfrak{B}(Y)$. Αν $a \neq 1$, τότε

$$z_2 = \frac{1}{1-a}\,(z - az_1) \in Y,$$

καθώς Y διανυσματικός υπόχωρος, συνεπώς

$$z_2 \in Y \cap W_1 \subseteq Y \cap W = Z,$$

και άρα

$$z \in Z,$$

καθώς $Z \in \mathfrak{C}(X)$.

2. Κρατάμε το $W \subseteq X$ του σημείου 1. Τώρα, αφού $x \in A \setminus \overline{Y}$, τότε, υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.4.1,

$$\exists V \in \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right) \text{ τ.ω.: } \overline{Y} \cap (x + V) = \varnothing.$$

Θέτοντας

$$W_2 = W_1 \cap V,$$

έχουμε προφανώς ότι

$$\overline{Y} \cap (x + W_2) = \varnothing.$$

Θέτοντας, τώρα,

$$U = \operatorname{co}(Z \cup W_2),$$

έχουμε τα εξής.

- $Z = Y \cap U$. Πράγματι, εξετάζοντας κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά, έχουμε τα εξής.

  ($\subseteq$) Έπεται απευθείας από τους εγκλεισμούς

  $$Z \subseteq Y \;\&\; Z \subseteq U.$$

  ($\supseteq$) Μιας και

  $$W_2 \subseteq W_1,$$

  παίρνουμε ότι

  $$Y \cap U \subseteq Y \cap W = Z.$$

- $x \notin U$. Πράγματι, αν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε με το ίδιο επιχείρημα όπως στο σημείο 1 παίρνουμε ότι

  $$\exists \left(b, (x_n)_{n=1}^{2}\right) \in [0,1] \times (Z \times W_2) \text{ τ.ω.: } x = bx_1 + (1-b)\, x_2 \Leftrightarrow x - (1-b)\, x_2 = bx_1,$$

  από όπου έχουμε τα εξής.

  – $x - (1-b)\, x_2 \in x + W_2$, καθώς $W \in \mathfrak{B}(X)$.
  – $x - (1-b)\, x_2 = bx_1 \in Y$, καθώς ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος.

  Συνεπώς

  $$x \in Y \cap (x + W_2) \subseteq \overline{Y} \cap (x + W_2)\,,$$

  δλδ άτοπο.

$\square$

5.14 Αρχικοί τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι (μέρος ΙΙ)

Συνεχίζουμε με την μελέτη των αρχικών τοπολογικών δομών που είναι συμβατές με προϋπάρχουσες διανυματικές δομές, και συγκεκριμένα της αρχικής τοπικά κυρτής τοπολογικής διανυσματικής δομής επαγόμενης τόσο από ψευδονόρμες όσο και από γραμμικές συναρτήσεις.

5.14.1 Αρχικός τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από ψευδονόρμες

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.9.1.1, το επόμενο είναι άμεσο και μάλιστα την ισχυροποιεί, καθώς επίσης γενικεύει την Πρόταση 5.12.2.3.

Πρόταση 5.14.1.1 (αρχικός τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από ψευδονόρμες)**.** *Έστω*

1. $\{(X, f_i, +, \cdot)\}_{i\in I}$ *οικογένεια διανυσματικών χώρων με ψευδονόρμα και*

2. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύει ότι η τετράδα $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Καταρχήν, ότι η τετράδα $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ είναι τοπολογικός διναυμστικός χώρος έπεται από το σημείο 1 της Πρότασης 5.9.1.1. Έπειτα, υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.2.2, το ζητούμενο έπεται από το σημείο 3 της Πρότασης 5.9.1.1 σε συνδυασμό με την κυρτότητα των ανοικτών μπαλών ψευδομετρικών χώρων. □

5.14.2 Αρχικός τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από γραμμικές συναρτήσεις

Για το επόμενο, το οποίο εξειδικεύει την Πρότασης 5.9.2.1, γίνεται χρήση, εκτός του προαναφερθέντος αποτελέσατος, επίσης της Πρότασης 4.2.6, του Θεωρήματος 5.7.2.1 και του Θεωρήματος 5.16.1.1.

Πρόταση 5.14.2.1 (αρχικός τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από γραμμικές συναρτήσεις)**.** *Έστω*

1. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i), +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων,*

3. $(f_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} L(X; Y_i)$ *και*

4. $(X, \mathscr{O}(X))$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Ισχύει ότι η τετράδα $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Απόδειξη. Καταρχήν, από το σημείο 1 της Πρότασης 5.9.2.1 έχουμε ότι η τετράδα $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος. Έπειτα, από υπόθεση σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.12.1.1 παίρνουμε ότι, $\forall i \in I$, το

$$Z_{0i} = \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}\big(Y_i \,\big|\, 0_{Y_i}\big) \subseteq \mathscr{P}\big(Y_i \,\big|\, 0_{Y_i}\big)$$

είναι τοπική βάση του $(Y_i, \mathscr{O}(Y_i))$ γύρω από το 0_{Y_i}. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.7.2.1, έπεται ότι, $\forall i \in I$, το

$$Z_i = \bigcup_{y_i \in Y_i} (y_i + Z_{0i}) \subseteq \mathscr{P}(Y_i)$$

είναι βάση του X. Μάλιστα, μιας και η εικόνα των αφινικών συναρτήσεων αφήνει αναλλοίωτη την κυρτότητα των συνόλων, όπως άλλωστε μας εξασφαλίζει το σημείο 1 της Πρότασης 4.2.6, ισχύει ότι

$$Z_i \subseteq \mathfrak{C}(Y_i), \;\; \forall i \in I.$$

Τώρα, από το σημείο 2 της Πρότασης 5.9.2.1 έχουμε ότι το

$$W = \left\{ \bigcap_{n=1}^{n_0} f_{i_n}{}^{\leftarrow}(V_n) \subseteq X \right\}_{(V_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} Z_{i_n} \cap \mathscr{P}(Y_i | 0_{Y_i}), \{i_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq I} \subseteq \mathscr{P}\left(X \middle| 0_X\right)$$

αποτελεί τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}(X))$ γύρω από το 0_X, οπότε το ζητούμενο έπεται από την ιδιότητα της αντίστροφης εικόνας των αφινικών συναρτήσεων να αφήνει αναλλοίωτη την κυρτότητα των συνόλων, όπως άλλωστε μας εξασφαλίζει το σημείο 2 της Πρότασης 4.2.6. □

5.15 $\mu_\Diamond$ σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους

Παρουσιάζουμε εδώ ένα βασικό αποτέλεσμα που αφορά το συναρτησοειδές Minkowski σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Αρχικά όμως, για το επόμενο προπαρασκευαστικό, αξιοποιείται ο ορισμός της σύγκλισης ακολουθιών, η Πρόταση 5.2.1 και η Πρόταση 4.6.2.

Πρόταση 5.15.1. *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*

ii. $Y \in \mathscr{O}(X)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*
$$Y \subseteq \left\{ x \in X \middle| \mu_Y(x) < 1 \right\}.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $Y \in (\mathfrak{C}(X) \cup \mathfrak{B}(X)) \cap \mathscr{O}\left(X \middle| 0_X\right)$.

   Ισχύει ότι
$$Y = \left\{ x \in X \middle| \mu_Y(x) < 1 \right\}.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Χωρίζουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

   - Αν $Y = \varnothing$, τότε το ζητούμενο είναι άμεσο.
   - Αν $\exists x \in Y$, τότε, αφού από την Πρόταση 5.2.1 παίρνουμε ότι
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) x \to x,$$
     έχουμε από τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθιών ότι
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) x \right\}_{n=n_0}^{\infty} \subseteq Y \Rightarrow x \in \frac{n_0}{n_0 + 1} Y.$$
     Άρα, από τον Ορισμό 4.6.1 έπεται ότι
$$\mu_Y(x) \leq \frac{n_0}{n_0 + 1} < 1,$$
     δλδ το ζητούμενο.

2. Το ζητούμενο έπεται άμεσα από το σημείο 1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.6.2.

□

Έτσι, υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.6.5, το παρακάτω έπεται με χρήση του Θεωρήματος 2.6.2.1, της Πρότασης 5.4.2, της Πρότασης 5.10.1.1 και της Πρότασης 5.15.1.

Πρόταση 5.15.2 ($\mu_\Diamond$ ανοικτού δίσκου γύρω από το μηδενικό στοιχείο)**.** *Έστω* *i.* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*

ii. $Y \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}(X \mid 0_X)$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*
$$\mu_Y \in C(X; \mathbb{R}).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $x \in X$ *και*

   iv. $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

   Ισχύει ότι
$$x_i \overset{\mathscr{O}_{\mu_Y(\Diamond - \blacklozenge)}(X)}{\to} x \Rightarrow \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Y.$$

Απόδειξη. Καταρχήν, από την Πρόταση 4.6.5 έχουμε ότι το μ_Y είναι ψευδονόρμα του X, οπότε έχει νόημα η διατύπωση στο σημείο 2. Ελέγχουμε, λοιπόν, κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.10.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι
$$\mu_Y \text{ συνεχής στο } 0_X.$$
Έπειτα, θέλοντας να επαληθεύσουμε την σημειακή αρχή της μεταφοράς, θεωρούμε αυθαίρετο δίκτυο $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ τ.ω:
$$x_i \to 0_X \Leftrightarrow \forall Z \in \mathscr{O}(X \mid 0_X),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Z$$
και αρκεί, σύμφωνα και με τον ορισμό της ψευδομετρικής τοπολογίας σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.6.2.1, να δείξουμε ότι
$$\begin{aligned} &\mu_Y(x_i) \to 0 = \mu_Y(0_X) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ &\forall (a, \varrho) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \text{ τ.ω.: } 0 \in B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(a, \varrho),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{\mu_Y(x_i)\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(a, \varrho) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varrho > 0,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{\mu_Y(x_i)\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq [0, \varrho). \end{aligned}$$
Πράγματι, ψάχνοντας το άτοπο, υποθέτουμε, αντίθετα, ότι
$$\mu_Y(x_i) \nrightarrow 0 \Leftrightarrow \exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } \{\mu_Y(x_i)\}_{i_0 \le i \in I} \nsubseteq [0, \varrho),\ \forall i_0 \in I.$$
Τώρα, από την Πρόταση 5.4.2 έχουμε ότι
$$\frac{\varrho_0}{2} Y \in \mathscr{O}(X \mid 0_X),$$
οπότε
$$\exists i_\bullet \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_\bullet \le i \in I} \subseteq \frac{\varrho_0}{2} Y,$$
άρα, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.6.1,
$$\{\mu_Y(x_i)\}_{i_\bullet \le i \in I} \subseteq \left[0, \frac{\varrho_0}{2}\right] \subsetneq [0, \varrho_0),$$
δλδ άτοπο αν επιλέξουμε
$$i_0 = i_\bullet$$
στην υπόθεσή μας.

2. Από υπόθεση έχουμε ότι
$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq B_{\mu_Y(\Diamond - \blacklozenge)}(x, 1) = x + B_{\mu_Y(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, 1),$$
συνεπώς, με χρήση της Πρότασης 5.15.1, παίρνουμε ότι
$$\{x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq x + Y \Leftrightarrow \{x_i - x\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Y.$$

□

5.16 Τοπικά κυρτοί τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι (μέρος ΙΙ)

Εδώ συνεχίζουμε την μελέτη των τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων, υπό το πρίσμα, πλέον, τόσο της Πρότασης 5.14.1.1 όσο και της Πρότασης 5.15.2.

5.16.1 Χαρακτηρισμός τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων μέσω ψευδονορμών

Υπό το πρίσμα του συνδυασμού της Πρότασης 5.9.1.1, του Θεωρήματος 5.12.1.1 και της Πρόταση 4.6.5, το παρακάτω έπεται αξιοποιώντας ένα ευρύ φάσμα αποτελεσμάτων, και συγκεκριμένα το Θεώρημα 2.6.1.1, το Θεώρημα 2.6.2.2, την Πρόταση 3.2.1.10, το Θεώρημα 5.2.1 και την Πρόταση 5.15.2.

Πρόταση 5.16.1 (τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος ως αρχικός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από ψευδονόρμες)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *τοπικά κυρτός και*
2. $(X, \mathscr{O}_2(X), +, \cdot)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}_2(X)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* X *που επάγεται από την*

$$\{\mu_Z\}_{Z \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}_1(X|0_X)}.$$

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X).$$

Απόδειξη. Καταρχήν,

- το Θεώρημα 5.12.1.1 μας εξασφαλίζει ότι το

$$Y = \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}_1\big(X\,\big|\,0_X\big) \subseteq \mathscr{P}\big(X\,\big|\,0_X\big)$$

  είναι τοπική βάση του $(X, \mathscr{O}_1(X))$ γύρω από το 0_X, άρα

$$Y \neq \varnothing,$$

- από την Πρόταση 4.6.5, έχουμε ότι

$$\{\mu_Z\}_{Z \in Y} \text{ οικογένεια ημινορμών του } X,$$

- η Πρόταση 5.9.1.1 μας εξασφαλίζει ότι η τετράδα $(X, \mathscr{O}_2(X), +, \cdot)$ είναι όντως τοπολογικός διανυσματικός χώρος,

συνεπώς, η διατύπωση του σημείου 2 έχει νόημα. Ελέγχουμε έπειτα κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

(⊆) Αξιοποιώντας το Θεώρημα 2.6.1.1, θεωρούμε αυθαίρετο δίκτυο $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ τ.ω.:

$$x_i \overset{\mathscr{O}_2(X)}{\to} x \Leftrightarrow x_i - x \overset{\mathscr{O}_2(X)}{\to} 0_X \Leftrightarrow \mu_Z(x_i - x) \to \mu_Z(0_X) = 0,\ \forall Z \in Y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_i \overset{\mathscr{O}_{\mu_Z(\lozenge - \blacklozenge)}(X)}{\to} x,\ \forall Z \in Y,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 5.2.1 για την πρώτη ισοδυναμία, την Πρόταση 3.2.1.10 για την δεύτερη και το αντίστοιχο γνωστό αποτέλεσμα της σύγκλισης σε ψευδομετρικούς χώρους για την τρίτη, και αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_i \overset{\mathscr{O}_1(X)}{\to} x \Leftrightarrow x_i - x \overset{\mathscr{O}_1(X)}{\to} 0_X \Leftrightarrow \forall Z \in Y,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x\}_{i_0 \leq i \in I} \subseteq Z,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 2.6.2.2 για την δεύτερη ισοδυναμία. Έτσι, το ζητούμενο έπεται εφαρμόζοντας απλά το σημείο 2 της Πρότασης 5.15.2.

(⊇) Από το σημείο 1 της Πρότασης 5.15.2 έπεται ότι

$$\mathscr{O}_1(X) \in \big\{\mathscr{O}(X)\,\big|\,\{\mu_Z\}_{Z \in Y} \subseteq C(X;\mathbb{R})\big\},$$

οπότε από την Πρόταση 3.2.1.5 συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

□

Έτσι, με χρήση της Πρόταση 5.14.1.1 και της Πρότασης 5.16.1 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.16.1.1 (χαρακτηρισμός τοπικά κυρτού τοπολογικού διανυσματικού χώρου μέσω ψευδονορμών)**.** *Έστω*

1. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$ *και*
2. $(X,\mathscr{O}_0(X))$.

Ισχύει ότι

$$(X,\mathscr{O}_0(X),+,\cdot) \text{ τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathscr{O}_0(X) \text{ αρχική τοπολογία του } X \text{ που επάγεται από ψευδονόρμες του } X.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.16.1.

($\Leftarrow$) Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 5.14.1.1.

□

Σημείωση 5.16.1.1. *Η αξία του Θεωρήματος 5.16.1.1 έγκειται στην δυνατότητά μας να μελετήσουμε όλες τις ιδιότητες των τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων μέσω της μελέτης μονάχα των αρχικών τοπολογικών χώρων που επάγονται από ψευδονόρμες.*

5.17 Τελικός τοπολογικός διανυσματικός χώρος

Και αν για την περίπτωση των αρχικών τοπολογικών διανυσματικών χώρων (επαγόμενων από ειδικές συναρτήσεις) τα πράγματα είναι άμεσα και στρωτά, αυτό οφείλεται στο ότι η Πρόταση 5.9.1.1 και η Πρόταση 5.9.2.1 βασίζονται στις αξιοποιήσιμες Πρόταση 3.2.1.10 και Πρόταση 3.2.1.11, αντίστοιχα. Αντιθέτως, για την περίπτωση των τελικών τοπολογικών διανυσματικών χώρων, αντίστοιχο αποτέλεσμα της Πρότασης 3.2.1.10 δεν υφίσταται, ενώ η Πρόταση 3.4.1.4 είναι αδύνατο να εφαρμοστεί για την παραγωγή αποτελέσματος, αντίστοιχου της Πρότασης 5.9.2.1 μεν, για τελικούς τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους αυτή την φορά δε. Αναμένουμε, έτσι, η προσέγγιση για την τελική τοπολογική διανυσματική δομή να διαφέρει ουσιαστικά από την αντίστοιχη για το αρχικό της ανάλογο. Μάλιστα, όπως θα φανεί και παρακάτω, τα αποτελέσματα της §3.4.1 χρησιμεύουν εδώ μονάχα για σύγκριση, παρέχοντας το πλαίσιο στο οποίο θέλουμε να κινηθούμε.

Αξιοποιώντας, λοιπόν, την ίδια την αρχική τοπολογική δομή και την ίδια την Πρόταση 5.9.2.1, μαζί με τον Ορισμό 3.2.1.1, την Πρόταση 3.2.1.11, την Πρόταση 5.3.1.1 (ή/και την Πρόταση 5.12.2.1) και την Πρόταση 5.9.2.1 (ή/και την Πρόταση 5.14.2.1, αντίστοιχα), έπεται το παρακάτω εναρκτήριο, έμμεσο αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.17.1. *Έστω*

1. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,
2. $\{Y_i,\mathscr{O}(Y_i)\}_{i\in I}$ *και*
3. $\{f_i\colon Y_i \to X\}_{i\in I}$.

Ισχύει ότι

$$\exists\, \mathrm{grea}\,(S_1 \cap S_2),$$

όπου

$$S_1 = \big\{\mathscr{O}(X) \,\big|\, (X,\mathscr{O}(X),+,\cdot) \text{ (τοπικά κυρτός) τοπολογικός διανυσματικός χώρος}\big\} \text{ και}$$
$$S_2 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, (f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i;X)\right\}.$$

Απόδειξη. Καταρχήν, παρατηρούμε, υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.1.1 (Πρότασης 5.12.2.1, αντίστοιχα), ότι

$$\{\varnothing, X\} \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2 \neq \varnothing.$$

Έπειτα, θέτουμε

$$\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J} = S_1 \cap S_2$$

και

$$(X, \mathscr{O}_0(X)) \text{ τ.ω.: } \mathscr{O}_0(X) \text{ αρχική τοπολογία που επάγεται από } \{g_j = \mathrm{id}_X \colon X \to (X, \mathscr{O}_j(X))\}_{i\in J}.$$

Έχουμε, λοιπόν, τα εξής.

- Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_0(X) = \sup\{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J},$$

  όπως άλλωστε προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 3.2.1.1.

- Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_0(X) \in \{\mathscr{O}_j(X)\}_{j\in J}.$$

  Πράγματι, από την μία, έχουμε από την Πρόταση 5.9.2.1 (Πρόταση 5.14.2.1, αντίστοιχα) ότι

$$\mathscr{O}_0(X) \in S_1$$

  και από την άλλη, έχουμε από τους ορισμούς του κάθε $\mathscr{O}_j(X)$ και g_j, με $j \in J$, ότι

$$\begin{aligned}(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i; (X, \mathscr{O}_j(X))),\ \forall j \in J \Leftrightarrow (f_i \circ g_j)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i; (X, \mathscr{O}_j(X))),\ \forall j \in J \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f_i \circ g_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} C(Y_i; (X, \mathscr{O}_j(X))),\ \forall i \in I,\end{aligned}$$

  ή, ισοδύναμα, λόγω της Πρότασης 3.2.1.11, ότι

$$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i; (X, \mathscr{O}_0(X))),$$

  δλδ

$$\mathscr{O}_0(X) \in S_2.$$

Τέλος, συνδυάζοντας τα παραπάνω, έπεται ότι

$$\exists\, \mathrm{grea}\,(S_1 \cap S_2) \ \&\ \mathrm{grea}\,(S_1 \cap S_2) = \mathscr{O}_0(X).$$

□

Έτσι, υπό το πρίσμα του συνδυασμού της Πρότασης 3.4.1.3 με την Πρόταση 5.17.1, έπεται ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 5.17.1 (τελική συμβατή (τοπικά κυρτή) τοπολογία)**.** *Έστω*

1. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,
2. $\{Y_i, \mathscr{O}(Y_i)\}_{i\in I}$ *και*
3. $\{f_i \colon Y_i \to X\}_{i\in I}$.

Η $\mathrm{grea}\,(S_1 \cap S_2)$*, όπου*

$$S_1 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, (X, \mathscr{O}(X), +, \cdot) \text{ (τοπικά κυρτός) τοπολογικός διανυσματικός χώρος}\right\} \text{ και}$$
$$S_2 = \left\{\mathscr{O}(X) \,\middle|\, (f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i; X)\right\},$$

καλείται τελική συμβατή (τοπικά κυρτή, αντίστοιχα) τοπολογία του X που επάγεται από την οικογένεια συναρτήσεων $\{f_i\}_{i\in I}$.

Έτσι, υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.17.1 και πάλι με χρήση της Πρότασης 5.9.2.1 (ή/και της Πρότασης 5.14.2.1), ακολουθεί και το αντίστοιχο αποτέλεσμα της Πρότασης 3.4.1.4.

Πρόταση 5.17.2 (χαρακτηρισμός τελικής συμβατής (τοπικά κυρτής) τοπολογίας μέσω συνέχειας γραμμικών συναρτήσεων)**.** *Έστω*

i. $(X,+_X,\mathbb{F},\cdot_X)$,

ii. $\{(Y_i,\mathscr{O}(Y_i),+_i,\cdot_i)\}_{i\in I}$ *οικογένεια τοπολογικών διανυσματικών χώρων,*

iii. $\{f_i\colon Y_i\to X\}_{i\in I}$,

iv. $(X,\mathscr{O}(X),+_X,\cdot_X)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η τελική συμβατή (τοπικά κυρτή) τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$ *και*

v. $(Z,\mathscr{O}(Z),+_Z,\cdot_Z)$ *(τοπικά κυρτός, αντίστοιχα) και*

vi. $f\in L(X;Z)$.

Ισχύει ότι η $\mathscr{O}(X)$ *χαρακτηρίζεται μοναδικά από την ιδιότητα*

$$f\in C(X;Z)\ \Leftrightarrow\ (f\circ f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}C(Y_i;Z).$$

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε τον χαρακτηρισμό. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έπεται απευθείας από τον Ορισμό 5.17.1 σε συνδυασμό με την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

($\Leftarrow$) Έστω $(X,\mathscr{O}_0(X))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}_0(X)$ να είναι η αρχική τοπολογία του X που επάγεται από την f. Τότε έχουμε τα εξής.

- Από την Πρόταση 5.9.2.1 (ή/και την Πρόταση 5.14.2.1, αντίστοιχα) παίρνουμε ότι η τετράδα $(X,\mathscr{O}_0(X),+_X,\cdot_X)$ είναι (τοπικά κυρτός, αντίστοιχα) τοπολογικός διανυσματικός χώρος.
- Από υπόθεση και την Πρόταση 3.2.1.11 έπεται ότι

$$(f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}C(Y_i;(X,\mathscr{O}_0(X))).$$

Συνεπώς, υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.17.1, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathscr{O}_0(X)\subseteq\mathscr{O}(X),$$

οπότε, μιας και, λόγω της Πρότασης 3.2.1.5, έχουμε ότι

$$f\in C((X,\mathscr{O}_0(X));Z)\ \Leftrightarrow\ \{f^{\leftarrow}(V)\subseteq X\}_{V\in\mathscr{O}(Z)}\subseteq\mathscr{O}_0(X),$$

καταλήγουμε ότι

$$\{f^{\leftarrow}(V)\subseteq X\}_{V\in\mathscr{O}(Z)}\subseteq\mathscr{O}(X)\ \Leftrightarrow\ f\in C((X,\mathscr{O}(X));Z),$$

δλδ το ζητούμενο.

Έπειτα δείχνουμε την μοναδικότητα του χαρακτηρισμού. Πράγματι, έστω επίσης $(X,\mathscr{O}_0(X),+_X,\cdot_X)$ τ.ω.:

$$f\in C((X,\mathscr{O}_0(X));Z)\ \Leftrightarrow\ (f\circ f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}C(Y_i;Z).$$

Καθώς

$$CL((X,\mathscr{O}(X));(X,\mathscr{O}(X)))\ni\mathrm{id}_X\in CL((X,\mathscr{O}_0(X));(X,\mathscr{O}_0(X))),$$

έχουμε τότε από την συνεπαγωγή ($\Rightarrow$) που δείξαμε παραπάνω και την συνεπαγωγή ($\Rightarrow$) της υπόθεσης, αντίστοιχα, ότι

$$\prod_{i\in I}C(Y_i;(X,\mathscr{O}(X)))\ni(\mathrm{id}_X\circ f_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}C(Y_i;(X,\mathscr{O}_0(X))).$$

Το μόνο που μας μένει τώρα είναι να θεωρήσουμε ότι το X είναι εφοδιασμένο με την $\mathscr{O}_0(X)$ και την $\mathscr{O}(X)$, αντίστοιχα, έτσι ώστε να συμπεράνουμε από την συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) που δείξαμε παραπάνω και την συνεπαγωγή ($\Leftarrow$) της υπόθεσης, αντίστοιχα, ότι

$$CL((X,\mathscr{O}_0(X));(X,\mathscr{O}(X))) \ni \mathrm{id}_X \in CL((X,\mathscr{O}(X));(X,\mathscr{O}_0(X))).$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$(\mathscr{O}(X) \subseteq \mathscr{O}_0(X) \;\&\; \mathscr{O}_0(X) \subseteq \mathscr{O}(X)) \Leftrightarrow \mathscr{O}_0(X) = \mathscr{O}(X).$$

□

Τέλος, υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.17.1, ακολουθούν και τα παρακάτω δύο, τα οποία -σύμφωνα με το Θεώρημα 5.7.2.1 (βλ, επίσης, την Σημείωση 5.7.2.1)- χαρακτηρίζουν τους τελικούς, απλούς και τοπικά κυρτούς, αντίστοιχα, τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους και για τα οποία αξιοποιείται το Θεώρημα 5.7.3.1 και το Θεώρημα 5.12.1.1, αντίστοιχα.

Πρόταση 5.17.3 (τελικός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από γραμμικές συναρτήσεις). *Έστω*

i. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,

ii. $\{(Y_i,\mathscr{O}(Y_i),+_i,\cdot_i)\}_{i\in I}$ *οικογένεια τοπολογικών διανυσματικών χώρων,*

iii. $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} L(Y_i;X)$,

iv. $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η τελική συμβατή τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$ *και*

v. $Z_1 \subseteq \mathscr{P}(X\,|\,0_X)$ *τ.ω.:*

$$Z_1 = \left\{W \in \mathfrak{B}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X)\;\middle|\;(f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i})\right\}.$$

Ισχύει ότι το Z_1 *είναι τοπική βάση του* $(X,\mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X.

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος 5.7.3.1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$Z_1 = \mathfrak{B}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X).$$

Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Προφανής.

($\supseteq$) Γράφοντας

$$Z_1 = \mathfrak{B}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\left\{W \in \mathscr{O}(X\,|\,0_X)\;\middle|\;(f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i})\right\},$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathscr{O}(X\,|\,0_X) \subseteq \left\{W \in \mathscr{O}(X\,|\,0_X)\;\middle|\;(f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i})\right\}.$$

Πράγματι, από τον Ορισμό 5.17.1 έχουμε ότι

$$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i;X) \Rightarrow f_i \text{ συνεχής στο } 0_{Y_i},\ \forall i \in I,$$

οπότε το ζητούμενο έπεται απευθείας από τον σημειακό χαρακτηρισμό της συνέχειας.

□

Πρόταση 5.17.4 (τελικός τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος επαγόμενος από γραμμικές συναρτήσεις). *Έστω*

1. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

2. $\{(Y_i, \mathscr{O}(Y_i), +_i, \cdot_i)\}_{i\in I}$ *οικογένεια τοπολογικών διανυσματικών χώρων,*

3. $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} L(Y_i; X)$ *και*

4. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η τελική τοπικά κυρτή τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{f_i\}_{i\in I}$.

Έχουμε τα εξής.

1. Έστω, επιπλέον,

v. $Z_1 \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$ *τ.ω.:*

$$Z_1 = \left\{ W \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{O}\big(Y_i \,\big|\, 0_{Y_i}\big) \right\}.$$

Ισχύει ότι το Z_1 *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X.

2. Έστω, επιπλέον,

iii′. $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} L(Y_i; X)$ *τ.ω.:*

$$X = \operatorname{co} \bigcup_{i\in I} f_i(Y_i)$$

και

v′. $Z_2 \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$ *τ.ω.:*

$$Z_2 = \left\{ \left(\operatorname{co} \bigcup_{i\in I} f_i(V_i) \right)^{\circ} \subseteq X \right\}_{(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{B}(Y_i) \cap \mathfrak{A}(Y_i) \cap \mathscr{O}(Y_i \,|\, 0_{Y_i})}.$$

Ισχύει ότι το Z_2 *είναι τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X.

Απόδειξη. Δείχνουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Λόγω του Θεωρήματος 5.12.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$Z_1 = \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big).$$

Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Προφανής.

($\supseteq$) Γράφοντας

$$Z_1 = \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \left\{ W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{O}\big(Y_i \,\big|\, 0_{Y_i}\big) \right\},$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \subseteq \left\{ W \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \,\middle|\, (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{O}\big(Y_i \,\big|\, 0_{Y_i}\big) \right\}.$$

Πράγματι, από τον Ορισμό 5.17.1 έχουμε ότι

$$(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(Y_i; X) \Rightarrow f_i \text{ συνεχής στο } 0_{Y_i}, \ \forall i \in I,$$

οπότε το ζητούμενο έπεται απευθείας από τον σημειακό χαρακτηρισμό της συνέχειας.

2. Υπό το πρίσμα του σημείου 1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$Z_2 = Z_1.$$

Ελέγχουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

($\subseteq$) Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.6.2, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left\{\left(\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\right)^\circ \subseteq X\right\}_{(V_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{B}(Y_i)\cap\mathfrak{A}(Y_i)\cap\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i})} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{W\in\mathfrak{D}(X)\cap\mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)\,\middle|\,(f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathscr{O}\big(Y_i\,\big|\,0_{Y_i}\big)\right\},$$

οπότε, προφανώς, ότι

$$\left\{\left(\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\right)^\circ \subseteq X\right\}_{(V_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I}\mathfrak{B}(Y_i)\cap\mathfrak{A}(Y_i)\cap\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i})} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{W\in\mathfrak{D}(X)\smallsetminus\{\varnothing\}\,\middle|\,(f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathscr{O}\big(Y_i\,\big|\,0_{Y_i}\big)\right\}.$$

Πράγματι, έστω $W\in Z_2$, δλδ

$$\exists (V_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathfrak{B}(Y_i)\cap\mathfrak{A}(Y_i)\cap\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i}) \text{ τ.ω.: } W=\left(\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\right)^\circ.$$

Τότε έχουμε τα εξής.

- $W\in\mathfrak{C}(X)$, καθώς άμεσα έχουμε ότι
$$\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\in\mathfrak{C}(X)$$
και έτσι το ζητούμενο έπεται απευθείας από την Πρόταση 5.4.4.
- $W\in\mathfrak{B}(X)$, καθώς από το σημείο 1 της Πρότασης 4.3.6 σε συνδυασμό με το σημείο 2 της Πρότασης 4.3.4 έχουμε ότι
$$\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\in\mathfrak{B}(X),$$
συνεπώς
$$B_{|\lozenge-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)=\operatorname{co}\left(B_{|\lozenge-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}},1)\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\right)=\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i),$$
δλδ
$$\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\in\mathfrak{B}(X),$$
οπότε το ζητούμενο έπεται απευθείας από την Πρόταση 5.4.3.
- $W\in\mathfrak{D}(X)$, από τα παραπάνω δύο.
- $(f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I}\mathscr{O}\big(Y_i\,\big|\,0_{Y_i}\big)$, καθώς
$$W\supseteq\left(\bigcup_{i\in I} f_i(V_i)\right)^\circ\supseteq(f_i(V_i))^\circ\supseteq f^{\leftarrow}(V_i^\circ)=f^{\leftarrow}(V_i),\ \forall i\in I,$$
όπου στον τελευταίο εγκλεισμό αξιοποιήσαμε την συνέχεια της κάθε f_i, με $i\in I$, άρα
$$f_i^{\leftarrow}(W)\supseteq f_i^{\leftarrow}(f_i(V_i))\supseteq V_i,\ \forall i\in I,$$
δλδ το ζητούμενο.

($\supseteq$) Έστω $W\in Z_1$, δλδ

$$W\in\mathfrak{D}(X)\cap\mathfrak{A}(X)\cap\mathscr{O}(X\,|\,0_X) \text{ τ.ω.: } (f_i^{\leftarrow}(W))_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathscr{O}\big(Y_i\,\big|\,0_{Y_i}\big),$$

και μένει μονάχα να δειχθεί ότι

$$\exists (V_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}\mathfrak{B}(Y_i)\cap\mathfrak{A}(Y_i)\cap\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i}) \text{ τ.ω.: } W=\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i).$$

Πράγματι, θέτοντας

$$V_i=f_i^{\leftarrow}(W)\in\mathscr{O}\big(Y_i\,\big|\,0_{Y_i}\big),\ \forall i\in I,$$

έχουμε τα εξής.

- $(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{B}(Y_i)$, όπως προκύπτει απευθείας από το σημείο 2 της Πρότασης 4.3.6.
- $(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{A}(Y_i)$, όπως προκύπτει απευθείας από την Πρότασης 5.6.2.
- $W = \operatorname{co} \bigcup_{i\in I} f_i(V_i)$, καθώς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V_i = f_i^{\leftarrow}(W) \in \mathscr{O}\big(Y_i \,\big|\, 0_{Y_i}\big),\ \forall i \in I \Leftrightarrow& \\ \Leftrightarrow f_i(V_i) = f_i(f_i^{\leftarrow}(W)) = f_i(Y_i) \cap W,\ \forall i \in I \Leftrightarrow& \\ \Leftrightarrow \bigcup_{i\in I} f_i(V_i) = \bigcup_{i\in I} (f_i(Y_i) \cap W) = W \cap \bigcup_{i\in I} f_i(Y_i) \Leftrightarrow& \\ \Leftrightarrow \operatorname{co}\left(\bigcup_{i\in I} (f_i(Y_i) \cap W)\right) = \operatorname{co}\left(W \cap \bigcup_{i\in I} f_i(Y_i)\right) = W \cap \operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(Y_i) =& \\ = W \cap X = W.& \end{aligned}$$

□

Σημείωση 5.17.1. *Σχετικά με το σημείο 2 της Πρότασης 5.17.4, έχουμε επίσης ότι*

$$\left\{\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i) \subseteq X\right\}_{(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{B}(Y_i)\cap\mathfrak{A}(Y_i)\cap\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i})} \subseteq \mathfrak{D}(X) \cap \mathfrak{A}(X).$$

Πράγματι, από την απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος μένει μονάχα να δείξουμε ότι

$$\left\{\operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(V_i) \subseteq X\right\}_{(V_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathfrak{B}(Y_i)\cap\mathfrak{A}(Y_i)\cap\mathscr{O}(Y_i\,|\,0_{Y_i})} \subseteq \mathfrak{A}(X).$$

Έστω, λοιπόν, $x \in X$, δλδ

$$\begin{aligned} \exists \left(\{i_n\}_{n=1}^{n_0}, \{a_n\}_{n=1}^{n_0}, (y_n)_{n=1}^{n_0}\right) \in \mathscr{P}(I) \times \mathscr{P}([0,1]) \times \prod_{n=1}^{n_0} Y_{i_n} \ \textit{τ.ω.:}& \\ \textit{τ.ω.:}\ \left(\sum_{n=1}^{n_0} a_n = 1 \ \&\ x = \sum_{n=1}^{n_0} a_n f_{i_n}(y_n)\right).& \end{aligned}$$

Αφού $(V_{i_n})_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} \mathfrak{A}(Y_{i_n})$, έχουμε ότι

$$\exists \{\varrho_n\}_{n=1}^{n_0} \in (0,\infty)\ \ \textit{τ.ω.:}\ (y_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} \left(B_{|\lozenge-\blacklozenge|}(0,\varrho_n)\right)^c V_{i_n},$$

οπότε, επιλέγοντας

$$\varrho_0 = \max\{\varrho_n\}_{n=1}^{n_0},$$

παίρνουμε ότι

$$(y_n)_{n=1}^{n_0} \in \prod_{n=1}^{n_0} \left(B_{|\lozenge-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)\right)^c V_{i_n}.$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$x \in \sum_{n=1}^{n_0} a_n f_{i_n}\left(\left(B_{|\lozenge-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)\right)^c V_{i_n}\right) = \left(B_{|\lozenge-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)\right)^c \sum_{n=1}^{n_0} a_n f_{i_n}(V_{i_n}) \subseteq \left(B_{|\lozenge-\blacklozenge|}(0,\varrho_0)\right)^c \operatorname{co}\bigcup_{i\in I} f_i(U_i),$$

δλδ το ζητούμενο.

5.18 Επαγωγικά και γνήσια επαγωγικά όρια

Με την έννοια του τελικού τοπολογικού διανυσματικού χώρου ανά χείρας, είμαστε πλέον σε θέση να εισάγουμε την έννοια των επαγωγικών ορίων, γνήσιων ή μη.

5.18.1 Επαγωγικά όρια

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.17.1, έπεται και ο επόμενος.

Ορισμός 5.18.1.1 (επαγωγικό όριο). *Έστω*

1. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,
2. $\left\{\left(Y_i,+|_{Y_i},\mathbb{F},\cdot|_{Y_i}\right)\right\}_{i\in I}$ *οικογένεια διανυσματικών υποχώρων του* X *τ.ω.:*
   i. $\{Y_i\}_{i\in I}\subseteq\mathscr{P}(X)$ *αύξον δίκτυο και*
   ii. $X=\bigcup\limits_{i\in I}Y_i$,
3. $\left\{\left(Y_i,\mathscr{O}(Y_i),+|_{Y_i},\cdot|_{Y_i}\right)\right\}_{i\in I}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων τ.ω.:*
$$Y_i\hookrightarrow Y_j,\ \forall\{i,j\}\subseteq I \text{ τ.ω.: } i\le j$$
και
4. $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να είναι η τελική τοπικά κυρτή τοπολογία του* X *που επάγεται από την* $\{\iota_{Y_i\subseteq X}\}_{i\in I}$.

Ο $(X,\mathscr{O}(X),+,\cdot)$ *καλείται (τοπικά κυρτό) επαγωγικό όριο που επάγεται από το* $\{Y_i\}_{i\in I}$.

Σημείωση 5.18.1.1. *Η σχέση του σημειού 3 του Ορισμού 5.18.1.1 γράφεται, ισοδύναμα, ως*

$$\iota_{Y_i\subseteq Y_j}\in C(Y_i;Y_j),\ \forall\{i,j\}\subseteq I \text{ τ.ω.: } i\le j \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{Y_i\cap Z_j\subseteq Y_i\}_{Z_j\in\mathscr{O}(Y_j)}\subseteq\mathscr{O}(Y_i),\ \forall\{i,j\}\subseteq I \text{ τ.ω.: } i\le j.$$

Με το παρακάτω, για το οποίο αξιοποιείται η Πρόταση 5.17.2, γίνεται φανερό ότι υπάρχει περίπτωση όπου η εξάρτηση ενός επαγωγικού ορίου από το αντίστοιχο αύξον δίκτυο των διανυσματικών υποχώρων είναι επουσιώδης.

Πρόταση 5.18.1.1 (ανεξαρτησία επαγωγικού ορίου από την επιλογή αύξοντος δικτύου διανυσματικών υποχώρων). *Έστω*

i. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,

ii. $\left\{\left(Y_{1i},+|_{Y_{1i}},\mathbb{F},\cdot|_{Y_{1i}}\right)\right\}_{i\in I_1}\cup\left\{\left(Y_{2i},+|_{Y_{2i}},\mathbb{F},\cdot|_{Y_{2i}}\right)\right\}_{i\in I_2}$ *οικογένεια διανυσματικών υποχώρων του* X *τ.ω.:*
   α΄. $\{Y_{1i}\}_{i\in I_1}\subseteq\mathscr{P}(X)$ *και* $\{Y_{2i}\}_{i\in I_2}\subseteq\mathscr{P}(X)$ *αύξοντα δίκτυα και*
   β΄. $\bigcup\limits_{i\in I_1}Y_{1i}=X=\bigcup\limits_{i\in I_2}Y_{2i}$,

iii. $\left\{\left(Y_{1i},\mathscr{O}(Y_{1i}),+|_{Y_{1i}},\cdot|_{Y_{1i}}\right)\right\}_{i\in I_1}\cup\left\{\left(Y_{2i},\mathscr{O}(Y_{2i}),+|_{Y_{2i}},\cdot|_{Y_{2i}}\right)\right\}_{i\in I_2}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων τ.ω.:*
$$\begin{aligned}&Y_{1i}\hookrightarrow Y_{1j},\ \forall\{i,j\}\subseteq I_1 \text{ τ.ω.: } i\le j \text{ και}\\ &Y_{2i}\hookrightarrow Y_{2j},\ \forall\{i,j\}\subseteq I_2 \text{ τ.ω.: } i\le j,\end{aligned}$$

iv. $(X,\mathscr{O}_1(X),+,\cdot)$ *και* $(X,\mathscr{O}_2(X),+,\cdot)$ *τα επαγωγικά όρια που επάγονται από τα* $\{Y_{1i}\}_{i\in I_1}$ *και* $\{Y_{2i}\}_{i\in I_2}$, *αντίστοιχα, και*

v. $\forall i\in I_2,\exists j\in I_1$ *τ.ω.:* $\left(Y_{2i}\subseteq Y_{1j}\ \&\ Y_{2i}\hookrightarrow Y_{1j}\right)$ *και* $\forall i\in I_1,\exists j\in I_2$ *τ.ω.:* $\left(Y_{1i}\subseteq Y_{2j}\ \&\ Y_{1i}\hookrightarrow Y_{2j}\right)$.

