Θεωρία Κατανομών

Πρόχειρες Σημειώσεις

Νίκος Γιαλελής

Τμήμα Μαθηματικών
ΕΚΠΑ
Αθήνα, 2022

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στο παρόν κείμενο χρησιμοποιούνται βασικά στοιχεία από τα θεμελιώδη πεδία επιστητού της Ανάλυσης.

1. Πραγματική Ανάλυση: Μετρικός χώρος (βλ, πχ, [24], [21] και [17]), ψευδομετρικός χώρος[1] (βλ, πχ, [17]), ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση (βλ, πχ, [24] και [21]).

2. Θεωρία Μέτρου Lebesgue: μέτρο Lebesgue, μετρήσιμη κατά Lebesgue συνάρτηση, ολοκλήρωμα Lebesgue και θεωρήματα μονότονης και κυριαρχημένης σύγκλισης, μέτρα γινόμενα και θεωρήματα Tonelli και Fubini (βλ, πχ, [25], [13], [10] και [4]), θεώρημα αλλαγής μεταβλητών (βλ, πχ, [13], [10] και [4]), προσημασμένα και μιγαδικά μέτρα και θεώρημα Radon-Nikodym (αξιοποιούνται μόνο στο §2.3) (βλ, πχ, [25], [10] και [4]).

3. Τοπολογία (± καθώς αξιοποιείται μόνο η (ψευδο-)μετρική τοπολογία): Τοπολογικός χώρος, συνεχής συνάρτηση (βλ, πχ, [24], [26], [9], [17] και [4]).

4. Συναρτησιακή Ανάλυση: Διανυσματικός (ή αλλιώς γραμμικός) χώρος, διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα (ή αλλιώς ημινόρμα) και ο δυϊκός του διανυσματικός χώρος, πλήρης διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα, διανυσματικός χώρος Banach, διανυσματικός χώρος Hilbert (βλ, πχ, [24], [26], [23], [11], [20], [4] και [10]).

Ο αναγνώστης δεν απαιτείται να κατέχει πλήρως το σύνολο της προαναφεθείσας ύλης, αλλά να ανατρέχει στην αντίστοιχη βιβλιογραφία κατά την διάρκεια της μελέτης του τρέχοντος κειμένου.

Σεβόμενοι τα περιοριστικά πλαίσια ενός, προχωρημένου μεν, προπτυχιακού δε, μαθήματος, συνειδητά επιλέγουμε να $\boxed{\textbf{MHN}}$ γίνει χρήση τοπολογικών διανυσματικών χώρων (TVS), όπως είναι, για παράδειγμα, οι τοπικά κυρτοί χώροι (LCS), οι χώροι Fréchet, και τα επαγωγικά όρια, οπότε ούτε χρήση των αντίστοιχων συναρτησιακοαναλυτικών αποτελεσμάτων όπως οι εκδοχές του θεωρήματος Hahn-Banach στους προαναφερθέντες χώρους. Συγκεκριμένα δεν εφοδιάζουμε με τοπολογική δομή τον διανυσματικό χώρο $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ και ούτε τους διανυσματικούς χώρους κατανομών $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και $(S(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ (βλ παρακάτω σχετικά με τον συμβολισμό). Και αιτιολογούμε.

- Όσον αφορά τον

$$C_c^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} C^\infty_{\overline{U_i}}(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U),\ \text{τ.ω.: } U_i \nearrow U,$$

  αυτός αποτελεί το γνησίως επαγωγικό όριο χώρων Fréchet, οπότε δεν προχωράμε στην μελέτη της τοπολογικής του δομής.

- Όσον αφορά τους χώρους των κατανομών $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και $(S(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, αυτοί, από την μία, άμεσα επιδέχονται την ασθενή* τοπολογία (βλ, πχ, [20] και [5]) μέσω της αξιοποίησης της μικρότερης (ή αλλιώς αδρότερης, ή αλλιώς ασθενέστερης, ή αλλιώς αρχικής) τοπολογίας επαγόμενης από οικογένεια συναρτήσεων (βλ, πχ, [5, §3.1] και [9, §2.19, Exercise 10]), καθώς επίσης η ακολουθιακή κλειστότητά τους έπεται είτε με χρήση της αρχής ομοιόμορφου φράγματος (ή αλλιώς θεωρήματος Banach-Steinhaus) για τους F-χώρους (βλ, πχ, [20, Theorem 2.8]) είτε άμεσα (βλ, πχ, [1, Theorem 2.2-1]). Από την άλλη όμως, για να δειχθεί ότι κάθε γραμμική και ακολουθιακά συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κάποιον από αυτούς τους χώρους είναι και συνεχής απαιτείται εμβάθυνση στην θεωρία των τοπολογικών διανυσματικών χώρων (βλ, πχ, [11, §IV.5, Corollary 5.18] και [6, §IV.6, Corollary 3]), οπότε δεν προχωράμε στην μελέτη της τοπολογικής τους δομής.

[1] Αξιοποιούνται βασικά στοιχεία από την θεωρία των ψευδομετρικών χώρων (ορισμός, τοπολογία, σύγκλιση ακολουθιών, πληρότητα, συνέχεια συναρτήσεων). Σημειώνουμε ότι η έννοια του ψευδομετρικού χώρου είναι ελαφρώς γενικότερη αυτής του μετρικού, και στην πράξη, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μόνη ουσιαστική διαφορά των ψευδομετρικών χώρων από τους μετρικούς είναι η μοναδικότητα των ορίων η οποία χαρακτηρίζει αποκλειστικά τους τελευταίους.

Στο §1 εισάγουμε τον χώρο $\mathcal{L}^p$, τον εφοδιάζουμε με δομή διανυσματικού χώρου με ψευδονόρμα, εξάγεται η πληρότητά του, βρίσκουμε πυκνούς διανυσματικούς υποχώρους του και μελετάμε βασικές πράξεις όπως η συνέλιξη.

Ο χώρος $\mathcal{L}^p$ αποκτά δομή διανυσματικού χώρου Banach (/Hilbert για $p = 2$) μέσω του χώρου L^p, ο οποίος παρουσιάζεται στο §2.

Στο §3 εφοδιάζουμε με δομή μετρικού χώρου ορισμένους διανυσματικούς χώρους συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων, εξετάζουμε την πληρότητά τους και μελετάμε βασικούς εγκλεισμούς μεταξύ τους.

Τα βασικά αποτελέσματα θεμελιωδών χώρων κατανομών παρουσιάζονται στο §4. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, δεν εφοδιάζουμε αυτούς τους χώρους με δομή τοπολογικού χώρου παρά μόνο με διανυσματικού.

Στο §5 εισάγεται και μελετάται ο μετασχηματισμός Fourier.

Οι χώροι Sobolev $\mathcal{W}^{s,p}$ και $\mathcal{H}^s$ εισάγονται στο §6, τους οποίους εφοδιάζουμε με δομή διανυσματικού χώρου με ψευδονόρμα, εξάγεται η πληρότητά τους, συμπεραίνουμε την σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των ψευδονορμών τους, βρίσκουμε πυκνούς διανυσματικούς υποχώρους τους και μελετάμε βασικούς συνεχείς αλλά και συμπαγείς εγκλεισμούς.

Οι χώροι $\mathcal{W}^{s,p}$ και $\mathcal{H}^s$ αποκτούν δομή διανυσματικού χώρου Banach (/Hilbert για $p = 2$) και Hilbert, αντίστοιχα, μέσω των χώρων $W^{s,p}$ και H^s, ο οποίοι παρουσιάζονται στο §7.

Μια πρόταση για την συνέχιση της μελέτης αποτελεί το παρακάτω πλάνο.

0. Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι.

1. *Ύλη του παρόντος κειμένου.*

2. Ύλη του παρόντος κειμένου σε Lipschitz πολλαπλότητες στον $\mathbb{R}^m$.

3. Θεωρία ελλειπτικών ΜΔΕ (αποτελεί, μεταξύ άλλων, την γενίκευση της θεωρίας των σειρών Fourier).

Συμβολισμός

Γενικά συνολοθεωρητικά

1. Χρησιμοποιούμε το $\mathscr{I}$, με ή χωρίς δείκτη, για αυθαίρετα σύνολα.

2. Για $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$, συμβολίζουμε με
$$(\mathscr{I}_0)^c = \mathscr{I} \smallsetminus \mathscr{I}_0$$
το συμπλήρωμα του $\mathscr{I}_0$ ως προς το $\mathscr{I}$. Όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός αυτός είναι πάντα προφανές το σύνολο $\mathscr{I}$ δεδομένου του $\mathscr{I}_0$, οπότε δεν υπεισέρχεται το πρώτο σε αυτόν.

3. Γράφουμε $\mathcal{P}(\mathscr{I})$ για το δυναμοσύνολο του $\mathscr{I}$.

4. Γράφουμε $\approx$ για να εκφράσουμε την ισοδυναμία δύο συνόλων, δλδ
$$\mathscr{I}_1 \approx \mathscr{I}_2 \Leftrightarrow \exists f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \text{ τ.ω.: } 1-1 \ \& \text{ επί}.$$
Μάλιστα αν η αντίστοιχη f είναι γνωστή, τότε γράφουμε $\overset{f}{\approx}$.

Γενικά στον $\mathbb{F}^m$

1. i. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ και $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

   ii. Γράφουμε k, l, m, n, κ.ο.κ., με ή χωρίς δείκτη, για αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbb{N}$, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

   iii. Χρησιμοποιούμε τα α, β, κ.ο.κ., με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $(\mathbb{N}_0)^m = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{N}_0$.

iv. Για $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ γράφουμε

$$\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m, \text{ με } \alpha_i \in \mathbb{N}_0, \ \forall i \in \{1,\ldots,m\},$$

για την ανάλυση του α σε συντεταγμένες (ή, εναλλακτικά, μεταβλητές), δλδ για την γραφή του ως διατεταγμένη m-άδα στοιχείων του $(\mathbb{N}_0)^m$ (όπως προκύπτει από τον ορισμό του $(\mathbb{N}_0)^m$).

2. Το $\mathbb{F}$ σημαίνει είτε το σώμα $\mathbb{R}$, είτε το σώμα $\mathbb{C}$.

3. i. Χρησιμοποιούμε τα t, x, y, z, κ.ο.κ., με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbb{F}^m = \prod_{i=1}^m \mathbb{F}$.

   ii. Για $x \in \mathbb{F}^m$ γράφουμε

$$x = (x_i)_{i=1}^m, \text{ με } x_i \in \mathbb{F}, \ \forall i \in \{1,\ldots,m\},$$

για την ανάλυση του x σε συντεταγμένες (ή, εναλλακτικά, μεταβλητές), δλδ για την γραφή του ως διατεταγμένη m-άδα στοιχείων του $\mathbb{F}^m$ (όπως προκύπτει από τον ορισμό του $\mathbb{F}^m$).

4. i. Για $x \in \mathbb{F}$, γράφουμε $\overline{x} \in \mathbb{F}$ για τον συζυγή αριθμό του x, δλδ

$$\overline{x} = \begin{cases} x, & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{R} \\ (\mathrm{Re}(x), -\mathrm{Im}(x)), & \text{αν } \mathbb{F} = \mathbb{C}, \end{cases}$$

όπου Re και Im το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντίστοιχα.

   ii. Κατά συντεταγμένη ορίζεται το αντίστοιχο συζυγές στοιχείο κάθε $x \in \mathbb{F}^m$, δλδ

$$\overline{x} = (\overline{x_i})_{i=1}^m.$$

5. i. Γράφουμε $\langle \lozenge, \blacklozenge \rangle_{\mathbb{F}^m}$ για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{F}^m$, δλδ για την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \langle \lozenge, \blacklozenge \rangle_{\mathbb{F}^m} \colon (\mathbb{F}^m)^2 &\to \mathbb{F} \\ (x,y) &\mapsto \langle x, y\rangle_{\mathbb{F}^m} = \sum_{i=1}^m \overline{x_i} y_i. \end{aligned}$$

   ii. Συμβολίζουμε με $|\lozenge|$ την συνήθη νόρμα στον $\mathbb{F}^m$

$$\begin{aligned} |\lozenge| \colon \mathbb{F}^m &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto |x| = (\langle x, x\rangle_{\mathbb{F}^m})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^m \overline{x_i} x_i\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

6. Αποκλειστικά στην περίπτωση του $(\mathbb{N}_0)^m$, και όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρανόησης, συμβολίζουμε επίσης με $|\lozenge|$ την συνάρτηση

$$\begin{aligned} |\lozenge| \colon (\mathbb{N}_0)^m &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto |\alpha| = \sum_{i=1}^m \alpha_i. \end{aligned}$$

7. Γράφουμε S, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $\mathcal{P}(\mathbb{F}^m)$.

8. Έστω $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$.

   i. Για $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^m)$ γράφουμε

$$a_1 S_1 + a_2 S_2 = \left\{ y \in \mathbb{F}^m \,\middle|\, \exists\, (x_1, x_2) \in S_1 \times S_2 \text{ τ.ω.: } y = a_1 x_1 + a_2 x_2 \right\}.$$

Το άθροισμα αυτό (για $a_1 = a_2 = 1$) καλείται στην βιβλιογραφία και ως άθροισμα Minkowski. Αν $S_1 = \{x_1\}$, και δεν υπάρχει πιθανότητα παρεξήγησης, τότε γράφουμε σκέτο x_1 αντί για $\{x_1\}$ στην θέση του S_1 στην παραπάνω έκφραση.

   ii. Αντίστοιχα συμβολίζουμε και τον γραμμικό συνδυασμό συνόλων υποσυνόλων και, συγκεκριμένα, για $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{F}^m)$ γράφουμε

$$a_1 \mathcal{S}_1 + a_2 \mathcal{S}_2 = \left\{ S \in \mathcal{P}(\mathbb{F}^m) \,\middle|\, \exists\, (S_1, S_2) \in \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \text{ τ.ω.: } S = a_1 S_1 + a_2 S_2 \right\},$$

όπου πάλι κάνουμε την παραπάνω απλοποίηση σε περίπτωση μονοσυνόλου που περιέχει μονοσύνολο.

Τοπολογία

1. Έστω τοπολογικός χώρος $(\mathscr{I}, \mathfrak{T})$ και $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$.

   i. Γράφουμε
   $$(\mathscr{I}_0)^\circ = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathfrak{T} \cap \mathcal{P}(\mathscr{I}_0)} \mathcal{U},$$
   για το εσωτερικό του $\mathscr{I}_0$.

   ii. Γράφουμε
   $$\overline{\mathscr{I}_0} = \bigcap_{\substack{\mathscr{I}_1 \in \mathcal{P}(\mathscr{I}) \smallsetminus \mathfrak{T} \\ \text{τ.ω.:} \\ \mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}_1}} \mathscr{I}_1,$$
   για την κλειστή θήκη (ή αλλιως κλειστότητα) του $\mathscr{I}_0$.

   iii. Γράφουμε
   $$\partial \mathscr{I}_0 = \overline{\mathscr{I}_0} \smallsetminus (\mathscr{I}_0)^\circ,$$
   για το (τοπολογικό) σύνορο του $\mathscr{I}_0$.

2. Έστω τοπολογικός χώρος $(\mathscr{I}, \mathfrak{T})$ και $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$. Λέμε ότι ο παραπάνω εγκλεισμός είναι πυκνός όταvν
   $$\overline{\mathscr{I}_0} = \mathscr{I}.$$

3. Έστω ψευδομετρικός χώρος $(\mathscr{I}, \rho(\lozenge, \blacklozenge))$ και $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$. Για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε ότι η κλειστή θήκη του $\mathscr{I}_0$ θεωρείται ως προς την ψευδομετρική τοπολογία που επάγει η $\rho(\lozenge, \blacklozenge)$, γράφουμε
   $$\overline{\mathscr{I}_0}^{\rho(\lozenge, \blacklozenge)}.$$

4. Έστω τοπολογικός χώρος $(\mathscr{I}, \mathfrak{T})$ και $\mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2 \in \mathcal{P}(\mathscr{I})$. Γράφουμε $\mathscr{I}_1 \subset\subset \mathscr{I}_2$ και λέμε ότι το $\mathscr{I}_1$ περιέχεται συμπαγώς στο $\mathscr{I}_2$ όταvν

   i. $\overline{\mathscr{I}_1} \subseteq (\mathscr{I}_2)^\circ$ και

   ii. το $\overline{\mathscr{I}_1}$ είναι συμπαγές.

Τοπολογία στον $\mathbb{F}^m$

1. Γράφουμε την ανοικτή μπάλα, ως προς την μετρική που επάγει η $|\lozenge|$ στον $\mathbb{F}^m$, με κέντρο το $x_0 \in \mathbb{F}^m$ και ακτίνα $\rho > 0$, ως
   $$B(x_0, \rho) = \left\{ x \in \mathbb{F}^m \,\middle|\, |x - x_0| < \rho \right\}.$$

2. Χρησιμοποιούμε το U, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα ανοικτά στοιχεία του $\mathcal{P}(\mathbb{F}^m)$.

3. Για $S \subseteq \mathbb{F}^m$ και $\varepsilon > 0$ γράφουμε
   $$S^\varepsilon = S + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{x \in S} B(0, \varepsilon) = S \cup \bigcup_{x \in \partial S} B(0, \varepsilon).$$
   Προφανώς το S^ε είναι ανοικτό.

4. Θυμίζουμε ότι $S \subset\subset \mathbb{R}^m$ όταvν το S είναι φραγμένο.

5. Για $U \subseteq \mathbb{F}^m$ και $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U)$. Γράφουμε $U_i \Rsh U$ όταvν

   i. $U_i \subset\subset U_{i+1} \subset\subset U$, $\forall i \in \mathbb{N}$, και

   ii. $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$.

   Τέτοια γνησίως αύξουσα, συμπαγώς περιεχόμενη και καλύπτουσα ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων ανοικτού συνόλου υπάρχει πάντα (βλ, πχ, [8]).

6. i. Θυμίζουμε ότι όταν $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{F}^m$, το S_0 είναι (σχετικά) ανοικτό στο S ανν $\exists U \subseteq \mathbb{F}^m$, τ.ω.: $S_0 = U \cap S$.

ii. $\forall S \subseteq \mathbb{F}^m$ γράφουμε $\mathcal{O}(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$ για το

$$\mathcal{O}(S) = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, \exists U \subseteq \mathbb{F}^m \text{ τ.ω.: } S_0 = U \cap S \right\}.$$

Έτσι, σύμφωνα με τον συμβολισμό μας, $U \in \mathcal{O}(\mathbb{F}^m)\ \forall U \subseteq \mathbb{F}^m$.

iii. Αν $S \neq \varnothing$, τότε $\forall x \in S$ γράφουμε $\mathcal{O}_x(S) \subsetneq \mathcal{O}(S)$ για το

$$\mathcal{O}_x(S) = \mathcal{O}(S) \cap \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, x \in S_0 \right\}.$$

7. i. Θυμίζουμε ότι όταν $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{F}^m$, το S_0 είναι (σχετικά) κλειστό στο S ανν το $S \smallsetminus S_0$ είναι ανοικτό στο S, δλδ ανν $\exists$ κλειστό $S_1 \subseteq \mathbb{F}^m$, τ.ω.: $S_0 = S_1 \cap S$.

ii. $\forall S \subseteq \mathbb{F}^m$ γράφουμε $\mathcal{C}(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$ για το

$$\mathcal{C}(S) = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, S \smallsetminus S_0 \in \mathcal{O}(S) \right\} = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, \exists \text{ κλειστό } S_1 \subseteq \mathbb{F}^m \text{ τ.ω.: } S_0 = S_1 \cap S \right\}.$$

Συναρτήσεις μεταξύ συνόλων ή χώρων

1. Έστω $\mathscr{I}$.

   i. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathscr{I}} \colon \mathscr{I} &\to \mathscr{I} \\ x &\mapsto \mathrm{id}_{\mathscr{I}}(x) = x, \end{aligned}$$

   για την ταυτοτική συνάρτηση στον $\mathscr{I}$.

   ii. Αν $\mathscr{I} = \mathbb{R}^m$, τότε γράφουμε απλουστευτικά

$$\mathrm{id}_m = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}.$$

2. Έστω $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \iota \colon \mathscr{I}_0 &\to \mathscr{I} \\ x &\mapsto \iota(x) = \mathrm{id}_{\mathscr{I}}(x) = x, \end{aligned}$$

   για την συνάρτηση εγκλεισμού $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}$.

3. Έστω $\mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}_1$ και $\mathscr{I}_2$, καθώς επίσης $f \colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2$. Γράφουμε

$$f|_{\mathscr{I}_0} = f \circ \iota, \text{ όπου } \iota \text{ η συνάρτηση εγκλεισμού } \mathscr{I}_0 \subseteq \mathscr{I}_1,$$

   για τον περιορισμό της f στο $\mathscr{I}_0$, δλδ

$$\begin{aligned} f|_{\mathscr{I}_0} \colon \mathscr{I}_0 &\to \mathscr{I}_2 \\ x &\mapsto f|_{S_0}(x) = f(x). \end{aligned}$$

   Συχνά χρησιμοποιούμε το περιορισμό απλά για να αποσαφηνίσουμε/τονίσουμε σε ποιο σύνολο θεωρούμε ότι ορίζεται μία συνάρτηση, το σύμβολο της οποίας ενδεχομένως να έχει πολλαπλές χρήσεις.

4. Γράφουμε $\cong$ για εκφράσουμε την γραμμική ισομορφία δύο διανυσματικών χώρων επάνω στο ίδιο σώμα, δλδ αν $\mathscr{I}_1$ & $\mathscr{I}_1$ είναι δύο διανυσματικοί χώροι επάνω στο ίδιο σώμα, τότε

$$\mathscr{I}_1 \cong \mathscr{I}_2 \Leftrightarrow \exists f \colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \text{ τ.ω.: γραμμική, } 1-1 \text{ \& επί.}$$

   Μάλιστα αν η αντίστοιχη f είναι γνωστή, τότε γράφουμε $\overset{f}{\cong}$ και προφανώς ισχύει ότι

$$\mathscr{I}_1 \overset{f}{\cong} \mathscr{I}_2 \Rightarrow \mathscr{I}_1 \overset{f}{\approx} \mathscr{I}_2.$$

5. Για $S \subseteq \mathbb{R}^m$ γράφουμε $\chi_S \colon S \to \{0,1\}$ για την χαρακτηριστική συνάρτηση του S, δλδ

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in S, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

6. Έστω $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S_0 \to \mathbb{F}$, γράφουμε $\mathring{f}^S$ για την μηδενική επέκταση της f στο S, δλδ

$$\mathring{f}^S\colon S \to \mathbb{F}$$
$$x \mapsto \mathring{f}^S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in S_0 \\ 0, & \text{αν } x \in S \setminus S_0. \end{cases}$$

7. Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(\mathscr{I}_1, \mathfrak{T}_1)$ και $(\mathscr{I}_2, \mathfrak{T}_2)$. Γράφουμε

$$C(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2) = \left\{ f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \,\middle|\, f \text{ συνεχής} \right\} = \left\{ f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \,\middle|\, f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathfrak{T}_1,\ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{T}_2 \right\}.$$

8. Έστω δύο τοπολογικοί χώροι $(\mathscr{I}_1, \mathfrak{T}_1)$ και $(\mathscr{I}_2, \mathfrak{T}_2)$ τ.ω.: $\mathscr{I}_1 \subseteq \mathscr{I}_2$. Λέμε ότι ο παραπάνω εγκλεισμός είναι συνεχής και γράφουμε

$$\mathscr{I}_1 \hookrightarrow \mathscr{I}_2,$$

όταν $\iota \in C(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2)$.

9. i. Έστω δύο τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$[2] $(\mathscr{I}_1, \mathfrak{T}_1)$ και $(\mathscr{I}_2, \mathfrak{T}_2)$. Γράφουμε

$$CL(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2) = \left\{ f \in C(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2) \,\middle|\, f \text{ γραμμική} \right\}.$$

Θυμίζουμε ότι το παραπάνω σύνολο, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

ii. Έστω δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ με ψευδονόρμα $\left(\mathscr{I}_1, \|\Diamond\|_{\mathscr{I}_1}\right)$ και $\left(\mathscr{I}_2, \|\Diamond\|_{\mathscr{I}_2}\right)$.

α′. Θυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} CL(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2) &= \left\{ f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \,\middle|\, f \text{ γραμμική και συνεχής στο } 0 \right\} = \\ &= \left\{ f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \,\middle|\, f \text{ γραμμική και συνεχής σε κάποιο } g \in \mathscr{I}_1 \right\} = \\ &= \left\{ f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \,\middle|\, f \text{ γραμμική και ομοιόμορφα συνεχής} \right\} = \\ &= \left\{ f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \,\middle|\, f \text{ γραμμική και Lipschitz} \right\} = \\ &= \left\{ f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2 \,\middle|\, f \text{ γραμμική } \&\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } \|f(g)\|_{\mathscr{I}_2} \le K\|g\|_{\mathscr{I}_1},\ \forall g \in \mathscr{I}_1 \right\}, \end{aligned}$$

όπου προφανώς το 0 εδώ συμβολίζει το μηδενικό στοιχείο του $\mathscr{I}_1$.