Ισχύει ότι
$$\mathscr{O}_1(X)=\mathscr{O}_2(X).$$

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.18.1.1, από την Πρόταση 5.17.2 έχουμε ότι

$$f \in C((X, \mathscr{O}_1(X)); Z) \Leftrightarrow \left(f|_{Y_{1i}}\right)_{i\in I_1} \in \prod_{i\in I_1} C(Y_{1i}; Z) \text{ και}$$
$$f \in C((X, \mathscr{O}_2(X)); Z) \Leftrightarrow \left(f|_{Y_{2i}}\right)_{i\in I_2} \in \prod_{i\in I_2} C(Y_{2i}; Z).$$

Έτσι, από την μοναδικότητα των παραπάνω χαρακτηρισμών, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(f|_{Y_{1i}}\right)_{i\in I_1} \in \prod_{i\in I_1} C(Y_{1i}; Z) \Leftrightarrow \left(f|_{Y_{2i}}\right)_{i\in I_2} \in \prod_{i\in I_2} C(Y_{2i}; Z),$$

καθώς τότε συμπεραίνουμε, για παράδειγμα, ότι

$$f \in C((X, \mathscr{O}_1(X)); Z) \Leftrightarrow \left(f|_{Y_{2i}}\right)_{i\in I_2} \in \prod_{i\in I_2} C(Y_{2i}; Z)$$

και συνεπώς

$$\mathscr{O}_1(X) = \mathscr{O}_2(X).$$

Ελέγχουμε, λοιπόν, κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έστω $i \in I_2$. Από υπόθεση έπεται ότι

$$\exists j \in I_1 \text{ τ.ω.: } \left(Y_{2i} \subseteq Y_{1j} \;\&\; Y_{2i} \hookrightarrow Y_{1j}\right).$$

Έτσι, γράφοντας

$$f|_{Y_{2i}} = f|_{Y_{1j}} \circ \iota_{Y_{2i} \subseteq Y_{1j}},$$

έπεται ότι

$$f|_{Y_{2i}} \in C(Y_{2i}; Z)$$

απευθείας από την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

($\Leftarrow$) Έστω $i \in I_1$. Από υπόθεση έπεται ότι

$$\exists j \in I_2 \text{ τ.ω.: } \left(Y_{1i} \subseteq Y_{2j} \;\&\; Y_{1i} \hookrightarrow Y_{2j}\right).$$

Έτσι, γράφοντας

$$f|_{Y_{1i}} = f|_{Y_{2j}} \circ \iota_{Y_{1i} \subseteq Y_{2j}},$$

έπεται ότι

$$f|_{Y_{1i}} \in C(Y_{1i}; Z)$$

απευθείας από την συνέχεια της σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων.

□

5.18.2 Γνήσια επαγωγικά όρια

Η έννοια των επαγωγικών ορίων εξειδικεύεται περαιτέρω, σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 5.18.2.1 (γνήσια επαγωγικό όριο)**.** *Έστω*

1. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,
2. $\left\{\left(Y_i, +|_{Y_i}, \mathbb{F}, \cdot|_{Y_i}\right)\right\}_{i\in I}$ *οικογένεια διανυσματικών υποχώρων του* X *τ.ω.:*
   i. $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *αύξον δίκτυο και*
   ii. $X = \bigcup_{i\in I} Y_i$,
3. $\left\{\left(Y_i, \mathscr{O}(Y_i), +|_{Y_i}, \cdot|_{Y_i}\right)\right\}_{i\in I}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων τ.ω.:*

$$Y_i \hookrightarrow Y_j, \;\forall \{i, j\} \subseteq I \text{ τ.ω.: } i \leq j$$

και

4. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *το επαγωγικό όριο που επάγεται από το* $\{Y_i\}_{i \in I}$.

Ο $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *καλείται γνήσια επαγωγικό όριο που επάγεται από το* $\{Y_i\}_{i \in I}$ *όταν στο σημείο 3 ισχύει η ισότητα, δλδ όταν*

$$\{Y_i \cap Z_j \subseteq Y_i\}_{Z_j \in \mathscr{O}(Y_j)} = \mathscr{O}(Y_i), \ \forall \{i, j\} \subseteq I \text{ τ.ω.: } i \leq j.$$

Σημείωση 5.18.2.1. *Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.3.3, η επιπλέον συνθήκη του Ορισμού 5.18.2.1 έναντι του Ορισμού 5.18.1.1 έχει, ισοδύναμα, ως εξής:*

$$\mathscr{O}(Y_i) \text{ σχετική τοπολογία του } Y_i \text{ ως προς την } \mathscr{O}(Y_j), \ \forall \{i, j\} \subseteq I \text{ τ.ω.: } i \leq j.$$

Το επόμενο έπεται με χρήση του Θεωρήματος 2.3.1, της Πρότασης 3.3.3.4, της Πρότασης 4.4.4, του Θεωρήματος 5.7.2.1, του Θεωρήματος 5.12.1.1 και της Πρότασης 5.13.1.

Πρόταση 5.18.2.1. *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $\{(Y_n, +|_{Y_n}, \mathbb{F}, \cdot|_{Y_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια διανυσματικών υποχώρων του* X *τ.ω.:*

   α΄. $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *αύξουσα ακολουθία και*

   β΄. $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$,

iii. $\{(Y_n, \mathscr{O}(Y_n), +|_{Y_n}, \cdot|_{Y_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων τ.ω.:*

$$\{Y_n \cap Z_m \subseteq Y_n\}_{Z_m \in \mathscr{O}(Y_m)} = \mathscr{O}(Y_n), \ \forall \{n, m\} \subseteq \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } n \leq m$$

και

iv. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο που επάγεται από την* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \{Y_n \cap Z \subseteq Y_n\}_{Z \in \mathscr{O}(X)} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}(Y_n).$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   v. $(Y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}(Y_{n+1})$.

   Ισχύει ότι

$$\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{C}(X).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Δείχνουμε κάθε εγκλεισμό ξεχωριστά.

   ($\subseteq$) Από τον Ορισμό 5.18.2.1 και τον Ορισμό 5.18.1.1 έχουμε ότι η $\mathscr{O}(X)$ είναι η τελική τοπικά κυρτή τοπολογία του X που επάγεται από την $\{\iota_{Y_n \subseteq X}\}_{n=1}^{\infty}$, συνεπώς από τον Ορισμό 5.17.1 παίρνουμε ότι

$$(\iota_{Y_n \subseteq X})_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} C(Y_n; X) \Leftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \{Y_n \cap Z \subseteq Y_n\}_{Z \in \mathscr{O}(X)} \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}(Y_n).$$

   ($\supseteq$) Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$(\forall W \in \mathscr{O}(Y_n), \ \exists Z \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } W = Y_n \cap Z), \ \forall n \in \mathbb{N},$$

   άρα, λόγω του Θεωρήματος 2.3.1, του Θεωρήματος 5.7.2.1 και του Θεωρήματος 5.12.1.1, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\forall W \in \mathfrak{D}(Y_n) \cap \mathscr{O}\left(Y_n \,\middle|\, 0_X\right), \ \exists Z \in \mathscr{O}(X) \text{ τ.ω.: } W = Y_n \cap Z\right), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Μάλιστα, θα δείξουμε ότι

$$\left(\forall W \in \mathfrak{D}(Y_n) \cap \mathscr{O}\big(Y_n \,\big|\, 0_X\big),\ \exists Z \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.: } W = Y_n \cap Z\right),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $W \in \mathfrak{D}(Y_n) \cap \mathscr{O}\big(Y_n \,\big|\, 0_{Y_n}\big)$. Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.18.2.1 (βλ, επίσης, την Σημείωση 5.18.2.1), από την Πρόταση 5.13.1 έπεται ότι

$$\exists Z_1 \in \mathfrak{D}(Y_{n+1}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n+1} \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.: } W = Y_n \cap Z_1$$

και, συνεχίζοντας επαγωγικά, παίρνουμε αύξουσα ακολουθία $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$ τ.ω.:

$$(Z_m)_{m=0}^{\infty} \in \prod_{m=1}^{\infty} \mathfrak{D}(Y_{n+m}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n+m} \,\big|\, 0_X\big) \ \& \ \begin{cases} Z_0 = W, \\ Z_m = Y_{n+m} \cap Z_{m+1},\ \forall m \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Θέτοντας

$$Z = \bigcup_{m=0}^{\infty} Z_m \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big),$$

έχουμε τα εξής.

- $Z \in \mathfrak{D}(X)$, όπως προκύπτει απευθείας από το σημείο 2 της Πρότασης 4.4.4.
- $Z \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$, όπως προκύπτει απευθείας από τον ορισμό των τοπολογιών.
- Ισχύει ότι
$$Z = \bigcup_{m=k}^{\infty} Z_m,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,$$
λόγω της μονοτονίας της $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$.
- Ισχύει ότι
$$Z_m = Y_{n+m} \cap Z,\ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$
Πράγματι, εφαρμόζοντας επαγωγικά την
$$Z_m = Y_{n+m} \cap Z_{m+1},\ \forall m \in \mathbb{N}_0$$
και αξιοποιώντας την μονοτονία τόσο της $\{Y_m\}_{m=1}^{\infty}$ όσο και της $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$, παίρνουμε ότι
$$Z_m = Y_{n+m} \cap Z_{m+k},\ \forall k \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N}_0,$$
συνεπώς
$$Z_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} (Y_{n+m} \cap Z_{m+k}) = Y_{n+m} \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_{m+k} = Y_{n+m} \cap Z,\ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\forall x \notin Y_n,\ \exists Z \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big) \text{ τ.ω.: } Y_n \cap Z = \varnothing.$$

Πράγματι, μιας και

$$x \in X = \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m,\ x \notin Y_n \text{ και } \{Y_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ αύξουσα},$$

έχουμε ότι

$$\exists m \in \mathbb{N} \cap [n+1, \infty) \text{ τ.ω.: } x \in Y_m.$$

Εξάλλου, αξιοποιώντας επαγωγικά υπόθεση και την Πρόταση 3.3.3.4, παίρνουμε ότι

$$Y_n \in \mathscr{C}(Y_m),$$

οπότε

$$\exists Z_0 \in \mathscr{O}\big(Y_m \,\big|\, x\big) \text{ τ.ω.: } Y_n \cap Z_0 = \varnothing.$$

Τώρα, από το σημείο 1 παίρνουμε ότι

$$\exists Z \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, x\big) \text{ τ.ω.: } Z_0 = Y_m \cap Z.$$

Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι

$$Y_n \cap Z = (Y_n \cap Y_m) \cap Z = Y_n \cap (Y_m \cap Z) = Y_n \cap Z_0 = \varnothing,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

5.19 Κάποιες ειδικές έννοιες

Εδώ παρουσιάζουμε κάποιες ειδικές έννοιες που αφορούν τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους και μελετάμε τυχόν σχέσεις μεταξύ τους.

5.19.1 Φραγμένα υποσύνολα

Η έννοια του φραγμένου υποσυνόλου είναι γνωστή για τους διανυσματικούς χώρους με ψευδονόρμα[2], ωστόσο εδώ την εισάγουμε και για τους τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Ορισμός 5.19.1.1 (φραγμένο υποσύνολο σε τοπολογικό διανυσματικό χώρο)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*
2. $Y \subseteq X$.

Το Y καλείται φραγμένο (ως προς την $\mathscr{O}(X)$) όταvν απορροφάται από κάθε (ανοικτή) περιοχή του μηδενικού στοιχείου, δλδ όταvν

$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big),\ \exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Y \subseteq Z.$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.3.1, ο γνωστός ορισμός των φραγμένων υποσυνόλων σε έναν διανυσματικό χώρο με ψευδονόρμα ισοδυναμεί με τον Ορισμό 5.19.1.1 στην περίπτωση όπου ο χώρος αυτός είναι εφοδιασμένος με την ψευδομετρική του τοπολογία, όπως άλλωστε φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 5.19.1.1 (ισοδυναμία ορισμών φραγμένων υποσυνόλων σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους με ψευδονόρμα)**.** *Έστω*

1. $(X, f, +, \cdot)$ *διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα και*
2. $Y \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$Y \text{ φραγμένο ως προς την } \mathscr{O}_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(X) \Leftrightarrow \exists\, (x, \varrho) \in X \times (0, \infty) \text{ τ.ω.: } Y \subseteq B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(x, \varrho).$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big),\ \exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Y \subseteq Z \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall Z \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big),\ \exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } Y \subseteq \big(B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)\big)^c Z.$$

Αρκεί, λοιπόν, να επιλέξουμε $\varrho_\bullet > 0$ και $Z = B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet)$ και έτσι

$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } Y \subseteq \big(B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)\big)^c B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow Y \subseteq \bigcap_{a \in \left(B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)\right)^c} a B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet) = \bigcap_{a \in \left(B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)\right)^c} B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, |a|\, \varrho_\bullet) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Y \subseteq B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_0 \varrho_\bullet),$$

οπότε τελικά το ζητούμενο έπεται για

$$(x, \varrho) = (0_X, \varrho_0 \varrho_\bullet).$$

($\Leftarrow$) Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists\, (x, \varrho) \in X \times (0, \infty) \text{ τ.ω.: } Y \subseteq B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(x, \varrho) \subseteq B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, f(x) + \varrho) \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big).$$

Έστω, λοιπόν, $Z \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big)$. Υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.4.1 και του σημείου 2 της Πρότασης 2.4.4, έπεται ότι

$$\exists \varrho_\bullet > 0 \text{ τ.ω.: } B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet) \subseteq Z.$$

[2]Θυμίζουμε ότι, δοθέντος ενός διανυσματικού χώρου με ψευδονόρμα $(X, f, +, \cdot)$, ένα $Y \subseteq X$ καλείται φραγμένο όταvν $\exists\, (x, \varrho) \in X \times (0, \infty)$ τ.ω.: $Y \subseteq B_{f(\Diamond - \blacklozenge)}(x, \varrho)$.

Επιλέγοντας
$$\varrho_0 = \frac{f(x) + \varrho}{\varrho_\bullet},$$
έχουμε ότι
$$Y \subseteq B_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(0_X, f(x) + \varrho) = \varrho_0 B_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet)$$
και άρα
$$Y \subseteq \varrho_0 B_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet) \subseteq a B_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet), \ \forall a \in \mathbb{F} \text{ τ.ω.: } |a| \geq \varrho_0,$$
ή, αλλιώς,
$$Y \subseteq \left(B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_\mathbb{F}, \varrho_0)\right)^c B_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(0_X, \varrho_\bullet) \subseteq \left(B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_\mathbb{F}, \varrho_0)\right)^c Z,$$
δλδ το ζητούμενο.

□

Οπότε, από την Πρόταση 5.19.1.1 έπεται άμεσα το επόμενο χαρακτηριστικό παράδειγμα φραγμένων υποσυνόλων σε έναν διανυσματικό χώρο με ψευδονόρμα εφοδιασμένο με την ψευδομετρική τοπολογία, που δεν είναι άλλο από τις ανοικτές μπάλες πεπερασμένης ακτίνας.

Πρόταση 5.19.1.2 (ανοικτές μπάλες πεπερασμένης ακτίνας ως φραγμένα υποσύνολα σε τοπολογικό διανυσματικό χώρο)**.** *Έστω*

1. $(X, f, +, \cdot)$ *διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα και*
2. $(x, \varrho) \in X \times (0, \infty)$.

Ισχύει ότι το $B(x, \varrho)$ *είναι φραγμένο ως προς την* $\mathscr{O}_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(X)$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.19.1.1 για $Y = B(x, \varrho)$, έπεται το ζητούμενο. □

Υπάρχει όμως και απλούστερο μη τετριμμένο παράδειγματα φραγμένων υποσυνόλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω, για το οποίο γίνεται χρήση της Πρότασης 5.6.2.

Πρόταση 5.19.1.3 (μονοσύνολα ως φραγμένα υποσύνολα)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*
2. $x \in X$.

Ισχύει ότι το $\{x\} \subseteq X$ *είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.5.1 (βλ, επίσης, την Σημείωση 4.5.1), το ζητούμενο είναι απλά μια παράφραση της Πρότασης 5.6.2. □

Σημείωση 5.19.1.1. *Προφανώς το απλούστατο παράδειγμα φραγμένου υποσυνόλου είναι η τετριμμένη περίπτωση του* $\varnothing$.

Τώρα, το φράξιμο των υποσυνόλων παραμένει αναλλοίωτο, για την αυθαίρετη τομή και την πεπερασμένη ένωση, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 5.19.1.4 (τομή και ένωση φραγμένων υποσυνόλων)**.** *Έστω* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_i\}_{i \in I} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *οικογένεια φραγμένων υποσυνόλων. Ισχύει ότι*
$$\bigcap_{i \in I} Y_i \in \mathscr{P}(X) \text{ φραγμένο.}$$
2. *Έστω, επιπλέον,* $\{Y_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *οικογένεια φραγμένων υποσυνόλων. Ισχύει ότι*
$$\bigcup_{n=1}^{n_0} Y_n \in \mathscr{P}(X) \text{ φραγμένο.}$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Άμεσο από τον Ορισμό 5.19.1.1, καθώς κάθε ανοικτή περιοχή του X γύρω από το 0_X απορροφά όλα τα Y_i, με $i \in I$, άρα και την τομή τους.
2. Έστω $Z \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X)$. Από τον Ορισμό 5.19.1.1 έχουμε ότι
$$\exists \{\varrho_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq (0,\infty) \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_n) Y_n \subseteq Z, \ \forall n \in \{1,\dots,n_0\},$$
συνεπώς, επιλέγοντας
$$\varrho_0 = \min \{\varrho_n\}_{n=1}^{n_0},$$
συμπεραίνουμε ότι
$$B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Y_n \subseteq Z, \ \forall n \in \{1,\dots,n_0\} \Leftrightarrow B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) \bigcup_{n=1}^{n_0} Y_n \subseteq Z,$$
δλδ το ζητούμενο.

□

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.19.1.1, ακολουθεί χρήσιμος χαρακτηρισμός των φραγμένων υποσυνόλων μέσω συγκλίσης δικτύων.

Πρόταση 5.19.1.5 (χαρακτηρισμός φραγμένων υποσυνόλων μέσω σύγκλισης δικτύων)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και*
2. $Y \subseteq X$.

Ισχύει ότι
$$Y \text{ φραγμένο} \Leftrightarrow a_n x_n \to 0_X, \ \forall \left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \mathbb{F} \times Y \text{ τ.ω.: } a_n \to 0_{\mathbb{F}}.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έστω $\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \mathbb{F} \times Y$, τ.ω.: $a_n \to 0_{\mathbb{F}}$, καθώς επίσης $Z \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X)$. Από υπόθεση και τον Ορισμό 5.19.1.1 έχουμε ότι
$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Y \subseteq Z$$
και, επιπλέον, ότι
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subseteq B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0).$$
Συνδυάζοντας αυτά τα δύο, παίρνουμε ότι
$$\{a_n x_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subseteq B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Y \subseteq Z,$$
δλδ το ζητούμενο.

($\Leftarrow$) Αρκεί να δείξουμε την αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή, δλδ, σύμφωνα με τον Ορισμό 5.19.1.1, ότι
$$\begin{aligned}
&\exists Z \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Y \nsubseteq Z, \ \forall \varrho_0 > 0 \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \exists \left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \mathbb{F} \times Y \text{ τ.ω.: } (a_n \to 0_{\mathbb{F}} \ \& \ a_n x_n \nrightarrow 0_X) \Leftrightarrow \\
&\quad \Leftrightarrow \exists \left(Z, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \times \mathbb{F} \times \mathscr{P}(Y) \text{ τ.ω.: } \\
&\qquad \text{τ.ω: } \left(a_n \to 0_{\mathbb{F}} \ \& \ \{a_n x_n\}_{n=n_0}^{\infty} \nsubseteq Z, \ \forall n_0 \in \mathbb{N}\right)
\end{aligned}$$
και άρα αρκεί να δείξουμε ότι
$$\begin{aligned}
&\exists Z \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) Y \nsubseteq Z, \ \forall \varrho_0 > 0 \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \exists \left(Z, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \times \mathbb{F} \times \mathscr{P}(Y) \text{ τ.ω.: } \left(a_n \to 0_{\mathbb{F}} \ \& \ \{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty} \nsubseteq Z\right).
\end{aligned}$$
Πράγματι, από υπόθεση έχουμε ότι
$$\begin{aligned}
&\exists Z \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } B_{|\Diamond - \blacklozenge|}\left(0_{\mathbb{F}}, \frac{1}{n}\right) Y \nsubseteq Z, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\
&\qquad \Rightarrow \exists \left(Z, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \times \mathscr{P}(Y) \text{ τ.ω.: } \left\{\frac{1}{n} x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \nsubseteq Z
\end{aligned}$$
και το ζητούμενο έπεται.

□

Τέλος, με χρήση της Πρότασης 4.4.4, της Πρότασης 5.19.1.5 και της Πρότασης 5.19.1.5 έπεται το παρακάτω βασικό σχετικά με τα φραγμένα υποσύνολα γνήσιων επαγωγικών ορίων.

Πρόταση 5.19.1.6 (χαρακτηρισμός φραγμένου υποσυνόλου γνήσια επαγωγικού ορίου)**.** *Έστω*

1. $(X,+,\mathbb{F},\cdot)$,
2. $\left\{\left(Y_n, +|_{Y_n}, \mathbb{F}, \cdot|_{Y_n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια διανυσματικών υποχώρων του* X *τ.ω.:*
   i. $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *αύξουσα ακολουθία και*
   ii. $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$,
3. $\left\{\left(Y_n, \mathscr{O}(Y_n), +|_{Y_n}, \cdot|_{Y_n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων τ.ω.:*
   i. $\{Y_n \cap Z_m \subseteq Y_n\}_{Z_m \in \mathscr{O}(Y_m)} = \mathscr{O}(Y_n)$, $\forall \{n,m\} \subseteq \mathbb{N}$ *τ.ω.:* $n \leq m$ *και*
   ii. $(Y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}(Y_{n+1})$,
4. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο που επάγεται από την* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *και*
5. $W \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$W \text{ φραγμένο} \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } (W \subseteq Y_{n_0} \;\&\; W \text{ φραγμένο ως προς την } \mathscr{O}(Y_{n_0}))\,.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$W \text{ φραγμένο} \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } W \subseteq Y_{n_0} \;\& \\ \& \;(\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } W \subseteq Y_{n_0} \Rightarrow W \text{ φραγμένο ως προς την } \mathscr{O}(Y_{n_0}))),$$

δλδ ότι

$$\left(W \text{ φραγμένο} \overset{\alpha'}{\Rightarrow} \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } W \subseteq Y_{n_0}\right) \;\& \\ \& \left((\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } W \subseteq Y_{n_0} \;\&\; W \text{ φραγμένο}) \overset{\beta'}{\Rightarrow} W \text{ φραγμένο ως προς την } \mathscr{O}(Y_{n_0})\right).$$

Εξετάζουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

$\left(\overset{\alpha'}{\Rightarrow}\right)$ Αρκεί να δείξουμε την αντιθετοαντίστροφη συνεπαγωγή, δλδ

$$W \nsubseteq Y_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow W \text{ μη φραγμένο},$$

οπότε υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.19.1.5, αρκεί να δείξουμε ότι

$$W \nsubseteq Y_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \subseteq \mathbb{F} \times W \text{ τ.ω.: } (a_n \to 0_{\mathbb{F}} \;\&\; a_n x_n \nrightarrow 0_X)\,.$$

Πράγματι, έστω

$$W \nsubseteq Y_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Αρχικά θέτουμε

$$n_1 = 1$$

και σταθεροποιούμε

$$x_1 \in W \setminus Y_{n_1}.$$

Έπειτα, θέτουμε

$$n_2 = \min\left\{n \in \mathbb{N} \,\middle|\, x_1 \in Y_n\right\}$$

και σταθεροποιούμε

$$x_2 \in W \smallsetminus Y_{n_2}$$

και ούτω καθεξής, έτσι ώστε να πάρουμε επαγωγικά υπακολουθίες

$$\{n_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N} \ \& \ \{Y_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

και μια ακολουθία

$$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(W) \text{ τ.ω.: } Y_{n_{m+1}} \ni x_m \notin Y_{n_m}, \ \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow Y_{n_{m+1}} \ni \frac{1}{m} x_m \notin Y_{n_m}, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Τώρα, μιας και

$$x_1 \notin Y_{n_1},$$

έχουμε ότι

$$\mathfrak{D}(Y_{n_1}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n_1} \,\big|\, 0_X\big) \cap \mathscr{P}\big(X \,\big|\, x_1\big) = \varnothing.$$

Σταθεροποιούμε, λοιπόν,

$$W_1 \in \mathfrak{D}(Y_{n_1}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n_1} \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.: } x_1 \notin W_1.$$

Έπειτα, υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.13.1 σταθεροποιούμε

$$W_2 \in \mathfrak{D}(Y_{n_2}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n_2} \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.: } \left(W_1 = Y_{n_1} \cap W_2 \ \& \ x_1 \notin W_2\right).$$

Στην συνέχεια, αφού

$$x_1 \notin W_2 \ \& \ \frac{1}{2} x_2 \notin W_2,$$

πάλι μέσω της Πρότασης 5.13.1 σταθεροποιούμε

$$\begin{aligned} &\{W_{3m}\}_{m=1}^{2} \subseteq \mathfrak{D}(Y_{n_3}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n_3} \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.:} \\ &\qquad \text{τ.ω.: } \left(W_2 = Y_{n_2} \cap W_{3m} \ \& \ \frac{1}{m} x_m \notin W_{3m}\right), \ \forall m \in \{1,2\}, \end{aligned}$$

άρα, θέτοντας

$$W_3 = \bigcap_{m=1}^{2} W_{3m},$$

έχουμε, λόγω του σημείου 1 της Πρότασης 4.4.4 σε συνδυασμό με τον ορισμό των τοπολογιών, ότι

$$W_3 \in \mathfrak{D}(Y_{n_3}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n_3} \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.: } \left(W_2 = Y_{n_2} \cap W_3 \ \& \ \left\{\frac{1}{m} x_m\right\}_{m=1}^{2} \cap W_3 = \varnothing\right)$$

και ούτω καθεξής, έτσι ώστε να πάρουμε επαγωγικά μια αύξουσα ακολουθία

$$\begin{aligned} &\{W_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}\big(X \,\big|\, 0_X\big) \text{ τ.ω.:} \\ &\text{τ.ω.: } \left((W_m)_{m=1}^{\infty} \in \prod_{m=1}^{\infty} \mathfrak{D}(Y_{n_m}) \cap \mathscr{O}\big(Y_{n_m} \,\big|\, 0_X\big) \ \& \ \left(\left\{\frac{1}{k} x_k\right\}_{k=1}^{\infty} \cap W_m = \varnothing, \ \forall m \in \mathbb{N}\right)\right). \end{aligned}$$

Σε αυτή την φάση, θέτουμε[3]

$$W_0 = \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} W_m\right)^{\circ X} \in \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big).$$

Από ιδιότητα της ακολουθίας $\{W_m\}_{m=1}^{\infty}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\left\{\frac{1}{k} x_k\right\}_{k=1}^{\infty} \cap W_0 \subseteq \left\{\frac{1}{k} x_k\right\}_{k=1}^{\infty} \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} W_m = \varnothing,$$

δλδ τελικά το ζητούμενο.

[3] Για την ακρίβεια,

$$W_0 \in \mathfrak{D}(X) \cap \mathscr{O}\big(X \,\big|\, 0_X\big),$$

λόγω του σημείου 2 της Πρότασης 4.4.4 σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.4.3 και την Πρόταση 5.4.4.

$\left(\overset{\beta'}{\Rightarrow}\right)$ Έστω $Z_0 \in \mathscr{O}\big(Y_{n_0}\,\big|\,0_X\big)$, οπότε

$$\exists Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big) \text{ τ.ω.: } Z_0 = Y_{n_0} \cap Z.$$

Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) W \subseteq Z.$$

Καθώς ισχύει, επιπλέον, ότι

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) W \subseteq Y_{n_0},$$

λόγω του εγκλεισμού $W \subseteq Y_{n_0}$ και του ότι το Y_{n_0} είναι γραμμικός υπόχωρος, έπεται ότι

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) W \subseteq Y_{n_0} \cap Z = Z_0,$$

δλδ το ζητούμενο.

$(\Leftarrow)$ Έστω $Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.18.2.1 και τον Ορισμό 5.18.1.1, η $\mathscr{O}(X)$ είναι η τελική τοπικά κυρτή τοπολογία του X που επάγεται από την $\{\iota_{Y_n \subseteq X}\}_{n=1}^{\infty}$, οπότε έχουμε από τον Ορισμό 5.17.1 ότι

$$\iota_{Y_{n_0} \subseteq X} \in C(Y_{n_0}; X) \Rightarrow Y_{n_0} \cap Z \in \mathscr{O}(Y_{n_0}).$$

Έτσι, από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) W \subseteq Y_{n_0} \cap Z,$$

άρα

$$B_{|\lozenge - \blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0) W \subseteq Z,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

5.19.2 Δίκτυα Cauchy και πληρότητα

Εδώ εισάγουμε και μελετάμε τις γνωστές, από την θεωρία των ψευδομετρικών χώρων, έννοιες των ακολουθιών Cauchy και της πληρότητας, αλλά στο πλαίσιο των τοπολογικών διανυσματικών χώρων αυτή την φορά. Σημειώνουμε ότι οι έννοιες αυτές αφορούν γενικότερα τους ομοιόμορφους (τοπολογικούς) χώρους (βλ, πχ, [29], [1], [28]), οι οποίοι ωστόσο δεν μας απασχολούν στο παρόν κείμενο.

Δίκτυα Cauchy

Κάνουμε την αρχή με τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.19.2.1 (δίκτυο Cauchy σε τοπολογικό διανυσματικό χώρο). *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,
2. $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Το $\{x_i\}_{i \in I}$ καλείται Cauchy (ως προς την $\mathscr{O}(X)$) όταν

$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} \subseteq Z.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.2.1, τα ακόλουθα δύο, που αφορούν τα δίκτυα σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους, αποτελούν τα ανάλογα του Θεωρήματος 2.6.2.1 και του Θεωρήματος 2.6.2.2, αντίστοιχα, όχι όμως για την σύγκλιση αλλά για την ιδιότητα του Ορισμού 5.19.2.1 αυτή την φορά.

Θεώρημα 5.19.2.1 (χαρακτηρισμός ιδιότητας Cauchy ως προς συμβατή τοπολογία παραγόμενη από βάση). *Έστω*

1. X,
2. $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ *βάση του* X,

3. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(X)$ *να παράγεται από το* Y,

4. $x \in X$ *και*

5. $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι

$$\{x_i\}_{i\in I} \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \forall Z \in Y \cap \mathscr{P}(X|0_X),\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} \subseteq Z.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έπεται άμεσα καθώς
$$Y \cap \mathscr{P}(X|0_X) \subseteq \mathscr{O}(X|0_X),$$
σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1.

($\Leftarrow$) Έστω $Z \in \mathscr{O}(X|0_X)$. Έχουμε τότε από την Πρόταση 2.3.4 ότι

$$\exists W \in Y \cap \mathscr{P}(X|0_X) \cap \mathscr{P}(Z),$$

οπότε από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} \subseteq W \subseteq Z$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

Θεώρημα 5.19.2.2 (χαρακτηρισμός ιδιότητας Cauchy μέσω τοπικής βάσης γύρω από το μηδενικό στοιχείο τοπολογικού διανυσματικού χώρου)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,

2. $x \in X$,

3. $Y \subseteq \mathscr{P}(X|0_X)$ *τοπική βάση του* $(X, \mathscr{O}(X))$ *γύρω από το* 0_X *και*

4. $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Ισχύει ότι
$$\{x_i\}_{i\in I} \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \forall Z \in Y,\ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} \subseteq Z.$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Έπεται άμεσα καθώς
$$Y \subseteq \mathscr{O}(X|0_X),$$
σύμφωνα με τον Ορισμό 2.4.1.

($\Leftarrow$) Έστω $Z \in \mathscr{O}(X|0_X)$. Έχουμε τότε από τον Ορισμό 2.4.1 ότι

$$\exists W \in Y \cap \mathscr{P}(Z),$$

οπότε από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} \subseteq W \subseteq Z$$

και το ζητούμενο έπεται.

□

Έτσι, από τον συνδυασμό του Ορισμού 2.4.1, της Πρότασης 2.4.4 και του Θεωρήματος 5.19.2.2 προκύπτει άμεσα η ισοδυναμία του γνωστού ορισμού των ακολουθιών Cauchy σε διανυσματικό χώρο με ψευδονόρμα και του Ορισμού 5.19.2.1 στην περίπτωση όπου ο χώρος αυτός είναι εφοδιασμένος με την ψευδομετρική του τοπολογία.

Πρόταση 5.19.2.1 (ισοδυναμία ορισμών ακολουθιών Cauchy σε τοπολογικό διανυσματικό χώρο με ψευδονόρμα)**.** *Έστω*

1. $(X, f, +, \cdot)$ *διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα και*
2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$.

Ισχύει ότι

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ Cauchy ως προς την } \mathscr{O}_{f(\lozenge - \blacklozenge)}(X) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varrho > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } f(x_n - x_m) < \varrho, \ \forall \{n, m\} \subseteq \mathbb{N} \cap [n_0, \infty).$$

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα του Ορισμού 2.4.1 και της Πρότασης 2.4.4, αρκεί να επιλέξουμε $Z = B(0_X, \varrho)$, με (αυθαίρετο) $\varrho > 0$ στο Θεώρημα 5.19.2.2. □

Το ακόλουθο, το οποίο, υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.2.1, έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.3.3.3 και τον Ορισμό 5.19.2.1, εξετάζει την ιδιότητα Cauchy για δίκτυα σε διανυσματικούς υπόχωρους εφοδιασμένους με συμβατές σχετικές τοπολογίες.

Πρόταση 5.19.2.2 (ιδιότητα Cauchy για δίκτυα σε διανυσματικό υπόχωρο με συμβατή σχετική τοπολογία)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,
2. $(Y, +|_Y, \mathbb{F}, \cdot|_Y)$ *διανυσματικός υπόχωρος του* X,
3. $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y *και*
4. $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq Y$ *Cauchy (ως προς την* $\mathscr{O}(Y)$*) δίκτυο.*

Ισχύει ότι το $\{y_i\}_{i \in I}$ *είναι Cauchy ως προς την* $\mathscr{O}(X)$.

Απόδειξη. Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.19.2.1, έχουμε από υπόθεση ότι

$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(Y \,|\, 0_X\big), \ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{y_i -|_Y y_j\}_{i_0 \leq i \in I, i_0 \leq j \in I} \subseteq Z,$$

ή, ισοδύναμα από την Πρόταση 3.3.3.3, ότι

$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(X \,|\, 0_X\big), \ \exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{y_i - y_j\}_{i_0 \leq i \in I, i_0 \leq j \in I} \subseteq Z \cap Y \subseteq Z,$$

δλδ το ζητούμενο. □

Τώρα, το επόμενο, το οποίο προκύπτει από την Πρόταση 4.3.3, το Θεώρημα 5.2.1, την Πρόταση 5.8.1, τον Ορισμό 5.19.2.1 και τον ορισμό της σύγκλισης δικτύων, καθορίζει την σχέση μεταξύ της σύγκλισης και της ιδιότητας Cauchy για δίκτυα σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.

Πρόταση 5.19.2.3 (σύγκλιση δικτύων και ιδιότητα Cauchy)**.** *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$,

ii. $x \in X$ *και*

iii. $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ *δίκτυο.*

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii′. $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ *δίκτυο τ.ω.:* $x_i \to x$.

   Ισχύει ότι το $\{x_i\}_{i \in I}$ *είναι Cauchy.*

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii″. $\{x_i\}_{i \in I} \subseteq X$ *Cauchy δίκτυο και*

   iv. $\{x_{i_n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{x_i\}_{i \in I}$ *(αριθμήσιμο) υποδίκτυο τ.ω.:* $x_{i_n} \to x$.

Ισχύει ότι $x_i \to x$.

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Έστω $Z \in \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right)$. Από την Πρόταση 5.8.1 έπεται ότι

$$\exists Y \in \mathfrak{B}(X) \cap \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right) \text{ τ.ω.: } Y + Y \subseteq Z.$$

Από υπόθεση σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.2.1 έχουμε ότι

$$x_i - x \to 0$$

δλδ

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Y,$$

οπότε

$$\{x - x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq -Y = Y,$$

όπου για την παραπάνω ισότητα κάναμε χρήση του σημείου 2 της Πρότασης 4.3.3, συνεπώς

$$\{x_i - x, x - x_i\}_{i_0 \le i \in I} \subseteq Y,$$

άρα

$$\{x_i - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} = \{x_i - x + x - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} \subseteq Y + Y \subseteq Z.$$

2. Έστω $Z \in \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right)$. Από την Πρόταση 5.8.1 (ή, απλούστερα, από την Πρόταση 5.6.1) έπεται ότι

$$\exists Y \in \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right) \text{ τ.ω.: } Y + Y \subseteq Z.$$

Από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists i_0 \in I \text{ τ.ω.: } \{x_i - x_j\}_{i_0 \le i \in I, i_0 \le j \in I} \subseteq Y,$$

καθώς επίσης από υπόθεση σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.2.1 έχουμε ότι

$$x_{i_n} - x \to 0,$$

δλδ

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_{i_n} - x\}_{n=n_0}^{\infty} \subseteq Y.$$

Εξάλλου, από τον ορισμού των υποδικτύων έχουμε ότι

$$\exists n_{00} \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } i_0 \le i_{n_{00}}, \ \& \ i_{n_{00}} \le i_n \ \forall n \in \mathbb{N} \cap [n_{00}, \infty).$$

Θέτοντας, λοιπόν,

$$n_\bullet = \max\{n_0, n_{00}\},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\{x_i - x_{i_n}\}_{i_{n_\bullet} \le i \in I, n \in \mathbb{N} \cap [n_\bullet, \infty)} \cup \{x_{i_n} - x\}_{n \in \mathbb{N} \cap [n_\bullet, \infty)} \subseteq Y,$$

άρα παίρνουμε ότι

$$\{x_i - x\}_{i_{n_\bullet} \le i \in I} = \{x_i - x_{i_n} + x_{i_n} - x\}_{i_{n_\bullet} \le i \in I, n \in \mathbb{N} \cap [n_\bullet, \infty)} \subseteq Y + Y \subseteq Z,$$

δλδ το ζητούμενο.

□

Για το ακόλουθο, το οποίο δημιουργεί σχέση αιτίου και αιτιατού μεταξύ ιδιότητας Cauchy και φραξίματος για δίκτυα σε τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους, έπεται με χρήση της Πρότασης 4.3.3, της Πρότασης 5.6.1, του Θεωρήματος 5.7.3.1, του Ορισμό 5.19.1.1, του Ορισμού 5.19.2.1 και της Πρότασης 5.19.2.3.

Πρόταση 5.19.2.4 (ιδιότητα Cauchy και φράξιμο ακολουθιών). *Έστω*

i. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *και* *ii.* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   iii. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *Cauchy.*

   Ισχύει ότι το $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι φραγμένο.*

2. *Έστω, επιπλέον,*

   iii'. $x \in X$ *και*

   iv. $x_n \to x$.

   Ισχύει ότι το $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *είναι φραγμένο.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Έστω $Z \in \mathscr{O}(X \,|\, 0_X)$, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 5.19.1.1 αρκεί να δείξουμε ότι
$$\exists \varrho_0 > 0 \text{ τ.ω.: } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)\right)^c Z.$$
Πράγματι, από το Θεώρημα 5.7.3.1 έπεται ότι
$$\exists W \in \mathfrak{B}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \cap \mathscr{P}(Z)$$
και από την Πρόταση 5.8.1 έπεται ότι
$$\exists V \in \mathfrak{B}(X) \cap \mathfrak{A}(X) \cap \mathscr{O}(X \,|\, 0_X) \text{ τ.ω.: } V + V \subseteq W.$$
Τώρα, από υπόθεση και τον Ορισμό 5.19.2.1 έχουμε ότι
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_n - x_m\}_{n,m=n_0+1}^{\infty} \subseteq V \Rightarrow \{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty} \subseteq x_{n_0+1} + V.$$
Μιας και $V \in \mathfrak{A}(X)$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι
$$\exists a_0 \in \mathbb{F} \text{ τ.ω.: } (|a_0| > 1 \;\&\; \{x_{n_0+1}\} \subseteq a_0 V),$$
οπότε έχουμε ότι
$$\{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty} \subseteq a_0 V + V.$$
Επιπλέον, καθώς $V \in \mathfrak{B}(X)$, έχουμε ότι
$$\frac{1}{a_0} V \subseteq V \Leftrightarrow V \subseteq a_0 V,$$
συνεπώς
$$\{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty} \subseteq a_0 V + a_0 V \subseteq a_0 W.$$
Επίσης, αφού $W \in \mathfrak{B}(X)$, έπεται από το σημείο 1 της Πρότασης 4.3.3 ότι
$$a_0 W \subseteq a W, \;\; \forall a \in \mathbb{F} \text{ τ.ω.: } |a| \geq |a_0|,$$
άρα
$$\{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty} \subseteq \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, |a_0|)\right)^c W.$$
Έχοντας, λοιπόν, φράξει την ουρά της ακολουθίας, τώρα προχωράμε και στο φράξιμο των αρχικών της όρων. Μιας και $W \in \mathfrak{A}(X)$, παίρνουμε ότι
$$\forall n \in \{1, \dots, n_0\}, \; \exists a_n \in \mathbb{F} \text{ τ.ω: } (|a_n| > 1 \;\&\; \{x_n\} \subseteq a_n W),$$
οπότε, θέτοντας $\varrho = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|\}$, έχουμε, αφού $W \in \mathfrak{B}(X)$, ότι
$$\{x_n\}_{n=1}^{n_0} \subseteq \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho)\right)^c W.$$
Συνδυάζοντας, λοιπόν, τα παραπάνω, αξιοποιώντας πάλι ότι $W \in \mathfrak{B}(X)$ και θέτοντας $\varrho_0 = \max\{|a_0|, \varrho\}$, συμπεραίνουμε ότι
$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)\right)^c W \subseteq \left(B_{|\Diamond-\blacklozenge|}(0_{\mathbb{F}}, \varrho_0)\right)^c Z,$$
δλδ το ζητούμενο.

2. Από το σημείο 1 της Πρότασης 5.19.2.3 έπεται ότι
$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ Cauchy},$$
οπότε το ζητούμενο έπεται με χρήση του σημείου 1.

□

Τέλος, υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.18.2.1, με χρήση του Θεωρήματος 5.2.1, της Πρότασης 5.18.2.1, της Πρότασης 5.19.1.3, της Πρότασης 5.19.1.4, της Πρότασης 5.19.1.6 και της Πρότασης 5.19.2.4, έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 5.19.2.5 (χαρακτηρισμός ακολουθιών Cauchy και σύγκλισης ακολουθιών γνήσια επαγωγικού ορίου)**.** *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $\{(Y_n, +|_{Y_n}, \mathbb{F}, \cdot|_{Y_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια διανυσματικών υποχώρων του* X *τ.ω.:*

α΄. $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *αύξουσα ακολουθία και*

β΄. $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$,

iii. $\{(Y_n, \mathscr{O}(Y_n), +|_{Y_n}, \cdot|_{Y_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων τ.ω.:*

α΄. $\{Y_n \cap Z_m \subseteq Y_n\}_{Z_m \in \mathscr{O}(Y_m)} = \mathscr{O}(Y_n)$, $\forall \{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$ *τ.ω.:* $n \leq m$ *και*

β΄. $(Y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}(Y_{n+1})$,

iv. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο που επάγεται από την* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *και*

v. $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq X$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*
$$\begin{aligned}&\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq Y_{n_0} \;\&\; \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ Cauchy ως προς την } \mathscr{O}(Y_{n_0})\right).\end{aligned}$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   vi. $x \in X$.