β′. Θυμίζουμε ότι το ζεύγος $\left(CL(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2), \|\Diamond\|_{CL(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2)}\right)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με ψευδονόρμα, όπου

$$\begin{aligned} \|f\|_{CL(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2)} &= \sup\left\{ \|f(g)\|_{\mathscr{I}_2} \,\middle|\, g \in \mathscr{I}_1 \text{ τ.ω.: } \|g\|_{\mathscr{I}_1} \le 1 \right\} = \\ &= \sup\left\{ \|f(g)\|_{\mathscr{I}_2} \,\middle|\, g \in \mathscr{I}_1 \text{ τ.ω.: } \|g\|_{\mathscr{I}_1} = 1 \right\} = \\ &= \sup\left\{ \frac{\|f(g)\|_{\mathscr{I}_2}}{\|g\|_{\mathscr{I}_1}} \,\middle|\, g \in \mathscr{I}_1 \text{ τ.ω.: } \|g\|_{\mathscr{I}_1} \ne 0 \right\} = \\ &= \inf\left\{ K \ge 0 \,\middle|\, \|f(g)\|_{\mathscr{I}_2} \le K\|g\|_{\mathscr{I}_1},\ \forall g \in \mathscr{I}_1 \right\},\ \forall f \in CL(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2). \end{aligned}$$

γ′. Θυμίζουμε ότι αν, επιπλέον, η $\|\Diamond\|_{\mathscr{I}_2}$ είναι νόρμα, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\|\Diamond\|_{CL(\mathscr{I}_1;\mathscr{I}_2)}$.

iii. Έστω τοπολογικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ $(\mathscr{I}, \mathfrak{T})$. Γράφουμε $\left(\mathscr{I}', \|\Diamond\|_{CL(\mathscr{I};\mathbb{F})}\right)$ για τον δυϊκό τοπολογικό διανυσματικό χώρο του $\mathscr{I}$ επί του $\mathbb{F}$ με νόρμα, δλδ

$$\mathscr{I}' = CL(\mathscr{I};\mathbb{F}).$$

[2] Στο παρόν κείμενο, με την έννοια «τοπολογικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$» εννοούμε, απλά, τοπολογικός χώρος και διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, ταυτόχρονα.

Συνεχείς συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{F}$

1. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Θυμίζουμε ότι το σύνολο

$$\begin{aligned} C(S;\mathbb{F}) &= \left\{ f : S \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ συνεχής} \right\} = \\ &= \left\{ f : S \to \mathbb{F} \,\middle|\, \forall x \in S \ \&\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists S_0 \in \mathcal{O}_x(S) \text{ τ.ω.: } |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall y \in S_0 \right\} = \\ &= \left\{ f : S \to \mathbb{F} \,\middle|\, f^{-1}(S_0) \in \mathcal{O}(S),\ \forall S_0 \in \mathcal{O}(f(S)) \right\} = \\ &= \left\{ f : S \to \mathbb{F} \,\middle|\, f^{-1}(S_0) \in \mathcal{C}(S),\ \forall S_0 \in \mathcal{C}(f(S)) \right\}, \end{aligned}$$

εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

2. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Γράφουμε

$$C_b(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \sup(|f|) < \infty \right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων $f : U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C_b(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C(S;\mathbb{F})$.

3. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} C_u(S;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ ομοιόμορφα συνεχής} \right\} = \\ &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ τ.ω.: } x, y \in S \ \&\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right\} = \\ &= \left\{ f \in C(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S \ \&\ \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0 \right\}, \end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων $f : S \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C_u(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C(S;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι αν $S \subset\subset \mathbb{R}^m$, τότε ο $C_u(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_b(S;\mathbb{F})$.

4. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Γράφουμε

$$C_{b,u}(S;\mathbb{F}) = C_b(S;\mathbb{F}) \cap C_u(S;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των φραγμένων και ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων $f : S \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C_{b,u}(S;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος τόσο του $C_b(S;\mathbb{F})$ όσο και του $C_u(S;\mathbb{F})$. Το συμπέρασμα του παραπάνω σημείου γράφεται τώρα ως

$$S \subset\subset \mathbb{R}^m \Rightarrow C_u(S;\mathbb{F}) = C_{b,u}(S;\mathbb{F}).$$

5. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Γράφουμε

$$C_0(U;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, \lim_{\mathrm{dist}(x,\partial U)\to 0} |f(x)| = 0 = \lim_{|x|\to\infty} |f(x)| \right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών συναρτήσεων $f : U \to \mathbb{F}$ που μηδενίζονται στο σύνορο και στο άπειρο (το δεύτερο έχει νόημα όταν το U δεν είναι φραγμένο). Προφανώς ο $C_0(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

6. Για $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f \in C(S;\mathbb{F})$, γράφουμε $\mathrm{supp}(f)$ για τον φορέα της f, δλδ

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{f^{-1}\big(\{0\}^c\big)} \cap S = \overline{\left\{ x \in S \,\middle|\, f(x) \neq 0 \right\}} \cap S,$$

όπου προφανώς το 0 εδώ συμβολίζει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{F}$. Περιφραστικά, αν $x \notin \mathrm{supp}(f)$, τότε $\exists S_0 \in \mathcal{O}_x(S)$ τ.ω.: $f = 0$, δλδ το $S \setminus \mathrm{supp}(f)$ είναι το μέγιστο σχετικά ανοικτό στο S υποσύνολό του στο οποίο μηδενίζεται η f.

7. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$.

i. Γράφουμε

$$C_c(S;\mathbb{F}) = \{f \in C(S;\mathbb{F}) \,|\, f \text{ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα}\} = \\ = \{f \in C(S;\mathbb{F}) \,|\, \mathrm{supp}(f) \subset\subset S\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα. Προφανώς ο $C_c(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_{b,u}(S;\mathbb{F})$ και ειδικότερα, όταν $S = U$, ο $C_c(S;\mathbb{F})$ του $C_0(S;\mathbb{F})$.

ii. Έστω $S_0 \subset\subset S$. Γράφουμε

$$C_{S_0}(S;\mathbb{F}) = \{f \in C_c(S;\mathbb{F}) \,|\, f \text{ με φορέα περιεχόμενο εντός του } S_0\} = \\ = \{f \in C_c(S;\mathbb{F}) \,|\, \mathrm{supp}(f) \subseteq S_0\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχών συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$ με φορέα περιεχόμενο εντός του $S_0 \subset\subset S$. Προφανώς ο $C_{S_0}(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_c(S;\mathbb{F})$.

Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^m$

1. Γράφουμε $\mathfrak{M}^m \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ για την σ-άλγεβρα των μετρήσιμων κατά Lebesgue $S \subseteq \mathbb{R}^m$.

2. Χρησιμοποιούμε το λ^m για το μέτρο Lebesgue, το οποίο έχει ως πεδίο ορισμού την $\mathfrak{M}^m$.

Μετρήσιμες κατά Lebesgue συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{F}$

1. Για $S \in \mathfrak{M}^m$, γράφουμε

$$M(S;\mathbb{F}) = \{f\colon S \to \mathbb{F} \,|\, f \text{ μετρήσιμη κατά Lebesgue}\}.$$

Θυμίζουμε ότι το παραπάνω σύνολο, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$. Θυμίζουμε επίσης ότι

$$f, g \in M(S;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M(S;\mathbb{F}).$$

2. Για $S \in \mathfrak{M}^m$, γράφουμε

$$\mathrm{ess\,sup}(f) = \inf\{K \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \le K,\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in S\},$$

για το ουσιώδες supremum της f. Θυμίζουμε ότι αν $f \in C(S;\mathbb{F})$, τότε

$$\mathrm{ess\,sup}(f) = \sup(f).$$

3. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &= \{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,|\, f \text{ ταχέως φθίνουσα}\} = \\
&= \{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,|\, \mathrm{ess\,sup}\big(|(\mathrm{id}_m)^\alpha f|\big) < \infty,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m\} = \\
&= \{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,|\, \mathrm{ess\,sup}\big(|\mathrm{id}_m|^n\,|f|\big) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\} = \\
&= \{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,|\, \mathrm{ess\,sup}\big((1 + |\mathrm{id}_m|^n)\,|f|\big) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\} = \\
&= \{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,|\, \mathrm{ess\,sup}\big((1 + |\mathrm{id}_m|)^n\,|f|\big) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \mathrm{ess\,sup}\Big(\big(1 + |\mathrm{id}_m|^2\big)^n\,|f|\Big) < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le \frac{K}{\big(1 + |x|^2\big)^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le \frac{K}{(1 + |x|)^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m\right\} = \\
&= \left\{f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le \frac{K}{1 + |x|^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m\right\},
\end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ταχέως φθινουσών μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

$$M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, |f(x)| = O\!\left(\frac{1}{|x|^n}\right),\ \text{καθώς } |x| \to \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Θυμίζουμε επίσης ότι

$$f, g \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

4. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ βραδέως αύξουσα} \right\} = \\
&= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } \operatorname{ess\,sup}\left(\frac{|f|}{1 + |\mathrm{id}_m|^n} \right) < \infty \right\} = \\
&= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } \operatorname{ess\,sup}\left(\frac{|f|}{(1 + |\mathrm{id}_m|)^n} \right) < \infty \right\} = \\
&= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } \operatorname{ess\,sup}\left(\frac{|f|}{\left(1 + |\mathrm{id}_m|^2\right)^n} \right) < \infty \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists\, (n \in \mathbb{N}_0 \ \&\ K > 0) \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le K\left(1 + |x|^2\right)^n,\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m \right\} = \\
&= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists\, (n \in \mathbb{N}_0 \ \&\ K > 0) \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le K(1 + |x|)^n,\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m \right\} = \\
&= \left\{ f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists\, (n \in \mathbb{N}_0 \ \&\ K > 0) \text{ τ.ω.: } |f(x)| \le K\left(1 + |x|^n\right),\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m \right\},
\end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των βραδέως αυξουσών μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ και γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του $M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

$$M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| = O\left(|x|^n\right),\ \text{καθώς } |x| \to \infty \right\}.$$

Θυμίζουμε επίσης ότι

$$f, g \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και

$$f \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \ \&\ g \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \ \Rightarrow fg \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

5. Για $S \in \mathfrak{M}^m$ και $f \in M(S;\mathbb{F})$, γράφουμε

$$\operatorname{ess\,supp}(f) = S \smallsetminus \bigcup_{U \in \mathcal{U}_f} U,\ \text{ όπου } \mathcal{U}_f = \left\{ U \subseteq S \,\middle|\, f|_U \equiv 0,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού} \right\},$$

για τον ουσιώδη φορέα της f. Θυμίζουμε ότι αν $f \in C(S;\mathbb{F})$, τότε

$$\operatorname{ess\,supp}(f) = \operatorname{supp}(f).$$

6. Για $S \in \mathfrak{M}^m$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
M_c(S;\mathbb{F}) &= \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ με συμπαγώς περιεχόμενο ουσιώδη φορέα} \right\} = \\
&= \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \operatorname{ess\,supp}(f) \subset\subset S \right\},
\end{aligned}$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο ουσιώδη φορέα. Προφανώς ο $M_c(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(S;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

$$f, g \in M_c(S;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_c(S;\mathbb{F}),$$

καθώς επίσης

$$f \in M(S;\mathbb{F}) \ \&\ g \in M_c(S;\mathbb{F}) \ \Rightarrow fg \in M_c(S;\mathbb{F}).$$

7. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Θυμίζουμε ότι ο $C(S;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M(S;\mathbb{F})$ όταν $S \in \mathfrak{M}^m$.

8. Έστω $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S_0 \to \mathbb{F}$. Θυμίζουμε ότι $\mathring{f}^S \in M(S;\mathbb{F})$ όταν $S_0, S \in \mathfrak{M}^m$.

9. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Θυμίζουμε ότι $\chi_S \in M(S;\mathbb{F})$ όταν $S \in \mathfrak{M}^m$.

10. Για $S \in \mathfrak{M}^m$, γράφουμε

$$M_s(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f \text{ απλή} \right\} = \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f(S) \text{ πεπερασμένα αριθμήσιμο} \right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των απλών μετρήσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων $f\colon S \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $M_s(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(S;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι μία $f \in M(S;\mathbb{F})$ είναι απλή όταν $\exists!$ πεπερασμένη διαμέριση του S, $\{S_i\}_{i=1}^n \subsetneq \mathfrak{M}^m \setminus \{\varnothing\}$, με την έννοια ότι τα S_i είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωσή τους είναι το ίδιο το S, & $\exists!$ πεπερασμένη ακολουθία διάφορων μεταξύ τους αριθμών, $\{a_i\}_{i=1}^n \subsetneq \mathbb{F}$, τ.ω.:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{S_i},$$

όπου η παραπάνω παράσταση λέγεται κανονική μορφή της απλής f. Θυμίζουμε επίσης ότι

$$f, g \in M_s(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow fg \in M_s(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

11. Για $S \in \mathfrak{M}^m$ και $f \in M(S;\mathbb{F})$, συμβολίζουμε εναλλακτικά

$$\int_S f(x)\mathrm{d}x = \int_S f\mathrm{d}\lambda^m.$$

Συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{F}$

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

1. Έστω $k \in \mathbb{N}_0$.

   i. Γράφουμε

   $$C^k(U;\mathbb{F}) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{F} \,\middle|\, D^\alpha f \in C(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k \right\},$$

   όπου

   $$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\sum_{i=1}^m \alpha_i}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}},\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,$$

   για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των πεπερασμένα - τάξης k εδώ - συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C^k(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(U;\mathbb{F})$.

   ii. Γράφουμε

   $$C_b^k(U;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in C_b(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k \right\},$$

   για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες διαφορίσεις. Προφανώς ο $C_b^k(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k(U;\mathbb{F})$.

   iii. Γράφουμε

   $$C_u^k(U;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in C_u(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k \right\},$$

   για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k ομοιόμορφα συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C_u^k(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k(U;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι αν $U \subset\subset \mathbb{R}^m$, τότε ο $C_u^k(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_b^k(U;\mathbb{F})$.

iv. Γράφουμε
$$C^k_{b,u}(U;\mathbb{F}) = C^k_b(U;\mathbb{F}) \cap C^k_u(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k ομοιόμορφα συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες διαφορίσεις. Προφανώς ο $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος τόσο του $C^k_b(U;\mathbb{F})$ όσο και του $C^k_u(U;\mathbb{F})$. Το συμπέρασμα του παραπάνω σημείου γράφεται τώρα ως
$$U \subset\subset \mathbb{R}^m \Rightarrow C^k_u(U;\mathbb{F}) = C^k_{b,u}(U;\mathbb{F}).$$

v. Γράφουμε
$$C^k_0(U;\mathbb{F}) = \left\{f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in C_0(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k\right\},$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με διαφορίσεις που μηδενίζονται στο σύνορο και στο άπειρο. Προφανώς ο $C^k_0(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

vi. Γράφουμε
$$C^k_c(U;\mathbb{F}) = C^k(U;\mathbb{F}) \cap C_c(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα. Προφανώς ο $C^k_c(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_0(U;\mathbb{F})$.

vii. Έστω $S \subset\subset U$. Γράφουμε
$$C^k_S(U;\mathbb{F}) = C^k(U;\mathbb{F}) \cap C_S(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των τάξης k συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φορέα περιεχόμενο εντός του $S \subset\subset U$. Προφανώς ο $C^k_S(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_c(U;\mathbb{F})$ και μάλιστα ισχύει ότι
$$C^k_c(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{S\subset\subset U} C^k_S(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0\subset\subset U} C^k_{U_0}(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0\subset\subset U} C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} C^k_{\overline{U_i}}(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U), \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U.$$

2. i. Γράφουμε
$$C^\infty(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών (ή, αλλιώς, απείρως (συνεχώς) διαφορίσιμων) συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$. Προφανώς ο $C^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $M(U;\mathbb{F})$.

ii. Γράφουμε
$$C^\infty_b(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k_b(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες διαφορίσεις. Προφανώς ο $C^\infty_b(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty(U;\mathbb{F})$.

iii. Γράφουμε
$$C^\infty_u(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k_u(U;\mathbb{F}),$$
για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με ομοιόμορφα συνεχείς διαφορίσεις. Προφανώς ο $C^\infty_u(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty(U;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι αν $U \subset\subset \mathbb{R}^m$, τότε ο $C^\infty_u(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^\infty_b(U;\mathbb{F})$.

iv. Γράφουμε

$$C_{b,u}^{\infty}(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_{b,u}^{k}(U;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς διαφορίσεις. Προφανώς ο $C_{b,u}^{\infty}(U;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός υπόχωρος τόσο του $C_b^{\infty}(U;\mathbb{F})$ όσο και του $C_u^{\infty}(U;\mathbb{F})$. Το συμπέρασμα του παραπάνω σημείου γράφεται τώρα ως

$$U \subset\subset \mathbb{R}^m \Rightarrow C_u^{\infty}(U;\mathbb{F}) = C_{b,u}^{\infty}(U;\mathbb{F}).$$

v. Γράφουμε

$$C_0^{\infty}(U;\mathbb{F}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^{k}(U;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με διαφορίσεις που μηδενίζονται στο σύνορο και στο άπειρο. Προφανώς ο $C_0^{\infty}(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_{b,u}^{\infty}(U;\mathbb{F})$.

vi. Γράφουμε

$$C_c^{\infty}(U;\mathbb{F}) = C^{\infty}(U;\mathbb{F}) \cap C_c(U;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα. Προφανώς ο $C_c^{\infty}(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_0^{\infty}(U;\mathbb{F})$.

vii. Έστω $S \subset\subset U$. Γράφουμε

$$C_S^{\infty}(U;\mathbb{F}) = C^{\infty}(U;\mathbb{F}) \cap C_S(U;\mathbb{F}),$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των ομαλών συναρτήσεων $f\colon U \to \mathbb{F}$ με φορέα περιεχόμενο εντός του $S \subset\subset U$. Προφανώς ο $C_S^{\infty}(U;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_c^{\infty}(U;\mathbb{F})$ και μάλιστα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} C_c^{\infty}(U;\mathbb{F}) &= \bigcup_{S \subset\subset U} C_S^{\infty}(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0 \subset\subset U} C_{U_0}^{\infty}(U;\mathbb{F}) = \bigcup_{U_0 \subset\subset U} C_{\overline{U_0}}^{\infty}(U;\mathbb{F}) = \\ &= \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\overline{U_i}}^{\infty}(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U),\ \text{τ.ω.: } U_i \nearrow U. \end{aligned}$$

3. Γράφουμε

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^{\alpha} f \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχώς διαφορίσιμων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ με ταχέως φθίνουσες διαφορίσεις, ο οποίος καλείται και ως διανυσματικός χώρος Schwartz. Προφανώς ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

$$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow (fg) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα στοιχείων του $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ αποτελούν οι συναρτήσεις Gauss

$$\begin{aligned} f_K\colon \mathbb{R}^m &\to (0,1] \\ x &\mapsto f_K(x) = \mathrm{e}^{-K|x|^2}, \end{aligned} \quad \forall K > 0.$$

4. Γράφουμε

$$\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^{\alpha} f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \right\},$$

για τον διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$ των συνεχώς διαφορίσιμων $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{F}$ με βραδέως αύξουσες διαφορίσεις. Προφανώς ο $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ και γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θυμίζουμε ότι

$$f, g \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow (fg) \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),$$

καθώς επίσης

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\ \&\ g \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow (fg) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Χαρακτηριστικά παραδείγματα στοιχείων του $\tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ αποτελούν τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} f_{\{K_\alpha\}_{|\alpha| \le n}}\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_{\{K_\alpha\}_{|\alpha| \le n}} = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \\ \text{τ.ω.:} \\ |\alpha| \le n}} K_\alpha x^\alpha, \quad \forall K_a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 1

Χώρος $\mathcal{L}^p$ στον $\mathbb{R}^m$

Τόσο στο παρόν κεφάλαιο, όσο και στο υπόλοιπο κείμενο, θεωρούμε ότι δουλεύουμε στον χώρο μέτρου Lebesgue, $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda^m)$. Εδώ μελετάμε τους διανυσματικούς χώρους $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, με $S \in \mathfrak{M}^m$ και $p \in [1,\infty]$. Σημειώνουμε ότι οι χώροι αυτοί επεκτείνονται και για $p \in (0,1)$, χωρίς όμως να μας απασχολεί αυτή η οπτική στο παρόν κείμενο.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [25], [24], [19], [13], [10], [5] και [4], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

1.1 Σύνολο $\mathcal{L}^p$

Σε πρώτη φάση, ορίζουμε απλά ένα σύνολο, το οποίο στην συνέχεια θα συμπεράνουμε ότι έχει δομή, τόσο γραμμική, δλδ δομή διανυσματικού χώρου, όσο και τοπολογική, και συγκεκριμένα δομή πλήρους ψευδομετρικού χώρου.

Ορισμός 1.1.1 (σύνολο $\mathcal{L}^p$). *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1,\infty]$.

Θέτουμε

$$\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} < \infty \right\},$$

όπου

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = \begin{cases} \left(\int\limits_S |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{αν } p \neq \infty \\ \operatorname{ess\,sup}(|f|), & \text{αν } p = \infty, \end{cases} \quad \forall f \in M(S;\mathbb{F}).$$

Τα επόμενα τρία είναι άμεσα και θεμελιώδη.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$,
2. $p \in [1,\infty]$ *και*
3. $f \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $S \in \mathfrak{M}^m$. Ισχύει ότι*

$$M_c(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^\infty(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F}).$$

Πρόταση 1.1.3. *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

2. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:* $p_1 < p_2$.

Ισχύει ότι

$$\bigcap_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F}) \subseteq \bigcap_{p\in[p_1,p_2]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Με χρήση της Πρότασης 1.1.2 και της Πρότασης 1.1.3 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω* $S \in \mathfrak{M}^m$. *Ισχύει ότι*

$$M_c(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^\infty(S;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 1.1.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.1.5. *Έστω* $S \in \mathfrak{M}^m$. *Ισχύει ότι*

$$C_c(S;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Θεμελιώδες είναι επίσης και το επόμενο, το οποίο έπεται χρησιμοποιώντας ότι

$$\forall f \in M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall n \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x)| \leq \frac{K}{\left(1+|x|^2\right)^n},\ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

σε συνδυασμό με το βασικό αποτέλεσμα

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{\left(1+|x|^2\right)^a}\mathrm{d}x < \infty \Leftrightarrow a > \frac{m}{2},$$

το οποίο προκύπτει με χρήση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες.

Πρόταση 1.1.6. *Ισχύει ότι* $M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Αξιοποιώντας την Πρόταση 1.1.3 και την Πρόταση 1.1.6 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.1.7. *Ισχύει ότι*

$$M_{rd}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 1.1.7 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.1.8. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Επίσης ορίζουμε ένα σημαντικό γνήσιο υπερσύνολο του $\mathcal{L}^p$ ως εξής.

Ορισμός 1.1.2 (γνήσιο υπερσύνολο $\mathcal{L}^p_{loc}$)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1,\infty]$.

Θέτουμε

$$\mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in M(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, f|_{S_0} \in \mathcal{L}^p(S_0;\mathbb{F}),\ \forall S_0 \subset\subset S \right\} \supsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}).$$

Και το επόμενο είναι άμεσο και θεμελιώδες.

Πρόταση 1.1.9. *Έστω* $S \in \mathfrak{M}^m$. *Ισχύει ότι*

$$M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 1.1.9 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.1.10. *Ισχύει ότι*

$$\tilde{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \bigcap_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Το τελευταίο άμεσο και θεμελιώδες αποτέλεσμα έχει ως εξής.

Πρόταση 1.1.11. *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1,\infty]$.

Ισχύει ότι

$$M_s(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) = \begin{cases} M_s(S;\mathbb{F}), & \text{αν } p = \infty \\ M_s(S;\mathbb{F}) \cap M_c(S;\mathbb{F}), & \text{αν } p \neq \infty. \end{cases}$$

1.2 Ανισότητες Hölder και Minkowski

Πρώτα δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.2.1 (συζυγείς εκθέτες)**.** *Οι αριθμοί της n-άδας $(p_i)_{i=1}^n \in [1,\infty]^n$ λέγονται συζυγείς εκθέτες όταν*

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1.$$

Σημείωση 1.2.1. *Στην περίπτωση όπου ισχύει ότι $p_i \in \{1,\infty\}$ για κάποιο $i \in \{1,\dots,n\}$, τότε αναγκαστικά $n = 2$ και το αντίστοιχο ζεύγος, πλέον, των συζυγών εκθετών είναι, αποκλειστικά, είτε το $(1,\infty)$ είτε το $(\infty,1)$. Άλλο, επίσης χαρακτηριστικό ζεύγος συζυγών εκθετών αποτελεί το $(2,2)$.*

Θεμελιώδης είναι η επόμενη ανισότητα.