   Ισχύει ότι
$$x_m \to x \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \cup \{x\} \subseteq Y_{n_0} \;\&\; x_m \overset{\mathscr{O}(Y_{n_0})}{\to} x\right).$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε κάθε σημείο ξεχωριστά.

1. Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

   (⇒) Από υπόθεση και το σημείο 1 της Πρότασης 5.19.2.4 έχουμε ότι
$$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ φραγμένο},$$
   οπότε, από την Πρόταση 5.19.1.6, ότι
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq Y_{n_0} \Rightarrow \{x_m - x_k\}_{m,k=1}^{\infty} \subseteq Y_{n_0},$$
   όπου για την παραπάνω συνεπαγωγή αξιοποιήσαμε ότι το Y_{n_0} είναι διανυσματικός υπόχωρος. Εξάλλου, επίσης από υπόθεση έχουμε ότι
$$\forall Z \in \mathscr{O}\left(X \,\middle|\, 0_X\right),\ \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x_k\}_{m,k=m_0}^{\infty} \subseteq Z,$$

άρα
$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big),\ \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x_k\}_{m,k=m_0}^{\infty} \subseteq Y_{n_0} \cap Z,$$
ή, ισοδύναμα, λόγω του σημείου 1 της Πρότασης 5.18.2.1, ότι
$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(Y_{n_0}\,\big|\,0_X\big),\ \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x_k\}_{m,k=m_0}^{\infty} \subseteq Z \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ Cauchy ως προς την } \mathscr{O}(Y_{n_0}).$$

($\Leftarrow$) Έστω $Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.18.2.1 και τον Ορισμό 5.18.1.1, η $\mathscr{O}(X)$ είναι η τελική τοπικά κυρτή τοπολογία του X που επάγεται από την $\{\iota_{Y_n \subseteq X}\}_{n=1}^{\infty}$, οπότε έχουμε από τον Ορισμό 5.17.1 ότι
$$\iota_{Y_{n_0} \subseteq X} \in C(Y_{n_0}; X) \Rightarrow Y_{n_0} \cap Z \in \mathscr{O}(Y_{n_0}).$$
Έτσι, από υπόθεση σε συνδυασμό με το σημείο 1 της Πρότασης 5.18.2.1 έχουμε ότι
$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x_k\}_{m,k=m_0}^{\infty} \subseteq Y_{n_0} \cap Z,$$
άρα
$$\{x_m - x_k\}_{m,k=m_0}^{\infty} \subseteq Z,$$
δλδ το ζητούμενο.

2. Λόγω του Θεωρήματος 5.2.1 έχουμε, ισοδύναμα, να δείξουμε ότι
$$x_m - x \to 0_X \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \cup \{x\} \subseteq Y_{n_0} \ \&\ x_m - x \overset{\mathscr{O}(Y_{n_0})}{\to} 0_X\right).$$
Ελέγχουμε κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Από υπόθεση και το σημείο 2 της Πρότασης 5.19.2.4 έχουμε ότι
$$\{x_m - x\}_{m=1}^{\infty} \text{ φραγμένο},$$
συνεπώς, από τον συνδυασμό της Πρότασης 5.19.1.4 με την Πρόταση 5.19.1.3, ότι
$$\{x_m - x\}_{m=1}^{\infty} \cup \{x\} \text{ φραγμένο},$$
οπότε, από την Πρόταση 5.19.1.6, ότι
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x\}_{m=1}^{\infty} \cup \{x\} \subseteq Y_{n_0} \Rightarrow \{x_m\}_{m=1}^{n_0} \cup \{x\} \subseteq Y_{n_0},$$
όπου για την παραπάνω συνεπαγωγή αξιοποιήσαμε ότι το Y_{n_0} είναι διανυσματικός υπόχωρος. Εξάλλου, επίσης από υπόθεση έχουμε ότι
$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big),\ \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x\}_{m=m_0}^{\infty} \subseteq Z,$$
άρα
$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big),\ \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x\}_{m=m_0}^{\infty} \subseteq Y_{n_0} \cap Z,$$
ή, ισοδύναμα, λόγω του σημείου 1 της Πρότασης 5.18.2.1, ότι
$$\forall Z \in \mathscr{O}\big(Y_{n_0}\,\big|\,0_X\big),\ \exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x\}_{m=m_0}^{\infty} \subseteq Z \Leftrightarrow x_m - x \overset{\mathscr{O}(Y_{n_0})}{\to} 0_X.$$

($\Leftarrow$) Έστω $Z \in \mathscr{O}\big(X\,\big|\,0_X\big)$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.18.2.1 και τον Ορισμό 5.18.1.1, η $\mathscr{O}(X)$ είναι η τελική τοπικά κυρτή τοπολογία του X που επάγεται από την $\{\iota_{Y_n \subseteq X}\}_{n=1}^{\infty}$, οπότε έχουμε από τον Ορισμό 5.17.1 ότι
$$\iota_{Y_{n_0} \subseteq X} \in C(Y_{n_0}; X) \Rightarrow Y_{n_0} \cap Z \in \mathscr{O}(Y_{n_0}).$$
Έτσι, από υπόθεση σε συνδυασμό με το σημείο 1 της Πρότασης 5.18.2.1 έχουμε ότι
$$\exists m_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \{x_m - x\}_{m=m_0}^{\infty} \subseteq Y_{n_0} \cap Z,$$
άρα
$$\{x_m - x\}_{m=m_0}^{\infty} \subseteq Z,$$
δλδ το ζητούμενο.

$\square$

Πληρότητα

Στην συνέχεια δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 5.19.2.2 ((ακολουθακά) πλήρης τοπολογικός διανυασματικός χώρος)**.** *Έστω* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. *Ο* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *καλείται*

1. *πλήρης όταν κάθε Cauchy δίκτυό του συγκλίνει, δλδ όταν*

$$\forall \{x_i\}_{i \in I} \subseteq X \text{ Cauchy δίκτυο}, \exists x \in X \text{ τ.ω.: } x_i \to x$$

και

2. *ακολουθιακά πλήρης όταν κάθε Cauchy ακολουθία του συγκλίνει, δλδ όταν*

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X \text{ Cauchy}, \exists x \in X \text{ τ.ω.: } x_n \to x.$$

Σημείωση 5.19.2.1. *Σχετικά με τον Ορισμό 5.19.2.2, προφανώς, η πληρότητα τοπολογικών διανυσματικών χώρων συνεπάγεται την ακολουθιακή πληρότητα τοπολογικών διανυσματικών χώρων, ωστόσο το αντίστροφο (άρα και η ισοδυναμία μεταξύ πληρότητας και ακολουθιακής πληρότητας) δεν ισχύει πάντα, παρά μόνο για τους ακολουθιακούς τοπολογικούς διανυσματικούς χώρους.*

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.3.1, της Πρότασης 5.3.2.1 και του Ορισμού 5.19.2.2, το ακόλουθο χρήσιμο έπεται από το συνδυασμό της Πρότασης 5.19.2.2 και της Πρότασης 5.19.2.3 με γνωστά τοπολογικά αποτελέσματα που αφορούν κλειστά σύνολα και συγκλίνουσες ακολουθίες σε μετρικό χώρο.

Θεώρημα 5.19.2.3 (πληρότητα και κλειστότητα σε μετρικοποιήσιμο τοπολογικό διανυσματικό χώρο)**.** *Έστω*

1. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *τ.ω.:*
   i. *ο* $(X, \mathscr{O}(X))$ *να είναι μετρικοποιήσιμος και*
   ii. *ο* $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *να είναι πλήρης,*
2. $(Y, +|_Y, \mathbb{F}, \cdot|_Y)$ *διανυσματικός υπόχωρος του* X *και*
3. $(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(Y)$ *να είναι η σχετική τοπολογία του* Y.

Ισχύει ότι

$$(Y, \mathscr{O}(Y), +|_Y, \cdot|_Y) \text{ πλήρης} \Leftrightarrow Y \in \mathscr{C}(X).$$

Απόδειξη. Καταρχάς, αφού ο $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ είναι μετρικοποιήσιμος,

$$\exists f \colon X^2 \to \mathbb{R} \text{ μετρική τ.ω.: } \mathscr{O}(X) = \mathscr{O}_f(X),$$

πράγμα που σημαίνει ότι όλες οι ιδιότητες των μετρικών χώρων που αφορούν συγκλίνουσες ακολουθίες περνάνε αυτόματα και στον $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$. Ελέγχουμε, τώρα, κάθε συνεπαγωγή ξεχωριστά.

($\Rightarrow$) Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{Y}^X = Y$ και αφού ισχύει πάντα ότι $Y \subseteq \overline{Y}^X$, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{Y}^X \subseteq Y$. Έστω $y \in \overline{Y}^X$, οπότε, ως γνωστόν,

$$\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y \text{ ακολουθία τ.ω.: } y_n \to y.$$

Από την Πρόταση 5.19.2.3 έπεται ότι η $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, οπότε από υπόθεση έχουμε ότι

$$\exists x \in Y \text{ τ.ω.: } y_n \to x$$

και έτσι

$$y = x \in Y$$

από την γνωστή μας μοναδικότητα του ορίου, δλδ το ζητούμενο.

($\Leftarrow$) Έστω $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ Cauchy (ως προς την $\mathscr{O}(Y)$) ακολουθία. Από την Πρόταση 5.19.2.2 προκύπτει ότι η $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy ως προς την $\mathscr{O}(Y)$ επίσης. Άρα, από υπόθεση έπεται ότι

$$\exists x \in X \text{ τ.ω.: } y_n \to x.$$

Συνεπώς, μιας και $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq Y \in \mathscr{C}(X)$, γνωρίζουμε ότι

$$x \in Y,$$

δλδ, τελικά, το ζητούμενο.

□

Τέλος, όσον αφορά τα γνήσια επαγωγικά όρια, άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.19.2.5 είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 5.19.2.4 (ακολουθιακή πληρότητα γνήσια επαγωγικού ορίου)**.** *Έστω*

i. $(X, +, \mathbb{F}, \cdot)$,

ii. $\{(Y_n, +|_{Y_n}, \mathbb{F}, \cdot|_{Y_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια διανυσματικών υποχώρων του* X *τ.ω.:*

α΄. $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(X)$ *αύξουσα ακολουθία και*

β΄. $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$,

iii. $\{(Y_n, \mathscr{O}(Y_n), +|_{Y_n}, \cdot|_{Y_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *οικογένεια τοπικά κυρτών τοπολογικών διανυσματικών χώρων τ.ω.:*

α΄. $\{Y_n \cap Z_m \subseteq Y_n\}_{Z_m \in \mathscr{O}(Y_m)} = \mathscr{O}(Y_n)$, $\forall \{n, m\} \subseteq \mathbb{N}$ *τ.ω.:* $n \le m$,

β΄. $(Y_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}(Y_{n+1})$ *και*

γ΄. Y_n *ακολουθιακά πλήρης,* $\forall n \in \mathbb{N}$

και

iv. $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο που επάγεται από την* $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Ισχύει ότι ο $(X, \mathscr{O}(X), +, \cdot)$ *είναι ακολουθιακά πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq X$ Cauchy. Από το σημείο 1 της Πρότασης 5.19.2.5 έχουμε ότι

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq Y_{n_0} \ \& \ \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \text{ Cauchy ως προς την } \mathscr{O}(Y_{n_0})\right),$$

συνεπώς, από υπόθεση, ότι

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω.: } \left(\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \cup \{x\} \subseteq Y_{n_0} \ \& \ x_m \overset{\mathscr{O}(Y_{n_0})}{\to} x\right),$$

άρα, από το σημείο 2 της Πρότασης 5.19.2.5, ότι

$$x_m \to x.$$

□

Σημείωση 5.19.2.2. *Υπάρχει και η ισχυρότερη μορφή του Θεωρήματος 5.19.2.4 (βλ, πχ, [18] και [23]), και συγκεκριμένα, αν στην iii.γ΄ ζητάμε ότι*

$$Y_n \text{ πλήρης}, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

τότε έχουμε τελικά ότι

$$X \text{ πλήρης},$$

ωστόσο δεν θα μας απασχολήσει αυτή η μορφή στον παρόν κείμενο.

Μέρος II

Τα συνήθη

Κεφάλαιο 6

Χώρος $\mathcal{L}^p$ στον $\mathbb{R}^m$

Τόσο στο παρόν κεφάλαιο, όσο και στο υπόλοιπο κείμενο, θεωρούμε ότι δουλεύουμε στον χώρο μέτρου Lebesgue, $(\mathbb{R}^m, \mathscr{M}^m, \lambda^m)$. Εδώ μελετάμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, με $S \in \mathscr{M}^m$ και $p \in [1,\infty]$. Σημειώνουμε ότι οι χώροι αυτοί επεκτείνονται και για $p \in (0,1)$, χωρίς όμως να μας απασχολεί αυτή η οπτική στο παρόν κείμενο.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [35], [34], [31], [19], [14], [10] και [9], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

6.1 Σύνολο $\mathcal{L}^p$

Σε πρώτη φάση, ορίζουμε απλά ένα σύνολο, το οποίο στην συνέχεια θα συμπεράνουμε ότι έχει δομή, τόσο γραμμική, δλδ δομή διανυσματικού χώρου, όσο και τοπολογική, και συγκεκριμένα δομή πλήρους ψευδομετρικού χώρου.

Ορισμός 6.1.1 (σύνολο $\mathcal{L}^p$). *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*
2. $p \in [1,\infty]$.

Θέτουμε

$$\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} < \infty \right\},$$

όπου

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = \begin{cases} \left(\int_S |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{αν } p \neq \infty \\ \operatorname{ess\,sup}(|f|), & \text{αν } p = \infty, \end{cases} \quad \forall f \in M(S;\mathbb{F}).$$

Τα επόμενα τρία είναι άμεσα και θεμελιώδη.

Πρόταση 6.1.1. *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$,
2. $p \in [1,\infty]$ *και*
3. $f \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow f = 0,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού}.$$

Πρόταση 6.1.2. *Έστω* $S \in \mathscr{M}^m$. *Ισχύει ότι*

$$M_c(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^\infty(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F}).$$

Πρόταση 6.1.3. *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

2. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:* $p_1 < p_2$.

Ισχύει ότι

$$\bigcap_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F}) \subseteq \bigcap_{p\in[p_1,p_2]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Με χρήση της Πρότασης 6.1.2 και της Πρότασης 6.1.3 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.1.4. *Έστω* $S \in \mathscr{M}^m$. *Ισχύει ότι*

$$M_c(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^\infty(S;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 6.1.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.1.5. *Έστω* $S \in \mathscr{M}^m$. *Ισχύει ότι*

$$C_c(S;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Θεμελιώδες είναι επίσης και το επόμενο, το οποίο έπεται χρησιμοποιώντας ότι

$$\forall f \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le \frac{K}{\left(1+|x|^2\right)^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

σε συνδυασμό με το βασικό αποτέλεσμα[1]

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^a} \mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow a > \frac{m}{2},$$

το οποίο προκύπτει με χρήση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες.

Πρόταση 6.1.6. *Ισχύει ότι* $M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Αξιοποιώντας την Πρόταση 6.1.3 και την Πρόταση 6.1.6 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.1.7. *Ισχύει ότι*

$$M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 6.1.7 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.1.8. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Επίσης ορίζουμε ένα σημαντικό γνήσιο υπερσύνολο του $\mathcal{L}^p$ ως εξής.

Ορισμός 6.1.2 (γνήσιο υπερσύνολο $\mathcal{L}^p_{loc}$)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1,\infty]$.

Θέτουμε

$$\mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \middle|\ f|_{S_0} \in \mathcal{L}^p(S_0;\mathbb{F}),\ \forall S_0 \subset\subset S \right\} \supsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Και το επόμενο είναι άμεσο και θεμελιώδες.

[1] Για $a > \frac{m}{2}$ ισχύει ότι

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{(1+|x|^2)^a} \mathrm{d}x = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{m-1}}{(1+x^2)^a} \mathrm{d}x = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_{(0,\infty)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^a} \mathrm{d}x = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, a - \frac{m}{2}\right) = \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(a - \frac{m}{2}\right)}{\Gamma(a)}.$$

Πρόταση 6.1.9. *Έστω $S \in \mathscr{M}^m$. Ισχύει ότι*

$$M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 6.1.9 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.1.10. *Ισχύει ότι*

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Το τελευταίο άμεσο και θεμελιώδες αποτέλεσμα έχει ως εξής.

Πρόταση 6.1.11. *Έστω*

1. *$S \in \mathscr{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty]$.*

Ισχύει ότι

$$M_s(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) = \begin{cases} M_s(S;\mathbb{F}), & \text{αν } p = \infty \\ M_s(S;\mathbb{F}) \cap M_c(S;\mathbb{F}), & \text{αν } p \neq \infty. \end{cases}$$

6.2 Ανισότητες Hölder και Minkowski

Πρώτα δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 6.2.1 (συζυγείς εκθέτες)**.** *Οι αριθμοί της n-άδας $(p_i)_{i=1}^n \in [1,\infty]^n$ λέγονται συζυγείς εκθέτες όταν*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1.$$

Σημείωση 6.2.1. *Στην περίπτωση όπου ισχύει ότι $p_i \in \{1,\infty\}$ για κάποιο $i \in \{1,\dots,n\}$, τότε αναγκαστικά $n = 2$ και το αντίστοιχο ζεύγος, πλέον, των συζυγών εκθετών είναι, αποκλειστικά, είτε το $(1,\infty)$ είτε το $(\infty,1)$. Άλλο, επίσης χαρακτηριστικό ζεύγος συζυγών εκθετών αποτελεί το $(2,2)$.*

Θεμελιώδης είναι η επόμενη ανισότητα.

Πρόταση 6.2.1 (ανισότητα Young)**.** *Έστω*

1. *$(p_i)_{i=1}^n \in [1,\infty]^n$ συζυγείς εκθέτες και*
2. *$(a_i)_{i=1}^n \in [0,\infty)^n$.*

Ισχύει η ανισότητα

$$\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p_i}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{p_i},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$$\exists a \in [0,\infty) \text{ τ.ω.: } a_i = a,\ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Με χρήση της Πρότασης 6.2.1 έπεται η επόμενη.

Πρόταση 6.2.2 (ανισότητα Hölder)**.** *Έστω*

1. *$S \in \mathscr{M}^m$,*
2. *$(p_i)_{i=1}^n \in [1,\infty]^n$ συζυγείς εκθέτες και*
3. *$(f_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})$.*

Ισχύει ότι

$$\prod_{i=1}^{n} f_i \in \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_{\mathcal{L}^1(S;\mathbb{F})} \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{\mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$$\exists f \in \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } |f_i| = |f|^{\frac{1}{p_i}} \|f_i\|_{\mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})},\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού },\forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Σημείωση 6.2.2. *Στην περίπτωση όπου $n = 2$ και $p_1 = p_2 = 2$, η ανισότητα Hölder είναι επίσης γνωστή ως ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski.*

Με χρήση της Πρότασης 6.2.2 έπονται τα τέσσερα επόμενα.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$ *τ.ω.:* $\lambda^m(S) < \infty$ *και*
2. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:* $p_1 < p_2$.

Ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^{p_1}(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(S;\mathbb{F})} \leq (\lambda^m(S))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F})},\ \forall f \in \mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F}).$$

Πρόταση 6.2.4 (τύποις ανισότητα παρεμβολής)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*
2. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:* $p_1 < p_2$.

Ισχύει ότι

$$\bigcap_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F}) \subseteq \bigcap_{p\in[p_1,p_2]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα $\forall f \in \bigcap_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})$ *ισχύει ότι*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} \leq \|f\|^a_{\mathcal{L}^{p_1}(S;\mathbb{F})} \|f\|^{1-a}_{\mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F})},\ \forall (p,a) \in [p_1,p_2]\times[0,1] \text{ τ.ω.: } \frac{1}{p} = \frac{a}{p_1} + \frac{1-a}{p_2}.$$

Σημείωση 6.2.3. *Η Πρόταση 6.2.4, με την ανισότητά της, συμπληρώνει την Πρόταση 6.1.3.*

Πρόταση 6.2.5. *Έστω $S \in \mathscr{M}^m$. Ισχύει ότι*

$$\bigcup_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^1_{loc}(S;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 6.2.4. *Υπό την ισχύ της Πρότασης 6.2.5 άμεσος είναι επίσης ο εγκλεισμός*

$$\bigcup_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^1_{loc}(S;\mathbb{F}),\ \forall S \in \mathscr{M}^m.$$

Πρόταση 6.2.6 (ανισότητα Minkowski)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$,
2. $p \in [1,\infty]$ *και*
3. $\{f_i\}_{i=1}^n \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i \right\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} \le \sum_{i=1}^{k} \|f_i\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$$\exists f \in \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } f_i = f^{\frac{1}{p}} \|f_i\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})},\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού}\ , \forall i \in \{1,\ldots,n\}\,.$$

6.3 Διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}^p$

Με χρήση της Πρότασης 6.2.6 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 6.3.1 (διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύει ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, *εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του,* $\lozenge + \blacklozenge$, *και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του* $\mathbb{F}$, $\lozenge \cdot \blacklozenge$, *είναι διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Άμεσα είναι τα ακόλουθα δύο.

Πρόταση 6.3.1 (γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος $\mathcal{L}^p_{loc}$)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύει ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F})$ *είναι γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του* $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

Πρόταση 6.3.2 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $\mathcal{N}^p$)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύει ότι το σύνολο

$$\mathcal{N}^p(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = 0 \right\} \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

6.4 Τοπολογικός διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα $\mathcal{L}^p$

Επίσης με χρήση της Πρότασης 6.2.6 και της Πρότασης 5.3.3.1 έπεται το εξής.

Θεώρημα 6.4.1 (διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύουν ότι

1. *η συνάρτηση* $\|\lozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}\colon \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) \to [0,\infty)$ *είναι ψευδονόρμα,*
2. *η συνάρτηση* $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}\colon \left(\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})\right)^2 \to [0,\infty)$ *είναι ψευδομετρική και*
3. *η τετράδα* $(\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}), \mathscr{O}(\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Σημείωση 6.4.1. *Λόγω της Πρότασης 6.1.1 η συνάρτηση στο σημείο 1. του Θεωρήματος 6.4.1 αποτυγχάνει να είναι νόρμα και έτσι η συνάρτηση στο σημείο 2. αποτυγχάνει να είναι μετρική. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν αποτελεί εμπόδιο για την εξαγωγή χρήσιμων τοπολογικών συμπερασμάτων που αφορούν τους* $\mathcal{L}^p$.

6.5 Πληρότητα

Με χρήση των θεωρημάτων τόσο της μονότονης όσο και της κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα. Μάλιστα για μια άμεση απόδειξη με χρήση αποκλειστικά των δύο προαναφερθέντων θεωρημάτων, χωρίς δλδ την αξιοποίηση κάποιου άλλου εξειδικευμένου λήμματος, παραπέμπουμε, πχ, στο [10].

Θεώρημα 6.5.1 (Fischer-Riesz). *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty]$.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$ *εφοδιασμένος με την ψευδομετρική* $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}$ *είναι πλήρης ψευδομετρικός χώρος.*

Τροποποιώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 6.5.1 προκύπτει το εξής χρήσιμο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.5.2. *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$,
2. $p \in [1, \infty]$ *και*
3. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f\} \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $f_n \to f$, *δλδ*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = 0.$$

Ισχύει ότι $\exists\ \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *&* $g \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$\left(\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)| = 0 \ \&\ \sup\left\{|f_{n_k}(x)|\ \middle|\ k \in \mathbb{N}\right\} \leq g(x)\right),\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in S.$$

6.6 Πυκνότητα του $M_s \cap \mathcal{L}^p$

Γενικά, τα αποτελέσματα πυκνότητας είναι εξαιρετικά χρήσιμα, καθώς μας επιτρέπουν να εξάγουμε ιδιότητες για ένα υπερσύνολο απλά επαληθεύοντάς τες για το πυκνό υποσύνολό του.

Με χρήση γνωστού αποτελέσματος που αφορά την προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές σε συνδυασμό με το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το πρώτο ζητούμενο αποτέλεσμα πυκνότητας.

Θεώρημα 6.6.1 (πυκνότητα του $M_s \cap \mathcal{L}^p$). *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύει ότι ο εγκλεισμός

$$M_s(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{M_s(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}^{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

Σημείωση 6.6.1. *Στην Πρόταση 6.1.11 παρέχεται περισσότερη πληροφορία σχετικά με τον πυκνό διανυσματικό υπόχωρο της Πρότασης 6.6.1.*

6.7 Πυκνότητα του C_c

Αξιοποιώντας την Πρόταση 6.1.5 και την Πρόταση 6.1.11, καθώς επίσης την κανονικότητα του λ^m και το λήμμα Urysohn έπεται το εξής.

Πρόταση 6.7.1. *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *τ.ω.:* $\lambda^m(S) < \infty$ *και* *ii.* $p \in [1, \infty)$.

Ισχύουν ότι

1. $\chi_S \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ *και*

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists f \in C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\|f - \chi_S\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} < \varepsilon$.

Σημείωση 6.7.1. *Δεν ισχύει η Πρόταση 6.7.1 όταν* $p = \infty$.

Με χρήση του Θεωρήματος 6.6.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.7.1 και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue έπεται το δεύτερο ζητούμενο αποτέλεσμα πυκνότητας.

Θεώρημα 6.7.1 (πυκνότητα του C_c). *Έστω* $p \in [1, \infty)$. *Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})}^{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}).$$

Σημείωση 6.7.2. *Σε πρώτη φάση μπορούμε περιοριζόμαστε στην περίπτωση όλου του ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}^m$.

6.8 Χρήσιμοι τελεστές στους M και $\mathcal{L}^p$

Εδώ, μεταξύ άλλων, προετοιμάζουμε το έδαφος για την μελέτη, σε επόμενη φάση, του τελεστή συνέλιξης, με το να εισάγουμε ορισμένους χρήσιμους τελεστές στον M και στην συνέχεια να τους μελετάμε εντός αυθαίρετου $\mathcal{L}^p$.

6.8.1 Μεταφορά κατά x, $\mathcal{T}_x$

Απευθείας από την ανεξαρτησία του $(\mathbb{R}^m, \mathscr{M}^m, \lambda^m)$ από τις μεταφορές, δλδ $x + \mathscr{M}^m = \mathscr{M}^m$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, έπεται το εξής.

Πρόταση 6.8.1.1. *Έστω*

1. $f \in M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και*

2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι $f(x + \lozenge) \in M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Λόγω της Πρότασης 6.8.1.1 εισάγουμε τον εξής τελεστή.

Ορισμός 6.8.1.1 (μεταφορά κατά x στον M). *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x \colon M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \\ f &\mapsto \mathcal{T}_x f = f(x + \lozenge), \end{aligned}$$

για τον τελεστή μεταφοράς κατά x.

Άμεσα είναι το επόμενα.

Πρόταση 6.8.1.2. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{T}_x \in L(M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}); M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}))$.

Πρόταση 6.8.1.3. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{T}_0 = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))}.$$

2. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{x+y}.$$

Άμεσα από την Πρόταση 6.8.1.3 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.8.1.4. *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι ο $\mathcal{T}_x$ είναι $1-1$, με*

$$\mathcal{T}_{-x} \circ \mathcal{T}_x = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))} = \mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_{-x},$$

και επί.

Για το παρακάτω εφαρμόζεται το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών και μάλιστα η απλούστερή του εκδοχή.

Πρόταση 6.8.1.5 (μεταφορά κατά x στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. $p \in [1, \infty]$ *και*
2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι

$$\mathcal{T}_x(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα ο $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ είναι ισομετρία, δλδ $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ με

$$\|\mathcal{T}_x f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 6.8.1.1. *Δυο λόγια σχετικά με την Πρόταση 6.8.1.5.*

1. *Επειδή ο $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ είναι ισομετρία, προφανώς ισχύει ότι*

$$\left\| \mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \right\|_{CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))} = 1.$$

2. *Τυχαίνει ο $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ να είναι και $1-1$. Γενικά όμως δεν ισχύει ότι μια ισομετρία μεταξύ διανυσματικών χώρων επί του $\mathbb{F}$ με ψευδονόρμα είναι αναγκαστικά και $1-1$, κάτι που αντίθετα ισχύει στην περίπτωση ισομετρίας από έναν διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ με ψευδονόρμα σε έναν διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ με νόρμα.*

Για το επόμενο βασικό αξιοποιείται το Θεώρημα 6.7.1.

Πρόταση 6.8.1.6. *Έστω*

1. $p \in [1, \infty)$ *και*
2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{|x| \to 0} \|\mathcal{T}_x f - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 6.8.1.2. *Η Πρόταση 6.8.1.6 δεν ισχύει απαραίτητα όταν $p = \infty$.*

Κλείνοντας, θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ καλείται περιοδική με περίοδο $K_i \geq 0$ στην i-οστή συντεταγμένη, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$, όταν ισχύει ότι

$$f(x + K_i e_i) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Παραφράζοντας το παραπάνω, έχουμε πλέον τον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.8.1.2 (περιοδική συνάρτηση στον M με περίοδο K_i στην i-οστή συντεταγμένη)**.** *Έστω*

1. $f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\{K_i\}_{i=1}^m \subsetneq [0, \infty)$.

Καλούμε την f περιοδική με περίοδο K_i στην i-οστή συντεταγμένη όταν

$$\mathcal{T}_{K_i e_i} f = f, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}.$$

6.8.2 Μετάβαση με πίνακα A, $\mathcal{B}_A$

Απευθείας από την ανεξαρτησία του $(\mathbb{R}^m, \mathscr{M}^m, \lambda^m)$ από τις μη ιδιάζουσες γραμμικές απεικονίσεις, δλδ $A\mathscr{M}^m = \mathscr{M}^m$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τ.ω: $\det(A) \neq 0$, έπεται το εξής.

Πρόταση 6.8.2.1. *Έστω*

1. $f \in M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και*

2. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

Ισχύει ότι $f(A\Diamond) \in M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Λόγω της Πρότασης 6.8.2.1 εισάγουμε τον εξής τελεστή.

Ορισμός 6.8.2.1 (μετάβαση με πίνακα A στον M)**.** *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_A \colon M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \\ f &\mapsto \mathcal{B}_A f = f(A\Diamond), \end{aligned}$$

για τον τελεστή μετάβασης με πίνακα A.

Άμεσα είναι το επόμενα.

Πρόταση 6.8.2.2. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{B}_A \in L(M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}); M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}))$.

Πρόταση 6.8.2.3. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m)} = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))}.$$

2. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_B = \mathcal{B}_{AB}.$$

Άμεσα από την Πρόταση 6.8.2.3 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.8.2.4. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Ισχύει ότι ο* $\mathcal{B}_A$ *είναι* $1-1$, *με*

$$\mathcal{B}_{A^{-1}} \circ \mathcal{B}_A = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))} = \mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_{A^{-1}},$$

και επί.

Για το παρακάτω εφαρμόζεται το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 6.8.2.5 (μετάβαση με πίνακα A στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. $p \in [1, \infty]$ *και*

2. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

Ισχύει ότι

$$\mathcal{B}_A(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$$

και μάλιστα $\mathcal{B}_A|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}); \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}))$ *με*

$$\|\mathcal{B}_A f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \frac{1}{|\det(A)|^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}).$$

6.8.3 Πολλαπλασιασμός επί h, $\mathcal{M}_h$

Ο επόμενος ορισμός έχει νόημα καθώς $h, f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow hf \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ορισμός 6.8.3.1 (πολλαπλασιασμός επί h στον M)**.** *Έστω $h \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_h\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{M}_h f = hf,\end{aligned}$$

για τον πολλαπλασιαστικό τελεστή επί h.

Άμεσα είναι το επόμενα.

Πρόταση 6.8.3.1. *Έστω $h \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι $\mathcal{M}_h \in L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$.*

Πρόταση 6.8.3.2. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι*[2]
$$\mathcal{M}_1 = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))}.$$

2. *Έστω $h_1, h_2 \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*
$$\mathcal{M}_{h_1} \circ \mathcal{M}_{h_2} = \mathcal{M}_{h_1 h_2}.$$

Άμεσα από την Πρόταση 6.8.3.2 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.8.3.3. *Έστω $h \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ τ.ω.:*

$$h(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Ισχύει ότι ο $\mathcal{M}_h$ είναι $1-1$, με

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{h}} \circ \mathcal{M}_h = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))} = \mathcal{M}_h \circ \mathcal{M}_{\frac{1}{h}},$$

και επί.

Άμεσο είναι το επόμενο.

Πρόταση 6.8.3.4 (πολλαπλασιασμός επί K στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. *$p \in [1,\infty]$ και*

2. *$K \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.*

Ισχύει ότι

$$\mathcal{M}_K(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα $\mathcal{M}_K|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ με

$$\|\mathcal{M}_K f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = |K|\,\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},\ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

6.8.4 Κανονικοποιημένη μετάβαση με πίνακα A, $\mathcal{B}_{A,p}$

Ορισμός 6.8.4.1 (κανονικοποιημένη μετάβαση με πίνακα A στον M)**.** *Έστω*

1. *$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τ.ω: $\det(A) \neq 0$ και*

2. *$p \in [1,\infty]$.*

Θέτουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{A,p}\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{B}_{A,p} f = \left(\mathcal{M}_{|\det(A)|^{\frac{1}{p}}} \circ \mathcal{B}_A\right) f = |\det(A)|^{\frac{1}{p}} f(A\lozenge),\end{aligned}$$

για τον τελεστή κανονικοποιημένης ομοθεσίας με λόγο K.

[2] Εδώ θεωρείται η σταθερή συνάρτηση $1 \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Άμεσα είναι το επόμενα.

Πρόταση 6.8.4.1. *Έστω*

1. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$ *και*
2. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύει ότι $\mathcal{B}_{A,p} \in L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$.

Πρόταση 6.8.4.2. *Έστω* $p \in [1,\infty]$.

1. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m),p} = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))}.$$
2. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{B}_{A,p} \circ \mathcal{B}_{B,p} = \mathcal{B}_{AB,p}.$$

Άμεσα από την Πρόταση 6.8.4.2 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.8.4.3. *Έστω*

1. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$ *και*
2. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύει ότι ο $\mathcal{B}_{A,p}$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{B}_{A^{-1},p} \circ \mathcal{B}_{A,p} = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))} = \mathcal{B}_{A,p} \circ \mathcal{B}_{A^{-1},p},$$
και επί.

Απευθείας από την Πρόταση 6.8.2.5 σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.8.3.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.8.4.4 (κανονικοποιημένη μετάβαση με πίνακα A στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$ *και*
2. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύει ότι
$$\mathcal{B}_{A,p}(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$
και μάλιστα ο $\mathcal{B}_{A,p}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ *είναι ισομετρία, δλδ* $\mathcal{B}_{A,p}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ *με*
$$\|\mathcal{B}_{A,p}f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}, \quad \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

6.8.5 Ανάκλαση, $\mathcal{R}$

Ορισμός 6.8.5.1 (ανάκλαση στον M)**.** *Θέτουμε*
$$\begin{aligned}\mathcal{R}\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{R}f = \mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m)}f = \left(\mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m),p}f,\ \forall p \in [1,\infty]\right) = f(-\Diamond),\end{aligned}$$
για τον τελεστή ανάκλασης.

Παραθέτουμε επίσης δύο κλασικούς ορισμούς μέσω του τελεστή $\mathcal{R}$.

Ορισμός 6.8.5.2 (άρτια συνάρτηση του M)**.** *Καλούμε μία* $f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *άρτια όταν*
$$\mathcal{R}f = f.$$

Ορισμός 6.8.5.3 (περιττή συνάρτηση του M)**.** *Καλούμε μία* $f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *περιττή όταν*
$$\mathcal{R}f = -f.$$

Τώρα, είτε από την Πρόταση 6.8.2.2, την Πρόταση 6.8.2.4 και την Πρόταση 6.8.2.5, είτε από την Πρόταση 6.8.4.1 και την Πρόταση 6.8.4.3 και την Πρόταση 6.8.4.4, έπονται αντίστοιχα τα επόμενα.

Πρόταση 6.8.5.1. *Ισχύει ότι* $\mathcal{R} \in L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$.

Πρόταση 6.8.5.2. *Ισχύει ότι ο* $\mathcal{R}$ *είναι* $1-1$ *και επί και μάλιστα*

$$\mathcal{R}\circ\mathcal{R} = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))}.$$

Πρόταση 6.8.5.3 (ανάκλαση στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω* $p \in [1,\infty]$. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα ο $\mathcal{R}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ *είναι ισομετρία, δλδ* $\mathcal{R}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ *με*

$$\|\mathcal{R}f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

6.8.6 Σύνθεση ανάκλασης και μεταφοράς κατά x, $\mathcal{C}_x$

Ορισμός 6.8.6.1 (σύνθεση ανάκλασης και μεταφοράς κατά x στον M)**.** *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_x \colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{C}_x f = (\mathcal{T}_x\circ\mathcal{R})\, f = f(x-\lozenge),\end{aligned}$$

για την σύνθεση του τελεστή ανάκλασης και μεταφοράς κατά x.

Άμεσα από τους συνδυασμούς της Πρότασης 6.8.1.2 με την Πρόταση 6.8.5.1, της Πρότασης 6.8.1.4 με την Πρόταση 6.8.5.2 και της Πρόταση 6.8.1.5 με την Πρόταση 6.8.5.3, έπονται αντίστοιχα τα εξής.

Πρόταση 6.8.6.1. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{C}_x \in L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$.

Πρόταση 6.8.6.2. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι ο* $\mathcal{C}_x$ *είναι* $1-1$, *με*

$$(\mathcal{R}\circ\mathcal{T}_{-x})\circ\mathcal{C}_x = \mathrm{id}_{L(M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))} = \mathcal{C}_x\circ(\mathcal{R}\circ\mathcal{T}_{-x}),$$

και επί.

Πρόταση 6.8.6.3. *Έστω*

1. $p \in [1,\infty]$ *και*
2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι

$$\mathcal{C}_x(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα ο $\mathcal{C}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ *είναι ισομετρία, δλδ* $\mathcal{C}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ *με*

$$\|\mathcal{C}_x f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

6.9 Συνέλιξη, $\lozenge * \blacklozenge$

Ένα απαραίτητο για την συνέχεια εργαλείο αποτελεί ο τελεστής της συνέλιξης δύο συναρτήσεων.

6.9.1 Συνέλιξη στον M

Υπό την ισχύ της Πρότασης 6.8.6.2 και της μετρησιμότητας του γινομένου μετρήσιμων συναρτήσεων, πρώτα εισάγουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.9.1.1 (συνέλιξη μετρήσιμων συναρτήσεων)**.** *Έστω* $f, g \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} f*g\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F}\\ x &\mapsto (f*g)(x) = \begin{cases}\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{C}_x f(y) g(y)\mathrm{d}y, & \text{αν } \mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ 0, & \text{αν } \mathcal{C}_x f\, g \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\end{cases}\end{aligned}$$

για την συνέλιξη των f *και* g.

6.9.2 Αντιμεταθετική ιδιότητα

Με εφαρμογή (δις) του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.9.2.1 (αντιμεταθετική ιδιότητα)**.** *Έστω $f, g \in M(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\exists x \in \mathbb{R}^m \text{ τ.ω.: } \mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \Rightarrow \mathcal{C}_x g\, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$f * g = g * f.$$

6.9.3 Συνέλιξη στους $\mathcal{L}^p$

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το p του αντίστοιχου $\mathcal{L}^p$ στον οποίο θέλουμε να λαμβάνει τιμές η συνέλιξη.

Για το επόμενο γίνεται χρήση των θεωρημάτων Tonelli και Fubini σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.8.1.5 (όχι με την Πρόταση 6.8.6.3 σε αυτή την περίπτωση!), καθώς και χρήση της Πρότασης 6.2.2.

Θεώρημα 6.9.3.1 (Young - συνέλιξη με $p \neq \infty$)**.** *Έστω*

i. $p \in [1, \infty)$,

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *τ.ω.:*
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$$
και

iii. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $\mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$, λ^m*-σχεδόν* $\forall x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|g\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$$
και
3. *αν* $p = p_1 = p_2 = 1$, *τότε*
$$\int_{\mathbb{R}^m} (f * g)(x) \mathrm{d}x = \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x) \mathrm{d}x \right) \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x) \mathrm{d}x \right).$$

Μια ιδιαίτερη υποπερίπτωση είναι αυτή του $\mathcal{L}^1$, όπως άλλωστε καταδεικνύει το Θεώρημα 6.9.3.1. Επιπλέον, με αξιοποίηση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών καθώς και των θεωρημάτων Tonelli και Fubini έπεται το εξής.

Πρόταση 6.9.3.1 (προσεταιριστική ιδιότητα)**.** *Έστω $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Τώρα, υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.9.3.1 δίνουμε τον ορισμό του εξής τελεστή.

Ορισμός 6.9.3.1 (τελεστής συνέλιξης με $p \neq \infty$)**.** *Έστω*

1. $p \in [1, \infty)$ *και*
2. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *τ.ω.:*
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Θέτουμε

$$\Diamond * \blacklozenge : \prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$
$$(f,g) \mapsto f * g,$$

για τον τελεστή συνέλιξης στον $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Για το επόμενο αποτέλεσμα γίνεται χρήση της Πρόταση 6.8.6.3 (εδώ βρίσκει εφαρμογή!) και της Πρότασης 6.8.1.6 σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.2.2, καθώς επίσης χρήση της Πρότασης 6.9.2.1 και του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Θεώρημα 6.9.3.2 (Young - συνέλιξη με $p = \infty$)**.** *Έστω*

i. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *συζυγείς εκθέτες και*

ii. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $\mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\|g\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
3. *η* $f * g \in C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *και*
4. *αν* $p_1, p_2 \notin \{1,\infty\}$, *τότε* $f * g \in C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.9.3.2 δίνουμε τον ορισμό του εξής τελεστή.

Ορισμός 6.9.3.2 (τελεστής συνέλιξης με $p = \infty$)**.** *Έστω* $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *συζυγείς εκθέτες. Θέτουμε*

$$\Diamond * \blacklozenge : \prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to \begin{cases} \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), & \text{αν } p_1,p_2 \notin \{1,\infty\} \\ \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), & \text{αν } p_1,p_2 \in \{1,\infty\} \end{cases}$$
$$(f,g) \mapsto f * g,$$

για τον τελεστή συνέλιξης στον $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

6.9.4 Γενικά αποτελέσματα

Άμεσα έπεται το εξής.

Πρόταση 6.9.4.1 (διγραμμικότητα και συνέχεια τελεστή συνέλιξης)**.** *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$ *και*

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:*
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι* $\Diamond * \blacklozenge \in C\left(\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\right)$.
2. *Έστω* $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι* $f * \Diamond \in CL(\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$.
3. *Έστω* $f \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι* $\Diamond * f \in CL(\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$.