Πρόταση 1.2.1 (ανισότητα Young)**.** *Έστω*

1. $(p_i)_{i=1}^n \in [1,\infty]^n$ *συζυγείς εκθέτες και*
2. $(a_i)_{i=1}^n \in [0,\infty)^n$.

Ισχύει η ανισότητα

$$\prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{p_i}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{p_i},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$$\exists a \in [0,\infty) \ \text{τ.ω.:}\ a_i = a,\ \ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Με χρήση της Πρότασης 1.2.1 έπεται η επόμενη.

Πρόταση 1.2.2 (ανισότητα Hölder)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$,
2. $(p_i)_{i=1}^n \in [1,\infty]^n$ *συζυγείς εκθέτες και*
3. $(f_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\prod_{i=1}^n f_i \in \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$\left\|\prod_{i=1}^n f_i\right\|_{\mathcal{L}^1(S;\mathbb{F})} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{\mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$$\exists f \in \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F}) \ \text{τ.ω.:}\ |f_i| = |f|^{\frac{1}{p_i}} \|f_i\|_{\mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})},\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού}, \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Σημείωση 1.2.2. *Στην περίπτωση όπου $n = 2$ και $p_1 = p_2 = 2$, η ανισότητα Hölder είναι επίσης γνωστή ως ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski.*

Με χρήση της Πρότασης 1.2.2 έπονται τα τέσσερα επόμενα.

Πρόταση 1.2.3. *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *τ.ω.:* $\lambda^m(S) < \infty$ *και*
2. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:* $p_1 < p_2$.

Ισχύει ο εγκλεισμός

$$\mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^{p_1}(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(S;\mathbb{F})} \leq (\lambda^m(S))^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|f\|_{\mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F})}, \ \forall f \in \mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F}).$$

Πρόταση 1.2.4 (τύποις ανισότητα παρεμβολής)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2$ *τ.ω.:* $p_1 < p_2$.

Ισχύει ότι

$$\bigcap_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F}) \subseteq \bigcap_{p\in[p_1,p_2]} \mathcal{L}^{p}(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα $\forall f \in \bigcap\limits_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(S;\mathbb{F})$ *ισχύει ότι*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^{p}(S;\mathbb{F})} \leq \|f\|^{a}_{\mathcal{L}^{p_1}(S;\mathbb{F})} \|f\|^{1-a}_{\mathcal{L}^{p_2}(S;\mathbb{F})}, \ \forall (p,a) \in [p_1,p_2]\times[0,1] \ \text{τ.ω.:}\ \frac{1}{p} = \frac{a}{p_1} + \frac{1-a}{p_2}.$$

Σημείωση 1.2.3. *Η Πρόταση 1.2.4, με την ανισότητά της, συμπληρώνει την Πρόταση 1.1.3.*

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $S \in \mathfrak{M}^m$. Ισχύει ότι*

$$\bigcup_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^{p}_{loc}(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^{1}_{loc}(S;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 1.2.4. *Υπό την ισχύ της Πρότασης 1.2.5 άμεσος είναι επίσης ο εγκλεισμός*

$$\bigcup_{p\in[1,\infty]} \mathcal{L}^{p}(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^{1}_{loc}(S;\mathbb{F}), \ \forall S \in \mathfrak{M}^m.$$

Πρόταση 1.2.6 (ανισότητα Minkowski)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$,
2. $p \in [1,\infty]$ *και*
3. $\{f_i\}_{i=1}^n \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i\right\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_i\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})},$$

με την ισότητα να ισχύει όταν

$$\exists f \in \mathcal{L}^1(S;\mathbb{F}) \ \text{τ.ω.:}\ f_i = f^{\frac{1}{p}} \|f_i\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}, \ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού}, \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

1.3 Διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}^p$

Με χρήση της Πρότασης 1.2.6 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.3.1 (διανυσματικός χώρος $\mathcal{L}^p$). *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύει ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

Άμεσα είναι τα ακόλουθα δύο.

Πρόταση 1.3.1 (γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος $\mathcal{L}^p_{loc}$). *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύει ότι το σύνολο $\mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F})$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

Πρόταση 1.3.2 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $\mathcal{N}^p$). *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύει ότι το σύνολο

$$\mathcal{N}^p(S;\mathbb{F}) = \left\{ f \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) \,\middle|\, \|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = 0 \right\} \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$.

1.4 Διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα $\mathcal{L}^p$

Επίσης με χρήση της Πρότασης 1.2.6 έπεται το εξής.

Θεώρημα 1.4.1 (διανυσματικός χώρος με ψευδονόρμα $\mathcal{L}^p$). *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύουν ότι

1. *το ζεύγος $\left(\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}), \|\lozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}\right)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με ψευδονόρμα και*
2. *το ζεύγος $\left(\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}\right)$, όπου $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}$ η επαγόμενη ψευδομετρική της ψευδονόρμας $\|\lozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}$, είναι ψευδομετρικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Σημείωση 1.4.1. *Λόγω της Πρότασης 1.1.1 το ζεύγος στο σημείο 1. του Θεωρήματος 1.4.1 αποτυγχάνει να είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με νόρμα και έτσι το ζεύγος στο σημείο 4. αποτυγχάνει να είναι μετρικός διανυσματικός χώρος. Ωστόσο κάτι τέτοιο δεν αποτελεί εμπόδιο για την εξαγωγή χρήσιμων τοπολογικών συμπερασμάτων που αφορούν τους $\mathcal{L}^p$.*

1.5 Πληρότητα

Με χρήση των θεωρημάτων τόσο της μονότονης όσο και της κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα. Μάλιστα για μια άμεση απόδειξη με χρήση αποκλειστικά των δύο προαναφερθέντων θεωρημάτων, χωρίς δλδ την αξιοποίηση κάποιου άλλου εξειδικευμένου λήμματος, παραπέμπουμε, πχ, στο [5].

Θεώρημα 1.5.1 (Fischer-Riesz). *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty]$.

Το ζεύγος $\left(\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}\right)$ *είναι πλήρης ψευδομετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Τροποποιώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.1 προκύπτει το εξής χρήσιμο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.5.2. *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$,

ii. $p \in [1, \infty]$ *και*

iii. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f\} \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})} = 0.$$

Ισχύει ότι $\exists\ \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *&* $g \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f(x)| = 0 \ \&\ \sup\left\{|f_{n_k}(x)| \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\} \le g(x),\ \ \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in S.$$

1.6 Πυκνότητα του $M_s \cap \mathcal{L}^p$

Γενικά, τα αποτελέσματα πυκνότητας είναι εξαιρετικά χρήσιμα, καθώς μας επιτρέπουν να εξάγουμε ιδιότητες για ένα υπερσύνολο απλά επαληθεύοντάς τες για το πυκνό υποσύνολό του.

Με χρήση γνωστού αποτελέσματος που αφορά την προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές σε συνδυασμό με το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το πρώτο ζητούμενο αποτέλεσμα πυκνότητας.

Θεώρημα 1.6.1 (πυκνότητα του $M_s \cap \mathcal{L}^p$). *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύει ότι ο εγκλεισμός

$$M_s(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{M_s(S;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}} = \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$$

Σημείωση 1.6.1. *Στην Πρόταση 1.1.11 παρέχεται περισσότερη πληροφορία σχετικά με τον πυκνό διανυσματικό υπόχωρο της Πρότασης 1.6.1.*

1.7 Πυκνότητα του C_c

Αξιοποιώντας την Πρόταση 1.1.5 και την Πρόταση 1.1.11, καθώς επίσης την κανονικότητα του λ^m και το λήμμα Urysohn έπεται το εξής.

Πρόταση 1.7.1. *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *τ.ω.:* $\lambda^m(S) < \infty$ *και*

ii. $p \in [1, \infty)$.

Ισχύουν ότι

1. $\chi_S \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *και*
2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists f \in C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\|f - \chi_S\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} < \varepsilon$.

Σημείωση 1.7.1. *Δεν ισχύει η Πρόταση 1.7.1 όταν* $p = \infty$.

Με χρήση του Θεωρήματος 1.6.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.7.1 και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue έπεται το δεύτερο ζητούμενο αποτέλεσμα πυκνότητας.

Θεώρημα 1.7.1 (πυκνότητα του C_c)**.** *Έστω* $p \in [1,\infty)$. *Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}} = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 1.7.2. *Σε πρώτη φάση μπορούμε περιοριζόμαστε στην περίπτωση όλου του ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}^m$.

1.8 Χρήσιμοι τελεστές στον $\mathcal{L}^p$

Εδώ, μεταξύ άλλων, προετοιμάζουμε το έδαφος για την μελέτη, σε επόμενη φάση, του τελεστή συνέλιξης, με το να εισάγουμε ορισμένους χρήσιμους τελεστές στον $\mathcal{L}^p$.

1.8.1 Μεταφορά κατά x $\mathcal{T}_x$

Απευθείας από την ανεξαρτησία του $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda^m)$ από τις μεταφορές, δλδ $x + \mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}^m$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, έπεται το εξής.

Πρόταση 1.8.1.1. *Έστω*

1. $f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι $f(x + \lozenge) \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Λόγω της Πρότασης 1.8.1.1 εισάγουμε τον εξής τελεστή.

Ορισμός 1.8.1.1 (μεταφορά κατά x στον M)**.** *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \\ f &\mapsto \mathcal{T}_x f = f(x + \lozenge), \end{aligned}$$

για τον τελεστή μεταφοράς κατά x.

Άμεσο είναι το επόμενο.

Πρόταση 1.8.1.2. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι ο* $\mathcal{T}_x$ *είναι* $1-1$, *με*

$$\mathcal{T}_{-x} \circ \mathcal{T}_x = \mathrm{id}_{M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \mathcal{T}_x \circ \mathcal{T}_{-x},$$

και επί.

Για το παρακάτω εφαρμόζεται το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών και μάλιστα η απλούστερή του εκδοχή.

Πρόταση 1.8.1.3 (μεταφορά κατά x στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. $p \in [1,\infty]$ *και*
2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι

$$\mathcal{T}_x(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα ο $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ *είναι ισομετρία, δλδ* $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ *με*

$$\|\mathcal{T}_x f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 1.8.1.1. *Δυο λόγια σχετικά με την Πρόταση 1.8.1.3.*

1. *Επειδή ο* $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ *είναι ισομετρία, προφανώς ισχύει ότι*

$$\left\| \mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \right\|_{CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))} = 1.$$

2. *Τυχαίνει ο* $\mathcal{T}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ *να είναι και* $1-1$. *Γενικά όμως δεν ισχύει ότι μια ισομετρία μεταξύ διανυσματικών χώρων επί του* $\mathbb{F}$ *με ψευδονόρμα είναι αναγκαστικά και* $1-1$*, κάτι που αντίθετα ισχύει στην περίπτωση ισομετρίας από έναν διανυσματικό χώρο επί του* $\mathbb{F}$ *με ψευδονόρμα σε έναν διανυσματικό χώρο επί του* $\mathbb{F}$ *με νόρμα.*

Για το επόμενο βασικό αξιοποιείται το Θεώρημα 1.7.1.

Πρόταση 1.8.1.4. *Έστω*

1. $p \in [1,\infty)$ *και*
2. $x \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{|x|\to 0} \|\mathcal{T}_x f - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 1.8.1.2. *Η Πρόταση 1.8.1.4 δεν ισχύει απαραίτητα όταν* $p=\infty$.

1.8.2 Ομοθεσία με λόγο K $\mathcal{H}_K$

Απευθείας από την ομοιογένεια του $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda^m)$, δλδ $K\mathfrak{M}^m = \mathfrak{M}^m$, $\forall K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, έπεται το εξής.

Πρόταση 1.8.2.1. *Έστω*

1. $f \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ισχύει ότι $f(K\lozenge) \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Λόγω της Πρότασης 1.8.2.1 εισάγουμε τον εξής τελεστή.

Ορισμός 1.8.2.1 (ομοθεσία με λόγο K στον M)**.** *Έστω* $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K \colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \\ f &\mapsto \mathcal{H}_K f = f(K\lozenge), \end{aligned}$$

για τον τελεστή ομοθεσίας με λόγο K.

Άμεσο είναι το επόμενο.

Πρόταση 1.8.2.2. *Έστω* $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Ισχύει ότι ο* $\mathcal{H}_K$ *είναι* $1-1$*, με*

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{K}} \circ \mathcal{H}_K = \mathrm{id}_{M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \mathcal{H}_K \circ \mathcal{H}_{\frac{1}{K}},$$

και επί.