Σημείωση 6.9.4.1. *Δυο λόγια σχετικά με την Πρόταση 6.9.4.1.*

1. *Η διγραμμικότητα (και άρα οι επιμεριστικές ιδιότητες που αυτή υπονοεί) της Πρότασης 6.9.4.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.9.3.1 μετατρέπει το ζεύγος* $\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), *\right)$ *σε μία άλγεβρα.*

2. *Για την συνέχεια στην Πρόταση 6.9.4.1 θεωρούμε ότι έχουμε εφοδιάσει τον διανυσματικό χώρο γινόμενο* $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *με μια ψευδομετρική που επάγεται από μια - οποιαδήποτε - από τις ισοδύναμες ψευδονόρμες με την οποία μπορούμε να εφοδιάσουμε τον προαναφερθέντα χώρο, και οι οποίες εμπλέκουν προφανώς την αντίστοιχη ψευδονόρμα του κάθε* $\mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Με χρήση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών και της Πρότασης 6.9.2.1 έπεται άμεσα η αντιμετάθεση των πράξεων της συνέλιξης και μιας συγκεκριμένης μετάθεσης.

Πρόταση 6.9.4.2. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:*
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1,$$

iii. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

iv. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι
$$f * (\mathcal{T}_{-x} g) = \mathcal{T}_{-x}(f * g) = \mathcal{T}_{-x}(g * f) = (\mathcal{T}_x g) * f.$$

Επίσης άμεσα από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.9.4.3. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:*
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$$
και

iii. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι
$$\mathcal{R}(f * g) = \mathcal{R}f * \mathcal{R}g.$$

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.9.3.1 και του Θεωρήματος 6.9.3.2 προκύπτει το επόμενο.

Πρόταση 6.9.4.4. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:*
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$$
και

iii. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν, διαδοχικά,

1. *η ισότητα*
$$(f * g)(x) = \int_{(x - \operatorname{ess\,supp}(f)) \cap \operatorname{ess\,supp}(g)} \mathcal{C}_x f(y) g(y) \mathrm{d}y, \begin{cases} \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p \neq \infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p = \infty, \end{cases}$$

2. *η συνεπαγωγή*

$$x \notin (\operatorname{ess\,supp}(f) + \operatorname{ess\,supp}(g)) \Rightarrow (f * g)(x) = 0, \begin{cases} \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p \neq \infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p = \infty, \end{cases}$$

και τελικά

3. *ο εγκλεισμός*

$$\operatorname{ess\,supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{ess\,supp}(f) + \operatorname{ess\,supp}(g)}.$$

Σημείωση 6.9.4.2. *Η Πρόταση 6.9.4.4 υπονοεί ότι αν τόσο ο* $\operatorname{ess\,supp}(f)$ *όσο και ο* $\operatorname{ess\,supp}(g)$ *είναι συμπαγείς, τότε και ο* $\operatorname{ess\,supp}(f * g)$ *είναι συμπαγής, κάτι όμως που δεν ισχύει απαραίτητα αν μόνο ένας από τους δύο είναι συμπαγής.*

Υπό την ισχύ της Πρότασης 6.1.5 και του Θεωρήματος 6.9.3.2, απευθείας από την Πρόταση 6.9.4.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.9.4.5. *Έστω* $f, g \in C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$. *Ισχύει ότι*

$$f * g \in C_{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \subsetneq C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}).$$

Σημείωση 6.9.4.3. *Μιας και τα δύο (κλειστά) σύνολα* $\operatorname{supp}(f)$ *και* $\operatorname{supp}(g)$ *στην Πρόταση 6.9.4.5 είναι συμπαγή, έπεται ότι και το άθροισμά τους είναι συμπαγές.*

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.9.3.1 και του Θεωρήματος 6.9.3.2, καθώς επίσης της Πρότασης 6.1.7, έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.9.4.6. *Έστω* $f, g \in M_{rd}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$. *Ισχύουν ότι*

1. $f * g \in \left(\bigcap_{p \in [1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \right) \cap C_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και*
2. *διαδοχικά,*
   i. $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0$ *τ.ω.:* $\sup\left(|\mathrm{id}_m|^n |\mathcal{T}_{-y} f|\right) \leq K\left(1 + |y|^n\right),\ \forall y \in \mathbb{R}^m$,
   ii. $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0$ *τ.ω.:*
   $$\sup\left(|\mathrm{id}_m|^n |(f * g)|\right) \leq K \int_{\mathbb{R}^m} \left(1 + |y|^n\right) |g(y)|\,\mathrm{d}y,$$
   iii. $\forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0$ *τ.ω.:* $\sup\left(|\mathrm{id}_m|^n |(f * g)|\right) < \infty$ *και*
   iv. $f * g \in M_{rd}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

6.9.5 Διαφόριση συνέλιξης

Εδώ, υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.9.3.2, μελετάμε την διαφόριση συνέλιξης. Χρήσιμες για την συνέχεια διαφορίσιμες συνελίξεις αποτελούν αυτές μεταξύ στοιχείων είτε του C_c^∞ είτε του $\mathcal{S}$.

Συμπαγής φορέας

Για το επόμενο αξιοποιούμε τον ορισμό του διαφορικού, την Πρόταση 6.1.5 και το Θεώρημα 6.9.3.2.

Θεώρημα 6.9.5.1. *Έστω*

i. $k \in \mathbb{N}_0$,
ii. $f \in C_c^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$,
iii. $p \in [1, \infty]$ *και*
iv. $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \le k$, $D^\alpha(f*g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f*g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \le \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Απευθείας από το Θεώρημα 6.9.5.1 παίρνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 6.9.5.1. *Έστω*

i. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$,

ii. $p \in [1,\infty]$ *και*

iii. $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha(f*g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f*g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \le \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Άμεσα από το Θεώρημα 6.9.5.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.9.2.1 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.9.5.2. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$,

iii. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*

iv. $g \in C_c^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \le k$, $D^\alpha(f*g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f*g) = f * (D^\alpha g)$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f*g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|D^\alpha g\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Απευθείας από την Πρόταση 6.9.5.2 παίρνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 6.9.5.3. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

iii. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha(f * g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f * g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|D^\alpha g\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 6.9.4.5, από τον συνδυασμό του Θεωρήματος 6.9.5.1 και της Πρότασης 6.9.5.2 προκύπτει άμεσα το επόμενο.

Πρόταση 6.9.5.4. *Έστω*

i. $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ *και*

ii. $f \in C_c^{k_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in C_c^{k_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C_c^{k_1+k_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \le k_1$ *&* $\forall \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \le k_2$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in C_c^{k_1+k_2-|\alpha|-|\beta|}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$
και άρα
$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \le \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \ \& \ \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \ \text{τ.ω.:} \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Απευθείας από την Πρόταση 6.9.5.4 παίρνουμε τα παρακάτω.

Πρόταση 6.9.5.5. *Έστω*

i. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$,

ii. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*

iii. $g \in C_c^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *&* $\forall \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\beta| \le k$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$
και άρα
$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \le \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \ \& \ \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \ \text{τ.ω.:} \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Πρόταση 6.9.5.6. *Έστω*

i. $k \in \mathbb{N}_0$,

ii. $f \in C_c^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

iii. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \leq k$ *&* $\forall \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$

και άρα

$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \;\&\; \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \text{ τ.ω.: } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Πρόταση 6.9.5.7. *Έστω* $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$*. Ισχύουν ότι*

1. $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$

και άρα

$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \;\&\; \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \text{ τ.ω.: } \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Ταχεία φθίση

Η αντίστοιχη συλλογιστική που χρησιμοποιήθηκε για τα στοιχεία του C_c^∞ θα αξιοποιηθεί και για τα στοιχεία του $\mathcal{S}$, προφανώς με κατάλληλες τροποποιήσεις.

Για το επόμενο αξιοποιούμε τον ορισμό του διαφορικού, την Πρόταση 6.1.8 αυτή την φορά και το Θεώρημα 6.9.3.2.

Θεώρημα 6.9.5.2. *Έστω*

i. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$,

ii. $p \in [1,\infty]$ *και*

iii. $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha(f * g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$

και άρα

$$\|D^\alpha(f * g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Άμεσα από το Θεώρημα 6.9.5.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.9.2.1 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.9.5.8. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

iii. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha (f * g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$$

και άρα

$$\|D^\alpha(f * g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|D^\alpha g\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 6.9.4.6 αυτή την φορά, από τον συνδυασμό του Θεωρήματος 6.9.5.2 και της Πρότασης 6.9.5.8 προκύπτει άμεσα το επόμενο.

Πρόταση 6.9.5.9. *Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύουν ότι*

1. $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$

και άρα

$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \ \&\ \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \ \text{τ.ω.:}\ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

6.10 Ομαλοποίηση

Εδώ εισάγουμε την συνάρτηση επάρματος, από την οποία θα πάρουμε στην συνέχεια τους συνήθεις ομαλοποιητές. Οι τελευταίοι αξιοποιούνται σε συνδυασμό με την συνέλιξη και για να μας δώσουν δύο χρήσιμα και ανεξάρτητα μεταξύ τους αποτελέσματα, την ομαλή εκδοχή του λήμματος του Urysohn και την πυκνότητα του C_c στον $\mathcal{L}^p$.

6.10.1 Συνάρτηση επάρματος, η

Η κατασκευή της συνάρτησης επάρματος είναι κλασική.

Αρχικά έχουμε το εξής.

Πρόταση 6.10.1.1. *Έστω*

$$f\colon \mathbb{R} \to [0,1)$$
$$x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \chi_{(0,\infty)}(x).$$

Ισχύουν ότι

1. $f|_{(0,\infty)} \in C^\infty((0,\infty);\mathbb{R})$ *με*

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(k)}(x) = 0,\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$

και άρα

2. $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Έπειτα κατασκευάζουμε μια C_c^∞ συνάρτηση.

Πρόταση 6.10.1.2. *Έστω f όπως στην Πρόταση 6.10.1.1. Θέτουμε*

$$h\colon \mathbb{R}^m \to \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right]$$
$$x \mapsto h(x) = f\left(1 - |x|^2\right) \chi_{B(0,1)}(x).$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Η h είναι άρτια.*

2. *$h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ με $\operatorname{supp}(h) = \overline{B(0,1)}$.*

3. *Ισχύει ότι*
$$\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} > 0.$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 6.10.1.2, δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.10.1.1 (συνάρτηση επάρματος)**.** *Έστω h όπως στην Πρόταση 6.10.1.2. Θέτουμε*

$$\eta\colon \mathbb{R}^m \to \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})}}\right]$$
$$x \mapsto \eta(x) = \frac{h(x)}{\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})}}$$

για την συνάρτηση επάρματος.

Άμεσο, τέλος, είναι το επόμενο.

Πρόταση 6.10.1.3. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Η η είναι άρτια.*

2. *$\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ με $\operatorname{supp}(\eta) = \overline{B(0,1)}$.*

3. *Ισχύει ότι*
$$\|\eta\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1.$$

6.10.2 Συνήθης ομαλοποιητής, η_ε

Δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.10.2.1 (συνήθης ομαλοποιητής)**.** *Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε*

$$\eta_\varepsilon\colon \mathbb{R}^m \to \left[0, \frac{1}{\varepsilon^m \mathrm{e}\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})}}\right]$$
$$x \mapsto \eta_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_{\frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{id}_m),1}\eta = \frac{1}{\varepsilon^m}\eta\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right)$$

για τον συνήθη ομαλοποιητή.

Με χρήση της Πρότασης 6.10.1.3 σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.8.4.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 6.10.2.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Η η_ε είναι άρτια.*

2. *$\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ με $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = \overline{B(0,\varepsilon)}$.*

3. *Ισχύει ότι*
$$\|\eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1.$$

Οι η_ε αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο, όπως άλλωστε καταδεικνύεται στις επόμενες δύο ανεξάρτητες υποενότητες. Το όνομα των συναρτήσεων αυτών οφείλεται στην ιδιότητά τους να «εξομαλύνουν» μια συνάρτηση στον $\mathcal{L}^p$ με την οποία «συνελίσσονται».

6.10.3 Ομαλό λήμμα Urysohn

Η συνέλιξη των η_ε με χαρακτηριστικές συναρτήσεις, χ_S, «εξομαλύνει» τις τελευταίες, όπως άλλωστε καταδεικνύει το Θεώρημα 6.9.5.1. Αυτή η ιδιότητα ουσιαστικά αξιοποιείται για την εξαγωγή της επόμενης γενίκευσης του λήμματος του Urysohn, για την οποία γίνεται χρήση, εκτός του προαναφερόμενου αποτελέσματος, τόσο του Θεωρήματος 6.9.3.2 όσο και του εγκλεισμού στην Πρόταση 6.9.4.4.

Θεώρημα 6.10.3.1 (ομαλό λήμμα Urysohn)**.** *Έστω* *i.* $S \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^m)$ *και*

ii. $\varepsilon > 0$.

Ισχύει ότι $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

1. $f|_S = 1$,

2. $f(S^\varepsilon \setminus S) = (0,1)$ *και*

$$\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} \leq \frac{K}{\varepsilon^{|\alpha|}},\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| = k$$

και

3. $f|_{(S^\varepsilon)^c} = 0$ *και άρα* $\operatorname{supp}(f) \subseteq S^\varepsilon$.

Σημείωση 6.10.3.1. *Συναρτήσεις f όπως στο Θεώρημα 6.10.3.1 καλούνται αποκόπτουσες.*

6.10.4 Ομαλή διαμέριση μονάδας

Μιλώντας γενικά, κατά την αναλυτική μελέτη συναρτήρεων, οι ομαλές διαμερίσεις μονάδας μας επιτρέπουν να περνάμε από το τοπικό επίπεδο μελέτης στο ολικό, μέσω της σύνθεσης της τοπικής αναλυτικής πληροφορίας των συναρτήσεων.

Πριν δώσουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα ύπαρξης, εισάγουμε την έννοια της ομαλής διαμέρισης μονάδας.

Ορισμός 6.10.4.1 (ομαλή διαμέριση μονάδας για σύνολο κυριαρχούμενο από ανοικτό κάλυμμα)**.** *Έστω*

i. $S \subseteq \mathbb{R}^m$,

ii. $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *τ.ω.:* $S \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$,

iii. $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *και*

iv. $\{f_i\}_{i=1}^n \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$.

Καλούμε την $\{f_i\}_{i=1}^n$ (αριθμήσιμη) ομαλή διαμέριση μονάδας για το S κυριαρχούμενο από το $\{U_i\}_{i\in I}$ όταν

1. $f_i(\mathbb{R}^m) = [0,1]$, $\forall i \in \bigcup\limits_{i=1}^n \{i\}$,

2. $\forall i \in \bigcup\limits_{i=1}^n \{i\}$, $\exists i_0 \in I$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f_i) \subset\subset U_{i_0}$,

3. $\forall S_0 \subset\subset S$, $\exists n_0 \in \bigcup\limits_{i=1}^n \{i\}$ *τ.ω.:* $S_0 \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n_0} \operatorname{supp}(f_i)$ *και*

4. $\sum\limits_{i=1}^n f_i|_S = 1$.

Σημείωση 6.10.4.1. *Δυο λόγια σχετικά με τον Ορισμό 6.10.4.1.*

1. *Το σημείο 3. δίνει νόημα στο σημείο 4., καθώς $\forall x \in S$ το άθροισμα $\sum\limits_{i=1}^n f_i(x)$ είναι πεπερασμένο.*

2. *Παραφράζοντας το σημείο 3., λέμε ότι η συλλογή $\{f_i\}_{i=1}^n$ είναι στο S τοπικά πεπερασμένη.*

Για το επόμενο αποτέλεσμα ύπαρξης ομαλής διαμέρισης μονάδας αξιοποιείται το Θεώρημα 6.10.3.1.

Θεώρημα 6.10.4.1 (ύπαρξη ομαλής διαμέρισης μονάδας για σύνολο κυριαρχούμενο από ανοικτό κάλυμμα)**.** *Έστω*

1. $S \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*

2. $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *τ.ω.:* $S \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Ισχύει ότι $\exists$ *ομαλή διαμέριση μονάδας,* $\{f_i\}_{i=1}^{n} \subsetneq C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *για κάποιο* $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$*, για το* S *κυριαρχούμενο από το* $\{U_i\}_{i\in I}$*.*

Μάλιστα, αν $S \subset\subset \mathbb{R}^m$*, τότε μπορεί να επιλεγεί πεπερασμένη τέτοια συλλογή, δλδ* $n \in \mathbb{N}$*.*

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι ομαλές διαμερίσεις μονάδας για το $\mathbb{R}^m$ κυριαρχούμενο από ένα ανοικτό κάλυμμα συμμετρικών φραγμένων διαστημάτων ίσου όγκου, και συγκεκριμένα από την συλλογή

$$\left\{n+(-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}.$$

Καταρχήν, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 6.10.4.1, άμεσα προκύπτει ότι μπορούμε να επιλέξουμε τον ίδιο δείκτη με την παραπάνω (αριθμήσιμη) συλλογή συνόλων και για την (αριθμήσιμη) συλλογή των συναρτήσεων της ομαλής διαμέρισης μονάδας.

Πρόταση 6.10.4.1. *Ισχύει ότι* $\exists$ *ομαλή διαμέριση μονάδας,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$*, για το* $\mathbb{R}^m$ *κυριαρχούμενο από το* $\left\{n+(-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$*.*

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 6.10.4.1, άμεσο είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 6.10.4.2. *Έστω ομαλή διαμέριση μονάδας,* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$*, για το* $\mathbb{R}^m$ *κυριαρχούμενο από το* $\left\{n+(-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$*. Ισχύει ότι*

$$\operatorname{supp}(f_n) \subset\subset n+(-1,1)^m,\ \forall n\in\mathbb{Z}^m \Leftrightarrow f_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{αν } k=n \\ 0, & \text{αν } k\in\mathbb{Z}^m\smallsetminus\{n\}, \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{Z}^m.$$

Μάλιστα, τροποποιώντας ελάχιστα την απόδειξη του Θεωρήματος 6.10.4.1, μπορούμε να συμμετρικοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την διαδικασία, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 6.10.4.3. *Ισχύει ότι* $\exists$ *ομαλή διαμέριση μονάδας,* $\{f(\lozenge-n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$*, για το* $\mathbb{R}^m$ *κυριαρχούμενο από το* $\left\{n+(-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ *τ.ω.:*

$$\operatorname{supp}(f) \subset\subset (-1,1)^m.$$

Τώρα, βασικά για το §11.4 είναι τα επόμενα δύο αποτελέσματα. Για το πρώτο αξιοποιείται η Πρόταση 6.10.4.2, σε συνδυασμό με την συμπάγεια του φορέα, ενώ για το δεύτερο η Πρόταση 6.10.4.3 και η Πρόταση 6.10.4.2, σε συνδυασμό με τις ιδιότητες του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$, το κριτήριο Weierstrass και το αποτέλεσμα εναλλαγής άπειρης άθροισης και διαφόρισης.

Πρόταση 6.10.4.4. *Έστω*

i. ομαλή διαμέριση μονάδας, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$*, για το* $\mathbb{R}^m$ *κυριαρχούμενο από το* $\left\{n+(-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ *τ.ω.:*

$$\operatorname{supp}(g_n) \subset\subset n+(-1,1)^m,\ \forall n\in\mathbb{Z}^m$$

και

ii. $f\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$*.*

Ισχύει ότι ορίζεται καλά η συνάρτηση

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f(n) g_n(x), \end{aligned}$$

για την οποία ισχύουν ότι

1. $h\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $h(n) = f(n),\ \forall n\in\mathbb{Z}^m$*.*

Πρόταση 6.10.4.5. *Έστω*

i. ομαλή διαμέριση μονάδας, $\{g(\lozenge-n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$*, για το* $\mathbb{R}^m$ *κυριαρχούμενο από το* $\left\{n+(-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ *τ.ω.:*

$$\operatorname{supp}(g) \subset\subset (-1,1)^m$$

και

ii. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύει ότι ορίζεται καλά η συνάρτηση

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} f(n) g(x-n), \end{aligned}$$

για την οποία ισχύουν ότι

1. $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και*

2. $h(n) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}^m$.

6.10.5 Πυκνότητα του C_c^∞

Με την αξιοποίηση του τελεστή συνέλιξης καθώς και των η_ε, μπορούμε επίσης να πάμε ένα βήμα παραπέρα σχετικά με την πυκνότητα υπόχωρων του $\mathcal{L}^p$. Πράγματι, έχουμε διαδοχικά τα εξής.

Αρχικά, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 6.9.3.2, με την αξιοποίηση της ομοιόμορφης συνέχειας μιας C_c συνάρτησης και με την χρήση της Πρότασης 6.10.1.3 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 6.10.5.1. *Έστω* $f \in C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$. *Ισχύει ότι*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Έπειτα, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 6.9.3.1, αξιοποιώντας την Πρόταση 6.10.5.1 σε συνδυασμό με τον εγκλεισμό της Πρότασης 6.9.4.4 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 6.10.5.2. *Έστω*

1. $p \in [1, \infty]$ *και*

2. $f \in C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Μάλιστα, υπό το πρίσμα, διαδοχικά, της Πρότασης 6.9.5.5 και της Πρόατσης 6.9.5.7, σε συνδυασμό με την Πρόταση 6.10.5.2, έπονται αντίστοιχα τα παρακάτω χρήσιμα.

Πρόταση 6.10.5.3. *Έστω*

1. $p \in [1, \infty]$

2. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*

3. $f \in C_c^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * f) - D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \ \textit{τ.ω.:}\ |\alpha| \le k.$$

Πρόταση 6.10.5.4. *Έστω*

1. $p \in [1, \infty]$ *και*

2. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|D^\alpha(\eta_\varepsilon * f) - D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Τώρα, συνδυάζοντας το Θεώρημα 6.7.1 με την Πρόταση 6.10.5.2 έπεται το επόμενο βασικό.

Θεώρημα 6.10.5.1. *Έστω*

1. $p \in [1, \infty)$ *και*

2. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 6.9.5.1, παραφράζοντας το Θεώρημα 6.10.5.1 παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα πυκνότητας.

Πρόταση 6.10.5.5. *Έστω $p \in [1,\infty)$. Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}^{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Η Πρόταση 6.10.5.5 γενικεύεται περαιτέρω θεωρώντας μια αύξουσα, τελικά καλύπτουσα και συμπαγώς περιεχόμενης ακολουθίας υποσυνόλων ενός αυθαίρετου ανοικτού, καθώς επίσης αξιοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι η εξής γενίκευση του Θεωρήματος 6.7.1.

Θεώρημα 6.10.5.2 (πυκνότητα του C_c^∞)**.** *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$p \in [1,\infty)$.*

Ισχύει ότι ο εγκλεισμός

$$C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(U;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}^{\mathcal{L}^p(U;\mathbb{F})} = \mathcal{L}^p(U;\mathbb{F}).$$

6.10.6 Μία χρήσιμη συνέπεια

Συνέπεια του Θεωρήματος 6.10.5.1 είναι το ακόλουθο, για την απόδειξη του οποίου αξιοποιείται το Θεώρημα 6.5.2 και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα 6.10.6.1. *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$ τ.ω.:*

$$\int_U f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0,\ \ \forall g \in C_c^\infty(U;\mathbb{R}).$$

Ισχύει ότι $f = 0$, λ^m-σχεδόν παντού.

Κεφάλαιο 7

Χώρος L^p στον $\mathbb{R}^m$

Εδώ μελετάμε τους διανυσματικούς χώρους $L^p(S;\mathbb{F})$, με $S \in \mathscr{M}^m$ και $p \in [1,\infty]$. Όπως και οι $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, έτσι και οι $L^p(S;\mathbb{F})$ επεκτείνονται και για $p \in (0,1)$, ωστόσο δεν θα μας απασχολήσει αυτή η οπτική στο παρόν κείμενο.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [35], [34], [31], [19], [14], [10] και [9], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

7.1 Διανυσματικός χώρος L^p

Ένας χώρος L^p ορίζεται να είναι ένας διανυσματικός χώρος πηλίκο. Πράγματι, υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.3.1 και της Πρότασης 6.3.2 ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 7.1.1 (διανυσματικός χώρος πηλίκο L^p)**.** *Έστω*

1. *$S \in \mathscr{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty]$.*

Θέτουμε

$$L^p(S;\mathbb{F}) = \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})/\mathcal{N}^p(S;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 7.1.1. 1. *Έστω*

i $S \in \mathscr{M}^m$ και

ii $p \in [1,\infty]$.

Κάθε στοιχείο του $L^p(S;\mathbb{F})$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας που περιέχει στοιχεία του $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$. Για κάθε τέτοια κλάση μπορούμε να βρούμε και έναν αντιπρόσωπο ο οποίος είναι στοιχείο του $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, με τον οποίο κάθε στοιχείο αυτής της κλάσης ταυτίζεται λ^m-σχεδόν παντού. Οι κλάσεις αυτές διαμερίζουν τον $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, με την έννοια ότι είναι ξένες ανά δύο και οι ένωσή τους είναι ο ίδιος ο $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$. Τις κλάσεις αυτές τις συμβολίζουμε με $[f]$, όπου $f \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$ είναι ένας οποιοσδήποτε αντιπρόσωπός της, καθώς κάθε κλάση είναι ανεξάρτητη της επιλογής αντιπροσώπου.

2. *Προφανώς το μηδενικό στοιχείο κάθε L^p είναι η κλάση $[0]$.*

Άμεσα από την Πρόταση 6.3.1 (και την γνωστή ιδιότητα των χώρων πηλίκων) έπεται το εξής.

Πρόταση 7.1.1 (γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος πηλίκο L^p_{loc})**.** *Έστω*

1. *$S \in \mathscr{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty]$.*

Το σύνολο

$$L^p_{loc}(S;\mathbb{F}) = \mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F})/\mathcal{N}^p(S;\mathbb{F}) \supsetneq L^p(S;\mathbb{F})$$

είναι γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του $L^p(S;\mathbb{F})$.

7.2 Τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach L^p

Ο επόμενος ορισμός έχει νόημα λόγω της ανεξαρτησίας της κάθε κλάσης-στοιχείο του L^p από την επιλογή αντιπροσώπου.

Ορισμός 7.2.1 (συνάρτηση $\|\Diamond\|_{L^p(S;\mathbb{F})}$). *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \|\Diamond\|_{L^p(S;\mathbb{F})} \colon L^p(S;\mathbb{F}) &\to [0,\infty) \\ [f] &\mapsto \|[f]\|_{L^p(S;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}. \end{aligned}$$

Λόγω του Θεωρήματος 6.4.1, άμεσα τώρα επαληθεύεται το επόμενο.

Θεώρημα 7.2.1 (διανυσματικός χώρος με νόρμα L^p). *Έστω*

i. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύουν ότι

1. *η συνάρτηση* $\|\Diamond\|_{L^p(S;\mathbb{F})}$ *είναι νόρμα,*
2. *η συνάρτηση* $\|\Diamond - \blacklozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})} \colon (L^p(S;\mathbb{F}))^2 \to [0,\infty)$ *είναι μετρική και*
3. *η τετράδα* $(L^p(S;\mathbb{F}), \mathscr{O}(L^p(S;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Επίσης, το Θεώρημα 6.5.1 παίρνει την εξής μορφή.

Θεώρημα 7.2.2 (διανυσματικός χώρος Banach L^p). *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty]$.

Ο διανυσματικός χώρος $L^p(S;\mathbb{F})$ *εφοδιασμένος με την νόρμα* $\|\Diamond\|_{L^p(S;\mathbb{F})}$ *είναι χώρος Banach.*

7.3 Δυϊκός τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach $(L^p)'$ με $p \in [1, \infty)$

Ακολουθεί εύλογα το ερώτημα του καθορισμού/χαρακτηρισμού του δυϊκού διανυσματικού χώρου του διανυσματικού χώρου Banach του Θεωρήματος 7.2.2 και συγκεκριμένα του

$$(L^p(S;\mathbb{F}))'.$$

Γι αυτό τον σκοπό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

Αρχικά, τόσο από την ανισότητα όσο και από την ισότητα στην Πρόταση 6.2.2, έπεται το επόμενο.

Πρόταση 7.3.1. *Έστω*

1. $S \in \mathscr{M}^m$,
2. $p \in [1, \infty]$ *και*
3. $[f] \in L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned}\ell_{[f]}\colon L^p(S;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ [g] &\mapsto \ell_{[f]}([g]) = \int_S g(x)f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\ell_{[f]} \in (L^p(S;\mathbb{F}))'$$

και μάλιστα

$$\|\ell_{[f]}\|_{(L^p(S;\mathbb{F}))'} = \|[f]\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})}.$$

Απλή παράφραση της Πρότασης 7.3.1 αποτελεί το παρακάτω.

Πρόταση 7.3.2. *Έστω*

1. *$S \in \mathscr{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty]$.*

Ισχύει ότι η συνάρτηση της Πρότασης 7.3.1,

$$\begin{aligned}\ell_{\lozenge}\colon L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F}) &\to (L^p(S;\mathbb{F}))'\\ [f] &\mapsto \ell_{[f]},\end{aligned}$$

είναι ισομετρία.

Σημείωση 7.3.1. *Αφού η $\ell_{\lozenge}$ της Πρότασης 7.3.2 είναι ισομετρία, έπεται ότι είναι και $1{-}1$, δεδομένου ότι είναι και γραμμική συνάρτηση μεταξύ διανυσματικών χώρων με νόρμα.*

Για την απόδειξη του επόμενου ουσιαστικού αποτελέσματος γίνεται χρήση του θεωρήματος Radon-Nikodym και του Θεωρήματος 6.6.1.

Πρόταση 7.3.3. *Έστω*

1. *$S \in \mathscr{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty)$.*

Ισχύει ότι η συνάρτηση $\ell_{\lozenge}$ είναι και επί.

Σημείωση 7.3.2. *Τονίζουμε ότι $p \in [1,\infty)$ στην Πρόταση 7.3.3 και όχι $p \in [1,\infty]$, όπως στην Πρόταση 7.3.2. Μάλιστα, η περίπτωση $p = 1$ στην Πρόταση 7.3.3 ισχύει επειδή το λ^m είναι σ-πεπερασμένο.*

Τέλος, συνδυάζοντας την Πρόταση 7.3.2 και την Πρόταση 7.3.3 έπεται άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.3.1 (αναπαράσταση Riesz)**.** *Έστω*

1. *$S \in \mathscr{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty)$.*

Ισχύει ότι

$$(L^p(S;\mathbb{F}))' \overset{\ell_{\lozenge}}{\cong} L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα οι διανυσματικοί χώροι $(L^p(S;\mathbb{F}))'$ και $L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι μέσω της συνάρτησης $\ell_{\lozenge}$. Συγκεκριμένα,

$$\forall \phi \in (L^p(S;\mathbb{F}))' \ \exists! [f] \in L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } \phi = \ell_{[f]},$$

δλδ

$$\phi([g]) = \int_S g(x)f(x)\mathrm{d}x, \ \forall [g] \in L^p(S;\mathbb{F}),$$

και μάλιστα ισχύει ότι

$$\|\phi\|_{(L^p(S;\mathbb{F}))'} = \|[f]\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})}.$$

Το Θεώρημα 7.3.1 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Έστω $S \in \mathscr{M}^m$ και $p \in [1, \infty)$.
Ταύτιση:
Ταυτίζουμε τον $(L^p(S;\mathbb{F}))'$ με τον $L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$, δλδ

$$(L^p(S;\mathbb{F}))' = L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F}).$$

7.4 Τοπολογικός διανυσματικός χώρος Hilbert L^2

Περιοριζόμαστε τώρα στον L^2, ο οποίος, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3.1, έχει την μοναδική - μεταξύ των L^p - ιδιότητα να ταυτίζεται με τον δυϊκό του.

Άμεσα επαληθεύουμε το παρακάτω.

Πρόταση 7.4.1 (εσωτερικό γινόμενο στον L^2)**.** *Έστω $S \in \mathscr{M}^m$. Ισχύει ότι η συνάρτηση*

$$\begin{aligned}\langle \lozenge, \blacklozenge \rangle_{L^2(S;\mathbb{F})} \colon \left(L^2(S;\mathbb{F})\right)^2 &\to \mathbb{F}\\ ([f],[g]) &\mapsto \langle [f],[g]\rangle_{L^2(S;\mathbb{F})} = \int_S \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{F}} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

είναι εσωτερικό γινόμενο (στον $L^2(S;\mathbb{F})$) με επαγόμενη νόρμα την $\|\lozenge\|_{L^2(S;\mathbb{F})}$.

Η Πρόταση 7.4.1 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 7.2.2 μας δίνει το ακόλουθο.

Θεώρημα 7.4.1 (διανυσματικός χώρος Hilbert L^2)**.** *Έστω $S \in \mathscr{M}^m$. Ο διανυσματικός χώρος $L^2(S;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \lozenge, \blacklozenge \rangle_{L^2(S;\mathbb{F})}$ είναι χώρος Hilbert.*

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 7.4.1, ακολουθεί εύλογα το ερώτημα καθορισμού (τουλάχιστον) μιας ορθοκανονικής βάσης του L^2. Στο §11.4 εξάγουμε το κλασικό αποτέλεσμα (βλ, πχ, [5]) που αφορά φραγμένα διαστήματα στον $\mathbb{R}^m$, δλδ «φραγμένες ορθογώνιες γεωμετρίες», εργαζόμενοι όμως εντός ενός διαφορετικού θεωρητικού πλαισίου, αυτού της θεωρίας κατανομών και του μετασχηματισμού Fourier.

Κεφάλαιο 8

Χώροι συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^m$ (μέρος I)

Εδώ μελετάμε τους διανυσματικούς χώρους των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων ορισμένων σε ανοικτά υποσύνολα $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ από την τοπολογική τους σκοπιά.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [37], [9], [21], [20], [7], [4], [17], [15], [32], [16] και [6], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

8.1 Πλήρεις μετρικοποιήσιμοι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι

Συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτά υποσύνολα έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στα προηγούμενα κεφάλαια. Εδώ όμως εφοδιάζουμε με τοπολογική (γραμμική ξέρουμε ότι έχουν, κάτι που άλλωστε είναι προφανές) δομή πλήρους μετρικού χώρου τα σύνολα που αποτελούνται από αυτές.

8.1.1 Χώρος με νόρμα C_b^k και κλειστοί υπόχωροί του

Χώρος με νόρμα C_b^k

Καταρχήν, αξιοποιώντας τον συμβολισμό του §6 παρατηρούμε ότι

$$C_b^k(U;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in \mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k \right\},\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Τώρα σταθεροποιούμε τυχαίο $k \in \mathbb{N}_0$ και διευκρινίζουμε την κατάσταση με τον παραπάνω διανυσματικό χώρο.

- Παρατηρούμε ότι στον $C_b^k(U;\mathbb{F})$ η $\|\Diamond\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}\big|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}$ είναι νόρμα.

- Αν $k \in \mathbb{N}$, τότε ο $C_b^k(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\Diamond\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}\big|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}$ δεν είναι χώρος Banach. Πράγματι, για $U = (-1,1)$ και $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty((-1,1);\mathbb{R})$ με

  $$f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall x \in (-1,1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Παρατηρούμε όμως ότι

  $$\lim_{n\to\infty} \left\| f_n - |\mathrm{id}_1|_{(-1,1)} \right\|_{\mathcal{L}^\infty((-1,1);\mathbb{F})} \le \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

  ενώ $|\mathrm{id}_1|_{(-1,1)} \notin C_b^1((-1,1);\mathbb{R}) \supseteq C_b^k((-1,1);\mathbb{R})$.

Άρα αν θέλουμε να βρούμε νόρμα στον $C_b^k(U;\mathbb{F})$ που θα του δίνει την τοπολογική δομή διανυσματικού χώρου Banach, τότε σίγουρα χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη από την $\|\Diamond\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}\big|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}$ η οποία να «ελέγχει» και τις διαφορίσεις.

Το επόμενο είναι κλασικό, όπου, εκτός προφανώς από την Πρόταση 5.3.3.1, για $k = 0$ αξιοποιείται η πληρότητα του $\mathbb{F}$ και για $k \neq 0$ χρησιμοποιείται επαγωγικά η πρώτη περίπτωση σε συνδυασμό με το θεώρημα Taylor.

Θεώρημα 8.1.1.1 (τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach C_b^k)**.** *Έστω*

i. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*

ii. $k \in \mathbb{N}_0$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \|\Diamond\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} \colon C_b^k(U;\mathbb{F}) &\to [0,\infty) \\ f &\mapsto \|f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = \max\Big\{\|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})} \Big| \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \leq k\Big\}. \end{aligned}$$

Ισχύουν ότι

1. *η* $\|\Diamond\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}$ *είναι νόρμα και*

2. *ο* $C_b^k(U;\mathbb{F})$ *εφοδιασμένος με την* $\|\Diamond\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}$ *είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach.*

Σημείωση 8.1.1.1. *Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 8.1.1.1, ισχύει προφανώς ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|D^\alpha(f_n - f)\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})} = 0, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \leq k.$$

Γι αυτό τον λόγο θα μπορούσαμε ισοδύναμα να είχαμε θέσει, για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \|\Diamond\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} \colon C_b^k(U;\mathbb{F}) &\to [0,\infty) \\ f &\mapsto \|f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m, \\ \text{τ.ω.: } |\alpha| \leq k}} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})} \end{aligned}$$

για την νόρμα στον $C_b^k(U;\mathbb{F})$*, καθώς τελικά οι δύο αυτές νόρμες είναι ισοδύναμες.*

Το επόμενο είναι άμεσο από τον ορισμό της νόρμας στο Θεώρημα 8.1.1.1.

Πρόταση 8.1.1.1. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*

2. $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ τ.ω.: $k_1 < k_2$.

Ισχύει ότι

$$C_b^{k_2}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_b^{k_1}(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C_b^{k_2}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C_b^{k_1}(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Για το επόμενο γίνεται χρήση των σχέσεων $D^\alpha \circ D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ & $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$, $\forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$.

Πρόταση 8.1.1.2. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,

2. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*

3. $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ τ.ω.: $|\alpha| \leq k$.

Ισχύει ότι $D^\alpha \in CL\Big(C_b^k(U;\mathbb{F}); C_b^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})\Big)$.

Χώρος με νόρμα $C^k_{b,u}$

Για το επόμενο αξιοποιείται η Πρόταση 5.3.2.1 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 8.1.1.1, καθώς και η κλειστότητα του συνόλου των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 8.1.1.3. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$\overline{C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})}^{C^k_b(U;\mathbb{F})} = C^k_{b,u}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k_b(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος τοπολογικός διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_b(U;\mathbb{F})$.

Άμεσα από το Θεώρημα 5.19.2.3, το Θεώρημα 8.1.1.1 και την Πρόταση 8.1.1.3 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 8.1.1.2 (τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach $C^k_{b,u}$)**.** *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι ο $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\Diamond\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})}$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach.

Χώρος με νόρμα C^k_0

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 8.1.1.3, το επόμενο είναι άμεσο με χρήση της Πρόταση 5.3.2.1.

Πρόταση 8.1.1.4. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$\overline{C^k_0(U;\mathbb{F})}^{C^k_b(U;\mathbb{F})} = C^k_0(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^k_0(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος τοπολογικός διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

Άμεσα από το Θεώρημα 5.19.2.3, το Θεώρημα 8.1.1.2 και την Πρόταση 8.1.1.4 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 8.1.1.3 (τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach C^k_0)**.** *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι ο $C^k_0(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\Diamond\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^k_0(U;\mathbb{F})}$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 8.1.1.3, και συγκεκριμένα της επαγόμενης μετρικής τοπολογίας με την οποία εφοδιάσαμε τον $C^k_0(U;\mathbb{F})$, ακολουθεί ένα αποτέλεσμα που θα φανεί χρήσιμο στην §11.5. Για την απόδειξή του επαναλαμβάνεται η τεχνική της αντίστοιχης του Θεωρήματος 6.10.5.2.

Θεώρημα 8.1.1.4. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_0(U;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C^\infty_c(U;\mathbb{F})}^{C_b(U;\mathbb{F})} = C_0(U;\mathbb{F}).$$

Χώρος με νόρμα $C^k_{\overline{U_0}}$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 8.1.1.4, απευθείας από Πρόταση 5.3.2.1, καθώς επίσης και από την κλειστότητα του συμπαγώς περιεχόμενου υπερσυνόλου του φορέα των συναρτήσεων του υπό μελέτη διανυσματικού χώρου, έπεται το επόμενο.

Πρόταση 8.1.1.5. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_0 \subset\subset U$ *και*
3. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$\overline{C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})}^{C^k_b(U;\mathbb{F})} = C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k_0(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$ *είναι κλειστός γνήσιος τοπολογικός διανυσματικός υπόχωρος του* $C^k_0(U;\mathbb{F})$.

Άμεσα από το Θεώρημα 5.19.2.3, το Θεώρημα 8.1.1.3 και την Πρόταση 8.1.1.5 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 8.1.1.5 (τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach $C^k_{\overline{U_0}}$). *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_0 \subset\subset U$ *και*
3. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι ο $C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$ *εφοδιασμένος με την νόρμα* $\|\lozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})}$ *είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος Banach.*

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 8.1.1.5, και συγκεκριμένα της επαγόμενης μετρικής τοπολογίας με την οποία εφοδιάσαμε τον $C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$, ακολουθούν δύο αποτελέσματα. Το πρώτο έπεται με χρήση της Πρότασης 3.3.3.3 και της Πρότασης 3.3.3.4 σε συνδυασμό με την Πρόταση 8.1.1.5, ενώ για το δεύτερο, το οποίο θα φανεί χρήσιμο στην §10.1.1, χρησιμοποιείται για το πρώτο σημείο η συμπάγεια των φορέων και για το δεύτερο ότι το άθροισμα δύο συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ είναι επίσης συμπαγές σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.9.5.1.

Πρόταση 8.1.1.6. *Έστω*

i. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
ii. $U_1 \subseteq U_2 \subset\subset U$ *και*
iii. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$C^k_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

1. $\overline{C^k_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})}^{C^k_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})} = C^k_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})$, *δλδ το* $C^k_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})$ *είναι κλειστός υπόχωρος του* $C^k_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})$,
2. $C^k_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^k_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})$, *δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής και, ισχυρότερα,*
3. *η* $\mathscr{O}\Big(C^k_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})\Big)$ *είναι η σχετική τοπολογία του* $C^k_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})$ *ως προς την* $\mathscr{O}\Big(C^k_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})\Big)$.

Πρόταση 8.1.1.7. *Έστω*

α΄. $k \in \mathbb{N}_0$,

β΄. *μη τετριμμένη* $f_1 \in C^k_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* *γ'. μη τετριμμένη $f_2 \in C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.*

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \mathcal{C}_x f_1(hn)h^m f_2(hn) < \infty, \ \forall x \in \mathbb{R}^m, \ \forall h \in \mathbb{R}.$$

2. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} g_h\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto g_h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \mathcal{C}_x f_1(hn)h^m f_2(hn), \end{aligned} \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

   Ισχύουν ότι

   i. $\{g_h\}_{h\in\mathbb{R}} \subsetneq C^k_{\mathrm{supp}\,(f_1)+\mathrm{supp}\,(f_2)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

   ii. $\lim_{h\to 0} \|g_h - f_1 * f_2\|_{C^k_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0$.