Για το παρακάτω εφαρμόζεται το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 1.8.2.3 (ομοθεσία με λόγο K στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. $p \in [1,\infty]$ *και*
2. $K \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ισχύει ότι

$$\mathcal{H}_K(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα $\mathcal{H}_K|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ *με*

$$\|\mathcal{H}_K f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \frac{1}{|K|^{\frac{m}{p}}} \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}, \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

1.8.3 Πολλαπλασιασμός επί K $\mathcal{M}_K$

Ο επόμενος ορισμός έχει νόημα καθώς ο $M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

Ορισμός 1.8.3.1 (πολλαπλασιασμός επί K στον M)**.** *Έστω $K \in \mathbb{F} \smallsetminus \{0\}$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_K\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{M}_K f = Kf,\end{aligned}$$

για τον πολλαπλασιαστικό τελεστή επί K.

Άμεσα είναι τα επόμενα.

Πρόταση 1.8.3.1. *Έστω $K \in \mathbb{F} \smallsetminus \{0\}$. Ισχύει ότι ο $\mathcal{M}_K$ είναι $1-1$, με*

$$\mathcal{M}_{\frac{1}{K}} \circ \mathcal{M}_K = \mathrm{id}_{M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \mathcal{M}_K \circ \mathcal{M}_{\frac{1}{K}},$$

και επί.

Πρόταση 1.8.3.2 (πολλαπλασιασμός επί K στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. *$p \in [1,\infty]$ και*
2. *$K \in \mathbb{F} \smallsetminus \{0\}$.*

Ισχύει ότι

$$\mathcal{M}_K(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα $\mathcal{M}_K|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ με

$$\|\mathcal{M}_K f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = |K|\,\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},\ \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

1.8.4 Κανονικοποιημένη ομοθεσία με λόγο K $\mathcal{H}_{K,p}$

Ορισμός 1.8.4.1 (κανονικοποιημένη ομοθεσία με λόγο K στον M)**.** *Έστω $K \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{K,p}\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{H}_{K,p} f = \left(\mathcal{M}_{|K|^{\frac{m}{p}}} \circ \mathcal{H}_K\right) f = |K|^{\frac{m}{p}} f(K\Diamond),\end{aligned}$$

για τον τελεστή κανονικοποιημένης ομοθεσίας με λόγο K.

Άμεσο είναι το επόμενο.

Πρόταση 1.8.4.1. *Έστω $K \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Ισχύει ότι ο $\mathcal{H}_{K,p}$ είναι $1-1$, με*

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{K},p} \circ \mathcal{H}_{K,p} = \mathrm{id}_{M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \mathcal{H}_{K,p} \circ \mathcal{H}_{\frac{1}{K},p},$$

και επί.

Απευθείας από την Πρόταση 1.8.2.3 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.8.3.2 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.8.4.2 (κανονικοποιημένη ομοθεσία με λόγο K στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω*

1. *$p \in [1,\infty]$ και*
2. *$K \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.*

Ισχύει ότι

$$\mathcal{H}_{K,p}(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα ο $\mathcal{H}_{K,p}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ είναι ισομετρία, δλδ $\mathcal{H}_{K,p}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ με

$$\|\mathcal{H}_{K,p} f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},\ \ \forall f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

1.8.5 Ανάκλαση $\mathcal{R}$

Ορισμός 1.8.5.1 (ανάκλαση στον M)**.** *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{R}f = \mathcal{H}_{-1}f = (\mathcal{H}_{-1,p}f,\ \forall p\in[1,\infty]) = f(-\lozenge),\end{aligned}$$

για τον τελεστή ανάκλασης.

Παραθέτουμε επίσης δύο κλασικούς ορισμούς μέσω του τελεστή $\mathcal{R}$.

Ορισμός 1.8.5.2 (άρτια συνάρτηση του M)**.** *Καλούμε μία $f\in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ άρτια όταν*

$$\mathcal{R}f = f.$$

Ορισμός 1.8.5.3 (περιττή συνάρτηση του M)**.** *Καλούμε μία $f\in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ περιττή όταν*

$$\mathcal{R}f = -f.$$

Τώρα, είτε από την Πρόταση 1.8.2.2 είτε από την Πρόταση 1.8.4.1 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 1.8.5.1. *Ισχύει ότι ο $\mathcal{R}$ είναι $1-1$ και επί και μάλιστα*

$$\mathcal{R}\circ\mathcal{R} = \mathrm{id}_{M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Επίσης, είτε από την Πρόταση 1.8.2.3 είτε από την Πρόταση 1.8.4.2 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.8.5.2 (ανάκλαση στον $\mathcal{L}^p$)**.** *Έστω $p\in[1,\infty]$. Ισχύει ότι*

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα ο $\mathcal{R}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ είναι ισομετρία, δλδ $\mathcal{R}|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ με

$$\|\mathcal{R}f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},\ \forall f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

1.8.6 Σύνθεση ανάκλασης και μεταφοράς κατά x $\mathcal{C}_x$

Ορισμός 1.8.6.1 (σύνθεση ανάκλασης και μεταφοράς κατά x στον M)**.** *Έστω $x\in\mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_x\colon M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\\ f &\mapsto \mathcal{C}_x f = (\mathcal{T}_x\circ\mathcal{R})\,f = f(x-\lozenge),\end{aligned}$$

για την σύνθεση του τελεστή ανάκλασης και μεταφοράς κατά x.

Άμεσα από την Πρόταση 1.8.1.2 και την Πρόταση 1.8.5.1 έπεται το εξής.

Πρόταση 1.8.6.1. *Έστω $x\in\mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι ο $\mathcal{C}_x$ είναι $1-1$, με*

$$(\mathcal{R}\circ\mathcal{T}_{-x})\circ\mathcal{C}_x = \mathrm{id}_{M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \mathcal{C}_x\circ(\mathcal{R}\circ\mathcal{T}_{-x})\,,$$

και επί.

Επίσης άμεσα από την Πρόταση 1.8.1.3 και την Πρόταση 1.8.5.2 έπεται το εξής.

Πρόταση 1.8.6.2. *Έστω*

1. *$p\in[1,\infty]$ και*
2. *$x\in\mathbb{R}^m$.*

Ισχύει ότι

$$\mathcal{C}_x(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})) = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα ο $\mathcal{C}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$ είναι ισομετρία, δλδ $\mathcal{C}_x|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\in CL(\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F});\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$ με

$$\|\mathcal{C}_x f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},\ \forall f\in\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

1.9 Συνέλιξη $\lozenge * \blacklozenge$

Ένα απαραίτητο για την συνέχεια εργαλείο αποτελεί ο τελεστής της συνέλιξης δύο συναρτήσεων.

1.9.1 Συνέλιξη μετρήσιμων συναρτήσεων

Υπό την ισχύ της Πρότασης 1.8.6.1 και της μετρησιμότητας του γινομένου μετρήσιμων συναρτήσεων, πρώτα εισάγουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.9.1.1 (συνέλιξη μετρήσιμων συναρτήσεων)**.** *Έστω $f, g \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} f * g &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{F} \\ x \mapsto (f * g)(x) &= \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathcal{C}_x f(y) g(y) \mathrm{d}y, & \text{αν } \mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \\ 0, & \text{αν } \mathcal{C}_x f\, g \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), \end{cases} \end{aligned}$$

για την συνέλιξη των f και g.

1.9.2 Αντιμεταθετική ιδιότητα

Με εφαρμογή (δις) του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 1.9.2.1 (αντιμεταθετική ιδιότητα)**.** *Έστω $f, g \in M(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\exists x \in \mathbb{R}^m \text{ τ.ω.: } \mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow \mathcal{C}_x g\, f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$f * g = g * f.$$

1.9.3 Συνέλιξη στους $\mathcal{L}^p$

Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με το p του αντίστοιχου $\mathcal{L}^p$ στον οποίο θέλουμε να λαμβάνει τιμές η συνέλιξη.

Για το επόμενο γίνεται χρήση των θεωρημάτων Tonelli και Fubini σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.8.1.3 (όχι με την Πρόταση 1.8.6.2 σε αυτή την περίπτωση!), καθώς και χρήση της Πρότασης 1.2.2.

Θεώρημα 1.9.3.1 (Young - συνέλιξη με $p \neq \infty$)**.** *Έστω*

i. $p \in [1, \infty)$,

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *τ.ω.:*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$$

και

iii. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $\mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$, *$\lambda^m$-σχεδόν* $\forall x \in \mathbb{R}^m$,

2. $f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|g\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$$

και

3. *αν* $p = p_1 = p_2 = 1$, *τότε*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (f * g)(x) \mathrm{d}x = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \mathrm{d}x \right) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} g(x) \mathrm{d}x \right).$$

Μια ιδιαίτερη υποπερίπτωση είναι αυτή του $\mathcal{L}^1$, όπως άλλωστε καταδεικνύει το Θεώρημα 1.9.3.1. Επιπλέον, με αξιοποίηση του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών καθώς και των θεωρημάτων Tonelli και Fubini έπεται το εξής.

Πρόταση 1.9.3.1 (προσεταιριστική ιδιότητα)**.** *Έστω* $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$*. Ισχύει ότι*

$$(f * g) * h = f * (g * h) .$$

Τώρα, υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.9.3.1 δίνουμε τον ορισμό του εξής τελεστή.

Ορισμός 1.9.3.1 (τελεστής συνέλιξης με $p \neq \infty$)**.** *Έστω*

i. $p \in [1, \infty)$ *και*

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *τ.ω.:*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Θέτουμε

$$\lozenge * \blacklozenge : \prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \to \mathcal{L}^{p}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$$
$$(f, g) \mapsto f * g,$$

για τον τελεστή συνέλιξης στον $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Για το επόμενο αποτέλεσμα γίνεται χρήση της Πρόταση 1.8.6.2 (εδώ βρίσκει εφαρμογή!) και της Πρότασης 1.8.1.4 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.2.2, καθώς επίσης χρήση της Πρότασης 1.9.2.1 και του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Θεώρημα 1.9.3.2 (Young - συνέλιξη με $p = \infty$)**.** *Έστω*

α΄. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *συζυγείς εκθέτες και*

β΄. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $\mathcal{C}_x f\, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}),\ \forall x \in \mathbb{R}^m$,

2. $f * g \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|g\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$

3. *η* $f * g \in C_u(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ *και*

4. *αν* $p_1, p_2 \notin \{1, \infty\}$*, τότε* $f * g \in C_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.9.3.2 δίνουμε τον ορισμό του εξής τελεστή.

Ορισμός 1.9.3.2 (τελεστής συνέλιξης με $p = \infty$)**.** *Έστω* $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *συζυγείς εκθέτες. Θέτουμε*

$$\lozenge * \blacklozenge : \prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \to \begin{cases} \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}), & \text{αν } p_1, p_2 \notin \{1, \infty\} \\ \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}), & \text{αν } p_1, p_2 \in \{1, \infty\} \end{cases}$$
$$(f, g) \mapsto f * g,$$

για τον τελεστή συνέλιξης στον $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

1.9.4 Γενικά αποτελέσματα

Άμεσα έπεται το εξής.

Πρόταση 1.9.4.1 (διγραμμικότητα και συνέχεια τελεστή συνέλιξης). *Έστω*

i. $p \in [1, \infty]$ *και*

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *τ.ω.:*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Ισχύει ότι ο τελεστής συνέλιξης στον $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *είναι διγραμμικός και συνεχής.*

Σημείωση 1.9.4.1. *Δυο λόγια σχετικά με την Πρόταση 1.9.4.1.*

1. *Η διγραμμικότητα (και άρα οι επιμεριστικές ιδιότητες που αυτή υπονοεί) της Πρότασης 1.9.4.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.9.3.1 μετατρέπει το ζεύγος* $\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), *\right)$ *σε μία άλγεβρα.*

2. *Για την συνέχεια στην Πρόταση 1.9.4.1 θεωρούμε ότι έχουμε εφοδιάσει τον διανυσματικό χώρο γινόμενο* $\prod_{i=1}^{2} \mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *με μια ψευδομετρική που επάγεται από μια - οποιαδήποτε - από τις ισοδύναμες ψευδονόρμες με την οποία μπορούμε να εφοδιάσουμε τον προαναφερθέντα χώρο, και οι οποίες εμπλέκουν προφανώς την αντίστοιχη ψευδονόρμα του κάθε* $\mathcal{L}^{p_i}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.9.3.1 και του Θεωρήματος 1.9.3.2, άμεσο είναι το επόμενο.