Σημείωση 8.1.1.2. *$\forall x \in \mathbb{R}^m$, τα αθροίσματα $\{g_h(x)\}_{h\in\mathbb{R}} \subsetneq \mathbb{R}$ στην Πρόταση 8.1.1.7 αποτελούν αθροίσματα Riemann του ολοκληρώματος Riemann (στην προκειμένη) $(f_1 * f_2)(x)$.*

8.1.2 Χώρος με οικογένεια νορμών C_b^∞ και κλειστοί υπόχωροί του

Χώρος με οικογένεια νορμών C_b^∞

Και αν για την περίπτωση του $C_b^k(U;\mathbb{F})$ με $k \in \mathbb{N}_0$ τα πράγματα ήταν στρωτά, εδώ θα δούμε ότι απαιτείται μεγαλύτερη προσπάθεια για να αποκτήσει τοπολογική δομή πλήρους μετρικού χώρου ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$, η οποία προφανώς θα είναι «λογική συνέχεια» της αντίστοιχης δομής του κάθε $C_b^k(U;\mathbb{F})$.

Πριν δούμε όμως τι ακριβώς θέλουμε να σημαίνει η έννοια «λογική συνέχεια», πρώτα διευκρινίζουμε την κατάσταση με τον υπό μελέτη $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$. Έστω λοιπόν $k \in \mathbb{N}_0$.

- Παρατηρούμε στον $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ η $\|\lozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\Big|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}$ είναι νόρμα.
- Ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\lozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\Big|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}$ δεν είναι χώρος Banach. Πράγματι, το αντίστοιχο αντιπαράδειγμα της §8.1.1 μας δίνει το ζητούμενο για $k = 0$, ενώ για το τυχαία επιλεγμένο $k \in \mathbb{N}$ είτε χρησιμοποιούμε την Πρόταση 8.1.1.1 είτε θεωρούμε το παραπάνω αντιπαράδειγμα με την διαφορά ότι τώρα επιλέγουμε μια $(k-1)$-αντιδιαφόριση της συνάρτησης που πήραμε εκεί.

Μιας και ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την μετρική $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\Big|_{(C_b^\infty(U;\mathbb{F}))^2}$ δεν είναι πλήρης, πρέπει να σκεφτούμε κάτι λιγότερο προφανές. Πρέπει πρώτα να διερωτηθούμε τι ακριβώς θέλουμε; Καθώς η σύγκλιση μιας ακολουθίας $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F})$ σε μια συνάρτηση $f \in C_b^k(U;\mathbb{F})$ σημαίνει σύγκλιση - υπό την έννοια του $\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})$ - κάθε $\{D^\alpha f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})$ στην $D^\alpha f \in C_b^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})$ με $|\alpha| \le k$, είναι λογικό να θέλουμε μια έννοια σύγκλισης μιας $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ σε μια $f \in C_b^\infty(U;\mathbb{F})$, σύμφωνα με την οποία κάθε $\{D^\alpha f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ συγκλίνει - υπό την έννοια του $\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})$ - στην $D^\alpha f \in C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ με $|\alpha| < \infty$. Χρειαζόμαστε δλδ

1. μια μετρική που να ανασυνθέτει όλες αυτές τις αριθμήσιμα άπειρες επιμέρους συγκλίσεις σε μία και
2. ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με αυτή την μετρική να είναι πλήρης.

Ως προς αυτό, πρώτα παραθέτουμε το επόμενο αποτέλεσμα, για το οποίο αξιοποιείται το Θεώρημα 3.3.1.1 και η Πρόταση 5.9.2.1.

Πρόταση 8.1.2.1 (μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος C_b^∞). *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,*
2. *$(C_b^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}(C_b^\infty(U;\mathbb{F})))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}(C_b^\infty(U;\mathbb{F}))$ να είναι η αρχική τοπολογία του $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ που επάγεται από την*

$$\left\{\mathrm{id}_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}\colon C_b^\infty(U;\mathbb{F}) \to \left(C_b^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}_{\|\lozenge-\blacklozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}}(C_b^\infty(U;\mathbb{F}))\right)\right\}_{k=0}^\infty.$$

Ισχύει ότι ο $(C_b^\infty(U;\mathbb{F}),\mathscr{O}(C_b^\infty(U;\mathbb{F})))$ είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Στην συνέχεια, υπό το πρίσμα της Πρότασης 8.1.2.1, άμεσα από την Πρόταση 3.3.1.1 (βλ, επίσης, την Σημείωση 3.3.1.1) παίρνουμε το πρώτο ζητούμενο.

Θεώρημα 8.1.2.1. *Έστω $U\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι η συνάρτηση*

$$\|\Diamond-\blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}\colon (C_b^\infty(U;\mathbb{F}))^2\to[0,\infty)$$
$$(f,g)\mapsto\|f-g\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}=\sum_{k=0}^\infty\frac{2^{-k}\|f-g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}}{1+\|f-g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}}$$

   είναι μετρική, συμβατή με την τοπολογία του μετρικοποιήσιμου (βλ την Πρόταση 8.1.2.1) $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$.

2. *Έστω, επιλέον, $\{f_n\}_{n=1}^\infty\cup\{f\}\subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}=0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

Σημείωση 8.1.2.1. *Η διπλή συνεπαγωγή του Θεωρήματος 8.1.2.1 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}=0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\|D^\alpha(f_n-f)\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}=0,\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m.$$

Για το δεύτερο ζητούμενο χρειαζόμαστε πρώτα το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο έπεται με τα ίδια άμεσα επιχειρήματα όπως και το Θεώρημα 8.1.2.1.

Πρόταση 8.1.2.2. *Έστω $U\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})\ \textit{Cauchy}\Leftrightarrow\{f_n\}_{n=1}^\infty\subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F})\ \textit{Cauchy},\ \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

Σημείωση 8.1.2.2. *Η διπλή συνεπαγωγή της Πρότασης 8.1.2.2 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})\ \textit{Cauchy}\Leftrightarrow\{f_n\}_{n=1}^\infty\subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F})\ \textit{Cauchy},\ \forall k\in\mathbb{N}_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\{D^\alpha f_n\}_{n=1}^\infty\subsetneq\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})\ \textit{Cauchy},\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m,$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\|f_m-f_n\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}=0\Leftrightarrow\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\|f_m-f_n\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}=0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\|D^\alpha(f_m-f_n)\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}=0,\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m.$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 8.1.2.2, έπεται άμεσα από το Θεώρημα 8.1.1.1 το δεύτερο ζητούμενο.

Θεώρημα 8.1.2.2 (πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος C_b^∞)**.** *Έστω $U\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την μετρική $\|\Diamond-\blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}$ είναι πλήρης.*

Οπότε τώρα μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε όλα τα αντίστοιχα αποτελέσματα της §8.1.1.

Πρόταση 8.1.2.3. *Έστω*

1. *$U\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$k\in\mathbb{N}_0$.*

Ισχύει ότι

$$C_b^\infty(U;\mathbb{F})\subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C_b^\infty(U;\mathbb{F})\hookrightarrow C_b^k(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Πρόταση 8.1.2.4. *Έστω*

1. *$U\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m$.*

Ισχύει ότι $D^\alpha\in CL(C_b^\infty(U;\mathbb{F});C_b^\infty(U;\mathbb{F}))$.

Χώρος με οικογένεια νορμών $C^\infty_{b,u}$

Πρόταση 8.1.2.5. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$\overline{C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F})}^{C^\infty_b(U;\mathbb{F})} = C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty_b(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος τοπολογικός διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty_b(U;\mathbb{F})$.

Θεώρημα 8.1.2.3 (πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^\infty_{b,u}$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο $C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την μετρική $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{\left(C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F})\right)^2}$ είναι πλήρης.*

Χώρος με οικογένεια νορμών C^∞_0

Πρόταση 8.1.2.6. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$\overline{C^\infty_0(U;\mathbb{F})}^{C^\infty_b(U;\mathbb{F})} = C^\infty_0(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^\infty_0(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος τοπολογικός διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

Θεώρημα 8.1.2.4 (πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος C^∞_0)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο $C^\infty_0(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την μετρική $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{\left(C^\infty_0(U;\mathbb{F})\right)^2}$ είναι πλήρης.*

Χώρος με οικογένεια νορμών $C^\infty_{\overline{U_0}}$

Πρόταση 8.1.2.7. *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ τ.ω.: $U_0 \subset\subset U$.*

Ισχύει ότι

$$\overline{C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})}^{C^\infty_b(U;\mathbb{F})} = C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty_0(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος τοπολογικός διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty_0(U;\mathbb{F})$.

Θεώρημα 8.1.2.5 (πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος $C^\infty_{\overline{U_0}}$)**.** *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ τ.ω.: $U_0 \subset\subset U$.*

Ισχύει ότι ο $C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την μετρική $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{\left(C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})\right)^2}$ είναι πλήρης.

Πρόταση 8.1.2.8. *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$U_1 \subseteq U_2 \subset\subset U$.*

Ισχύει ότι

$$C^\infty_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

1. *$\overline{C^\infty_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})}^{C^\infty_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})} = C^\infty_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})$, δλδ το $C^\infty_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $C^\infty_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})$,*
2. *$C^\infty_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^\infty_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})$, δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής και, ισχυρότερα,*
3. *η $\mathscr{O}\Big(C^\infty_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})\Big)$ είναι η σχετική τοπολογία του $C^\infty_{\overline{U_1}}(U;\mathbb{F})$ ως προς την $\mathscr{O}\Big(C^\infty_{\overline{U_2}}(U;\mathbb{F})\Big)$.*

Χώρος με οικογένεια νορμών C_b^∞ (συνέχεια)

Έχοντας δώσει στον $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ την συγκεκριμένη επιθυμητή - στα πλαίσια της προαναφερόμενης έννοιας της «λογικής συνέχειας» - δομή πλήρους μετρικοποιήσιμου τοπολογικού διανυσματικού χώρου, διερωτόμαστε μήπως θα μπορούσαμε να πάμε ένα βήμα παραπέρα και να βρούμε μια νόρμα αυτή την φορά

$$\begin{aligned}\|\lozenge\|: C_b^\infty(U;\mathbb{F}) &\to [0,\infty)\\ f &\mapsto \|f\|\end{aligned}$$

τ.ω.: $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\lozenge\|$ να είναι χώρος Banach ο οποίος όμως θα έχει την ίδια επιθυμητή τοπολογική δομή; Είναι δλδ ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ νορμοποιήσιμος; Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, καθώς αν υπήρχε μια τέτοια νόρμα, τότε η συνάρτηση D^α, $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, δεν θα μπορούσε να ήταν ποτέ συνεχής με την επιθυμητή μας έννοια, κάτι το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την Πρόταση 8.1.2.4. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγουμε $U = \mathbb{R}$ και $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Καθώς $D \in CL(C_b^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}); C_b^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}))$, έπεται ότι

$$\exists K > 0 \text{ τ.ω.: } \|Df\| \le K\|f\|, \ \forall f \in C_b^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

Επιλέγοντας όμως είτε $f = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\lozenge}$, είτε $f = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_0\lozenge}}{K_0}$ με $K_0 > K$, τότε καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς

$$\left\|2K\mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\lozenge}\right\| \le K\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\lozenge}\right\| \ \& \ \left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_0\lozenge}\right\| \le K\left\|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_0\lozenge}}{K_0}\right\|,$$

δλδ ισοδύναμα (το μοιραίο βήμα)

$$2K\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\lozenge}\right\| \le K\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2K\lozenge}\right\| \ \& \ \left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_0\lozenge}\right\| \le \frac{K}{K_0}\left\|\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_0\lozenge}\right\|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συμπερασματικά, η κατασκευή του πλήρους μετρικού διανυσματικού χώρου του Θεωρήματος 8.1.2.2 είναι το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα που μπορούμε να πετύχουμε σε αυτά τα πλαίσια.

Η συλλογιστική πίσω από τα αποτελέσματα της παρούσας υποενότητας θα αποτελέσει την βάση για την αντίστοιχη των επόμενων.

8.1.3 Χώρος με οικογένεια ψευδονορμών C^k

Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$, $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ τ.ω.: $U_i \nearrow U$, $k \in \mathbb{N}_0$ και $i \in \mathbb{N}$.

- Παρατηρούμε ότι στον $C^k(U;\mathbb{F})$ η $\left\|\lozenge|_{U_i}\right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}$ είναι ψευδονόρμα.
- Το ερώτημα αν ο $C^k(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την ψευδομετρική $\left\|(\lozenge - \blacklozenge)|_{U_i}\right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}$ είναι πλήρης μας είναι αδιάφορο καθώς σκοπεύουμε να μετατρέψουμε τον $C^k(U;\mathbb{F})$ σε έναν πλήρη μετρικοποιήσιμο τοπολογικό διανυσματικό χώρο.

Όπως έχουμε αναφέρει, θα ακολουθήσουμε την συλλογιστική πίσω από τα αποτελέσματα της §8.1.2. Μάλιστα για τις αποδείξεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων εδώ γίνεται χρήση των ίδιων επιχειρημάτων με πριν.

Πρόταση 8.1.3.1 (μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος C^k)**.** *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$,
3. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*
4. $\left(C^k(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}\left(C^k(U;\mathbb{F})\right)\right)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}\left(C^k(U;\mathbb{F})\right)$ *να είναι η αρχική τοπολογία του* $C^k(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\lozenge|_{U_i} : C^k(U;\mathbb{F}) \to \left(C_b^k(U_i;\mathbb{F}), \mathscr{O}_{\|\lozenge-\blacklozenge\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}}\left(C_b^k(U_i;\mathbb{F})\right)\right)\right\}_{i=1}^\infty.$$

Ισχύει ότι ο $\left(C^k(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}\left(C^k(U;\mathbb{F})\right)\right)$ είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Παρατηρούμε ότι η μετρική της Πρότασης 8.1.3.1 εξαρτάται από την γνησίως αύξουσα, συμπαγώς περιεχόμενη και καλύπτουσα ακολουθία $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ωστόσο η εξάρτηση αυτή δεν είναι ουσιώδης, καθώς η τοπολογική δομή του $C^k(U;\mathbb{F})$ που παράγει είναι ανεξάρτητη της ίδιας της ακολουθίας, όπως φαίνεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.1.3.1. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$ *και*
3. $k \in \mathbb{N}_0$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι η συνάρτηση*

$$\|\Diamond - \blacklozenge\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} : \left(C^k(U;\mathbb{F})\right)^2 \to [0,\infty)$$
$$(f,g) \mapsto \|f-g\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i}\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}}{1+\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}}$$

   είναι μετρική, συμβατή με την τοπολογία του μετρικοποιήσιμου (βλ την Πρόταση 8.1.3.1) $C^k(U;\mathbb{F})$ και

2. *Έστω, επιπλέον, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f\} \subsetneq C^k(U;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

Σημείωση 8.1.3.1. *Δυο λόγια σχετικά με το Θεώρημα 8.1.3.1.*

1. *Η διπλή συνεπαγωγή προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|D^{\alpha}(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k,$$
$$\forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

2. *Άμεση συνέπεια του αποτελέσματος σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.6.1.1 είναι η ανεξαρτησία της τοπολογικής δομής του $C^k(U;\mathbb{F})$ από την επιλογή της $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, καθώς αν θεωρήσουμε δύο τέτοιες ακολουθίες, $\{U_{1,i}\}_{i=1}^{\infty}$ & $\{U_{2,i}\}_{i=1}^{\infty}$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{1,i};\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{2,i};\mathbb{F}\right)} = 0.$$

   Συνεπώς ισχύει ότι

$$\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U \ \&\ \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0,\ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U.$$

Πρόταση 8.1.3.2. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^k(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy}, \ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

Σημείωση 8.1.3.2. *Η διπλή συνεπαγωγή της Πρότασης 8.1.3.2 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^k(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy}, \ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{D^\alpha f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy}, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k, \ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U,$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U \ \& \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0, \ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left\|(f_m - f_n)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0, \ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left\|D^\alpha (f_m - f_n)|_{U_0}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F})} = 0, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k, \ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

Θεώρημα 8.1.3.2 (πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος C^k)**.** *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$
2. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \Rsh U$ *και*
3. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι ο $C^k(U;\mathbb{F})$ *εφοδιασμένος με την μετρική* $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)}$ *είναι πλήρης.*

Σημείωση 8.1.3.3. *Όλη η ανάλυση που προηγήθηκε παραμένει ανεπηρέαστη αν στην Πρόταση 8.1.3.1 ορίζαμε την μετρική όχι μέσω ακολουθίας* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \Rsh U$, *αλλά μέσω ακολουθίας* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \subset\subset U$, $\forall i \in \mathbb{N}$, & $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, *χωρίς δλδ να ζητούσαμε συγκεκριμένη μονοτονία της ακολουθίας, καθώς τελικά οι δύο αυτές μετρικές είναι ισοδύναμες.*

Πρόταση 8.1.3.3. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ *τ.ω.:* $k_1 < k_2$.

Ισχύει ότι

$$C^{k_2}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^{k_1}(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C^{k_2}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^{k_1}(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Πρόταση 8.1.3.4. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*
3. $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \le k$.

Ισχύει ότι $D^\alpha \in CL\big(C^k(U;\mathbb{F}); C^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})\big)$.

8.1.4 Χώρος με οικογένεια ψευδονορμών C^∞

Είναι πλέον αναμενόμενο πως θα χειριστούμε την περίπτωση του $C^\infty(U;\mathbb{F})$, καθώς μια αριθμήσιμη οικογένεια ψευδονορμών στον διανυσματικό χώρο αυτόν είναι η

$$\left\{\left\|\Diamond|_{U_i}\right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}\,\middle|\, k\in\mathbb{N}_0 \;\&\; \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U\right\}.$$

Πρόταση 8.1.4.1 (μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος C^∞)**.** *Έστω*

1. *$U\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,*
2. *$\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U)$ τ.ω.: $U_i\nearrow U$ και*
3. *$(C^\infty(U;\mathbb{F}),\mathscr{O}(C^\infty(U;\mathbb{F})))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}(C^\infty(U;\mathbb{F}))$ να είναι η αρχική τοπολογία του $C^\infty(U;\mathbb{F})$ που επάγεται από την*

$$\left\{\Diamond|_{U_i} : C^\infty(U;\mathbb{F}) \to \left(C_b^\infty(U_i;\mathbb{F}),\mathscr{O}_{\|\Diamond-\blacklozenge\|_{C_b^i(U_i;\mathbb{F})}}(C_b^\infty(U_i;\mathbb{F}))\right)\right\}_{i=1}^\infty.$$

Ισχύει ότι ο $(C^\infty(U;\mathbb{F}),\mathscr{O}(C^\infty(U;\mathbb{F})))$ είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Θεώρημα 8.1.4.1. *Έστω*

i. *$U\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*

ii. *$\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U)$ τ.ω.: $U_i\nearrow U$.*

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι η συνάρτηση*

$$\|\Diamond-\blacklozenge\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} : (C^\infty(U;\mathbb{F}))^2 \to [0,\infty)$$
$$(f,g)\mapsto \|f-g\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = \sum_{i=1}^\infty \frac{2^{-i}\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^i(U_i;\mathbb{F})}}{1+\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^i(U_i;\mathbb{F})}}$$

είναι μετρική, συμβατή με την τοπολογία του μετρικοποιήσιμου (βλ την Πρόταση 8.1.4.1) $C^\infty(U;\mathbb{F})$.

2. *Έστω, επιπλέον, $\{f_n\}_{n=1}^\infty\cup\{f\}\subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0,\ \forall U_0\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0\subset\subset U.$$

Σημείωση 8.1.4.1.

1. *Η διπλή συνεπαγωγή του Θεωρήματος 8.1.4.1 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0,\ \forall U_0\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0\subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\|D^\alpha(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m,\ \forall U_0\in\mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0\subset\subset U.$$

2. *Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.1.4.1 είναι η ανεξαρτησία της τοπολογικής δομής του $C^\infty(U;\mathbb{F})$ από την επιλογή της $\{U_i\}_{i=1}^\infty$, καθώς αν θεωρήσουμε δύο τέτοιες ακολουθίες, $\{U_{1,i}\}_{i=1}^\infty$ & $\{U_{2,i}\}_{i=1}^\infty$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{1,i};\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| (f_n - f)|_{U_0} \right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{2,i};\mathbb{F}\right)} = 0.$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U \ \&\ \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0,\ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U.$$

Πρόταση 8.1.4.2. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ f_n|_{U_0} \right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

Σημείωση 8.1.4.2. *Η διπλή συνεπαγωγή της Πρότασης 8.1.4.2 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ f_n|_{U_0} \right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ D^\alpha f_n|_{U_0} \right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U,$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U \ \&\ \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0,\ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left\| (f_m - f_n)|_{U_0} \right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left\| D^\alpha (f_m - f_n)|_{U_0} \right\|_{\mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

Θεώρημα 8.1.4.2 (πλήρης μετρικοποιήσιμος διανυσματικός χώρος C^∞)**.** *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ τ.ω.: $U_i \Rsh U$.*

Ισχύει ότι ο $C^\infty(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την μετρική $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)}$ είναι πλήρης.

Σημείωση 8.1.4.3. *Σε αντίθεση με την περίπτωση του C^k, όλη η ανάλυση που προηγήθηκε εδώ εξαρτάται ουσιωδώς από το γεγονός ότι η ακολουθία $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ στην Πρόταση 8.1.4.1 είναι αύξουσα.*

Πρόταση 8.1.4.3. *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$k \in \mathbb{N}_0$.*

Ισχύει ότι

$$C^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C^\infty(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^k(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Πρόταση 8.1.4.4. *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$.*

Ισχύει ότι $D^\alpha \in CL(C^\infty(U;\mathbb{F}); C^\infty(U;\mathbb{F}))$.

8.1.5 Χώρος με οικογένεια νορμών $\mathcal{S}$

Καταρχήν, αξιοποιώντας τον συμβολισμό του §6 παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &= \left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\,\middle|\,\left((\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta f\right)\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\,\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m\right\}=\\ &=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\,\middle|\,D^\alpha\Big((\mathrm{id}_m)^\beta f\Big)\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\,\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m\right\}=\\ &=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\,\middle|\,\left(|\mathrm{id}_m|^n D^\alpha f\right)\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n\in\mathbb{N}_0\right\}=\\ &=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\,\middle|\,\left((1+|\mathrm{id}_m|^n)\,D^\alpha f\right)\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n\in\mathbb{N}_0\right\}=\\ &=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\,\middle|\,\left((1+|\mathrm{id}_m|)^n D^\alpha f\right)\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n\in\mathbb{N}_0\right\}=\\ &=\left\{f\in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\,\middle|\,\left(\Big(1+|\mathrm{id}_m|^2\Big)^n D^\alpha f\right)\in\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n\in\mathbb{N}_0\right\}.\end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι κάθε ένας από του παραπάνω ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του διανυσματικού χώρου αυτού εισάγουν και μια αριθμήσιμη οικογένεια νορμών σε αυτόν, πχ, η

$$\left\{\varrho_{\alpha,\beta}=\left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta\lozenge\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\right\}_{\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m}.$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $f\in S(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ με $\varrho_{\alpha,\beta}(f)=0$ για κάποια $\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m$, τότε λόγω συνέχειας έχουμε ότι $D^\beta f=0$, άρα η f είναι πολυώνυμο, οπότε $f=0$ αφού $f\in C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Οπότε, επιλέγουμε οποιαδήποτε από αυτές τις οικογένειες, πχ, την παραπάνω, και ακολουθώντας την συλλογιστική των προηγούμενων υποενοτήτων έχουμε τα παρακάτω.

Πρόταση 8.1.5.1 (μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$). *Έστω $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\mathscr{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})))$ τ.ω.: η $\mathscr{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ να είναι η αρχική τοπολογία του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ που επάγεται από την*

$$\left\{\mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\colon\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\to\Big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\mathscr{O}_{\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta(\lozenge-\blacklozenge)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))\Big)\right\}_{\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m}.$$

Ισχύει ότι ο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\mathscr{O}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})))$ είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Θεώρημα 8.1.5.1. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι η συνάρτηση*

$$\|\lozenge-\blacklozenge\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\colon(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))^2\to[0,\infty)$$
$$(f,g)\mapsto\|f-g\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}=\sum_{\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m}\frac{2^{-|\alpha|-|\beta|}\left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta(f-g)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}{1+\left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta(f-g)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}$$

είναι μετρική, συμβατή με την τοπολογία του μετρικοποιήσιμου (βλ την Πρόταση 8.1.5.1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

2. *Έστω, επιπλέον, $\{f_n\}_{n=1}^\infty\cup\{f\}\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta(f_n-f)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}=0,\ \forall\,\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m.$$

Πρόταση 8.1.5.2. *Ισχύει ότι*

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\ \textit{Cauchy}\Leftrightarrow\left\{(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta f_n\right\}_{n=1}^\infty\subsetneq\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\ \textit{Cauchy},\ \forall\,\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m.$$

Θεώρημα 8.1.5.2 (πλήρης μετρικοποιήσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$). *Ισχύει ότι ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με την μετρική $\|\lozenge-\blacklozenge\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ είναι πλήρης.*

Πρόταση 8.1.5.3. *Έστω $\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m$. Ισχύει ότι $D^\alpha\in CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$.*

Κλείνοντας, παραθέτουμε ένα συμπληρωματικό της Πρότασης 6.10.4.5 αποτέλεσμα, επίσης βασικό για το §11.4, για την απόδειξη του οποίου μπορεί να αξιοποιηθεί και το Θεώρημα 8.1.5.2.

Πρόταση 8.1.5.4. *Έστω*

1. *ομαλή διαμέριση μονάδας,* $\{f(\lozenge - n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$*, για το* $\mathbb{R}^m$ *κυριαρχούμενο από το* $\{n + (-1,1)^m\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ *τ.ω.:*
$$\operatorname{supp}(f) \subset\subset (-1,1)^m,$$
2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
3. $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{h\} \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*
$$h_k(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m\cap[-k,k]^m} f(n) f_n(x),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \&\ h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f(n) f_n(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Ισχύει ότι
$$\lim_{k\to\infty} \|h_k - h\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Σημείωση 8.1.5.1. *Αν η Πρόταση 8.1.5.4 δειχθεί μέσω του Θεωρήματος 8.1.5.2, τότε δεν υπάρχει η ανάγκη της Πρότασης 6.10.4.5 για να μας εξασφαλίσει την ισχύ του ότι* $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$*, κάτι το οποίο σε αυτή την περίπτωση προκύπτει σαν άμεσο πόρισμα.*

8.2 Βασικοί εγκλεισμοί (μέρος I)

Εδώ μελετάμε θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των χώρων συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων. Συγκεκριμένα μελετάμε τους εγκλεισμούς $C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$ και $C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

8.2.1 $C_c^\infty \subsetneq C^\infty$ (μέρος I)

Ξεκινάμε με ένα άμεσο αποτέλεσμα

Πρόταση 8.2.1.1. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_0 \subset\subset U$ *και*
3. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \cup \{f\} \subsetneq C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = 0.$$

Ισχύει ότι
$$\lim_{n\to\infty} \left\| (f_n - f)|_{U_1} \right\|_{C_b^k(U_1;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_1 \subset\subset U.$$

Σημείωση 8.2.1.1. *Παραφράζοντας την Πρόταση 8.2.1.1 έχουμε ότι*
$$C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow_s C^\infty(U;\mathbb{F}),$$
δλδ ο εγκλεισμός
$$C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$$
είναι ακολουθιακά συνεχής.

Μιας και στην Πρόταση 8.2.1.1 η συνάρτηση εγκλεισμού $\iota\colon C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F}) \to C^\infty(U;\mathbb{F})$ ορίζεται μεταξύ μετρικών χώρων, έχουμε ότι η ακολουθιακή συνέχεια της είναι ισοδύναμη με την συνέχειά της[1], οπότε έπεται το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.2.1.1 (συνέχεια εγκλεισμού $C_{\overline{U_0}}^\infty \subsetneq C^\infty$)**.** *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_0 \subset\subset U$.

[1] Θυμίζουμε ότι γενικά, η συνέχεια μιας συνάρτησης μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι ισχυρότερη της ακολουθιακής συνέχειας, ενώ υπάρχει ισοδυναμία μόνο στην περίπτωση ακολουθιακών τοπολογικών χώρων.

Ισχύει ότι

$$C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^\infty(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός

$$C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$$

είναι συνεχής.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.10.3.1, άμεσο είναι επίσης και το ακόλουθο.

Πρόταση 8.2.1.2. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $\{U_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_n \nearrow U$,
3. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C^\infty_c(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\forall n \in \mathbb{N}$,
   - *i.* $f_n|_{U_n} = 1$ *και*
   - *ii.* $\operatorname{supp}(f_n) \subset\subset U_{n+1}$

   και
4. $f \in C^\infty(U;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

$$f_n f \in C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \ \& \ \lim_{n\to\infty} \|(f_n - 1) f\|_{C^\infty\left(\bigcup_{n=1}^\infty U_n;\mathbb{F}\right)} = 0.$$

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 8.2.1.2 παίρνουμε το εξής βασικό.

Θεώρημα 8.2.1.2 (πυκνότητα εγκλεισμού $C^\infty_c \subsetneq C^\infty$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C^\infty_c(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty\left(\bigcup_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)}} = C^\infty(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U.$$

8.2.2 $C^\infty_c \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq C^\infty$ (μέρος Ι)

Τα δύο πρώτα αποτελέσματα είναι άμεσα.

Πρόταση 8.2.2.1. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *τ.ω.:* $U \subset\subset \mathbb{R}^m$ *και*
2. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \cup \{f\} \subsetneq C^\infty_{\overline{U}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta (f_n - f)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0,\ \forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Πρόταση 8.2.2.2. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \cup \{f\} \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta (f_n - f)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0,\ \forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|(f_n - f)|_U\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \text{ τ.ω.: } U \subset\subset \mathbb{R}^m.$$

Επιχειρηματολογώντας όπως στην §8.2.1, έπονται από την Πρόταση 8.2.2.1 και την Πρόταση 8.2.2.2 τα αντίστοιχα εξής αποτελέσματα.

Θεώρημα 8.2.2.1 (συνέχεια εγκλεισμού $C_{\overline{U}}^{\infty} \subsetneq \mathcal{S}$). *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ τ.ω.: $U \subset\subset \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$C_{\overline{U}}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός

$$C_{\overline{U}}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι συνεχής.

Θεώρημα 8.2.2.2 (συνέχεια εγκλεισμού $\mathcal{S} \subsetneq C^{\infty}$). *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι συνεχής.

Πάλι υπό την ισχύ του Θεωρήματος 6.10.3.1, παίρνουμε άμεσα το εξής.

Πρόταση 8.2.2.3. *Έστω*

1. $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $f|_{B(0,1)} = 1$ *και*
2. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Θέτουμε $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *ως*

$$\begin{aligned} f_n \colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = f\left(\frac{1}{n}x\right), \end{aligned} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ισχύουν ότι

$$f_n g \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \;\&\; \lim_{n\to\infty} \left\|(\mathrm{id}_m)^{\alpha} D^{\beta}((f_n - 1)\,g)\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0,\ \forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 8.2.2.3 παίρνουμε το εξής βασικό.

Θεώρημα 8.2.2.3 (πυκνότητα εγκλεισμού $C_c^{\infty} \subsetneq S$). *Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 8.2.1.2 με τους ίδιους τους εγκλεισμούς $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ παίρνουμε άμεσα το παρακάτω επίσης βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.2.2.4 (πυκνότητα εγκλεισμού $\mathcal{S} \subsetneq C^{\infty}$). *Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)}} = C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{P}(\mathbb{R}^m) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh \mathbb{R}^m.$$

Μέρος III

Τα ιδιαίτερα

Κεφάλαιο 9

Χώροι συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^m$ (μέρος II)

Εδώ συνεχίζουμε την μελέτη των διανυσματικών χώρων των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων ορισμένων σε ανοικτά υποσύνολα $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ από την τοπολογική τους σκοπιά.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [15], [32], [18], [16] και [6], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

9.1 Γνήσια επαγωγικό όριο C_c^∞

Καθώς ισχύει ότι

$$C_c^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\overline{U_i}}^\infty(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U),\ \text{τ.ω.: } U_i \nearrow U,$$

υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.18.1.1 και Ορισμού 5.18.2.1, από την Πρόταση 8.1.2.8 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 9.1.1 (γνήσια επαγωγικό όριο C_c^∞)**.** *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$, *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$ *και*
3. $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *τ.ω.: η* $\mathscr{O}(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))$ *να είναι η τελική τοπικά κυρτή τοπολογία του* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C_{\overline{U_i}}^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{i=1}^\infty.$$

Ισχύει ότι ο $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *είναι γνήσιο επαγωγικό όριο που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C_{\overline{U_i}}^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{i=1}^\infty.$$

Μάλιστα, λόγω της Πρότασης 5.18.1.1, έπεται άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 9.1.1. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $\{U_{1i}\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$, *τ.ω.:* $U_{1i} \nearrow U$,
3. $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}_1(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο του* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C_{\overline{U_{1i}}}^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{i=1}^\infty,$$

4. $\{U_{2j}\}_{j\in J} \subseteq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:*
    i. $U_{2j} \subset\subset U$, $\forall j \in J$,
    ii. $\{U_{2j}\}_{j\in J}$ *αύξον δίκτυο και*
    iii. $U = \bigcup_{j\in J} U_{2j}$

   και

5. $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}_2(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *το επαγωγικό όριο του* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C^\infty_{\overline{U_{2j}}}(U;\mathbb{F})\subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{j\in J}.$$

Ισχύει ότι

$$\mathscr{O}_1(C_c^\infty(U;\mathbb{F})) = \mathscr{O}_2(C_c^\infty(U;\mathbb{F})).$$

Σημείωση 9.1.1. *Άμεση συνέπεια της Πρότασης 9.1.1 είναι η ανεξαρτησία του γνήσια επαγωγικού ορίου* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *από την επιλογή της αύξουσας και καλύπτουσας ακολουθίας* $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U)$ *μέσω της οποίας ορίζεται.*

Με την αξιοποίηση της Πρότασης 9.1.1, υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.17.1 και του Ορισμού 5.18.1.1, έπεται άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 9.1.2. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$, *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$ *και*
3. $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο του* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C^\infty_{\overline{U_i}}(U;\mathbb{F})\subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{i=1}^\infty.$$

Ισχύει ότι

$$\iota_{C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})\subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})} \in C\Big(C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}); C_c^\infty(U;\mathbb{F})\Big),\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

Μάλιστα, άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.17.2 είναι το εξής βασικό.

Θεώρημα 9.1.2 (κριτήριο συνέχειας γραμμικής συνάρτησης από το C_c^∞ σε τοπικά κυρτό τοπολογικό διανυσματικό χώρο)**.** *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$, *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$,
3. $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο του* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C^\infty_{\overline{U_i}}(U;\mathbb{F})\subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{i=1}^\infty,$$

4. $(Y, \mathscr{O}(Y), +_Y, \cdot_Y)$ *τοπικά κυρτός και*
5. $f \in L(C_c^\infty(U;\mathbb{F}); Y)$.

Ισχύει ότι

$$f \in C(C_c^\infty(U;\mathbb{F}); Y) \Leftrightarrow f|_{C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})} \in C\Big(C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}); Y\Big),\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U.$$

Επίσης, θεμελιώδους σημασίας είναι και το παρακάτω, το οποίο αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.19.2.5.

Θεώρημα 9.1.3 (χαρακτηρισμός ακολουθιών Cauchy και σύγκλισης ακολουθιών του C_c^∞)**.** *Έστω* *i.* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,

ii. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$, *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$,

iii. $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο του* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C^\infty_{\overline{U_i}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{i=1}^{\infty}$$

και

iv. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \exists U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cup \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } \Big(U_0 \subset\subset U, \\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \,\&\, \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ Cauchy ως προς την } \mathscr{O}\Big(C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})\Big)\Big)$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   v. $f \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})$.

   Ισχύει ότι

$$f_n \to f \;\Leftrightarrow\; \exists U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cup \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } \Big(U_0 \subset\subset U, \\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f\} \subsetneq C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \,\&\, f_n \overset{C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})}{\to} f\Big).$$

Τέλος, με χρήση του Θεωρήματος 5.19.2.4 και του Θεωρήματος 8.1.2.5, έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Θεώρημα 9.1.4 (ακολουθιακή πληρότητα του C_c^∞). *Έστω*

i. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,

ii. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$, *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$ *και*

iii. $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}), \mathscr{O}(C_c^\infty(U;\mathbb{F})), +, \cdot)$ *το γνήσια επαγωγικό όριο του* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *που επάγεται από την*

$$\left\{\iota_{C^\infty_{\overline{U_i}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Ισχύει ότι το $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *είναι ακολουθιακά πλήρες.*

Σημείωση 9.1.2. *Κλείνοντας, δυο συμπληρωματικά σχόλια σχετικά με το γνήσια επαγωγικό όριο* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$*, τα οποία ωστόσο δεν θα μας απασχολήσουν στο παρόν κείμενο.*

1. *Το Θεώρημα 9.1.4 ισχύει και γενικότερα για πληρότητα και όχι μόνο για ακολουθιακή πληρότητα (βλ, επίσης, την Σημείωση 5.19.2.2).*

2. *Ισχύει ότι το* $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *δεν είναι ψευδομετρικοποιήσιμος (άρα ούτε μετρικοποιήσιμος) τοπολογικός χώρος (βλ, πχ, [18], [23] και [32]).*

9.2 Βασικοί εγκλεισμοί (μέρος ΙΙ)

Έχοντας πλέον εφοδιάσει τον διανυσματικό χώρο $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ με τοπολογική δομή, εμπλουτίζουμε τα αποτελέσματα της §8.2, και συγκεκριμένα αυτά που αφορούν την συνέχεια των αντίστοιχων υπό μελέτη εγκλεισμών.

9.2.1 $C_c^\infty \subsetneq C^\infty$ (μέρος ΙΙ)

Λόγω του Θεωρήματος 8.2.1.1 (βλ, επίσης, την Σημείωση 8.2.1.1) σε συνδυασμό με το Θεώρημα 9.1.3, έπεται άμεσα το παρακάτω.

Θεώρημα 9.2.1.1 (ακολουθιακή συνέχεια εγκλεισμού $C_c^\infty \subsetneq C^\infty$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow_s C^\infty(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός

$$C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$$

είναι ακολουθιακά συνεχής.

9.2.2 $C_c^\infty \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq C^\infty$ (μέρος ΙΙ)

Λόγω του Θεωρήματος 8.2.2.1 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 9.1.3, έπεται άμεσα το παρακάτω.

Θεώρημα 9.2.2.1 (ακολουθιακή συνέχεια εγκλεισμού $C_c^\infty \subsetneq \mathcal{S}$)**.** *Ισχύει ότι*

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \hookrightarrow_s \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι ακολουθιακά συνεχής.

Κεφάλαιο 10

Χώροι κατανομών στον $\mathbb{R}^m$

Εδώ μελετάμε θεμελιώδεις διανυσματικούς χώρους κατανομών, δλδ διανυσματικούς χώρους των γραμμικών και συνεχών συναρτήσεων από κάποιο χώρο συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{F}$.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [21], [20], [7], [4], [17], [9], [26] και [12], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

10.1 Ασθενείς′ τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι κατανομών

Εδώ εισάγουμε μόνο τους θεμελιώδεις διανυσματικούς χώρους κατανομών και μελετάμε τις βασικές ιδιότητές τους.

10.1.1 Δυϊκός χώρος $(C_c^\infty)'$

Ξεκινάμε με την μελέτη του τοπολογικού διανυσματικού χώρου $(C_c^\infty)'$, ο οποίος αποτελείται από γραμμικές και συνεχείς συναρτήσεις από τον C_c^∞ στον $\mathbb{F}$.

Σύνολο $(C_c^\infty)'$

Δεδομένου $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$, μιας έχουμε ορίσει τοπολογία στον $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$, μπορούμε να μιλάμε για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε αυτόν τον διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 10.1.1.1 (σύνολο $(C_c^\infty)'$). *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Θέτουμε*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' = CL(C_c^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}).$$

Αξιοποιώντας την Πρόταση 5.17.2 σε συνδυασμό με την μετρική τοπολογία που έχουμε εφοδιάσει κάθε έναν από τους $C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})$ με $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ τ.ω.: $U_0 \subset\subset U$, παίρνουμε με απλά επιχειρήματα ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για τα στοιχεία του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, οι πιο βασικοί από τους οποίους δίνονται στο επόμενο.

Πρόταση 10.1.1.1 (ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $(C_c^\infty)'$). *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}
&(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' = \\
&= \left\{ f \in L(C_c^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) \;\middle|\; f|_{C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})} \in C\Big(C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}\Big),\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \right\} = \\
&= \left\{ f \in L(C_c^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) \;\middle|\; f|_{C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})} \in C_s\Big(C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}\Big),\ \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U \right\} = \\
&= C_s(C_c^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) \cap L(C_c^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) = \\
&= \Big\{ f \in L(C_c^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) \,\Big|\, \forall U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_0 \subset\subset U,\ \exists\, (K > 0 \ \&\ k \in \mathbb{N}) \text{ τ.ω.: } \\
&\qquad \text{τ.ω.: } |f(g)| \le K \|g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})},\ \forall g \in C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F}) \Big\}.
\end{aligned}$$

Παρακάτω δίνουμε δύο βασικά παραδείγματα κατανομών (δλδ στοιχείων) του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$. Το πρώτο αποτέλεσμα, λοιπόν, είναι συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Πρόταση 10.1.1.2. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$.

Θέτουμε

$$\ell_f\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$
$$g \mapsto \ell_f(g) = \int_U g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

Ισχύει ότι $\ell_f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Άραγε είναι όλα τα στοιχεία του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ της μορφής της Πρότασης 10.1.1.2; Η απάντηση είναι αρνητική, όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα, για το οποίο αξιοποιείται το Θεώρημα 6.10.6.1.

Πρόταση 10.1.1.3 (κατανομή Dirac του $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω*

i. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*

ii. $x \in U$.

Θέτουμε

$$\delta_x\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$
$$g \mapsto \delta_x(g) = g(x),$$

για την συνάρτηση Dirac στον $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$. *Ισχύουν ότι*

1. $\delta_x \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $\nexists f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $\delta_x = \ell_f$, *όπου* ℓ_f *όπως στην Πρόταση 10.1.1.2.*

Τόσο η Πρόταση 10.1.1.2 όσο και η Πρόταση 10.1.1.3 μας οδηγούν στους επόμενους αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 10.1.1.2 (σύνολο $(C_c^\infty)'_r$)**.** *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. *Θέτουμε*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r = \left\{\ell \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \exists f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } \text{τ.ω.: } \ell(g) = \int_U g(x)f(x)\mathrm{d}x,\ \forall g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})\right\} \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε κανονικές και για τις οποίες χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\ell_f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$ *που καταδεικνύει την εξάρτησή τους από την αντίστοιχη συνάρτηση* $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$.

Ορισμός 10.1.1.3 (σύνολο $(C_c^\infty)'_s$)**.** *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. *Θέτουμε*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_s = (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \setminus (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε ιδιάζουσες.

Άμεσα από το Θεώρημα 6.10.6.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.4. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r \ni \ell_{f_1} = \ell_{f_2} \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r.$$

Ισχύει ότι

$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)'$

Εδώ εφοδιάζουμε το σύνολο $(C_c^\infty)'$ με δομή διανυσματικού χώρου, μέσω του επόμενου άμεσου αποτελέσματος.

Θεώρημα 10.1.1.1 (διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Άμεσα είναι επίσης και τα επόμενα.

Πρόταση 10.1.1.5 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C_c^\infty)_r'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))_r'$, εφοδιασμένο με τους αντίστοιχους περιορισμούς των συνήθων πράξεων της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Πρόταση 10.1.1.6 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C_c^\infty)_s'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))_s'$, εφοδιασμένο με τους αντίστοιχους περιορισμούς των συνήθων πράξεων της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)'$

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.11.2.1, μπορούμε άμεσα να εφοδιάσουμε τον διανυσματικό χώρο $(C_c^\infty)'$ με συμβατή τοπολογία, όπως άλλωστε φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 10.1.1.2 (ασθενής′ τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη ασθενή′ τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Από τον άμεσο συνδυασμό της Πρότασης 5.3.2.1 με την Πρόταση 10.1.1.5, καθώς επίσης με την Πρόταση 10.1.1.6, προκύπτουν αντίστοιχα τα παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.7 (ασθενής′ τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)_r'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))_r'$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη σχετική ασθενή′ τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Πρόταση 10.1.1.8 (ασθενής′ τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)_s'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))_s'$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη σχετική ασθενή′ τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Συνήθεις πράξεις στον $(C_c^\infty)'$

Οι πράξεις στον $(C_c^\infty)'$ ορίζονται με «φυσικότητα» μέσω των αντίστοιχων πράξεων στον C_c^∞. Εδώ εισάγουμε αυτή την πρακτική με κάποιες συνήθεις πράξεις.

Ορισμός 10.1.1.4. *Έστω*

α΄. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και

β΄. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Ορίζουμε τα εξής.

1. *Έστω $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. Θέτουμε $hf \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ ως*

$$\begin{aligned} hf\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto hf(g) = f(hg). \end{aligned}$$

2. *Θέτουμε $\overline{f} \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ ως*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \overline{f}(g) = \overline{f(\overline{g})}. \end{aligned}$$

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Θέτουμε $\mathcal{T}_x f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x f\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{T}_x f(g) = f(\mathcal{T}_{-x} g) = f(g(\lozenge - x)).\end{aligned}$$

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Θέτουμε $\mathcal{B}_A f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_A f\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{B}_A f(g) = f\big(\mathcal{B}_{A^{-1},1} g\big) = f\left(\frac{1}{|\det(A)|} g\big(A^{-1}\lozenge\big)\right) = \frac{1}{|\det(A)|} f(g(A\lozenge)).\end{aligned}$$

5. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned}f * g\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F}\\ x &\mapsto (f * g)(x) = f(\mathcal{C}_x g) = f(g(x - \lozenge)).\end{aligned}$$

6. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Θέτουμε* $D^\alpha f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}D^\alpha f\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto D^\alpha f(g) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha g).\end{aligned}$$

7. *Έστω* $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$. *Θέτουμε* $f|_{U_0} \in (C_c^\infty(U_0;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}f|_{U_0}\colon C_c^\infty(U_0;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto f|_{U_0}(g) = f\big(\mathring{g}^U\big).\end{aligned}$$

Σημείωση 10.1.1.1. *Η ορθότητα του Ορισμού 10.1.1.4 είναι άμεσα επαληθεύσιμη. Για παράδειγμα, στο σημείο 1. αξιοποιείται η συνεπαγωγή*

$$h \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \;\&\; g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \Rightarrow hg \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}).$$

Από τον Ορισμό 10.1.1.4 έπεται με την σειρά του ο επόμενος.

Ορισμός 10.1.1.5. *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. *Ορίζουμε τα εξής.*

1. *Έστω* $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_h\colon (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \mathcal{M}_h f = hf.\end{aligned}$$

2. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\overline{\lozenge}\colon (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \overline{f}.\end{aligned}$$

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x \colon (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \mathcal{T}_x f. \end{aligned}$$

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_A \colon (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \mathcal{B}_A f. \end{aligned}$$

5. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} D^\alpha \colon (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto D^\alpha f. \end{aligned}$$

6. *Έστω* $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \Diamond|_{U_0} \colon (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto f|_{U_0}. \end{aligned}$$

Άμεσα επαληθεύονται τα παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.9. *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

1. *Έστω* $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{M}_h \in CL\big((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.

2. *Ισχύει ότι* $\overline{\Diamond} \in CL\big((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Ισχύει ότι $\mathcal{T}_x \in CL\big((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι $\mathcal{B}_A \in CL\big((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.

5. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Ισχύει ότι* $D^\alpha \in CL\big((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.

6. *Έστω* $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$. *Ισχύει ότι* $\Diamond|_{U_0} \in CL\big((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.

Πρόταση 10.1.1.10. *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

1. *Έχουμε τα εξής.*

   i. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{M}_1 = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$

   ii. *Έστω* $h_1, h_2 \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{M}_{h_1} \circ \mathcal{M}_{h_2} = \mathcal{M}_{h_1 h_2}.$$

2. *Έστω* $U = \mathbb{R}^m$.

   i. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{T}_0 = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$

   ii. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{x+y}.$$

3. *Έστω* $U = \mathbb{R}^m$.

   i. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m)} = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$

   ii. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_B = \mathcal{B}_{AB}.$$

Πρόταση 10.1.1.11. *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

1. *Έστω* $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$h(x) \neq 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{M}_h$ *είναι* $1-1$, *με*

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{h}} \circ \mathcal{M}_h = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{M}_h \circ \mathcal{M}_{\frac{1}{h}},$$

   και επί.

2. *Ισχύει ότι ο* $\overline{\Diamond}$ *είναι* $1-1$, *με*

$$\overline{\Diamond} \circ \overline{\Diamond} = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')},$$

   και επί.

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{T}_x$ *είναι* $1-1$, *με*

$$\mathcal{T}_{-x} \circ \mathcal{T}_x = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_{-x},$$

   και επί.

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{B}_A$ *είναι* $1-1$, *με*

$$\mathcal{B}_{A^{-1}} \circ \mathcal{B}_A = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_{A^{-1}},$$

   και επί.

Τώρα, από τον Ορισμό 10.1.1.4 σε συνδυασμό με γνωστά αποτελέσματα προκύπτουν νέα που αφορούν κατανομές.

Σημείο 1. του Ορισμού 10.1.1.4. Υπό το πρίσμα του σημείου 1. του Ορισμού 10.1.1.4, το επόμενο έπεται άμεσα λόγω της ισχύς του βασικού αποτελέσματος[1]

$$\left(f \in C^k(U;\mathbb{F}),\ \text{με } k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\},\ x_0 \in \mathbb{R}^m\ \&\ U \in \mathscr{O}\big(\mathbb{R}^m\,\big|\,x_0\big) \text{ αστρόμορφο ως προς το } x_0\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\{f_i\}_{i=1}^m \subsetneq C^{k-1}(U;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } f - f(x_0) = \sum_{i=1}^m \left(\mathcal{M}_{\mathrm{pr}_i} - x_{0i}\right) f_i,$$

το οποίο προκύπτει με χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Πρόταση 10.1.1.12. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $U \in \mathscr{O}\big(\mathbb{R}^m\,\big|\,x\big)$ *αστρόμορφο ως προς το* x *και*
3. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:*
$$\mathcal{M}_{(\mathrm{pr}_i - x_i)} f = 0,\ \ \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Ισχύει ότι
$$f(g) = 0,\ \ \forall g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } g(x) = 0.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 6.10.3.1 και της Πρότασης 10.1.1.3, το ακόλουθο έπεται με χρήση της Πρότασης 10.1.1.12.

Πρόταση 10.1.1.13. *Έστω*

i. $x \in \mathbb{R}^m$,

ii. $U \in \mathscr{O}\big(\mathbb{R}^m\,\big|\,x\big)$ *αστρόμορφο ως προς το* x *και*

iii. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:*
$$\mathcal{M}_{(\mathrm{pr}_i - x_i)} f = 0,\ \ \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω* $g_1, g_2 \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $g_1(x) = 1 = g_2(x)$. *Ισχύει ότι* $f(g_1) = f(g_2) = K$.
2. *Ισχύει ότι* $f = K\delta_x$, *όπου* $K \in \mathbb{F}$ *όπως στο σημείο 1.*

Σημείο 1. και 4. του Ορισμού 10.1.1.4. Άμεσα από τα σημεία 1. και 4. του Ορισμού 10.1.1.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.14. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$,
2. $g \in C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
3. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

Ισχύει ότι
$$|\det(A)|\,\mathcal{B}_A f(g) = f(\mathcal{B}_{A^{-1}} g).$$

Οπότε ο επόμενος ορισμός έπεται «φυσικά» από την Πρόταση 10.1.1.14.

Ορισμός 10.1.1.6. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

[1] Αρκεί να θεωρήσουμε
$$f_i = \int_{(0,1)} \partial^i f(x\lozenge + (1-x)\,x_0)\mathrm{d}x,\ \ \forall i \in \{1,\ldots,m\}$$
και να παρατηρήσουμε ότι επιτρέπεται η εναλλαγή ορίου ή/και διαφόρισης με το ολοκλήρωμα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θέτουμε $\mathcal{B}_{A,1}f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{A,1}f\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{B}_{A,1}f(g) = f(\mathcal{B}_{A^{-1}}g) = f\big(g\big(A^{-1}\lozenge\big)\big)\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{B}_{A,1}f = |\det(A)|\,\mathcal{B}_A f = \big(\mathcal{M}_{|\det(A)|}\circ\mathcal{B}_A\big)\,f.$$

Ορισμός 10.1.1.7. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{A,1}\colon (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &\to (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \mathcal{B}_{A,1}f = \big(\mathcal{M}_{|\det(A)|}\circ\mathcal{B}_A\big)\,f\end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{B}_{A,1} = \mathcal{M}_{|\det(A)|}\circ\mathcal{B}_A.$$

Άμεσα είναι τα παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.15. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{B}_{A,1} \in CL\big((C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big).$$

Πρόταση 10.1.1.16. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m),1} = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$

2. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{B}_{A,1}\circ\mathcal{B}_{B,1} = \mathcal{B}_{AB,1}.$$

Πρόταση 10.1.1.17. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0$. *Ισχύει ότι ο* $\mathcal{B}_{A,1}$ *είναι* $1-1$, *με*

$$\mathcal{B}_{A^{-1},1}\circ\mathcal{B}_{A,1} = \mathrm{id}_{L((C_c^\infty(U;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{B}_{A,1}\circ\mathcal{B}_{A^{-1},1},$$

και επί.

Επίσης με το σημείο 4. Ορισμού 10.1.1.4 εισάγουμε «φυσικά» τον ορισμό της ανάκλασης κατανομής του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Ορισμός 10.1.1.8. *Θέτουμε* $\mathcal{R} \in L\big((C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$ *ως*

$$\mathcal{R} = \mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m)} = \mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m),1}.$$

Έπονται έτσι με την σειρά τους και οι ορισμοί της άρτιας και περιττής κατανομής.

Ορισμός 10.1.1.9 (άρτια κατανομή του $(C_c^\infty)'$)**.** *Καλούμε μία* $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *άρτια ότανν*

$$\mathcal{R}f = f.$$

Ορισμός 10.1.1.10 (περιττή κατανομή του $(C_c^\infty)'$)**.** *Καλούμε μία* $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *περιττή ότανν*

$$\mathcal{R}f = -f.$$

Η «φυσικότητα» του Ορισμού 10.1.1.9 και του Ορισμού 10.1.1.10 γίνεται φανερή από το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 10.1.1.18. *Έστω* $\ell_f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))_r'$. *Ισχύουν ότι*

1. ℓ_f *άρτια* $\Leftrightarrow$ f *άρτια και*

2. ℓ_f *περιττή* $\Leftrightarrow$ f *περιττή.*

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 10.1.1.3.

Πρόταση 10.1.1.19. *Ισχύει ότι η* $\delta_0 \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *είναι άρτια.*

Σημείο 3. του Ορισμού 10.1.1.4. Μέσω του σημείου 3. του Ορισμού 10.1.1.4 είμαστε σε θέση να δώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 10.1.1.11 (περιοδική κατανομή του $(C_c^\infty)'$ με περίοδο K_i στην i-οστή συντεταγμένη)**.** *Έστω*

1. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})'$ *και*
2. $\{K_i\}_{i=1}^m \subsetneq [0,\infty)$.

Καλούμε την f περιοδική με περίοδο K_i στην i-οστή συντεταγμένη όταvν

$$\mathcal{T}_{-K_ie_i} f = f, \;\; \forall i \in \{1,\dots,m\}.$$

Σημείωση 10.1.1.2. *Χρήσιμη είναι η αντιπαραβολή του Ορισμού 10.1.1.11 με τον Ορισμό 6.8.1.2.*

Η «φυσικότητα» του Ορισμού 10.1.1.11 γίνεται φανερή από το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 10.1.1.20. *Έστω*

1. $\ell_f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))_r'$ *και*
2. $\{K_i\}_{i=1}^m \subsetneq [0,\infty)$.

Ισχύει ότι

$$\ell_f \text{ περιοδική με περίοδο } K_i \text{ στην } i\text{-οστή συντεταγμένη} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f \text{ περιοδική με περίοδο } K_i \text{ στην } i\text{-οστή συντεταγμένη}.$$

Σημεία 3., 5. και 6. του Ορισμού 10.1.1.4. Άμεσα από το σημείο 5. του Ορισμού 10.1.1.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.21. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f(g) = (f * \mathcal{R}g)(0).$$

Άμεσο είναι και το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 10.1.1.22. *Έστω $f_i \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ με $i \in \{1,2\}$. Ισχύει ότι*

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1 * g = f_2 * g, \;\; \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 10.1.1.3.

Πρόταση 10.1.1.23. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$ *και*
2. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\delta_x * g = \mathcal{T}_{-x} g.$$

Άμεσο είναι και το ανάλογο της Πρότασης 6.9.4.2.

Πρόταση 10.1.1.24. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*

3. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f * (\mathcal{T}_{-x}g) = \mathcal{T}_{-x}(f * g).$$

Σημείωση 10.1.1.3. *Από την Πρόταση 10.1.1.24, σε σύγκριση με την Πρόταση 6.9.4.2, γίνεται εμφανής η «φυσικότητα» των σημείων* 5. *και* 3. *του Ορισμού 10.1.1.4.*

Απευθείας από τον συνδυασμό της Πρότασης 10.1.1.23 και της Πρότασης 10.1.1.24 προκύπτει το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.25 (προσεταιριστική ιδιότητα για την κατανομή Dirac του $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
3. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f * (\delta_x * g) = \delta_x * (f * g).$$

Σημείωση 10.1.1.4. *Από την Πρόταση 10.1.1.25, σε σύγκριση με την Πρόταση 6.9.4.2, γίνεται εμφανής η «φυσικότητα» των σημείων* 5. *και* 3. *του Ορισμού 10.1.1.4.*

Το ακόλουθο, το οποίο έπεται άμεσα από την Πρόταση 8.1.1.7 (για $k = 0$), είναι το αντίστοιχο της Πρότασης 6.9.3.1.

Πρόταση 10.1.1.26 (προσεταιριστική ιδιότητα για συναρτήσεις του C_c^∞)**.** *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g_1, g_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$(f * g_1) * g_2 = f * (g_1 * g_2).$$

Σημείωση 10.1.1.5. *Από την Πρόταση 10.1.1.26, σε σύγκριση με την Πρόταση 6.9.3.1, γίνεται εμφανής η «φυσικότητα» του σημείου* 5. *του Ορισμού 10.1.1.4.*

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 6.9.5.7, απευθείας από την Πρόταση 10.1.1.22 σε συνδυασμό με την Πρόταση 10.1.1.26 προκύπτει το επόμενο.

Πρόταση 10.1.1.27. *Έστω $f_i \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ με $i \in \{1,2\}$. Ισχύει ότι*

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1 * (g_1 * g_2) = f_2 * (g_1 * g_2), \ \forall g_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), \ \forall i \in \{1,2\}.$$

Για το επόμενο αξιοποιούνται ο ορισμός του διαφορικού και ο κανόνας αλυσίδας.

Πρόταση 10.1.1.28. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ και μάλιστα

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Σημείωση 10.1.1.6. *Συγκρίνοντας την Πρόταση 10.1.1.28 με το Θεώρημα 6.9.5.1 και την Πρόταση 6.9.5.2 διαφαίνεται επίσης η «φυσικότητα» των σημείων* 5. *και* 6. *του Ορισμού 10.1.1.4.*

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 10.1.1.2 και της Πρότασης 10.1.1.28 έπεται το - τρόπον τινά - ανάλογο της Πρότασης 6.10.5.4, για το οποίο, εκτός του προαναφερθέντος αποτελέσματος, γίνεται επιπλέον χρήση της Πρότασης 6.9.4.3, της Πρότασης 6.10.2.1, της Πρότασης 10.1.1.21 και της Πρότασης 10.1.1.26.

Πρόταση 10.1.1.29. *Έστω* $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. *Ισχύει ότι*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ell_{f*\eta_\varepsilon} = f,$$

δλδ

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ell_{f*\eta_\varepsilon}(g) = f(g), \ \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Επίσης υπό την ισχύ του Θεωρήματος 9.1.2 και της Πρότασης 10.1.1.28, το επόμενο είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Πρόταση 10.1.1.30. *Έστω* $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. *Ισχύει ότι*

$$f * \lozenge \in CL(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})).$$

Απλά συνθέτοντας την Πρόταση 10.1.1.22, την Πρόταση 10.1.1.24 και την Πρόταση 10.1.1.30 προκύπτει το ακόλουθο.

Πρόταση 10.1.1.31. *Θέτουμε*

$$A_1 = \left\{h \in L(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) \,\middle|\, \exists! f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \text{ τ.ω.: } h = f * \lozenge\right\},$$

$$A_2 = \left\{h \in L(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) \,\middle|\, h \circ \mathcal{T}_{-x} = \mathcal{T}_{-x} \circ h, \ \forall x \in \mathbb{R}^m\right\}$$

και

$$A_3 = CL(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})).$$

Ισχύει ότι

$$A_1 \subseteq A_2 \cap A_3.$$

Άμεσα όμως προκύπτει και ο αντίστροφος εγκλεισμός του αντίστοιχου της Πρότασης 10.1.1.31, οπότε έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.32. *Θέτουμε* $A_i \subsetneq L(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ *με* $i \in \{1,2,3\}$ *όπως στην Πρόταση 10.1.1.31. Ισχύει ότι*

$$A_1 = A_2 \cap A_3.$$

Σημεία 7. και 5. του Ορισμού 10.1.1.4. Με το σημείο 7. του Ορισμού 10.1.1.4 εισάγουμε τον περιορισμό ενός στοιχείου του $(C_c(U;\mathbb{F}))'$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο $U_0 \subseteq U$, κάτι που μας επιτρέπει να δώσουμε τον επόμενο.

Ορισμός 10.1.1.12 (φορέας κατανομής). *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Θέτουμε

$$\operatorname{supp}(f) = U \setminus \bigcup_{U_0 \in \mathcal{U}_f} U_0, \ \text{όπου } \mathcal{U}_f = \left\{U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U) \,\middle|\, f|_{U_0} = 0\right\},$$

για τον φορέα της f.

Σημείωση 10.1.1.7. *Προφανώς το* 0 *στον Ορισμό 10.1.1.12 είναι το μηδενικό στοιχείο του* $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, *ο ορισμός του οποίου είναι ο προφανής. Συγκεκριμένα* $0 \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$ *με* $0 = \ell_0$.

Χρήσιμες είναι η ακόλουθες άμεσες παραφράσεις του Ορισμού 10.1.1.12.

Πρόταση 10.1.1.33. *Έστω*

i. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
ii. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω* $S \in \mathscr{C}(U)$. *Ισχύει ότι*

$$S = \operatorname{supp}(f) \Leftrightarrow f(g) = 0, \ \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } \operatorname{supp}(g) \subseteq U \setminus S.$$

2. *Έστω* $x \in U$. *Ισχύει ότι*

$$x \in \operatorname{supp}(f) \Leftrightarrow \exists U_0 \in \mathscr{O}_x(U) \text{ τ.ω.: } f|_{U_0} = 0.$$

Η «φυσικότητα» του Ορισμού 10.1.1.12 γίνεται φανερή από το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.10.6.1 και της Πρότασης 10.1.1.33.

Πρόταση 10.1.1.34. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $\ell_f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))_r'$.

Ισχύει ότι

$$\operatorname{supp}(\ell_f) = \operatorname{ess\,supp}(f).$$

Άμεσα έπονται επίσης και τα ακόλουθα.

Πρόταση 10.1.1.35. *Έστω Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$\operatorname{supp}(\delta_x) = \{x\}.$$

Πρόταση 10.1.1.36. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *και*
3. $g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g) = \varnothing$.

Ισχύει ότι $f(g) = 0$.

Στο συμπέρασμα της Πρότασης 10.1.1.36 μπορούμε επίσης να καταλήξουμε και στην περίπτωση όπου $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m$, όπως φαίνεται στο παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο έχει νόημα υπό το πρίσμα της Πρότασης 10.1.1.1 και για το οποίο γίνεται χρήση του Θεωρήματος 6.10.3.1.

Πρόταση 10.1.1.37. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset U$,
3. $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:*
   i. $U_0 \subset\subset U$ *και*
   ii. $\operatorname{supp}(f) \subset\subset U_0$,
4. $K > 0$ *&* $k \in \mathbb{N}$ *τ.ω.:*
$$|f(g)| \le K \|g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}, \ \forall g \in C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})$$
   και
5. $g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*
$$(D^\alpha g)|_{\operatorname{supp}(f)} = 0, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k.$$

Ισχύει ότι $f(g) = 0$.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 10.1.1.37 σε συνδυασμό με το θεώρημα Taylor αποτελεί το ακόλουθο.

Πρόταση 10.1.1.38. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $x \in U$,
3. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \subseteq \{x\}$,

4. $U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m \,|\, x) \cap \mathscr{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_0 \subset\subset U$ *και*

5. $K > 0$ *&* $k \in \mathbb{N}$ *τ.ω.:*
$$|f(g)| \leq K \|g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}, \;\; \forall g \in C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F}).$$

Ισχύει ότι
$$f = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \\ \tau.\omega.: \\ |\alpha| \leq k}} K_\alpha D^\alpha \delta_x,$$

όπου
$$K_\alpha = \frac{(-1)^{|\alpha|} f\big((\mathcal{T}_{-x}\mathrm{id}_m)^\alpha\big)}{\alpha!}, \;\; \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \;\; \tau.\omega.: \; |\alpha| \leq k.$$

Σημείωση 10.1.1.8. *Η Πρόταση 10.1.1.38 μας εξασφαλίζει την ισοδύναμη γραφή κάθε κατανομής του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ που έχει για φορέα ένα μονοσύνολο, ως γραμμικό συνδυασμό της κατανομής Dirac του παραπάνω χώρου και κάποιων διαφορίσεων αυτής.*

Το επόμενο είναι το αντίστοιχο της Πρότασης 6.9.4.4.

Πρόταση 10.1.1.39. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*

2. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι
$$\mathrm{supp}\,(f * g) \subseteq \mathrm{supp}\,(f) + \mathrm{supp}\,(g).$$

Σημείωση 10.1.1.9. *Μιας και ένα από τα δύο (κλειστά) σύνολα* $\mathrm{supp}\,(f)$ *και* $\mathrm{supp}\,(g)$ *στην Πρόταση 10.1.1.39 είναι συμπαγές (και συγκεκριμένα το δεύτερο), έπεται ότι το άθροισμά τους είναι κλειστό.*

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 10.1.1.28 και της Πρότασης 10.1.1.39 αποτελεί το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.1.40. *Έστω*

i. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $\mathrm{supp}\,(f) \subset\subset \mathbb{R}^m$ *και*

ii. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

1. $\mathrm{supp}\,(f * g) \subset\subset \mathbb{R}^m$ *και*

2. $f * g \in C^\infty_{\mathrm{supp}\,(f) + \mathrm{supp}\,(g)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

10.1.2 Δυϊκός χώρος $(C^\infty)'$

Συνεχίζουμε με την μελέτη του διανυσματικού χώρου $(C^\infty)'$, ο οποίος αποτελείται από γραμμικές και συνεχείς συναρτήσεις από τον C^∞ στον $\mathbb{F}$.

Σύνολο $(C^\infty)'$

Σε αντίθεση με την περίπτωση του C_c^∞, έχουμε ορίσει τοπολογία στον C^∞ και συγκεκριμένα μετρική τοπολογία, οπότε μπορούμε άμεσα να μιλάμε για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε αυτόν τον διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 10.1.2.1 (σύνολο $(C^\infty)'$). *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Θέτουμε*
$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' = CL(C^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}).$$

Άμεσα εξάγουμε τους πιο βασικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ ως εξής.

Πρόταση 10.1.2.1 (ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $(C^\infty)'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}(C^\infty(U;\mathbb{F}))' &= C_s(C^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) \cap L(C^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) = \\ &= \Big\{ f \in L(C^\infty(U;\mathbb{F});\mathbb{F}) \,\Big|\, \exists\, (K>0,\ k \in \mathbb{N}\ \&\ U_0 \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{P}(U)\ \text{τ.ω.: } U_0 \subset\subset U)\ \text{τ.ω.:} \\ &\qquad \text{τ.ω.: } |f(g)| \le K \big\| g|_{U_0} \big\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})},\ \forall g \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \Big\}.\end{aligned}$$

Παρακάτω δίνουμε δύο βασικά παραδείγματα κατανομών του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$. Το πρώτο αποτέλεσμα, λοιπόν, είναι συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Πρόταση 10.1.2.2. *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
2. *$f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$.*

Θέτουμε

$$\begin{aligned}\ell_f \colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \ell_f(g) = \int_U g(x)f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\ell_f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Δεν είναι όλα τα στοιχεία του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ της μορφής της Πρότασης 10.1.1.2, όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα, για το οποίο αξιοποιείται το Θεώρημα 6.10.6.1.

Πρόταση 10.1.2.3 (κατανομή Dirac του $(C^\infty)'$)**.** *Έστω*

i. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*
ii. *$x \in U$.*

Θέτουμε

$$\begin{aligned}\delta_x \colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \delta_x(g) = g(x),\end{aligned}$$

για την συνάρτηση Dirac στον $C^\infty(U;\mathbb{F})$. Ισχύουν ότι

1. *$\delta_x \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και*
2. *$\nexists f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$ τ.ω.: $\delta_x = \ell_f$, όπου ℓ_f όπως στην Πρόταση 10.1.2.2.*

Τόσο η Πρόταση 10.1.2.2 όσο και η Πρόταση 10.1.2.3 μας οδηγούν στους επόμενους αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 10.1.2.2 (σύνολο $(C_c^\infty)'_r$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}(C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r = \Bigg\{ \ell \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\Bigg|\, &\exists f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})\ \text{τ.ω.:} \\ &\text{τ.ω.: } \ell(g) = \int_U g(x)f(x)\mathrm{d}x,\ \forall g \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \Bigg\} \subsetneq (C^\infty(U;\mathbb{F}))',\end{aligned}$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε κανονικές και για τις οποίες χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\ell_f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$ που καταδεικνύει την εξάρτησή τους από την αντίστοιχη συνάρτηση $f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$.

Ορισμός 10.1.2.3 (σύνολο $(C_c^\infty)'_s$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Θέτουμε*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))'_s = (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \smallsetminus (C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r \subsetneq (C^\infty(U;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε ιδιάζουσες.

Άμεσα από το Θεώρημα 6.10.6.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.2.4. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $f_1, f_2 \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))_r' \ni \ell_{f_1} = \ell_{f_2} \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))_r'.$$

Ισχύει ότι

$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Διανυσματικός χώρος $(C^\infty)'$

Εδώ εφοδιάζουμε το σύνολο $(C^\infty)'$ με δομή διανυσματικού χώρου, μέσω του επόμενου άμεσου αποτελέσματος.

Θεώρημα 10.1.2.1 (διανυσματικός χώρος $(C^\infty)'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Άμεσα είναι επίσης και τα επόμενα.

Πρόταση 10.1.2.5 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C^\infty)_r'$)**.** *Ισχύει ότι το σύνολο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))_r'$, εφοδιασμένο με τους αντίστοιχους περιορισμούς των συνήθων πράξεων της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Πρόταση 10.1.2.6 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C^\infty)_s'$)**.** *Ισχύει ότι το σύνολο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))_s'$, εφοδιασμένο με τους αντίστοιχους περιορισμούς των συνήθων πράξεων της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C^\infty)'$

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.11.2.1, μπορούμε άμεσα να εφοδιάσουμε τον διανυσματικό χώρο $(C_c^\infty)'$ με συμβατή τοπολογία, όπως άλλωστε φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 10.1.2.2 (ασθενής′ τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C^\infty)'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη ασθενή′ τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Από τον άμεσο συνδυασμό της Πρότασης 5.3.2.1 με την Πρόταση 10.1.2.5, καθώς επίσης με την Πρόταση 10.1.2.6, προκύπτουν αντίστοιχα τα παρακάτω.

Πρόταση 10.1.2.7 (ασθενής′ τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C^\infty)_r'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(C^\infty(U;\mathbb{F}))_r'$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη σχετική ασθενή′ τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Πρόταση 10.1.2.8 (ασθενής′ τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(C^\infty)_s'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(C^\infty(U;\mathbb{F}))_s'$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη σχετική ασθενή′ τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Συνήθεις πράξεις στον $(C^\infty)'$

Παραθέτουμε κάποιες πράξεις που ορίστηκαν στον $(C_c^\infty)'$ και μπορούν να οριστούν και στον $(C^\infty)'$.

Ορισμός 10.1.2.4. *Έστω*

i. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*

ii. $f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Ορίζουμε τα εξής.

1. *Έστω* $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. *Θέτουμε* $hf \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} hf\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto hf(g) = f(hg). \end{aligned}$$

2. *Θέτουμε* $\overline{f} \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \overline{f}(g) = \overline{f(\overline{g})}. \end{aligned}$$

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Θέτουμε $\mathcal{T}_x f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x f\colon C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{T}_x f(g) = f(\mathcal{T}_{-x} g) = f(g(\lozenge - x)). \end{aligned}$$

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Θέτουμε $\mathcal{B}_A f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_A f\colon C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{B}_A f(g) = f\big(\mathcal{B}_{A^{-1},1} g\big) = f\left(\frac{1}{|\det(A)|} g\big(A^{-1}\lozenge\big)\right) = \frac{1}{|\det(A)|} f\big(g\big(A^{-1}\lozenge\big)\big). \end{aligned}$$

5. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Θέτουμε $\mathcal{B}_{A,1} f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{A,1} f\colon C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{B}_{A,1} f(g) = f(\mathcal{B}_{A^{-1}} g) = f\big(g\big(A^{-1}\lozenge\big)\big). \end{aligned}$$

6. *Έστω* $U = \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε* $\mathcal{R} f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} f\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{R} f(g) = \mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m)} f(g) = \mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m),1} f(g) = f(\mathcal{R} g) = f(g(-\lozenge)). \end{aligned}$$

7. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned} f * g\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto (f * g)(x) = f(\mathcal{C}_x g) = f(g(x - \lozenge)). \end{aligned}$$

8. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Θέτουμε* $D^\alpha f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} D^\alpha f\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto D^\alpha f(g) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha g). \end{aligned}$$

Σημείωση 10.1.2.1. *Η ορθότητα του Ορισμού 10.1.1.4 είναι άμεσα επαληθεύσιμη. Για παράδειγμα, στο σημείο 1. χρησιμοποιήθηκε η συνεπαγωγή*

$$h \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \ \& \ g \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \Rightarrow hg \in C^\infty(U;\mathbb{F}).$$

Από τον Ορισμό 10.1.2.4 έπεται με την σειρά του ο επόμενος.

Ορισμός 10.1.2.5. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ορίζουμε τα εξής.*

1. *Έστω $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_h\colon (C^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \mathcal{M}_h f = hf. \end{aligned}$$

2. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \overline{\Diamond}\colon (C^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \overline{f}. \end{aligned}$$

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x\colon (C^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \mathcal{T}_x f. \end{aligned}$$

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_A\colon (C^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \mathcal{B}_A f. \end{aligned}$$

5. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{A,1}\colon (C^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \mathcal{B}_{A,1} f. \end{aligned}$$

6. *Έστω $U = \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\colon (C^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto \mathcal{R} f. \end{aligned}$$

7. *Έστω $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha\colon (C^\infty(U;\mathbb{F}))' &\to (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \\ f &\mapsto D^\alpha f. \end{aligned}$$

Άμεσα επαληθεύονται τα παρακάτω.

Πρόταση 10.1.2.9. *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

1. *Έστω* $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{M}_h \in CL\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.
2. *Ισχύει ότι* $\overline{\Diamond} \in CL\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.
3. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Ισχύει ότι $\mathcal{T}_x \in CL\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.
4. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι $\mathcal{B}_A \in CL\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.
5. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι $\mathcal{B}_{A,1} \in CL\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.
6. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Ισχύει ότι* $D^\alpha \in CL\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$.

Πρόταση 10.1.2.10. *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

1. *Έχουμε τα εξής.*
   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{M}_1 = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$
   ii. *Έστω* $h_1, h_2 \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{M}_{h_1} \circ \mathcal{M}_{h_2} = \mathcal{M}_{h_1 h_2}.$$
2. *Έστω* $U = \mathbb{R}^m$.
   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{T}_0 = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$
   ii. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{x+y}.$$
3. *Έστω* $U = \mathbb{R}^m$.
   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m)} = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$
   ii. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_B = \mathcal{B}_{AB}.$$
4. *Έστω* $U = \mathbb{R}^m$.
   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m),1} = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')}.$$
   ii. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_{A,1} \circ \mathcal{B}_{B,1} = \mathcal{B}_{AB,1}.$$

Πρόταση 10.1.2.11. *Έστω* $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

1. *Έστω* $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*
$$h(x) \neq 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$
Ισχύει ότι ο $\mathcal{M}_h$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{M}_{\frac{1}{h}} \circ \mathcal{M}_h = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{M}_h \circ \mathcal{M}_{\frac{1}{h}},$$
και επί.

2. *Ισχύει ότι ο* $\bar{\Diamond}$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\bar{\Diamond} \circ \bar{\Diamond} = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')},$$
και επί.

3. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{T}_x$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{T}_{-x} \circ \mathcal{T}_x = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_{-x},$$
και επί.

4. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{B}_A$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{B}_{A^{-1}} \circ \mathcal{B}_A = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_{A^{-1}},$$
και επί.

5. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{B}_{A,1}$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{B}_{A^{-1},1} \circ \mathcal{B}_{A,1} = \mathrm{id}_{L((C^\infty(U;\mathbb{F}))';(C^\infty(U;\mathbb{F}))')} = \mathcal{B}_{A,1} \circ \mathcal{B}_{A^{-1},1},$$
και επί.

Αντίστοιχα με την Πρόταση 10.1.1.12 έπεται και η επόμενη.

Πρόταση 10.1.2.12. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $U \in \mathscr{O}\big(\mathbb{R}^m \,\big|\, x\big)$ *αστρόμορφο ως προς το* x *και*
3. $f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:*
$$\mathcal{M}_{(\mathrm{pr}_i - x_i)} f = 0,\ \ \forall i \in \{1,\dots,m\}.$$

Ισχύει ότι
$$f(g) = 0,\ \ \forall g \in C^\infty(U;\mathbb{F})\ \text{τ.ω.: } g(x) = 0.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 6.10.3.1 και της Πρότασης 10.1.2.3, το ακόλουθο έπεται με χρήση της Πρότασης 10.1.2.12.

Πρόταση 10.1.2.13. *Έστω*

i. $x \in \mathbb{R}^m$,

ii. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m \,|\, x)$ *αστρόμορφο ως προς το* x *και*

iii. $f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:*

$$\mathcal{M}_{(\mathrm{pr}_i - x_i)} f = 0,\ \forall i \in \{1,\dots,m\}.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω* $g_1, g_2 \in C^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $g_1(x) = 1 = g_2(x)$. *Ισχύει ότι* $f(g_1) = f(g_2) = K$.

2. *Ισχύει ότι* $f = K\delta_x$, *όπου* $K \in \mathbb{F}$ *όπως στο σημείο 1.*

Έπονται επίσης με την σειρά τους και οι ορισμοί της άρτιας και περιττής κατανομής.

Ορισμός 10.1.2.6 (άρτια κατανομή του $(C^\infty)'$)**.** *Καλούμε μία* $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *άρτια όταν*

$$\mathcal{R} f = f.$$

Ορισμός 10.1.2.7 (περιττή κατανομή του $(C^\infty)'$)**.** *Καλούμε μία* $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *περιττή όταν*

$$\mathcal{R} f = -f.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 10.1.2.14. *Έστω* $\ell_f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$. *Ισχύουν ότι*

1. ℓ_f *άρτια* $\Leftrightarrow$ f *άρτια και*

2. ℓ_f *περιττή* $\Leftrightarrow$ f *περιττή.*

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 10.1.2.3.

Πρόταση 10.1.2.15. *Ισχύει ότι η* $\delta_0 \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *είναι άρτια.*

Έπεται επίσης και ο ορισμός της περιοδικής κατανομής.

Ορισμός 10.1.2.8 (περιοδική κατανομή του $(C^\infty)'$ με περίοδο K_i στην i-οστή συντεταγμένη)**.** *Έστω*

1. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})'$ *και*

2. $\{K_i\}_{i=1}^m \subsetneq [0,\infty)$.

Καλούμε την f *περιοδική με περίοδο* K_i *στην* i*-οστή συντεταγμένη όταν*

$$\mathcal{T}_{-K_i e_i} f = f,\ \forall i \in \{1,\dots,m\}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 10.1.2.16. *Έστω*

1. $\ell_f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$ *και*

2. $\{K_i\}_{i=1}^m \subsetneq [0,\infty)$.

Ισχύει ότι

ℓ_f *περιοδική με περίοδο* K_i *στην* i*-οστή συντεταγμένη* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f *περιοδική με περίοδο* K_i *στην* i*-οστή συντεταγμένη.*

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 10.1.2.3.

Πρόταση 10.1.2.17. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$ *και*

2. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\delta_x * g = \mathcal{T}_{-x} g.$$

Άμεσα προκύπτουν και τα ακόλουθα.

Πρόταση 10.1.2.18. *Έστω*

1. $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f(g) = (f * \mathcal{R}g)(0).$$

Πρόταση 10.1.2.19. *Έστω* $f_i \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *με* $i \in \{1,2\}$. *Ισχύει ότι*

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1 * g = f_2 * g, \ \forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Πρόταση 10.1.2.20. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
3. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f * (\mathcal{T}_{-x} g) = \mathcal{T}_{-x}(f * g).$$

Απευθείας από τον συνδυασμό της Πρότασης 10.1.2.17 και της Πρότασης 10.1.2.20 προκύπτει το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.2.21 (προσεταιριστική ιδιότητα για την κατανομή Dirac του $(C^\infty)'$)**.** *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
3. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f * (\delta_x * g) = \delta_x * (f * g).$$

Για το επόμενο αξιοποιούνται ο ορισμός του διαφορικού και ο κανόνας αλυσίδας.

Πρόταση 10.1.2.22. *Έστω*

1. $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 10.1.2.22, το επόμενο είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Πρόταση 10.1.2.23. *Έστω* $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. *Ισχύει ότι*

$$f * \lozenge \in CL(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})).$$

10.1.3 Δυϊκός χώρος $(\mathcal{S})'$

Τέλος εισάγουμε τον διανυσματικού χώρο $(\mathcal{S})'$, ο οποίος αποτελείται από γραμμικές και συνεχείς συναρτήσεις από τον $\mathcal{S}$ στον $\mathbb{F}$.

Σύνολο $(\mathcal{S})'$

Η μετρική τοπολογία με την οποία έχουμε εφοδιάσει τον $\mathcal{S}$ εξασφαλίζει την ορθότητα του επόμενου ορισμού.

Ορισμός 10.1.3.1 (σύνολο $(\mathcal{S})'$). *Θέτουμε*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' = CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathbb{F}).$$

Άμεσα εξάγουμε τους πιο βασικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του $(\mathcal{S})'$ ως εξής.

Πρόταση 10.1.3.1 (ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $(\mathcal{S})'$). *Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &= C_s(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathbb{F}) \cap L(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathbb{F}) = \\ &= \Big\{ f \in L(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathbb{F}) \,\Big|\, \exists\, (K > 0,\ \&\ k_1, k_2 \in \mathbb{N})\ \text{τ.ω.:} \\ &\quad \text{τ.ω.: } |f(g)| \le K \sum_{\substack{\alpha,\beta \in (\mathbb{N}_0)^m \\ \text{τ.ω.:} \\ |\alpha| \le k_1\ \&\ |\beta| \le k_2}} \left\| (\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta g \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Big\}.\end{aligned}$$

Όπως έγινε και στις προηγούμενες ενότητες, έτσι κι εδώ δίνουμε δύο βασικά παραδείγματα γνήσιων υποσυνόλων του $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, για την εξαγωγή των οποίων αξιοποιούνται τα ίδια αποτελέσματα με πριν.

Πρόταση 10.1.3.2. *Έστω $f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\ell_f \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \ell_f(g) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) f(x) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Πρόταση 10.1.3.3 (κατανομή Dirac του $(\mathcal{S})'$). *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\delta_x \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \delta_x(g) = g(x),\end{aligned}$$

για την συνάρτηση Dirac στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύουν ότι

1. *$\delta_x \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ και*
2. *$\nexists f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ τ.ω.: $\delta_x = \ell_f$, όπου ℓ_f όπως στην Πρόταση 10.1.3.2.*

Οπότε από τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούμαστε στους εξής αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 10.1.3.2 (σύνολο $(\mathcal{S})'_r$). *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r = \Bigg\{ \ell \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \,\Bigg|\, &\exists f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\ \text{τ.ω.:} \\ &\text{τ.ω.: } \ell(g) = \int_U g(x) f(x) \mathrm{d}x,\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Bigg\} \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',\end{aligned}$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε κανονικές και για τις οποίες χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$ που καταδεικνύει την εξάρτησή τους από την αντίστοιχη συνάρτηση $f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ορισμός 10.1.3.3 (σύνολο $(\mathcal{S})'_s$). *Θέτουμε*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_s = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \smallsetminus (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε ιδιάζουσες.

Άμεσα από το Θεώρημα 6.10.6.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.3.4. *Έστω $f_1, f_2 \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ τ.ω.:*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r \ni \ell_{f_1} = \ell_{f_2} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r.$$

Ισχύει ότι

$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'$

Εδώ εφοδιάζουμε το σύνολο $(\mathcal{S})'$ με δομή διανυσματικού χώρου, μέσω του επόμενου άμεσου αποτελέσματος.

Θεώρημα 10.1.3.1 (διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'$). *Ισχύει ότι το σύνολο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Άμεσα είναι επίσης και τα επόμενα.