Πρόταση 1.9.4.2. *Έστω*

i. $p \in [1, \infty]$,

ii. $(p_i)_{i=1}^2 \in [1, \infty]^2$ *τ.ω.:*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$$

και

iii. $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in \mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν, διαδοχικά,

1. *η ισότητα*

$$(f * g)(x) = \int_{(x - \operatorname{ess\,supp}(f)) \cap \operatorname{ess\,supp}(g)} \mathcal{C}_x f(y) g(y) \mathrm{d}y, \quad \begin{cases} \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p \neq \infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p = \infty, \end{cases}$$

2. *η συνεπαγωγή*

$$x \notin (\operatorname{ess\,supp}(f) + \operatorname{ess\,supp}(g)) \Rightarrow (f * g)(x) = 0, \quad \begin{cases} \lambda^m\text{-σχεδόν } \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p \neq \infty, \\ \forall x \in \mathbb{R}^m, & \text{αν } p = \infty, \end{cases}$$

και τελικά

3. *ο εγκλεισμός*

$$\operatorname{ess\,supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{ess\,supp}(f) + \operatorname{ess\,supp}(g)}.$$

Σημείωση 1.9.4.2. *Η Πρόταση 1.9.4.2 υπονοεί ότι αν τόσο ο* $\operatorname{ess\,supp}(f)$ *όσο και ο* $\operatorname{ess\,supp}(g)$ *είναι συμπαγείς, τότε και ο* $\operatorname{ess\,supp}(f * g)$ *είναι συμπαγής, κάτι όμως που δεν ισχύει απαραίτητα αν μόνο ένας από τους δύο είναι συμπαγής.*

Υπό την ισχύ της Πρότασης 1.1.5 και του Θεωρήματος 1.9.3.2, απευθείας από την Πρόταση 1.9.4.2 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.9.4.3. *Έστω $f, g \in C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$f * g \in C_{\mathrm{supp(f)+supp}(g)}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \subsetneq C_c(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}).$$

Σημείωση 1.9.4.3. *Μιας και τα δύο (κλειστά) σύνολα $\mathrm{supp}(f)$ και $\mathrm{supp}(g)$ στην Πρόταση 1.9.4.3 είναι συμπαγή, έπεται ότι και το άθροισμά τους είναι συμπαγές.*

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.9.3.1 και του Θεωρήματος 1.9.3.2, καθώς επίσης της Πρότασης 1.1.7, έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 1.9.4.4. *Έστω $f, g \in M_{rd}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$. Ισχύουν ότι*

1. $f * g \in \left(\bigcap\limits_{p \in [1,\infty]} \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \right) \cap C_0(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και*
2. *διαδοχικά,*
   - *i.* $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\exists K > 0$ *τ.ω.:* $\sup\left(|\mathrm{id}_m|^n \, |\mathcal{T}_{-y} f|\right) \leq K \left(1 + |y|^n\right)$, $\forall y \in \mathbb{R}^m$,
   - *ii.* $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\exists K > 0$ *τ.ω.:*
   $$\sup\left(|\mathrm{id}_m|^n \, |(f * g)|\right) \leq K \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(1 + |y|^n\right) |g(y)| \, \mathrm{d}y,$$
   - *iii.* $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\exists K > 0$ *τ.ω.:* $\sup\left(|\mathrm{id}_m|^n \, |(f * g)|\right) < \infty$ *και*
   - *iv.* $f * g \in M_{rd}(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

1.9.5 Διαφόριση συνέλιξης

Εδώ, υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.9.3.2, μελετάμε την διαφόριση συνέλιξης. Χρήσιμες για την συνέχεια διαφορίσιμες συνελίξεις αποτελούν αυτές μεταξύ στοιχείων είτε του C_c^∞ είτε του $\mathcal{S}$.

Συμπαγής φορέας

Για το επόμενο αξιοποιούμε τον ορισμό του διαφορικού, την Πρόταση 1.1.5 και το Θεώρημα 1.9.3.2.

Θεώρημα 1.9.5.1. *Έστω*

- *i.* $k \in \mathbb{N}_0$,
- *ii.* $f \in C_c^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$,
- *iii.* $p \in [1, \infty]$ *και*
- *iv.* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^k(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha(f * g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$ *και μάλιστα*
   $$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$
   και άρα
   $$\|D^\alpha(f * g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Απευθείας από το Θεώρημα 1.9.5.1 παίρνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 1.9.5.1. *Έστω*

- *i.* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$,
- *ii.* $p \in [1, \infty]$ *και*
- *iii.* $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m; \mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha(f*g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f*g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Άμεσα από το Θεώρημα 1.9.5.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.9.2.1 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 1.9.5.2. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$,

iii. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*

iv. $g \in C_c^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha(f*g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f*g) = f * (D^\alpha g)$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f*g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|D^\alpha g\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Απευθείας από την Πρόταση 1.9.5.2 παίρνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 1.9.5.3. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

iii. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha(f*g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f*g) = f * (D^\alpha g)$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f*g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|D^\alpha g\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 1.9.4.3, από τον συνδυασμό του Θεωρήματος 1.9.5.1 και της Πρότασης 1.9.5.2 προκύπτει άμεσα το επόμενο.

Πρόταση 1.9.5.4. *Έστω*

i. $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ *και*

ii. $f \in C_c^{k_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και* $g \in C_c^{k_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C_c^{k_1+k_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \leq k_1$ *&* $\forall \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \leq k_2$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in C_c^{k_1+k_2-|\alpha|-|\beta|}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$
και άρα
$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \ \& \ \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \ \text{τ.ω.:} \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Απευθείας από την Πρόταση 1.9.5.4 παίρνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 1.9.5.5. *Έστω $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύουν ότι*

1. $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$
και άρα
$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \ \& \ \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \ \text{τ.ω.:} \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

Ταχεία φθίση

Η αντίστοιχη συλλογιστική που χρησιμοποιήθηκε για τα στοιχεία του C_c^∞ θα αξιοποιηθεί και για τα στοιχεία του $\mathcal{S}$, προφανώς με κατάλληλες τροποποιήσεις.

Για το επόμενο αξιοποιούμε τον ορισμό του διαφορικού, την Πρόταση 1.1.8 αυτή την φορά και το Θεώρημα 1.9.3.2.

Θεώρημα 1.9.5.2. *Έστω*

i. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$,

ii. $p \in [1,\infty]$ *και*

iii. $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha(f * g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f * g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\|g\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Άμεσα από το Θεώρημα 1.9.5.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.9.2.1 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 1.9.5.6. *Έστω*

i. $p \in [1,\infty]$,

ii. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

iii. $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

1. $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

2. $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^\alpha(f * g) \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \cap C_u(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g)$$
και άρα
$$\|D^\alpha(f * g)\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \|D^\alpha g\|_{\mathcal{L}^{\frac{p}{p-1}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 1.9.4.4 αυτή την φορά, από τον συνδυασμό του Θεωρήματος 1.9.5.2 και της Πρότασης 1.9.5.6 προκύπτει άμεσα το επόμενο.

Πρόταση 1.9.5.7. *Έστω* $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Ισχύουν ότι*

1. $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
2. $\forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$, $D^{\alpha+\beta}(f * g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*
$$D^{\alpha+\beta}(f * g) = (D^\alpha f) * \left(D^\beta g\right)$$
και άρα
$$\left\|D^{\alpha+\beta}(f * g)\right\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \leq \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^{p_1}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \left\|D^\beta g\right\|_{\mathcal{L}^{p_2}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},$$
$$\forall p \in [1,\infty] \ \&\ \forall (p_i)_{i=1}^2 \in [1,\infty]^2 \ \text{τ.ω.:}\ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1.$$

1.10 Ομαλοποίηση

Εδώ εισάγουμε την συνάρτηση επάρματος, από την οποία θα πάρουμε στην συνέχεια τους συνήθεις ομαλοποιητές. Οι τελευταίοι αξιοποιούνται σε συνδυασμό με την συνέλιξη και για να μας δώσουν δύο χρήσιμα και ανεξάρτητα μεταξύ τους αποτελέσματα, την ομαλή εκδοχή του λήμματος του Urysohn και την πυκνότητα του C_c στον $\mathcal{L}^p$.

1.10.1 Συνάρτηση επάρματος η

Η κατασκευή της συνάρτησης επάρματος είναι κλασική.

Αρχικά έχουμε το εξής.

Πρόταση 1.10.1.1. *Έστω*
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to [0,1) \\ x &\mapsto f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \chi_{(0,\infty)}(x). \end{aligned}$$
Ισχύουν ότι

1. $f|_{(0,\infty)} \in C^\infty((0,\infty);\mathbb{R})$ *με*
$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0,\ \ \forall k \in \mathbb{N}_0$$
και άρα
2. $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Έπειτα κατασκευάζουμε μια C_c^∞ συνάρτηση.

Πρόταση 1.10.1.2. *Έστω f όπως στην Πρόταση 1.10.1.1. Θέτουμε*
$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R}^m &\to \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}}\right] \\ x &\mapsto h(x) = f\left(1 - |x|^2\right) \chi_{B(0,1)}(x). \end{aligned}$$
Έχουμε τα εξής.

1. $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *με* $\operatorname{supp}(h) = \overline{B(0,1)}$.

2. *Ισχύει ότι*
$$\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} > 0.$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 1.10.1.2, δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.10.1.1 (συνάρτηση επάρματος)**.** *Έστω h όπως στην Πρόταση 1.10.1.2. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \eta\colon \mathbb{R}^m &\to \left[0, \frac{1}{\mathrm{e}\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})}}\right] \\ x &\mapsto \eta(x) = \frac{h(x)}{\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})}} \end{aligned}$$

για την συνάρτηση επάρματος.

Άμεσο, τέλος, είναι το επόμενο.

Πρόταση 1.10.1.3. *Έχουμε τα εξής.*

1. $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *με* $\operatorname{supp}(\eta) = \overline{B(0,1)}$.

2. *Ισχύει ότι*
$$\|\eta\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1.$$

1.10.2 Συνήθης ομαλοποιητής η_ε

Δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.10.2.1 (συνήθης ομαλοποιητής)**.** *Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon\colon \mathbb{R}^m &\to \left[0, \frac{1}{\varepsilon^m\mathrm{e}\|h\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})}}\right] \\ x &\mapsto \eta_\varepsilon(x) = \mathcal{H}_{\frac{1}{\varepsilon},1}\eta = \frac{1}{\varepsilon^m}\eta\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right) \end{aligned}$$

για τον συνήθη ομαλοποιητή.

Με χρήση της Πρότασης 1.10.1.3 σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.8.4.2 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 1.10.2.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε τα εξής.*

1. $\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *με* $\operatorname{supp}(\eta_\varepsilon) = \overline{B(0,\varepsilon)}$.

2. *Ισχύει ότι*
$$\|\eta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1.$$

Οι η_ε αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο, όπως άλλωστε καταδεικνύεται στις επόμενες δύο ανεξάρτητες υποενότητες. Το όνομα των συναρτήσεων αυτών οφείλεται στην ιδιότητά τους να «εξομαλύνουν» μια συνάρτηση στον $\mathcal{L}^p$ με την οποία «συνελίσσονται».

1.10.3 Ομαλό λήμμα Urysohn

Η συνέλιξη των η_ε με χαρακτηριστικές συναρτήσεις, χ_S, «εξομαλύνει» τις τελευταίες, όπως άλλωστε καταδεικνύει το Θεώρημα 1.9.5.1. Αυτή η ιδιότητα ουσιαστικά αξιοποιείται για την εξαγωγή της επόμενης γενίκευσης του λήμματος του Urysohn, για την οποία γίνεται χρήση, εκτός του προαναφερόμενου αποτελέσματος, τόσο του Θεωρήματος 1.9.3.2 όσο και του εγκλεισμού στην Πρόταση 1.9.4.2.

Θεώρημα 1.10.3.1 (ομαλό λήμμα Urysohn)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ *και*

ii. $\varepsilon > 0$.

Ισχύει ότι $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

1. $f|_S \equiv 1$,
2. $f(S^\varepsilon \setminus S) = (0,1)$ *και*

$$\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \exists K > 0 \text{ τ.ω.: } \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} \leq \frac{K}{\varepsilon^{|\alpha|}},\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| = k$$

και

3. $f|_{(S^\varepsilon)^c} \equiv 0$ *και άρα* $\operatorname{supp}(f) \subseteq S^\varepsilon$.

Σημείωση 1.10.3.1. *Συναρτήσεις f όπως στο Θεώρημα 1.10.3.1 καλούνται αποκόπτουσες.*

1.10.4 Πυκνότητα του C_c^∞

Με την αξιοποίηση του τελεστή συνέλιξης καθώς και των η_ε, μπορούμε επίσης να πάμε ένα βήμα παραπέρα σχετικά με την πυκνότητα υπόχωρων του $\mathcal{L}^p$. Πράγματι, έχουμε διαδοχικά τα εξής.