Πρόταση 10.1.3.5 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(\mathcal{S})'_r$). *Ισχύει ότι το σύνολο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$, εφοδιασμένο με τους αντίστοιχους περιορισμούς των συνήθων πράξεων της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Πρόταση 10.1.3.6 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(\mathcal{S})'_s$). *Ισχύει ότι το σύνολο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_s$, εφοδιασμένο με τους αντίστοιχους περιορισμούς των συνήθων πράξεων της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'$

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.11.2.1, μπορούμε άμεσα να εφοδιάσουμε τον διανυσματικό χώρο $(C_c^\infty)'$ με συμβατή τοπολογία, όπως άλλωστε φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 10.1.3.2 (ασθενής' τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'$). *Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη ασθενή' τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Από τον άμεσο συνδυασμό της Πρότασης 5.3.2.1 με την Πρόταση 10.1.3.5, καθώς επίσης με την Πρόταση 10.1.3.6, προκύπτουν αντίστοιχα τα παρακάτω.

Πρόταση 10.1.3.7 (ασθενής' τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'_r$). *Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη σχετική ασθενή' τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Πρόταση 10.1.3.8 (ασθενής' τοπολογικός διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'_s$). *Ισχύει ότι ο διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_s$, εφοδιασμένος με την αντίστοιχη σχετική ασθενή' τοπολογία, είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος.*

Συνήθεις πράξεις στον $(\mathcal{S})'$

Όπως έγινε και για την περίπτωση του $(C^\infty)'$, έτσι και εδώ παραθέτουμε κάποιες πράξεις που ορίστηκαν στον $(C_c^\infty)'$ και μπορούν να οριστούν και στον $(\mathcal{S})'$.

Ορισμός 10.1.3.4. *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. Ορίζουμε τα εξής.*

1. *Έστω $h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θέτουμε $hf \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*

$$\begin{aligned} hf\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto hf(g) = f(hg). \end{aligned}$$

2. *Θέτουμε $\overline{f} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \overline{f}(g) = \overline{f(\overline{g})}. \end{aligned}$$

3. *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Θέτουμε $\mathcal{T}_x f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{T}_x f(g) = f(\mathcal{T}_{-x} g) = f(g(\lozenge - x)). \end{aligned}$$

4. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Θέτουμε* $\mathcal{B}_A f \in (\mathcal{S}(\mathcal{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*
$$\begin{aligned}\mathcal{B}_A f\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{B}_A f(g) = f\big(\mathcal{B}_{A^{-1},1} g\big) = f\bigg(\frac{1}{|\det(A)|} g\big(A^{-1}\lozenge\big)\bigg) = \frac{1}{|\det(A)|} f\big(g\big(A^{-1}\lozenge\big)\big).\end{aligned}$$

5. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Θέτουμε* $\mathcal{B}_{A,1} f \in (\mathcal{S}(\mathcal{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*
$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{A,1} f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{B}_{A,1} f(g) = f(\mathcal{B}_{A^{-1}} g) = f\big(g\big(A^{-1}\lozenge\big)\big).\end{aligned}$$

6. *Θέτουμε* $\mathcal{R} f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*
$$\begin{aligned}\mathcal{R} f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{R} f(g) = \mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m)} f(g) = \mathcal{B}_{-(\mathrm{id}_m),1} f(g) = f(\mathcal{R} g) = f(g(-\lozenge)).\end{aligned}$$

7. *Έστω* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Θέτουμε*
$$\begin{aligned}f * g\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F}\\ x &\mapsto (f * g)(x) = f(\mathcal{C}_x g) = f(g(x-\lozenge)).\end{aligned}$$

8. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Θέτουμε* $D^\alpha f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*
$$\begin{aligned}D^\alpha f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto D^\alpha f(g) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha g).\end{aligned}$$

Σημείωση 10.1.3.1. *Η ορθότητα του Ορισμού 10.1.3.4 είναι άμεσα επαληθεύσιμη. Για παράδειγμα, στο σημείο 1. αξιοποιείται η συνεπαγωγή*
$$h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \;\&\; g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow hg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Από τον Ορισμό 10.1.2.4 έπεται με την σειρά του ο επόμενος.

Ορισμός 10.1.3.5. *Ορίζουμε τα εξής.*

1. *Έστω* $h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Θέτουμε*
$$\begin{aligned}\mathcal{M}_h\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &\to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \mathcal{M}_h f = hf.\end{aligned}$$

2. *Θέτουμε*
$$\begin{aligned}\overline{\lozenge}\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &\to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \overline{f}.\end{aligned}$$

3. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε*
$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &\to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \mathcal{T}_x f.\end{aligned}$$

4. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Θέτουμε*
$$\begin{aligned}\mathcal{B}_A\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &\to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \mathcal{B}_A f.\end{aligned}$$

5. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Θέτουμε*
$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{A,1}\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &\to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\\ f &\mapsto \mathcal{B}_{A,1} f.\end{aligned}$$

6. *Θέτουμε*

$$\mathcal{R}\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$$
$$f \mapsto \mathcal{R}f.$$

7. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Θέτουμε*

$$D^\alpha\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$$
$$f \mapsto D^\alpha f.$$

Άμεσα επαληθεύονται τα παρακάτω.

Πρόταση 10.1.3.9. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω* $h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{M}_h \in CL\big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$.
2. *Ισχύει ότι* $\overline{\lozenge} \in CL\big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$.
3. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{T}_x \in CL\big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$.
4. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{B}_A \in CL\big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$.
5. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{B}_{A,1} \in CL\big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$.
6. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Ισχύει ότι* $D^\alpha \in CL\big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$.

Πρόταση 10.1.3.10. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έχουμε τα εξής.*

   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{M}_1 = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')}.$$

   ii. *Έστω* $h_1, h_2 \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{M}_{h_1} \circ \mathcal{M}_{h_2} = \mathcal{M}_{h_1 h_2}.$$

2. *Έχουμε τα εξής.*

   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{T}_0 = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')}.$$

   ii. *Έστω* $x, y \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_y = \mathcal{T}_{x+y}.$$

3. *Έχουμε τα εξής.*

   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m)} = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')}.$$

   ii. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_B = \mathcal{B}_{AB}.$$

4. *Έχουμε τα εξής.*

   i. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_{(\mathrm{id}_m),1} = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')}.$$

   ii. *Έστω* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0 \neq \det(B)$. *Ισχύει ότι*
   $$\mathcal{B}_{A,1} \circ \mathcal{B}_{B,1} = \mathcal{B}_{AB,1}.$$

Πρόταση 10.1.3.11. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω* $h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*
$$h(x) \neq 0, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$
Ισχύει ότι ο $\mathcal{M}_h$ *είναι* $1-1$, *με*[2]
$$\mathcal{M}_{\frac{1}{h}} \circ \mathcal{M}_h = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')} = \mathcal{M}_h \circ \mathcal{M}_{\frac{1}{h}},$$
και επί.

2. *Ισχύει ότι ο* $\bar{\Diamond}$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\bar{\Diamond} \circ \bar{\Diamond} = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')},$$
και επί.

3. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{T}_x$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{T}_{-x} \circ \mathcal{T}_x = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')} = \mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_{-x},$$
και επί.

4. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{B}_A$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{B}_{A^{-1}} \circ \mathcal{B}_A = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')} = \mathcal{B}_A \circ \mathcal{B}_{A^{-1}},$$
και επί.

5. *Έστω*
   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*
   ii. $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω.:* $\det(A) \neq 0$.

   Ισχύει ότι ο $\mathcal{B}_{A,1}$ *είναι* $1-1$, *με*
$$\mathcal{B}_{A^{-1},1} \circ \mathcal{B}_{A,1} = \mathrm{id}_{L((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))';(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))')} = \mathcal{B}_{A,1} \circ \mathcal{B}_{A^{-1},1},$$
και επί.

Αντίστοιχα με την Πρόταση 10.1.1.12 και την Πρόταση 10.1.2.12 έπεται και η επόμενη.

Πρόταση 10.1.3.12. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:*
$$\mathcal{M}_{(\mathrm{pr}_i - x_i)} f = 0, \ \ \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Ισχύει ότι
$$f(g) = 0, \ \ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } g(x) = 0.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 6.10.3.1 και της Πρότασης 10.1.3.3, το ακόλουθο έπεται με χρήση της Πρότασης 10.1.3.12.

Πρόταση 10.1.3.13. *Έστω*

[2] Προφανώς ισχύει ότι $h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow \frac{1}{h} \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

i. $x \in \mathbb{R}^m$ *και*

ii. $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:*

$$\mathcal{M}_{(\mathrm{pr}_i - x_i)} f = 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω* $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $g_1(x) = 1 = g_2(x)$. *Ισχύει ότι* $f(g_1) = f(g_2) = K$.

2. *Ισχύει ότι* $f = K\delta_x$, *όπου* $K \in \mathbb{F}$ *όπως στο σημείο 1.*

Έπονται επίσης με την σειρά τους και οι ορισμοί της άρτιας και περιττής κατανομής.

Ορισμός 10.1.3.6 (άρτια κατανομή του $(\mathcal{S})'$)**.** *Καλούμε μία* $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *άρτια όταν*

$$\mathcal{R}f = f.$$

Ορισμός 10.1.3.7 (περιττή κατανομή του $(\mathcal{S})'$)**.** *Καλούμε μία* $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *περιττή όταν*

$$\mathcal{R}f = -f.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 10.1.3.14. *Έστω* $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$. *Ισχύουν ότι*

1. ℓ_f *άρτια* $\Leftrightarrow$ f *άρτια και*

2. ℓ_f *περιττή* $\Leftrightarrow$ f *περιττή.*

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 10.1.3.3.

Πρόταση 10.1.3.15. *Ισχύει ότι η* $\delta_0 \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *είναι άρτια.*

Έπεται επίσης και ο ορισμός της περιοδικής κατανομής.

Ορισμός 10.1.3.8 (περιοδική κατανομή του $(\mathcal{S})'$ με περίοδο K_i στην i-οστή συντεταγμένη)**.** *Έστω*

1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})'$ *και*

2. $\{K_i\}_{i=1}^m \subsetneq [0,\infty)$.

Καλούμε την f *περιοδική με περίοδο* K_i *στην* i*-οστή συντεταγμένη όταν*

$$\mathcal{T}_{-K_i e_i} f = f,\ \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 10.1.3.16. *Έστω*

1. $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$ *και*

2. $\{K_i\}_{i=1}^m \subsetneq [0,\infty)$.

Ισχύει ότι

ℓ_f *περιοδική με περίοδο* K_i *στην* i*-οστή συντεταγμένη* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f *περιοδική με περίοδο* K_i *στην* i*-οστή συντεταγμένη.*

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 10.1.3.3.

Πρόταση 10.1.3.17. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$ *και*

2. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\delta_x * g = \mathcal{T}_{-x} g.$$

Άμεσα προκύπτουν και τα ακόλουθα.

Πρόταση 10.1.3.18. *Έστω*

1. $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f(g) = (f * \mathcal{R}g)(0).$$

Πρόταση 10.1.3.19. *Έστω $f_i \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ με $i \in \{1,2\}$. Ισχύει ότι*

$$f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1 * g = f_2 * g,\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Πρόταση 10.1.3.20. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
3. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f * (\mathcal{T}_{-x}g) = \mathcal{T}_{-x}(f * g).$$

Απευθείας από τον συνδυασμό της Πρότασης 10.1.3.17 και της Πρότασης 10.1.3.20 προκύπτει το παρακάτω.

Πρόταση 10.1.3.21 (προσεταιριστική ιδιότητα για την κατανομή Dirac του $(\mathcal{S})'$)**.** *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
3. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$f * (\delta_x * g) = \delta_x * (f * g).$$

Για το επόμενο αξιοποιούνται ο ορισμός του διαφορικού και ο κανόνας αλυσίδας.

Πρόταση 10.1.3.22. *Έστω*

1. $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ και μάλιστα

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 10.1.3.22, το επόμενο είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Πρόταση 10.1.3.23. *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. Ισχύει ότι*

$$f * \Diamond \in CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})).$$

10.2 Βασικοί εγκλεισμοί (μέρος III)

Εδώ μελετάμε θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των χώρων κατανομών. Συγκεκριμένα εξάγουμε και μελετάμε τους εγκλεισμούς $(C^\infty(U;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

10.2.1 $(C^\infty)' \subsetneq (C_c^\infty)'$

Καταρχάς η έκφραση $(C^\infty(U;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ με την «κυριολεκτική» της έννοια δεν έχει νόημα καθώς μιλάμε για διανυσματικούς συναρτησιακούς χώρους των οποίων τα στοιχεία δεν έχουν καν το ίδιο πεδίο ορισμού. Οπότε αυτό που θα κάνουμε εδώ είναι να δώσουμε νόημα στον παραπάνω εγκλεισμό.

Εξάγουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα σε βήματα. Το πρώτο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.2.1.1.

Πρόταση 10.2.1.1. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
2. $f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Ισχύει ότι $f|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 10.2.1.1 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 10.2.1.2. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο $\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Το επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε τον $\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$. Είναι άραγε γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$; Υπάρχει άραγε ένας «απτός» χαρακτηρισμός του; Απαντάμε ταυτόχρονα και στα δύο αυτά ερωτήματα δίνοντας απάντηση στο δεύτερο. Ως προς αυτό, υπό το πρίσμα του το Θεωρήματος 6.10.3.1 και αξιοποιώντας την Πρόταση 10.1.1.36 έπεται το εξής.

Πρόταση 10.2.1.3. *Έστω*

1. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$,
2. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset U$ *και*
3. $g_1, g_2 \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $g_1|_{(\operatorname{supp}(f))^\varepsilon} = g_2|_{(\operatorname{supp}(f))^\varepsilon}$, *για κάποιο* $\varepsilon > 0$.

Ισχύει ότι

$$f(g_1 g) = f(g_2 g),\ \forall g \in C^\infty(U;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 10.2.1.3 έπεται το πρώτο σημείο του παρακάτω αποτελέσματος, ενώ το δεύτερο είναι άμεσο.

Πρόταση 10.2.1.4. *Έστω*

i. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ *και*
ii. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset U$.

Ισχύουν ότι

1. *η συνάρτηση* $f_0 \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *με*

$$\begin{aligned} f_0 \colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto f_0(g) = f(g_0 g), \end{aligned} \quad \text{για κάποια } \varepsilon > 0 \text{ και } g_0 \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } g_0|_{(\operatorname{supp}(f))^\varepsilon} = 1,$$

   είναι ορισμένη ανεξάρτητα της επιλογής των ε και g_0 και

2. $f_0|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} = f$.

Σημείωση 10.2.1.1. *Ούτε το μονοσήμαντο στο σημείο 1. της Πρότασης 10.2.1.4 και άρα ούτε η Πρόταση 10.2.1.3 αξιοποιούνται στην συνέχεια, αλλά παρατέθηκαν στο κείμενο για λόγους πληρότητας.*

Οπότε με άτοπο για τον ένα εγκλεισμό ($\subseteq$) και κάνοντας χρήση της Πρότασης 10.2.1.4 για τον άλλο ($\supseteq$) έπεται το εξής.

Πρόταση 10.2.1.5. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big) = \big\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\big|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset U\big\} \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$$

και άρα ο $\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c(U;\mathbb{F}))'$.

Σημείωση 10.2.1.2. *Ο γνήσιος εγκλεισμός της Πρότασης 10.2.1.5 είναι άμεσος. Για παράδειγμα, επιλέγοντας την*

$$\ell_1 \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))_r'$$

(οποιοδήποτε μη τετριμμένο πολυώνυμο στην θέση της συνάρτησης 1 μας κάνει) έχουμε ότι

$$\ell_1 \notin \left\{ f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset U \right\},$$

καθώς

$$\operatorname{supp}(\ell_1) = \mathbb{R}^m.$$

Έχοντας μελετήσει διεξοδικά την εικόνα του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ μέσω της $\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}$, συνεχίζουμε με το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.2.1.2.

Πρόταση 10.2.1.6. *Έστω*

1. *$U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$ και*

2. *$f_1, f_2 \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ τ.ω.: $f_1|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} = f_2|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}$.*

Ισχύει ότι $f_1 = f_2$.

Απλή παράφραση της Πρότασης 10.2.1.6 αποτελεί το επόμενο.

Πρόταση 10.2.1.7. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι η*

$$\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} : (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \to \left\{ f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset U \right\}$$

είναι $1-1$.

Συνθέτοντας την Πρόταση 10.2.1.5 με την Πρόταση 10.2.1.7 έπεται το εξής βασικό.

Θεώρημα 10.2.1.1. *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' \overset{\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}}{\cong} \left\{ f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m \right\} \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'.$$

Το Θεώρημα 10.2.1.1 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.
Ταύτιση:
Στην περίπτωση που θέλουμε να συσχετίσουμε τους $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, ταυτίζουμε τον $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ με τον $\left\{ f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m \right\}$, δλδ

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' = \left\{ f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m \right\},$$

και έτσι

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'.$$

Υπό το πρίσμα της παραπάνω ταύτισης, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Θεώρημα 10.2.1.2 ($(C^\infty)' \subsetneq (C_c^\infty)'$)**.** *Έστω $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$. Ισχύει ότι ο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και μάλιστα*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' = \left\{ f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m \right\}.$$

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 10.2.1.2 προκύπτουν νέα αποτελέσματα, όπως διαπιστώνουμε αμέσως παρακάτω.

Συνέπειες του Θεωρήματος 10.2.1.2. Το επόμενο είναι άμεση συνέπεια του συνδυασμού της Πρότασης 10.1.1.30 με την Πρότασης 10.1.1.40, υπό το πρίσμα βέβαια του Θεωρήματος 8.2.1.1.

Πρόταση 10.2.1.8. *Έστω*

1. $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $U \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^m)$.

Ισχύει ότι

$$(f * \lozenge)|_{C^\infty_{\overline{U}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL\Big(C^\infty_{\overline{U}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); C^\infty_{\operatorname{supp}(f)+\overline{U}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\Big).$$

Έτσι, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 8.2.1.1, της Πρότασης 10.1.2.23 και της Πρότασης 10.2.1.8, άμεσα επαληθεύεται το ακόλουθο.

Πρόταση 10.2.1.9. *Έστω* $f_i \in (C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *με* $i \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\exists i_0 \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f_{i_0}) \subset\subset \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$f_1 * (f_2 * \lozenge) \in A_2 \cap A_3,$$

όπου A_2 *και* A_3 *όπως στην Πρόταση 10.1.1.31.*

Οπότε, λόγω της Πρότασης 10.1.1.32, προκύπτει από την Πρότασης 10.2.1.9 το επόμενο.

Πρόταση 10.2.1.10. *Έστω* $f_i \in (C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *με* $i \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\exists i_0 \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f_{i_0}) \subset\subset \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$f_1 * (f_2 * \lozenge) \in A_1,$$

όπου A_1 *όπως στην Πρόταση 10.1.1.31.*

Υπό την ισχύ της Πρότασης 10.2.1.10 ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 10.2.1.1 (συνέλιξη κατανομών). *Έστω* $f_i \in (C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *με* $i \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\exists i_0 \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f_{i_0}) \subset\subset \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε* $f_1 * f_2 \in (C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$f_1 * f_2 = f_1 * (f_2 * \lozenge).$$

Σημείωση 10.2.1.3. *Δεν ορίζεται εν γένει η συνέλιξη δύο οποιονδήποτε κατανομών του* $(C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Η επιλογή του συμβολισμού στον Ορισμό 10.2.1.1 κάθε άλλο παρά τυχαία ήταν, όπως καταδεικνύεται στο ακόλουθο άμεσο αποτέλεσμα.

Πρόταση 10.2.1.11 (προσεταιριστική ιδιότητα). *Έστω* $f_i \in (C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *με* $i \in \{1,2,3\}$ *τ.ω.:* $\exists i_j \in \{1,2,3\}$ *με* $j \in \{1,2\}$ *τ.ω.:*

i. $i_1 \neq i_2$ *και*
ii. $\operatorname{supp}\big(f_{i_j}\big) \subset\subset \mathbb{R}^m$, $\forall j \in \{1,2\}$.

Ισχύει ότι

$$f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3.$$

Μάλιστα, με χρήση της Πρότασης 6.9.2.1, της Πρότασης 10.1.1.26 και της Πρότασης 10.1.1.27 προκύπτει το ανάλογο της πρώτης.

Πρόταση 10.2.1.12 (αντιμεταθετική ιδιότητα). *Έστω* $f_i \in (C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *με* $i \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\exists i_0 \in \{1,2\}$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f_{i_0}) \subset\subset \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1.$$

Τέλος, με χρήση της Πρότασης 10.1.1.29, της Πρότασης 10.1.1.34 και της Πρόταση 10.1.1.39 έπεται το ανάλογο της τελευταίας.

Πρόταση 10.2.1.13. *Έστω* $f_i \in (C^\infty_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *με* $i \in \{i,2\}$ *τ.ω.:* $\exists i_0 \in \{i,2\}$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f_{i_0}) \subset\subset \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$\operatorname{supp}(f_1 * f_2) \subseteq \operatorname{supp}(f_1) + \operatorname{supp}(f_2).$$

10.2.2 $(C^\infty)' \subsetneq (\mathcal{S})' \subsetneq (C_c^\infty)'$

Εδώ νοηματοδοτούμε τους εγκλεισμούς $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Το επόμενο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.2.2.1.

Πρόταση 10.2.2.1. *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. Ισχύει ότι $f|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 10.2.2.1 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 10.2.2.2. *Ισχύει ότι ο $\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Για την γνησιότητα του εγκλεισμού της Πρότασης 10.2.2.2 αξιοποιείται η

$$\ell_{\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}} \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))_r'$$

(οποιαδήποτε συνάρτηση Gauss στην θέση της συνάρτησης $\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}$ μας κάνει) για την οποία ισχύει ότι

$$\ell_{\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}} \notin (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',$$

καθώς σε διαφορετική περίπτωση

$$\ell_{\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}}\left(\mathrm{e}^{-|\lozenge|^2}\right) = \int_{\mathbb{R}^m} 1 \mathrm{d}x = \infty,$$

δλδ άτοπο.

Πρόταση 10.2.2.3. *Ισχύει ότι ο $\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Με χρήση, τώρα, του Θεωρήματος 8.2.2.3 έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Πρόταση 10.2.2.4. *Έστω $f_1, f_2 \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ τ.ω.: $f_1|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = f_2|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$. Ισχύει ότι $f_1 = f_2$.*

Απλή παράφραση της Πρότασης 10.2.2.4 αποτελεί το επόμενο.

Πρόταση 10.2.2.5. *Ισχύει ότι η*

$$\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \to \lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$$

είναι $1-1$.

Συνθέτοντας την Πρόταση 10.2.2.3 με την Πρόταση 10.2.2.5 έπεται το εξής βασικό.

Θεώρημα 10.2.2.1. *Ισχύει ότι*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \overset{\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}{\cong} \lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right) \subsetneq (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'.$$

Το Θεώρημα 10.2.2.1 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Ταύτιση:
Στην περίπτωση που θέλουμε να συσχετίσουμε τους $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ και $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, ταυτίζουμε τον $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ με τον $\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$, δλδ

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' = \lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right),$$

και έτσι

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'.$$

Υπό το πρίσμα της παραπάνω ταύτισης, καταλήγουμε στο πρώτο ζητούμενο.

Θεώρημα 10.2.2.2 ($(\mathcal{S})' \subsetneq (C_c^\infty)'$)**.** *Ισχύει ότι ο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Από την άλλη, το επόμενο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.2.2.2.

Πρόταση 10.2.2.6. *Έστω* $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. *Ισχύει ότι* $f|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 10.2.2.6 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 10.2.2.7. *Ισχύει ότι ο* $\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$ *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Για την γνησιότητα του εγκλεισμού της Πρότασης 10.2.2.7 αξιοποιείται η

$$\ell_1 \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$$

(οποιοδήποτε πολυώνυμο στην θέση της συνάρτησης 1 μας κάνει) για την οποία ισχύει ότι

$$\ell_1 \notin (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',$$

καθώς

$$\operatorname{supp}(\ell_1) = \mathbb{R}^m.$$

Πρόταση 10.2.2.8. *Ισχύει ότι ο* $\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$ *είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Με χρήση, τώρα, του Θεωρήματος 8.2.2.4 έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Πρόταση 10.2.2.9. *Έστω* $f_1, f_2 \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $f_1|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = f_2|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$. *Ισχύει ότι* $f_1 = f_2$.

Απλή παράφραση της Πρότασης 10.2.2.9 αποτελεί το επόμενο.

Πρόταση 10.2.2.10. *Ισχύει ότι η*

$$\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} : (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \to \Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$$

είναι $1-1$.

Συνθέτοντας την Πρόταση 10.2.2.8 με την Πρόταση 10.2.2.10 έπεται το εξής βασικό.

Θεώρημα 10.2.2.3. *Ισχύει ότι*

$$(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \overset{\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}{\cong} \Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right) \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'.$$

Το Θεώρημα 10.2.2.3 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Ταύτιση:
Στην περίπτωση που θέλουμε να συσχετίσουμε τους $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ και $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, ταυτίζουμε τον $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ με τον $\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$, δλδ

$$(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' = \Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right),$$

και έτσι

$$(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'.$$

Υπό το πρίσμα της παραπάνω ταύτισης, καταλήγουμε στο δεύτερο ζητούμενο.

Θεώρημα 10.2.2.4 ($(C^\infty)' \subsetneq (\mathcal{S})'$). *Ισχύει ότι ο* $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Μέρος **IV**

Τα κλασικά

Κεφάλαιο 11

Μετασχηματισμός **Fourier**, $\mathcal{F}$, στον $\mathbb{R}^m$

Ο μετασχηματισμός Fourier εισέρχεται «φυσικά» στην ανάλυση του L^2, καθώς προκύπτει από το ερώτημα ύπαρξης αποτελέσματος - τρόπον τινά - αντίστοιχου της κλασικής αναπαράστασης μέσω σειράς στοιχείου του L^2 σε φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}^m$, αλλά για την περίπτωση στοιχείου του L^2 σε όλο το $\mathbb{R}^m$ αυτή την φορά.

Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε δεδομένο τον τύπο από την κλασική θεωρία σειρών Fourier

$$[f] = \frac{1}{L^m} \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{F}_{x,L} f\left(\frac{1}{L} n\right) \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle \frac{1}{L} n, \Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\right], \ \forall\, [f] \in L^2\left(x + \frac{L}{2}(-1,1)^m; \mathbb{C}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}^m, \ \forall L > 0,$$

όπου

$$\mathcal{F}_{x,L} f = \int\limits_{x + \frac{L}{2}(-1,1)^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle \Diamond, y\rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y)\mathrm{d}y,$$

τότε, παίρνοντας - χωρίς αυστηρότητα - $L \to \infty$, καταλήγουμε σε τελεστές $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$, γνωστούς ως μετασχηματισμός Fourier και αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier, αντίστοιχα, που θέλουμε να ορίζονται ως

$$\mathcal{F} f = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle \Diamond, y\rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y)\mathrm{d}y$$

και

$$\overline{\mathcal{F}} f = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle \Diamond, y\rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y)\mathrm{d}y$$

και για τους οποίους επίσης θέλουμε να ισχύει ότι

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{ο ταυτοτικός τελεστής} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}.$$

Παρατηρούμε ότι για να ορίζονται οι παραπάνω τελεστές θα πρέπει τουλάχιστον να ισχύει ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ωστόσο ήταν πρώτος ο Schwartz ο οποίος αντιλήφθηκε ότι τόσο ο ομώνυμος $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ όσο και ο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ αποτελούν καταλληλότερα πεδία ορισμού για αυτούς. Έχοντας, λοιπόν, θεμελιώσει το θεωρητικό υπόβαθρο αυτό, μπορούμε να κινηθούμε αντίστροφα από ότι πράξαμε στον αρχικό, «φυσικό» μεν, μη αυστηρό δε, συλλογισμό και να εξάγουμε με αυστηρότητα τον κλασικό τύπο της θεωρίας σειρών Fourier με χρήση αποκλειστικά των ιδιοτήτων των παραπάνω καλά ορισμένων τελεστών. Τέλος, αφού οριστούν οι τελεστές αυτοί στους παραπάνω χώρους, τότε επεκτείνεται ο ορισμός τους και στον $L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Αυτό άλλωστε είναι και το πλάνο του παρόντος κεφαλαίου.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [5], [17], [21], [20], [7], [4], [9], [26] και [12], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

11.1 $\mathcal{F}$ στον $\mathcal{L}^1$ (μέρος I)

Πρώτα μελετάμε τους $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$ στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$.

11.1.1 $\mathcal{F} \in CL(\mathcal{L}^1; C_0)$ (μέρος I)

Ξεκινάμε με τους εξής ορισμούς.

Ορισμός 11.1.1.1. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{C}\\ x &\mapsto \mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

για τον μετασχηματισμό Fourier της f.

Ορισμός 11.1.1.2 (μετασχηματισμός Fourier στον $\mathcal{L}^1$)**.** *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\colon \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}) &\to \mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})\big)\\ f &\mapsto \mathcal{F}f,\end{aligned}$$

για τον μετασχηματισμό Fourier στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$.

Απευθείας από τον Ορισμό 11.1.1.1 προκύπτουν τα ακόλουθα.

Πρόταση 11.1.1.1. *Ισχύει ότι*[1] $\mathcal{F}0 = 0$.

Πρόταση 11.1.1.2. *Έστω*

1. $x \in \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$.

Ισχύει ότι

$$\big(\mathcal{F} \circ \mathcal{M}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\big) f = \mathcal{F}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}} f\big) = \mathcal{F}f(x + \lozenge) = (\mathcal{T}_x \circ \mathcal{F}) f.$$

Το πρώτο βήμα είναι η μελέτη της δράσης του $\mathcal{F}$, η οποία θα γίνει σε στάδια. Έτσι, το επόμενο είναι άμεσο από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Πρόταση 11.1.1.3. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})\big) \subseteq C(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}).$$

Στην συνέχεια θα χρειαστούμε το ακόλουθο άμεσα επαληθεύσιμο.

Πρόταση 11.1.1.4. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$|\mathcal{F}f(x)| \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}, \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 11.1.1.3 και της Πρότασης 11.1.1.4 έπεται η παρακάτω βελτιωμένη εκδοχή της πρώτης.

Πρόταση 11.1.1.5. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})\big) \subseteq C_b(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 11.1.1.5, άμεσα από την Πρόταση 11.1.1.4 προκύπτει το εξής αποτέλεσμα, το οποίο συνοψίζει όλα τα προηγούμενα.

Πρόταση 11.1.1.6. *Ισχύει ότι $\mathcal{F} \in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}); C_b(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})\big)$ με*

$$\|\mathcal{F}\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))} \le 1.$$

Αξιοποιώντας τώρα το Θεώρημα 6.7.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 11.1.1.6 έπεται η εξής βελτιωμένη εκδοχή της τελευταίας.

Πρόταση 11.1.1.7. *Ισχύει ότι $\mathcal{F} \in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}); C_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})\big)$ με*

$$\|\mathcal{F}\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))} \le 1.$$

[1] Εδώ θεωρείται η σταθερή μηδενική συνάρτηση $0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$.

Μάλιστα η τιμή 1 της νόρμας του $\mathcal{F}$ πιάνεται, όπως προκύπτει από το παράδειγμα της συνάρτησης

$$\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$

για την οποία έχουμε ότι

$$\left\|\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m}\right\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = 1,$$

καθώς επίσης

$$\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m}\Big)(x) = \prod_{i=1}^{m}\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}\Big)(x_i) = \prod_{i=1}^{m}\begin{cases}\frac{\sin(2\pi x_i)}{2\pi x_i}, & \text{αν } x_i \neq 0\\ 1, & \text{αν } x_i = 0,\end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

και άρα

$$\left\|\mathcal{F}\Big(\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m}\Big)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = 1,$$

οπότε η Πρόταση 11.1.1.7 έχει πλέον ως εξής.

Θεώρημα 11.1.1.1. *Ισχύει ότι* $\mathcal{F} \in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}); C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ *με*

$$\|\mathcal{F}\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))} = 1.$$

Θα επανέλθουμε στην μελέτη του $\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ αργότερα όταν θα έχουμε στην διάθεσή μας τα προαπαιτούμενα. Προς ώρας εξάγουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες του $\mathcal{F}$ όπως οι παρακάτω, οι οποίες έπονται απευθείας από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 11.1.1.8. *Έστω* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$(\mathcal{F}\circ\mathcal{T}_x)\, f(\lozenge) = \mathcal{F}(f(x+\blacklozenge))(\lozenge) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}\mathcal{F}f(\lozenge) = \big(\mathcal{M}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\circ\mathcal{F}\big)\, f(\lozenge).$$

2. *Έστω* $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *τ.ω:* $\det(A) \neq 0$. *Ισχύουν ότι*

$$(\mathcal{F}\circ\mathcal{B}_A)\, f(\lozenge) = \mathcal{F}(f(A\blacklozenge))(\lozenge) = \frac{1}{|\det(A)|}\mathcal{F}f\big(A^{-\mathrm{T}}\lozenge\big) = \big(\mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1}\circ\mathcal{F}\big)\, f(\lozenge)$$

και

$$\big(\mathcal{F}\circ\mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1}\big)\, f(\lozenge) = \frac{1}{|\det(A)|}\mathcal{F}\big(f\big(A^{-\mathrm{T}}\blacklozenge\big)\big)(\lozenge) = \mathcal{F}f(A\lozenge) = (\mathcal{B}_A\circ\mathcal{F})\, f(\lozenge).$$

Απευθείας από το σημείο 2. της Πρότασης 11.1.1.8 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 11.1.1.9. *Έστω* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω* f *άρτια. Ισχύει ότι* $\mathcal{F}f$ *επίσης άρτια και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \int_{\mathbb{R}^m}\cos\left(2\pi\langle\lozenge,y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right)f(y)\mathrm{d}y.$$

2. *Έστω* f *περιττή. Ισχύει ότι* $\mathcal{F}f$ *επίσης περιττή και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m}\sin\left(2\pi\langle\lozenge,y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right)f(y)\mathrm{d}y.$$

11.1.2 $\overline{\mathcal{F}} \in CL(\mathcal{L}^1; C_0)$ (μέρος I)

Επίσης ορίζουμε τον συζυγή μετασχηματισμό Fourier ως ακολούθως.

Ορισμός 11.1.2.1. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Θέτουμε*

$$\overline{\mathcal{F}}f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \overline{\mathcal{F}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y)\mathrm{d}y,$$

για τον συζυγή μετασχηματισμό Fourier της f.

Ορισμός 11.1.2.2 (συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον $\mathcal{L}^1$). *Θέτουμε*

$$\overline{\mathcal{F}} \colon \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}) \to \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})\big)$$
$$f \mapsto \overline{\mathcal{F}}f,$$

για τον συζυγή μετασχηματισμό Fourier στον $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$.

Το επόμενο είναι άμεσο από τους ορισμούς.

Πρόταση 11.1.2.1. *Ισχύει ότι*

$$\overline{\mathcal{F}}f = \mathcal{F}f \circ \mathcal{R} = \overline{\mathcal{F}\overline{f}}, \ \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 11.1.2.1, έπεται η ισχύς των αντίστοιχων όλων των παραπάνω αποτελεσμάτων και για τον $\overline{\mathcal{F}}$.

Πρόταση 11.1.2.2. *Ισχύει ότι*[2] $\overline{\mathcal{F}}0 = 0$.

Πρόταση 11.1.2.3. *Έστω*

1. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ *και*
2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι

$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{M}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\right) f = \overline{\mathcal{F}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}} f\right) = \overline{\mathcal{F}}f(x+\Diamond) = \left(\mathcal{T}_x \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f.$$

Θεώρημα 11.1.2.1. *Ισχύει ότι $\overline{\mathcal{F}} \in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C}); C_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})\big)$ με*

$$\left\|\overline{\mathcal{F}}\right\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))} = 1.$$

Πρόταση 11.1.2.4. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*
$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{T}_x\right) f(\Diamond) = \overline{\mathcal{F}}(f(x+\blacklozenge))(\Diamond) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}} \overline{\mathcal{F}}f(\Diamond) = \left(\mathcal{M}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}} \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f(\Diamond).$$

2. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τ.ω: $\det(A) \neq 0$. Ισχύουν ότι*
$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{B}_A\right) f(\Diamond) = \overline{\mathcal{F}}(f(A\blacklozenge))(\Diamond) = \frac{1}{|\det(A)|}\overline{\mathcal{F}}f\left(A^{-\mathrm{T}}\Diamond\right) = \left(\mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1} \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f(\Diamond)$$
και
$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1}\right) f(\Diamond) = \frac{1}{|\det(A)|}\overline{\mathcal{F}}\left(f\left(A^{-\mathrm{T}}\blacklozenge\right)\right)(\Diamond) = \overline{\mathcal{F}}f(A\Diamond) = \left(\mathcal{B}_A \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f(\Diamond).$$

Πρόταση 11.1.2.5. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω f άρτια. Ισχύει ότι $\overline{\mathcal{F}}f$ επίσης άρτια και μάλιστα*
$$\overline{\mathcal{F}}f = \int_{\mathbb{R}^m} \cos\left(2\pi\langle\Diamond, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

2. *Έστω f περιττή. Ισχύει ότι $\overline{\mathcal{F}}f$ επίσης περιττή και μάλιστα*
$$\overline{\mathcal{F}}f = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m} \sin\left(2\pi\langle\Diamond, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

[2] Εδώ θεωρείται η σταθερή μηδενική συνάρτηση $0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$.

11.2 $\mathcal{F}$ στον $\mathcal{S}$

Εδώ θα συμπεράνουμε, από το εύρος και την κομψότητα των αποτελεσμάτων, ότι ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ αποτελεί τον «φυσικό» χώρο των $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$. Μάλιστα, στις επόμενες ενότητες θα δούμε επίσης ότι η μελέτη αυτών των τελεστών στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ οδηγεί σε βασικά συμπεράσματα σχετικά με ορισμούς τους σε άλλους χώρους.

11.2.1 $\mathcal{F},\overline{\mathcal{F}} \in CL(\mathcal{S};\mathcal{S})$

Μια βασική πρώτη ιδιότητα του $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ είναι η επόμενη, για την οποία αξιοποιείται η ολοκλήρωση κατά παράγοντες (στην μία διάσταση προφανώς) σε συνδυασμό με το θεώρημα Fubini για το πρώτο σημείο, καθώς επίσης ο ορισμός του διαφορικού για το δεύτερο.

Πρόταση 11.2.1.1. *Έστω*

i. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ *και*

ii. $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$.

Ισχύουν ότι

1. $(\mathcal{F}\circ D^\alpha) f = (\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha \mathcal{F}f = \big(\mathcal{M}_{(\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha}\circ\mathcal{F}\big) f$ *και*
2. $(D^\alpha\circ\mathcal{F}) f = \mathcal{F}\big((-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha f\big) = \big(\mathcal{F}\circ\mathcal{M}_{(-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha}\big) f$.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 8.1.5.1, άμεσα από την Πρόταση 11.2.1.1 έπεται το εξής βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 11.2.1.1. *Ισχύει ότι* $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} \in CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))$.

Υπό την ισχύ της Πρότασης 11.1.2.1, από την Πρόταση 11.2.1.1 και το Θεώρημα 11.2.1.1 έπονται αντιστοίχως τα εξής.

Πρόταση 11.2.1.2. *Έστω*

i. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ *και*

ii. $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$.

Ισχύουν ότι

1. $\big(\overline{\mathcal{F}}\circ D^\alpha\big) f = (-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha \overline{\mathcal{F}}f = \big(\mathcal{M}_{(-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha}\circ\overline{\mathcal{F}}\big) f$ *και*
2. $\big(D^\alpha\circ\overline{\mathcal{F}}\big) f = \overline{\mathcal{F}}\big((\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha f\big) = \big(\overline{\mathcal{F}}\circ\mathcal{M}_{(\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha}\big) f$.

Θεώρημα 11.2.1.2. *Ισχύει ότι* $\overline{\mathcal{F}}\big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} \in CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))$.

11.2.2 Δράση των $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$ σε συναρτήσεις Gauss

Αρχικά σταθεροποιούμε μία ειδική συνάρτηση Gauss.

Ορισμός 11.2.2.1. *Θέτουμε* $\gamma_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *για την*

$$\begin{aligned}\gamma_m\colon \mathbb{R}^m &\to (0,1]\\ x &\mapsto \gamma_m(x) = \mathrm{e}^{-\pi|x|^2}.\end{aligned}$$

Για το παρακάτω σημαντικό υπολογιστικό αποτέλεσμα αξιοποιείται το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες και το θεώρημα Fubini.

Πρόταση 11.2.2.1. *Ισχύει ότι*

$$\|\gamma_m\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1.$$

Απευθείας από το θεώρημα Fubini έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 11.2.2.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\gamma_m(x) = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{F}\gamma_1(x_i), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Για το επόμενο αξιοποιείται η Πρόταση 11.2.1.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 11.2.2.1, για να εξαχθεί ένα γραμμικό πρωτοτάξιο ΠΑΤ (στην μία διάσταση), η λύση του οποίου είναι άμεση.

Πρόταση 11.2.2.3. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\gamma_1 = \gamma_1.$$

Άμεσα από τον συνδυασμό της Πρότασης 11.2.2.2 με την Πρότασης 11.2.2.3 προκύπτει το πολυμεταβλητό ανάλογο της δεύτερης, από το οποίο, μέσω της Πρόταση 11.1.2.1, έπεται και το αντίστοιχο για τον συζυγή τελεστή.

Πρόταση 11.2.2.4. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\gamma_m = \gamma_m = \overline{\mathcal{F}}\gamma_m.$$

Σημείωση 11.2.2.1. *Παραφράζοντας η Πρόταση 11.2.2.4 έχουμε ότι η γ_m παραμένει αναλλοίωτη από την δράση των $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$.*

Παρακάτω θα χρειαστούμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 11.2.2.2. *Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon \colon \mathbb{R}^m &\to (0,1] \\ x &\mapsto \theta_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_{\varepsilon(\mathrm{id}_m)}\gamma_m(x) = \gamma_m(\varepsilon x) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \vartheta_\varepsilon \colon \mathbb{R}^m &\to \left(0, \frac{1}{\varepsilon^m}\right] \\ x &\mapsto \vartheta_\varepsilon(x) = \mathcal{B}_{\frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{id}_m),1}\gamma_m(x) = \frac{1}{\varepsilon^m}\gamma_m\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right). \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε μία γενίκευση της Πρότασης 11.2.2.4, όταν αυτή συνδυαστεί με το σημείο 2. της Πρότασης 11.1.1.8 και το αντίστοιχο της Πρότασης 11.1.2.4.

Θεώρημα 11.2.2.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Ισχύει ότι $\theta_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ με*

$$\mathcal{F}\theta_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\theta_\varepsilon \ \ \&\ \ \mathcal{F}\vartheta_\varepsilon = \theta_\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\vartheta_\varepsilon.$$

11.2.3 $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ στον $\mathcal{S}$

Εδώ δείχνουμε ότι

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}.$$

Καταρχήν, απευθείας από την Πρόταση 11.2.2.4 παρατηρούμε ότι

$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right)\gamma_m = \gamma_m = \left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right)\gamma_m.$$

Μάλιστα, απευθείας από το Θεώρημα 11.2.2.1 έπονται δύο γενικεύσεις των παραπάνω ισοτήτων.

Πρόταση 11.2.3.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Ισχύει ότι*

$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right)\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon = \left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right)\theta_\varepsilon \ \ \&\ \ \left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right)\vartheta_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon = \left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right)\vartheta_\varepsilon.$$

Για να εξάγουμε όμως το γενικό ζητούμενο αποτέλεσμα, θα χρειαστούμε πρώτα κάποια προαπαιτούμενα.

Αξιοποιώντας το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, έπεται το επόμενο χρήσιμο.

Πρόταση 11.2.3.2. *Έστω $\varepsilon > 0$. Ισχύουν ότι*

1. $\|\vartheta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1$ *και*

2. $\forall r > 0$,
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\| \vartheta_\varepsilon|_{(B(0,r))^c} \right\|_{\mathcal{L}^1((B(0,r))^c;\mathbb{R})} = 0.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 6.9.5.9, το ακόλουθο έχει νόημα και έπεται άμεσα με χρήση της Πρότασης 11.2.3.2.

Πρόταση 11.2.3.3. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\vartheta_\varepsilon * f - f\|_{C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Επιπλέον θα χρειαστούμε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Fubini.

Πρόταση 11.2.3.4. *Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*
$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathcal{F}g(x)\mathrm{d}x \;\&\; \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\mathcal{F}}f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{\mathcal{F}}g(x)\mathrm{d}x.$$

Οπότε, αξιοποιώντας το Θεώρημα 11.2.2.1, την Πρόταση 11.2.3.3 και την Πρόταση 11.2.3.4, έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα 11.2.3.1 ($\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ στον $\mathcal{S}$). *Ισχύει ότι οι $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ και $\overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ είναι $1-1$ με*
$$\left(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\right)^{-1} = \overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})},$$
δλδ
$$\overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} \circ \mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} \circ \overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

11.2.4 Θεώρημα Plancherel στον $\mathcal{S}$

Εδώ δείχνουμε ότι
$$\| \mathcal{F}|_{\mathcal{S}} \Diamond\|_{\mathcal{L}^2} = \|\mathrm{id}_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{L}^2} = \left\| \overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}} \Diamond\right\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 6.9.5.9, το ακόλουθο έχει νόημα και έπεται άμεσα με χρήση του θεωρήματος Fubini σε συνδυασμό με την Πρόταση 11.1.2.1.

Πρόταση 11.2.4.1. *Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*
$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \;\&\; \overline{\mathcal{F}}(f * g) = \left(\overline{\mathcal{F}}f\right)\left(\overline{\mathcal{F}}g\right).$$

Άμεσα από την Πρόταση 11.2.4.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 11.2.4.2. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύουν ότι*

1. $\mathcal{R}f = f(-\Diamond) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$,
2. $\left(f * \overline{\mathcal{R}f}\right)(0) = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ *και*
3. $\mathcal{F}\left(f * \overline{\mathcal{R}f}\right) = |\mathcal{F}f|^2$.

Αξιοποιώντας το Θεώρημα 11.2.3.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 11.2.4.2 έπεται το εξής.

Θεώρημα 11.2.4.1 (Plancherel στον $\mathcal{S}$). *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*
$$\|\mathcal{F}f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \left\|\overline{\mathcal{F}}f\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

11.3 $\mathcal{F}$ στον $(\mathcal{S})'$

Είμαστε πλέον σε θέση να μελετήσουμε την δράση του $\mathcal{F}$ στις κατανομές του $(\mathcal{S})'$.

11.3.1 $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} \in CL\big((\mathcal{S})'; (\mathcal{S})'\big)$

Η ορθότητα του επόμενου ορισμού εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 11.2.1.1 και το Θεώρημα 11.2.1.2.

Ορισμός 11.3.1.1. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})'$. Θέτουμε $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})' \ni \overline{\mathcal{F}}f$ ως*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}\\ g &\mapsto \mathcal{F}f(g) = f(\mathcal{F}g)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}\\ g &\mapsto \overline{\mathcal{F}}f(g) = f\big(\overline{\mathcal{F}}g\big),\end{aligned}$$

για τον μετασχηματισμό και τον συζυγή μετασχηματισμό, αντίστοιχα, Fourier της f.

Ορισμός 11.3.1.2 (μετασχηματισμός και συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον $(\mathcal{S})'$)**.** *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))' &\to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'\\ f &\mapsto \mathcal{F}f\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}\colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))' &\to (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'\\ f &\mapsto \overline{\mathcal{F}}f,\end{aligned}$$

για τον μετασχηματισμό και τον συζυγή μετασχηματισμό, αντίστοιχα, Fourier στον $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$.

Άμεσα είναι τα παρακάτω.

Πρόταση 11.3.1.1. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι*[3]
$$\mathcal{F}0 = 0 = \overline{\mathcal{F}}0.$$

2. *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*
$$\mathcal{F}\delta_x = \ell_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}} \ \&\ \overline{\mathcal{F}}\delta_x = \ell_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}}.$$

Πρόταση 11.3.1.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F} \in CL\big((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'; (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'\big) \ni \overline{\mathcal{F}}.$$

Κάνοντας χρήση των ορισμών, σε συνδυασμό με την Πρόταση 11.1.1.2, την Πρόταση 11.1.1.8, την Πρόταση 11.1.2.3, την Πρόταση 11.1.2.4, την Πρόταση 11.2.1.1 και την Πρόταση 11.2.1.2, έπεται άμεσα η ισχύς όλων αυτών των αποτελεσμάτων για τους $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$ στον $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$.

Πρόταση 11.3.1.3. *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Ισχύουν ότι*
   - i. α΄. $(\mathcal{F} \circ \mathcal{T}_x)\, f = \big(\mathcal{M}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}} \circ \mathcal{F}\big)\, f$ *και*
     β΄. $\big(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{T}_x\big)\, f = \big(\mathcal{M}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}} \circ \overline{\mathcal{F}}\big)\, f$
     και
   - ii. α΄. $(\mathcal{T}_x \circ \mathcal{F})\, f = \big(\mathcal{F} \circ \mathcal{M}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\big)\, f$ *και*
     β΄. $\big(\mathcal{T}_x \circ \overline{\mathcal{F}}\big)\, f = \big(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{M}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\big)\, f.$
2. *Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ τ.ω: $\det(A) \neq 0$. Ισχύουν ότι*
   - i. α΄. $(\mathcal{F} \circ \mathcal{B}_A)\, f = \big(\mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1} \circ \mathcal{F}\big)\, f$ *και*

[3] Εδώ θεωρείται η σταθερή μηδενική κατανομή $0 = \ell_0 \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$.

β΄. $\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{B}_A\right) f = \left(\mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1} \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f$

και

ii. α΄. $\left(\mathcal{B}_A \circ \mathcal{F}\right) f = \left(\mathcal{F} \circ \mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1}\right) f$ *και*

β΄. $\left(\mathcal{B}_A \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f = \left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{B}_{A^{-\mathrm{T}},1}\right) f$.

3. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Ισχύουν ότι*

i. α΄. $\left(\mathcal{F} \circ D^\alpha\right) f = \left(\mathcal{M}_{(\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha} \circ \mathcal{F}\right) f$ *και*

β΄. $\left(\overline{\mathcal{F}} \circ D^\alpha\right) f = \left(\mathcal{M}_{(-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha} \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f$

και

ii. α΄. $\left(D^\alpha \circ \mathcal{F}\right) f = \left(\mathcal{F} \circ \mathcal{M}_{(-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha}\right) f$ *και*

β΄. $\left(D^\alpha \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f = \left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{M}_{(\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha}\right) f$.

11.3.2 $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ στον $(\mathcal{S})'$

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 11.2.3.1 και αποτελεί το ανάλογό του στον $(\mathcal{S})'$.

Θεώρημα 11.3.2.1 ($\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ στον $(\mathcal{S})'$)**.** *Ισχύει ότι οι* $\mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}$ *και* $\overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}$ *είναι* $1-1$ *με*

$$\left(\mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}\right)^{-1} = \overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'},$$

δλδ

$$\overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} \circ \mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} = \mathrm{id}_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} = \mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} \circ \overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}.$$

Ως μια κομψή πρώτη συνέπεια του Θεωρήματος 11.3.2.1 αναφέρουμε την ακόλουθη - τρόπον τινά - γενίκευση του αντίστοιχου αποτελέσματος του Απειροστικού Λογισμού, για το οποίο γίνεται επίσης χρήση της Πρότασης 10.1.3.13, της Πρότασης 11.3.1.1 και του σημείου 3.i. της Πρότασης 11.3.1.3.

Πρόταση 11.3.2.1. *Έστω* $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}))'$ *τ.ω.:* $f' = 0$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω* $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *τ.ω.:* $g_1(x) = 1 = g_2(x)$. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}f(g_1) = \mathcal{F}f(g_2) = \overline{\mathcal{F}}f(g_1) = \overline{\mathcal{F}}f(g_2) = K.$$

2. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}f = K\delta_0 = \overline{\mathcal{F}}f,$$

όπου $K \in \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

3. *Ισχύει ότι* $f = \ell_K$.

11.3.3 Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα

Το επόμενο χρήσιμο έπεται άμεσα από τους ορισμούς και το θεώρημα Fubini.

Πρόταση 11.3.3.1. *Έστω* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Ισχύει ότι* $\mathcal{F}\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'_r \ni \overline{\mathcal{F}}\ell_f$ *με*

$$\mathcal{F}\ell_f = \ell_{\mathcal{F}f} \ \&\ \overline{\mathcal{F}}\ell_f = \ell_{\overline{\mathcal{F}}f}.$$

Συνέπεια της Πρότασης 11.3.3.1 αποτελεί και το ακόλουθο, για το οποίο γίνεται επιπλέον χρήση της Πρότασης 10.1.1.4 και του Θεωρήματος 11.3.2.1.

Πρόταση 11.3.1. *Έστω* $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω ότι* $\mathcal{F}f_1 = \mathcal{F}f_2$. *Ισχύει ότι*

$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

2. *Έστω ότι* $\overline{\mathcal{F}}f_1 = \overline{\mathcal{F}}f_2$. *Ισχύει ότι*

$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

11.4 Σειρά Fourier

Εδώ ανοίγουμε μια παράνθεση στην μελέτη του μετασχηματισμού Fourier, καθώς είμαστε πλέον σε θέση να απαντήσουμε, εν μέρει, στο ερώτημα που τέθηκε ήδη στο §7.4 σχετικά με τον καθορισμό ορθοκανονικής βάσης του L^2, και συγκεκριμένα για την περίπτωση «φραγμένων ορθογώνιων γεωμετριών», δλδ για την περίπτωση συνόλων της μορφής

$$x + \prod_{i=1}^{m} \frac{L_i}{2}(-1,1), \ \forall \left(x \in \mathbb{R}^m \ \& \ \{L_i\}_{i=1}^m \subsetneq (0,\infty)^m\right),$$

τα οποία αποτελούν (m-διάστατα ανοικτά) διαστήματα με κέντρο x και μήκος ακμής στην i-οστή διάσταση L_i[4].

Ωστόσο, αντί να μελετήσουμε αυτές τις αυθαίρετες περιπτώσεις, αρκεί - μέσω ενός αφινικού μετασχηματισμού - να μελετήσουμε μόνο την περίπτωση του συνόλου

$$\frac{1}{2}(-1,1)^m,$$

δλδ του ανοικτού διαστήματος με κέντρο 0 και μήκος ακμής σε κάθε διάσταση 1.

Και για να το πετύχουμε αυτό με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, ο οποίος αφορά όλο το $\mathbb{R}^m$, επεκτείνουμε τις υπό μελέτη συναρτήσεις, που είναι ορισμένες στο παραπάνω ορθογώνιο, κατά περιοδικό τρόπο σε όλο τον ευκλείδιο χώρο. Προφανώς οι επεκτεταμένες αυτές περιοδικές συναρτήσεις θα έχουν περίοδο 1 στην κάθε συντεταγμένη, όσο δλδ το μήκος της κάθε ακμής του παραπάνω ορθογωνίου.

Έτσι, λοιπόν, ξεκινάμε να ξετυλίγουμε το κουβάρι μέσω της μελέτης των περιοδικών κατανομών $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ με περίοδο 1 στην κάθε συντεταγμένη, δλδ αυτών των f για τις οποίες ισχύει ότι

$$\mathcal{T}_{e_i} f = f, \ \forall i \in \{1,\ldots,m\},$$

ή, ισοδύναμα[5] (και πιο πρακτικά),

$$\mathcal{T}_n f = f, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

11.4.1 Ένα προκαταρκτικό αποτέλεσμα

Πρώτα από όλα θα χρειαστούμε ένα εξειδικευμένο αλλά άμεσο συμπλήρωμα της θεωρίας του §10.

Συγκεκριμένα, με χρήση της Πρότασης 10.1.1.12, της Πρότασης 10.1.2.12 και της Πρότασης 10.1.3.12, σε συνδυασμό με την ομαλότητα των συναρτήσεων[6]

$$\frac{\sin(\pi\lozenge)}{\lozenge - n} \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}), \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

έπονται αντίστοιχα τα επόμενα.

Πρόταση 11.4.1.1. *Εστω $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ τ.ω.:*

$$\mathcal{M}_{\left(e^{i2\pi\langle n,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}-1\right)} f = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Ισχύει ότι

$$f(g) = 0, \ \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \text{ τ.ω.: } g(\mathbb{Z}^m) = \{0\}.$$

Πρόταση 11.4.1.2. *Εστω $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ τ.ω.:*

$$\mathcal{M}_{\left(e^{i2\pi\langle n,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}-1\right)} f = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Ισχύει ότι

$$f(g) = 0, \ \forall g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \text{ τ.ω.: } g(\mathbb{Z}^m) = \{0\}.$$

[4] Μάλιστα, όλα, ανεξαιρέτως, τα διαστήματα μπορούν να εκφραστούν κατά αυτόν τον τρόπο.

[5] Επαγωγική εφαρμογή του σημείου 2.ii. της Πρότασης 10.1.3.10.

[6] Σχετικά με την ομαλότητα, ισχύει ότι

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ \exists f_n \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) \text{ τ.ω.: } \sin(\pi\lozenge) = (\lozenge - n) f_n.$$

Πρόταση 11.4.1.3. *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ τ.ω.:*

$$\mathcal{M}_{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}-1\right)} f = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Ισχύει ότι

$$f(g) = 0, \ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \text{ τ.ω.: } g(\mathbb{Z}^m) = \{0\}.$$

Το ακόλουθο έπεται με χρήση της Πρότασης 6.10.4.4, της Πρότασης 11.4.1.1 και του Θεωρήματος 10.1.1.2, με τρόπο αντίστοιχο αυτού της εξαγωγής της Πρότασης 10.1.1.13.

Πρόταση 11.4.1.4. *Έστω $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ τ.ω.:*

$$\mathcal{M}_{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}-1\right)} f = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω*
$$\{g_{1n}\}_{n\in\mathbb{Z}^m}, \{g_{2n}\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$$
ομαλές διαμερίσεις για το $\mathbb{R}^m$ κυριαρχούμενο από το $\left\{n + (-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ τ.ω.:
$$\operatorname{supp}(g_{1n}) \subset\subset n + (-1,1)^m \supset\supset \operatorname{supp}(g_{2n}), \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$
Ισχύει ότι
$$f(g_{1n}) = f(g_{2n}) = K_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

2. *Ισχύει ότι*
$$f(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n g(n), \ \forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ όπως στο σημείο 1.

3. *Ισχύει ότι*
$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n \delta_n,$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ όπως στο σημείο 1.

Σημείωση 11.4.1.1. *Δυο λόγια σχετικά με την Πρόταση 11.4.1.4.*

1. *Το άθροισμα στο σημείο 2 είναι πεπερασμένο, καθώς η g έχει συμπαγή φορέα, οπότε δεν τίθεται θέμα σύγκλισης της σειράς.*

2. *Η σύγκλιση της σειράς του σημείου 3 έχει καταρχάς νόημα λόγω της ασθενούς′ τοπολογίας με την οποία εφοδιάσαμε τον $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.1.2, με την αντίστοιχη ισότητα να αποτελεί απλή παράφραση της αντίστοιχης του σημείου 2.*

Παρομοίως, το επόμενο βασικό έπεται με χρήση της Πρότασης 6.10.4.5, της Πρότασης 8.1.5.4, της Πρότασης 11.4.1.3 και του Θεωρήματος 10.1.3.2, με τρόπο αντίστοιχο αυτού της εξαγωγής της Πρότασης 10.1.3.13.

Πρόταση 11.4.1.5. *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ τ.ω.:*

$$\mathcal{M}_{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}-1\right)} f = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Έχουμε τα εξής.

1. *Έστω*
$$\{g_1(\Diamond - n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m}, \{g_2(\Diamond - n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$$
ομαλές διαμερίσεις για το $\mathbb{R}^m$ κυριαρχούμενο από το $\left\{n + (-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ τ.ω.:
$$\operatorname{supp}(g_1) \subset\subset (-1,1)^m \supset\supset \operatorname{supp}(g_2).$$
Ισχύει ότι
$$f(g_1(\Diamond - n)) = f(g_2(\Diamond - n)) = K_n, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

2. *Ισχύει ότι*
$$\exists\,(k \in \mathbb{N} \;\&\; K > 0) \;\; \tau.\omega.: \;\; |K_n| \le K(1+|n|)^k, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^m,$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

3. *Ισχύει ότι*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n g(n) \in \mathbb{C}, \;\; \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

4. *Ισχύει ότι*
$$f(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n g(n), \;\; \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

5. *Ισχύει ότι*
$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n \delta_n,$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

Σημείωση 11.4.1.2. *Δυο λόγια σχετικά με την Πρόταση 11.4.1.5.*

1. *Παραφράζοντας το σημείο 2, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η ακολουθία* $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *είναι «βραδέως αύξουσα».*

2. *Το σημείο 3 προκύπτει άμεσα από το σημείο 2, καθώς g ταχέως φθίνουσα άρα* $\{g(n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{R}$ *«ταχέως φθίνουσα». Ωστόσο, ισχύει και το αντίστροφο, δλδ το σημείο 2 έπεται από το σημείο 3 με άτοπο. Μάλιστα, αυτή η τελευταία συλλογιστική χρησιμοποιείται στην απόδειξη.*

3. *Η σύγκλιση της σειράς του σημείου 5 έχει καταρχάς νόημα λόγω της ασθενούς' τοπολογίας με την οποία εφοδιάσαμε τον* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$*, σύμφωνα με το Θεώρημα 10.1.3.2, με την αντίστοιχη ισότητα να αποτελεί απλή παράφραση της αντίστοιχης του σημείου 4.*

11.4.2 Δράση του $\mathcal{F}$ σε περιοδικές κατανομές του $(\mathcal{S})'$

Περνάμε τώρα στην μελέτη της δράσης του μετασχηματισμού Fourier σε περιοδικές κατανομές του $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$.

Το ακόλουθο έπεται άμεσα από το σημείο 1.i.α'. της Πρότασης 11.3.1.3.

Πρόταση 11.4.2.1. *Έστω περιοδική* $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ *με περίοδο 1 σε κάθε συντεταγμένη. Ισχύει ότι*
$$\left(\mathcal{M}_{\left(e^{i2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}-1\right)} \circ \mathcal{F}\right) f = 0, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^n.$$

Απευθείας από τον συνδυασμό της Πρότασης 11.4.1.5 με την Πρόταση 11.4.2.1 προκύπτει το παρακάτω.

Πρόταση 11.4.2.2 (χαρακτηρισμός μετασχηματισμού Fourier περιοδικής κατανομής του $(\mathcal{S})'$). *Έστω περιοδική* $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ *με περίοδο 1 σε κάθε συντεταγμένη. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω*
$$\{g_1(\Diamond - n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m}, \{g_2(\Diamond - n)\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$$
ομαλές διαμερίσεις για το $\mathbb{R}^m$ *κυριαρχούμενο από το* $\left\{n + (-1,1)^m\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ *τ.ω.:*
$$\operatorname{supp}(g_1) \subset\subset (-1,1)^m \supset\supset \operatorname{supp}(g_2).$$
Ισχύει ότι
$$\mathcal{F}f(g_1(\Diamond - n)) = \mathcal{F}f(g_2(\Diamond - n)) = K_n, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

2. *Ισχύει ότι*
$$\exists\,(k \in \mathbb{N} \;\&\; K > 0) \;\; \tau.\omega.: \;\; |K_n| \le K(1+|n|)^k, \;\; \forall n \in \mathbb{Z}^m,$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

3. *Ισχύει ότι*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n g(n) \in \mathbb{C},\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

4. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{F}f(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n g(n),\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

5. *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{F}f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n \delta_n,$$
όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στο σημείο 1.*

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 11.4.2.2, ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 11.4.2.1 (συντελεστής Fourier περιοδικής κατανομής του $(\mathcal{S})'$)**.** *Έστω*

1. *περιοδική* $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ *με περίοδο* 1 *σε κάθε συντεταγμένη και*
2. $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *όπως στην Πρόταση 11.4.2.2.*

Καλούμε το K_n n*-οστό συντελεστή Fourier της* f, $\forall n \in \mathbb{Z}^m$.

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 11.3.1.1, της Πρότασης 11.3.1.2, του Θεωρήματος 11.3.2.1 και του σημείου 5 της Πρότασης 11.4.2.2, εξάγουμε άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 11.4.2.3 (χαρακτηρισμός περιοδικής κατανομής του $(\mathcal{S})'$)**.** *Έστω*

1. $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ *με περίοδο* 1 *σε κάθε συντεταγμένη και*
2. $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *η οικογένεια των συντελεστών Fourier της* f.

Ισχύει ότι
$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n \ell_{e^{i2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}}.$$

Αξιοποιώντας την Πρόταση 11.4.2.3 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 6.9.5.1, το Θεώρημα 6.10.5.1, την εναλλαγή ορίου με το άθροισμα μέσω του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, καθώς επίσης την γνωστή «ορθοκανονικότητα» της οικογένειας $\left\{ e^{i2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\big|_{\frac{1}{2}(-1,1)^m} \right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$, δλδ την σχέση
$$\int\limits_{\frac{1}{2}(-1,1)^m} \left\langle e^{i2\pi\langle n,x\rangle_{\mathbb{R}^m}}, e^{i2\pi\langle k,x\rangle_{\mathbb{R}^m}} \right\rangle_{\mathbb{C}} dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = k \\ 0, & \text{αν } n \neq k, \end{cases}$$
παίρνουμε το επόμενο.

Πρόταση 11.4.2.4 (χαρακτηρισμός συντελεστών Fourier περιοδικής κατανομής του $(\mathcal{S})'$)**.** *Έστω* $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'$ *με περίοδο* 1 *σε κάθε συντεταγμένη. Έχουμε τα εξής.*

1. *Ισχύει ότι*
$$\left\{ \lim_{\varepsilon\to 0^+} f\left(e^{-i2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}} \eta_\varepsilon * \chi_{\frac{1}{2}(-1,1)^m} \right) \right\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}.$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ *η οικογένεια των συντελεστών Fourier της* f. *Ισχύει ότι*
$$K_n = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f\left(e^{-i2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}} \eta_\varepsilon * \chi_{\frac{1}{2}(-1,1)^m} \right),\ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Μάλιστα, στην περίπτωση κανονικής περιοδικής κατανομής, το παραπάνω αποτέλεσμα λαμβάνει την εξής μορφή, για την οποία χρησιμοποιείται, εκτός του προαναφερθέντος, η Πρόταση 6.1.9, το Θεώρημα 6.10.5.1 και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Πρόταση 11.4.2.5 (χαρακτηρισμός συντελεστών Fourier περιοδικής κατανομής του $(\mathcal{S})'_r$)**.** *Έστω*

1. *$\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'_r$ με περίοδο 1 σε κάθε συντεταγμένη και*

2. *$\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ η οικογένεια των συντελεστών Fourier της ℓ_f.*

Ισχύει ότι

$$K_n = \int\limits_{\frac{1}{2}(-1,1)^m} \left\langle \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,x\rangle_{\mathbb{R}^m}}, f(x)\right\rangle_{\mathbb{C}} \mathrm{d}x, \ \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Συνδυάζοντας την Πρόταση 11.4.2.3 και την Πρόταση 11.4.2.5 με το σημείο 2 της Πρότασης 11.4.2.2 και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, προκύπτει το ακόλουθο.

Πρόταση 11.4.2.6 (χαρακτηρισμός περιοδικής κατανομής του $(\mathcal{S})'_r$)**.** *Έστω $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'_r$ με περίοδο 1 σε κάθε συντεταγμένη. Ισχύει ότι*

$$\ell_f = \ell_{\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}},$$

όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ όπως στην Πρόταση 11.4.2.5.

Τέλος, εξάγουμε άμεσα το επόμενο από το Θεώρημα 6.10.6.1, την Πρόταση 10.1.3.16 και την Πρόταση 11.4.2.6.

Πρόταση 11.4.2.7 («σχεδόν» χαρακτηρισμός περιοδικής συνάρτησης)**.** *Έστω $f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ με περίοδο 1 σε κάθε συντεταγμένη. Ισχύει ότι*

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} K_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}, \ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού},$$

όπου $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \mathbb{C}$ όπως στην Πρόταση 11.4.2.5.

11.4.3 Βάση του L^2 σε φραγμένα διαστήματα του $\mathbb{R}^m$

Στον $L^2\big(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\big)$, η οικογένεια

$$\left\{\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\big|_{\frac{1}{2}(-1,1)^m}\right]\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p\left(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)$$

είναι ορθοκανονική, δλδ ισχύει η γνωστή σχέση

$$\left\langle\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\big|_{\frac{1}{2}(-1,1)^m}\right],\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle k,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\big|_{\frac{1}{2}(-1,1)^m}\right]\right\rangle_{L^2\left(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)} = \begin{cases}1, & \text{αν } n = k\\ 0, & \text{αν } n \neq k.\end{cases}$$

Έδω, λοιπόν, δείχνουμε ότι η οικογένεια αυτή είναι μια ορθοκανονική βάση του παραπάνω χώρου Hilbert.

Πράγματι, άμεσα από την Πρόταση 11.4.2.7 συμπεραίνουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 11.4.3.1 (ορθοκανονική βάση του L^2 σε φραγμένο διάστημα)**.** *Η οικογένεια*

$$\left\{\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\big|_{\frac{1}{2}(-1,1)^m}\right]\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m} \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} L^p\left(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2\big(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\big)$, δλδ

$$[f] = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m}\left\langle\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\big|_{\frac{1}{2}(-1,1)^m}\right],[f]\right\rangle_{L^2\left(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle n,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\big|_{\frac{1}{2}(-1,1)^m}\right],$$
$$\forall\,[f] \in L^2\left(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right).$$

Έχουμε έτσι το εξής ορισμό.

Ορισμός 11.4.3.1 (σειρά Fourier)**.** *Έστω $[f] \in L^2\big(\frac{1}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\big)$. Η αναπαράσταση του $[f]$ όπως στο Θεώρημα 11.4.3.1 καλείται σειρά Fourier του $[f]$.*

11.5 $\mathcal{F}$ στον $\mathcal{L}^1$ (μέρος II)

Εδώ συνεχίζουμε την μελέτη των $\mathcal{F}|_{\mathcal{L}^1}$ και $\overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{L}^1}$, έχοντας όμως τώρα ανά χείρας τον ορισμό και τις ιδιότητες των τελεστών αυτών στους $\mathcal{S}$ και $(\mathcal{S})'$.

11.5.1 «$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$» στον $\mathcal{L}^1$

Άμεσα από την Πρόταση 10.1.3.4 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 11.3.2.1 και την Πρόταση 11.3.3.1 έπεται το ανάλογο του Θεωρήματος 11.2.3.1 και του Θεωρήματος 11.3.2.1 στον $\mathcal{L}^1$.

Θεώρημα 11.5.1.1 («$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$» στον $\mathcal{L}^1$)**.** *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right) f = f,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

2. *Έστω $\overline{\mathcal{F}}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f = f,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

11.5.2 $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} \in CL(\mathcal{L}^1; C_0)$ (μέρος II)

Με το Θεώρημα 11.5.1.1 ανά χείρας, επιστρέφουμε τώρα στην μελέτη των $\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ και $\overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 11.1.1.1 και του Θεωρήματος 11.1.2.1, απευθείας από το Θεώρημα 11.5.1.1 έπεται το παρακάτω.

Θεώρημα 11.5.2.1. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \smallsetminus C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \not\ni \overline{\mathcal{F}}f.$$

Παραφράζοντας το Θεώρημα 11.5.2.1 παίρνουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 11.5.2.1. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\big) \not\subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \not\supseteq \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\big).$$

Για να συνεχίσουμε την μελέτη του $\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1\big)$ και του $\overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1\big)$ χρειαζόμαστε κάποια επιπλέον αποτελέσματα.

Πρώτα παίρνουμε το αντίστροφο της Πρότασης 11.1.1.9 και της Πρότασης 11.1.2.5, αξιοποιώντας τις ίδιες σε συνδυασμό με το Θεώρημα 11.5.1.1.

Πρόταση 11.5.2.2. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύουν ότι*

   i. *$\mathcal{F}f$ άρτια $\Leftrightarrow$ f άρτια, και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \int_{\mathbb{R}^m} \cos\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y$$

   και

   ii. *$\mathcal{F}f$ περιττή $\Leftrightarrow$ f περιττή, και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m} \sin\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

2. *Έστω $\overline{\mathcal{F}}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύουν ότι*

   i. *$\overline{\mathcal{F}}f$ άρτια $\Leftrightarrow$ f άρτια, και μάλιστα*

$$\overline{\mathcal{F}}f = \int_{\mathbb{R}^m} \cos\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y$$

   και

ii. $\overline{\mathcal{F}}f$ *περιττή* $\Leftrightarrow$ f *περιττή, και μάλιστα*

$$\overline{\mathcal{F}}f = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m} \sin\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

Επιπλέον θα χρειαστούμε το επόμενο, για το οποίο γίνεται χρήση της Πρότασης 11.1.1.9 και της Πρότασης 11.1.2.5, καθώς και του γνωστού αποτελέσματος

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \infty.$$

Πρόταση 11.5.2.3. *Έστω*

1. *περιττή* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *και*
2. $r_1, r_2 \in (0,\infty)$ *τ.ω.:* $r_1 < r_2$.

Ισχύει ότι $\exists K > 0$ *τ.ω.:*

$$\left|\int_{(r_1,r_2)} \frac{\mathcal{F}f(x)}{x}\mathrm{d}x\right| \le K\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})} \ge \left|\int_{(r_1,r_2)} \frac{\overline{\mathcal{F}}f(x)}{x}\mathrm{d}x\right|.$$

Οπότε αξιοποιώντας το παράδειγμα της περιττής $f \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & \text{αν } x \in [\mathrm{e},\infty) \\ \frac{1}{\mathrm{e}}x, & \text{αν } x \in [-\mathrm{e},\mathrm{e}] \\ -\frac{1}{\ln(-x)}, & \text{αν } x \in (-\infty,-\mathrm{e}], \end{cases}$$

σε συνδυασμό με την Πρόταση 11.5.2.2 και την Πρόταση 11.5.2.3 έπεται το επόμενο.

Θεώρημα 11.5.2.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big) \subsetneq C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \supsetneq \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big).$$

Επίσης, απευθείας από τον συνδυασμό του Θεωρήματος 8.1.1.4 και του Θεωρήματος 11.2.3.1 έπεται το παρακάτω.

Θεώρημα 11.5.2.3. *Ισχύει ότι οι εγκλεισμοί*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big) \subsetneq C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \supsetneq \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$$

είναι πυκνοί, δλδ

$$\overline{\mathcal{F}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}} = C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) = \overline{\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}}.$$

11.6 $\mathcal{F}$ στον L^2

Περνάμε τώρα στην μελέτη των $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$ στον $L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$, στον οποίο και εμφανίζουν ξεχωριστές και σημαντικές ιδιότητες.

11.6.1 $\mathcal{F}, \overline{\mathcal{F}} \in CL(L^2; L^2)$

Η ορθότητα του παρακάτω ορισμού έπεται λόγω της ισχύς της Πρότασης 6.1.8, καθώς επίσης του Θεωρήματος 11.2.1.1 και του Θεωρήματος 11.2.1.2.

Ορισμός 11.6.1.1 (μετασχηματισμός και συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον $[\mathcal{S}]$)**.** *Θέτουμε*

$$\mathcal{F}\colon \left\{[f] \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \,\middle|\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\} \to \left\{[f] \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \,\middle|\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}$$
$$[f] \mapsto \mathcal{F}[f] = [\mathcal{F}f]$$

και

$$\overline{\mathcal{F}}\colon \left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}\to\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}$$
$$[f]\mapsto\overline{\mathcal{F}}[f]=\left[\overline{\mathcal{F}}f\right]$$

για τον μετασχηματισμό και το συζυγή μετασχηματισμό, αντίστοιχα, Fourier στον

$$\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}.$$

Απευθείας από το θεώρημα Fubini έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 11.6.1.1. *Έστω* $[f_1],[f_2]\in\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}$. *Ισχύει ότι*

$$\langle\mathcal{F}[f_1],[f_2]\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\left\langle[f_1],\overline{\mathcal{F}}[f_2]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

Το επόμενο αποτελεί άμεση συνέπεια είτε του Θεωρήματος 11.2.4.1 είτε της Πρότασης 11.6.1.1.

Θεώρημα 11.6.1.1 (Plancherel στον $[\mathcal{S}]$)**.** *Έστω* $[f]\in\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}$. *Ισχύει ότι*

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\|[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\left\|\overline{\mathcal{F}}[f]\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του συνδυασμού του Θεωρήματος 6.10.5.2 και του Θεωρήματος 11.6.1.1 με το γνωστό αποτέλεσμα επέκτασης συνεχούς τελεστή από πυκνό διανυσματικό υπόχωρο με νόρμα σε διανυσματικό χώρο Banach (βλ, πχ, [33, Πρόταση 2.1.4]).

Θεώρημα 11.6.1.2 (μετασχηματισμός και συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον L^2)**.** $\exists!$ *τελεστές που ανήκουν στο* $CL\big(L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$*, οι οποίοι επεκτείνουν τους* $\mathcal{F}$ *και* $\overline{\mathcal{F}}$*, αντίστοιχα, του Ορισμού 11.6.1.1.*

Αυτούς τους επεκταμένους τελεστές τους συμβολίζουμε επίσης ως $\mathcal{F}$ *και* $\overline{\mathcal{F}}$*, αντίστοιχα, καθώς επίσης τους καλούμε μετασχηματισμό και συζυγή μετασχηματισμό, αντίστοιχα, Fourier στον* $L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$.

Ισχύει επίσης ότι

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\|[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\left\|\overline{\mathcal{F}}[f]\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})},\ \forall\,[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Σημείωση 11.6.1.1. *Προφανώς, λόγω του Θεωρήματος 6.10.5.2, έχουμε ότι ο εγκλεισμός*

$$\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}\subsetneq L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}}^{\|\lozenge-\blacklozenge\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}}=L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$

και άρα το ίδιο ισχύει και για τον εγκλεισμό

$$\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\, f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}\subsetneq L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

11.6.2 $\mathcal{F}^{-1}=\overline{\mathcal{F}}$ στον L^2

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 11.6.1.2, το επόμενο έπεται άμεσα από το Θεώρημα 6.10.5.2, το Θεώρημα 11.2.3.1 και την Πρόταση 11.6.1.1.

Θεώρημα 11.6.2.1 ($\mathcal{F}^{-1}=\overline{\mathcal{F}}$ στον L^2)**.** *Ισχύει ότι οι* $\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ *και* $\overline{\mathcal{F}}\big|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$

1. *είναι* $1-1$*, με*

$$\left(\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\right)^{-1}=\overline{\mathcal{F}}\big|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})},$$

δλδ

$$\overline{\mathcal{F}}\big|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\circ\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\circ\overline{\mathcal{F}}\big|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

2. *είναι επί,*

3. *είναι ισομετρίες,*

4. *διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο* $\langle \lozenge, \blacklozenge \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$, *δλδ*

$$\left\langle \mathcal{F}[f_1], \mathcal{F}[f_2] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \langle [f_1], [f_2] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \left\langle \overline{\mathcal{F}}[f_1], \overline{\mathcal{F}}[f_2] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}, \quad \forall\, [f_1], [f_2] \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$$

και

5. *είναι μεταξύ τους συζυγείς, ως τελεστές σε χώρο Hilbert, δλδ*

$$\langle \mathcal{F}[f_1], [f_2] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \left\langle [f_1], \overline{\mathcal{F}}[f_2] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}, \ \forall\, [f_1], [f_2] \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Κεφάλαιο 12

Διαφορικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές, $\mathcal{D}$, στον $\mathbb{R}^m$ (προσεχώς)

Εδώ μελετάμε τους γραμμικούς διαφορικούς τελεστές με σταθερούς συντελεστές, $\mathcal{D}$, εντός του θεωρητικού πλαισίου των κατανομών.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [20], [8], [22], [26], [21] και [9], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

12.1 Τελεστής $\mathcal{D} \in CL\big((C_c^\infty)'; (C_c^\infty)'\big)$

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 10.1.1.5 και της Πρότασης 10.1.1.9, εισάγουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 12.1.1 (τελεστές $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}_k$). *Έστω*

i. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*

ii. $\big\{K_\alpha \in \mathbb{F} \big| \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k\big\} \subsetneq \mathbb{F}$.

Θέτουμε

1. $\mathcal{D} = \mathcal{D}\big(k, \big\{K_\alpha \in \mathbb{F} \big| \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k\big\}\big) \in CL\big((C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'; (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$ *ως*
$$\mathcal{D} = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \\ \text{τ.ω.:} \\ |\alpha| \le k}} K_\alpha D^\alpha$$
και

2. $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k(\mathcal{D}) \in CL\big((C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'; (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$ *ως*
$$\mathcal{D}_k = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \\ \text{τ.ω.:} \\ |\alpha| = k}} K_\alpha D^\alpha,$$
για το πρωτεύον μέρος του $\mathcal{D}$.

Παρακάτω ακολουθούν αξιοσημείωτα παραδείγματα τελεστών $\mathcal{D}$.

Παράδειγμα 12.1.1. *Έστω*

i. $k \in \mathbb{N}_0$,

ii. $\big\{K_\alpha \in \mathbb{F} \big| \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k\big\} \subsetneq \mathbb{F}$ *και*

iii. $\mathcal{D} = \mathcal{D}\big(k, \big\{K_\alpha \in \mathbb{F} \big| \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k\big\}\big)$.

Διακρίνουμε ορισμένες θεμελιώδεις περιπτώσεις.

1. $\boxed{\text{Η απλούστερη περίπτωση}}$ D^α ...
2. $\boxed{\langle a, \mathrm{grad} \rangle_{\mathbb{F}^m}}$ ...
3. $\boxed{\Delta}$ ...
4. $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} - \Delta}$ ...
5. $\boxed{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} + \Delta}$ ...
6. $\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta}$ ...

μπλα μπλα...
μπλα μπλα...

12.2 Θεμελιώδης λύση

μπλα μπλα...
μπλα μπλα...

12.3 Λύση προβλήματος αρχικής τιμής

μπλα μπλα...
μπλα μπλα...

Μέρος **V**

Τα μοντέρνα (προσεχώς)

Κεφάλαιο 13

Χώροι Hölder, $C^{k,a}$, στον $\mathbb{R}^m$

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

Κεφάλαιο 14

Χώροι Sobolev, $\mathcal{W}^{s,p}$ και $\mathcal{H}^s$, στον $\mathbb{R}^m$

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

Κεφάλαιο 15

Χώροι Sobolev, $W^{s,p}$ και H^s, στον $\mathbb{R}^m$

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

Κεφάλαιο 16

Ελλειπτικός τελεστής στον $\mathbb{R}^m$

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

Βιβλιογραφία

[1] Albert Wilansky. *Topology for Analysis.* Dover Publications, 2008.

[2] Albert Wilansky. *Modern Methods in Topological Vector Spaces.* Dover Publications, 2013.

[3] Alex P.Robertson and Wendy Robertson. *Topological Vector Spaces, 2nd edition.* Cambridge University Press, 1973.

[4] Armen H. Zemanian. *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions, with Applications.* Dover, 1987.

[5] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press, 2003.

[6] François Tréves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Dover, 2006.

[7] Friedrich G. Friedlander and Mark Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions, 2nd edition.* Cambridge University Press, 1999.

[8] Gerald B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations, 2nd edition.* Princeton University Press, 1995.

[9] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition.* John Wiley & Sons, 1999.

[10] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[11] Iain T. Adamson. *A General Topology Workbook.* Birkhäuser, 1995.

[12] J. Ian Richards and Heekyung K. Youn. *The Theory of Distributions: A Nontechnical Introduction.* Cambridge University Press, 1990.

[13] James R. Munkres. *Topology, 2nd edition.* Pearson, 2018.

[14] James Yeh. *Real Analysis: Theory of Measure and Integration, 3nd edition.* World Scientific, 2014.

[15] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis, 2nd edition.* Springer, 2007.

[16] John Horváth. *Topological Vector Spaces and Distributions.* Dover, 2012.

[17] Josefina Alvarez. A Mathematical Presentation of Laurent Schwartz's Distributions. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 15:1–137, 2020. https://www.utgjiu.ro/math/sma/v15/p15_01.pdf.

[18] Jürgen Voigt. *A Course on Topological Vector Spaces.* Birkhäuser, 2020.

[19] Karl R. Stromberg. *An Introduction to Classical Real Analysis.* American Mathematical Society, 2015.

[20] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis, 2nd edition.* Springer, 2003.

[21] Laurent Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann, 1978.

[22] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations, 2nd edition.* American Mathematical Society, 2010.

[23] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. *Topological Vector Spaces, 2nd edition.* CRC Press, 2010.

[24] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics: Functional Analysis, revised and enlarged edition.* Elsevier, 2012.

[25] Robert E. Edwards. *Functional Analysis: Theory and Applications.* Dover Publications, 2012.

[26] Robert S. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.* World Scientific, 2003.

[27] Ronald C. Freiwald. *An Introduction to Set Theory and Topology.* Washington University in St. Louis, 2014. https://openscholarship.wustl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1020&context=books.

[28] Ryszard Engelking. *General Topology, revised and completed edition.* Heldermann Verlag, 1989.

[29] Stephen Willard. *General Topology.* Dover Publications, 2004.

[30] Tej Bahadur Singh. *Introduction to Topology.* Springer, 2019.

[31] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory, Volume I.* Springer, 2007.

[32] Walter Rudin. *Functional Analysis, 2nd edition.* McGraw-Hill, 1991.

[33] Αριστείδης Κατάβολος. *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών.* Εκδόσεις Συμμετρία, 2008.

[34] Σταθακόπουλος Α. Κωνσταντίνος. *Πραγματική Ανάλυση.* Αίθρα, 1989.

[35] Γεώργιος Κουμουλλής και Στυλιανός Νεγρεπόντης. *Θεωρία Μέτρου, νέα βελτιωμένη έκδοση.* Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[36] Στυλιανός Νεγρεπόντης και Θεοδόσιος Ζαχαριάδης και Νικόλαος Καλαμίδας και Βασιλική Φαρμάκη. *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση.* Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.

[37] Τηλέμαχος Ε. Χατζηαφράτης. *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές.* Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.