Αρχικά, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 1.9.3.2, με την αξιοποίηση της ομοιόμορφης συνέχειας μιας C_c συνάρτησης και με την χρήση της Πρότασης 1.10.1.3 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 1.10.4.1. *Έστω $f \in C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Έπειτα, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 1.9.3.1, αξιοποιώντας την Πρόταση 1.10.4.1 σε συνδυασμό με τον εγκλεισμό της Πρότασης 1.9.4.2 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 1.10.4.2. *Έστω*

1. $p \in [1,\infty]$ *και*
2. $f \in C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.7.1 με την Πρόταση 1.10.4.2 έπεται το επόμενο βασικό.

Θεώρημα 1.10.4.1. *Έστω*

1. $p \in [1,\infty)$ *και*
2. $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|\eta_\varepsilon * f - f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 1.9.5.1, παραφράζοντας το Θεώρημα 1.10.4.1 παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα πυκνότητας.

Πρόταση 1.10.4.3. *Έστω $p \in [1,\infty)$. Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}} = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Η Πρόταση 1.10.4.3 γενικεύεται περαιτέρω θεωρώντας μια αύξουσα, τελικά καλύπτουσα και συμπαγώς περιεχόμενης ακολουθίας υποσυνόλων ενός αυθαίρετου ανοικτού, καθώς επίσης αξιοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι η εξής γενίκευση του Θεωρήματος 1.7.1.

Θεώρημα 1.10.4.2 (πυκνότητα του C_c^∞)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $p \in [1,\infty)$.

Ισχύει ότι ο εγκλεισμός

$$C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{L}^p(U;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{L}^p(U;\mathbb{F})}} = \mathcal{L}^p(U;\mathbb{F}).$$

1.10.5 Μία χρήσιμη συνέπεια

Συνέπεια του Θεωρήματος 1.10.4.1 είναι το ακόλουθο, για την απόδειξη του οποίου αξιοποιείται το Θεώρημα 1.5.2 και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα 1.10.5.1. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*
$$\int_U f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0,\ \ \forall g \in C^\infty_c(U;\mathbb{R}).$$

Ισχύει ότι $f \equiv 0$, λ^m*-σχεδόν παντού.*

Κεφάλαιο 2

Χώρος L^p στον $\mathbb{R}^m$

Εδώ μελετάμε τους διανυσματικούς χώρους $L^p(S;\mathbb{F})$, με $S \in \mathfrak{M}^m$ και $p \in [1,\infty]$. Όπως και οι $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, έτσι και οι $L^p(S;\mathbb{F})$ επεκτείνονται και για $p \in (0,1)$, ωστόσο δεν θα μας απασχολήσει αυτή η οπτική στο παρόν κείμενο.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [25], [24], [19], [13], [10], [5] και [4], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

2.1 Διανυσματικός χώρος L^p

Ένας χώρος L^p ορίζεται να είναι ένας διανυσματικός χώρος πηλίκο. Πράγματι, υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.3.1 και της Πρότασης 1.3.2 ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 2.1.1 (διανυσματικός χώρος πηλίκο L^p)**.** *Έστω*

1. *$S \in \mathfrak{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty]$.*

Θέτουμε

$$L^p(S;\mathbb{F}) = \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})/\mathcal{N}^p(S;\mathbb{F}).$$

Σημείωση 2.1.1. 1. *Έστω*

   i $S \in \mathfrak{M}^m$ και

   ii $p \in [1,\infty]$.

   Κάθε στοιχείο του $L^p(S;\mathbb{F})$ είναι μια κλάση ισοδυναμίας που περιέχει στοιχεία του $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$. Για κάθε τέτοια κλάση μπορούμε να βρούμε και έναν αντιπρόσωπο ο οποίος είναι στοιχείο του $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, με τον οποίο κάθε στοιχείο αυτής της κλάσης ταυτίζεται λ^m-σχεδόν παντού. Οι κλάσεις αυτές διαμερίζουν τον $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$, με την έννοια ότι είναι ξένες ανά δύο και οι ένωσή τους είναι ο ίδιος ο $\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$. Τις κλάσεις αυτές τις συμβολίζουμε με $[f]$, όπου $f \in \mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})$ είναι ένας οποιοσδήποτε αντιπρόσωπός της, καθώς κάθε κλάση είναι ανεξάρτητη της επιλογής αντιπροσώπου.

2. *Προφανώς το μηδενικό στοιχείο κάθε L^p είναι η κλάση $[0]$.*

Άμεσα από την Πρόταση 1.3.1 (και την γνωστή ιδιότητα των χώρων πηλίκων) έπεται το εξής.

Πρόταση 2.1.1 (γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος πηλίκο L^p_{loc})**.** *Έστω*

1. *$S \in \mathfrak{M}^m$ και*
2. *$p \in [1,\infty]$.*

Το σύνολο

$$L^p_{loc}(S;\mathbb{F}) = \mathcal{L}^p_{loc}(S;\mathbb{F})/\mathcal{N}^p(S;\mathbb{F}) \supsetneq L^p(S;\mathbb{F})$$

είναι γνήσιος διανυσματικός υπέρχωρος του $L^p(S;\mathbb{F})$.

2.2 Διανυσματικός χώρος Banach L^p

Ο επόμενος ορισμός έχει νόημα λόγω της ανεξαρτησίας της κάθε κλάσης-στοιχείο του L^p από την επιλογή αντιπροσώπου.

Ορισμός 2.2.1 (συνάρτηση $\|\lozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})}$)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \|\lozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})} \colon L^p(S;\mathbb{F}) &\to [0,\infty) \\ [f] &\mapsto \|[f]\|_{L^p(S;\mathbb{F})} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(S;\mathbb{F})}. \end{aligned}$$

Λόγω του Θεωρήματος 1.4.1, άμεσα τώρα επαληθεύεται το επόμενο.

Θεώρημα 2.2.1 (διανυσματικός χώρος με νόρμα L^p)**.** *Έστω*

i. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*

ii. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύουν ότι

1. *το ζεύγος* $\left(L^p(S;\mathbb{F}), \|\lozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})}\right)$ *είναι διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$ *με νόρμα και*
2. *το ζεύγος* $\left(L^p(S;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})}\right)$, *όπου* $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})}$ *η επαγόμενη μετρική της νόρμας* $\|\lozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})}$, *είναι μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Επίσης, το Θεώρημα 1.5.1 παίρνει την εξής μορφή.

Θεώρημα 2.2.2 (διανυσματικός χώρος Banach L^p)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty]$.

Το ζεύγος $\left(L^p(S;\mathbb{F}), \|\lozenge\|_{L^p(S;\mathbb{F})}\right)$ *είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του* $\mathbb{F}$.

2.3 Δυϊκός διανυσματικός χώρος $(L^p)'$

Ακολουθεί εύλογα το ερώτημα του καθορισμού/χαρακτηρισμού του δυϊκού διανυσματικού χώρου του διανυσματικού χώρου Banach του Θεωρήματος 2.2.2 και συγκεκριμένα του

$$(L^p(S;\mathbb{F}))'.$$

Γι αυτό τον σκοπό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

Αρχικά, τόσο από την ανισότητα όσο και από την ισότητα στην Πρόταση 1.2.2, έπεται το επόμενο.

Πρόταση 2.3.1. *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$,
2. $p \in [1, \infty]$ *και*
3. $[f] \in L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \ell_{[f]} \colon L^p(S;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ [g] &\mapsto \ell_{[f]}([g]) = \int_S g(x) f(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\ell_{[f]} \in (L^p(S;\mathbb{F}))'$$

και μάλιστα

$$\left\|\ell_{[f]}\right\|_{(L^p(S;\mathbb{F}))'} = \|[f]\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})}.$$

Απλή παράφραση της Πρότασης 2.3.1 αποτελεί το παρακάτω.

Πρόταση 2.3.2. *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty]$.

Ισχύει ότι η συνάρτηση της Πρότασης 2.3.1,

$$\begin{aligned} \ell_{\Diamond}\colon L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F}) &\to (L^p(S;\mathbb{F}))' \\ [f] &\mapsto \ell_{[f]}, \end{aligned}$$

είναι ισομετρία.

Σημείωση 2.3.1. *Αφού η $\ell_{\Diamond}$ της Πρότασης 2.3.2 είναι ισομετρία, έπεται ότι είναι και 1–1, δεδομένου ότι είναι και γραμμική συνάρτηση μεταξύ διανυσματικών χώρων με νόρμα.*

Για την απόδειξη του επόμενου ουσιαστικού αποτελέσματος γίνεται χρήση του θεωρήματος Radon-Nikodym και του Θεωρήματος 1.6.1.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty)$.

Ισχύει ότι η συνάρτηση $\ell_{\Diamond}$ είναι και επί.

Σημείωση 2.3.2. *Τονίζουμε ότι $p \in [1, \infty)$ στην Πρόταση 2.3.3 και όχι $p \in [1, \infty]$, όπως στην Πρόταση 2.3.2. Μάλιστα, η περίπτωση $p = 1$ στην Πρόταση 2.3.3 ισχύει επειδή το λ^m είναι σ-πεπερασμένο.*

Τέλος, συνδυάζοντας την Πρόταση 2.3.2 και την Πρόταση 2.3.3 έπεται άμεσα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.3.1 (αναπαράσταση Riesz)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathfrak{M}^m$ *και*
2. $p \in [1, \infty)$.

Ισχύει ότι

$$(L^p(S;\mathbb{F}))' \overset{\ell_{\Diamond}}{\cong} L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$$

και μάλιστα οι διανυσματικοί χώροι $(L^p(S;\mathbb{F}))'$ και $L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$ είναι ισομετρικά ισόμορφοι μέσω της συνάρτησης $\ell_{\Diamond}$. Συγκεκριμένα,

$$\forall \phi \in (L^p(S;\mathbb{F}))' \ \exists! \, [f] \in L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F}) \ \text{τ.ω.:} \ \phi = \ell_{[f]},$$

δλδ

$$\phi([g]) = \int_S g(x) f(x) \mathrm{d}x, \ \forall \, [g] \in L^p(S;\mathbb{F}),$$

και μάλιστα ισχύει ότι

$$\|\phi\|_{(L^p(S;\mathbb{F}))'} = \|[f]\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})}.$$

Το Θεώρημα 2.3.1 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Έστω $S \in \mathfrak{M}^m$ και $p \in [1, \infty)$.
Ταύτιση:
Ταυτίζουμε τον $(L^p(S;\mathbb{F}))'$ με τον $L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F})$, δλδ

$$(L^p(S;\mathbb{F}))' = L^{\frac{p}{p-1}}(S;\mathbb{F}).$$

2.4 Διανυσματικός χώρος Hilbert L^2

Περιοριζόμαστε τώρα στον L^2, ο οποίος, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1, έχει την μοναδική - μεταξύ των L^p - ιδιότητα να ταυτίζεται με τον δυϊκό του.

Άμεσα επαληθεύουμε το παρακάτω.

Πρόταση 2.4.1 (εσωτερικό γινόμενο στον L^2). *Έστω $S \in \mathfrak{M}^m$. Ισχύει ότι η συνάρτηση*

$$\begin{aligned}\langle \lozenge, \blacklozenge \rangle_{L^2(S;\mathbb{F})} \colon \left(L^2(S;\mathbb{F})\right)^2 &\to \mathbb{F}\\ ([f],[g]) &\mapsto \langle [f],[g] \rangle_{L^2(S;\mathbb{F})} = \int_S \langle f(x), g(x) \rangle_{\mathbb{F}} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

είναι εσωτερικό γινόμενο (στον $L^2(S;\mathbb{F})$) με επαγόμενη νόρμα την $\|\lozenge\|_{L^2(S;\mathbb{F})}$.

Η Πρόταση 2.4.1 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.2.2 μας δίνει το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.4.1 (διανυσματικός χώρος Hilbert L^2). *Έστω $S \in \mathfrak{M}^m$. Το ζεύγος $\left(L^2(S;\mathbb{F}), \langle \lozenge, \blacklozenge \rangle_{L^2(S;\mathbb{F})}\right)$ είναι διανυσματικός χώρος Hilbert.*

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 2.4.1, ακολουθεί εύλογα το ερώτημα καθορισμού (τουλάχιστον) μιας ορθοκανονικής βάσης του L^2. Το σύνηθες παράδειγμα είναι η κλασική βάση περιοδικών συναρτήσεων, όπως φαίνεται στο παρακάτω αποτέλεσμα γνωστό από την Ανάλυση Fourier (βλ, πχ, [22], [23] και [2]).

Θεώρημα 2.4.2 (σειρές Fourier). *Έστω $L > 0$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}e_n \colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{C}\\ y &\mapsto e_n(y) = L^{-\frac{m}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{L}\langle n,y \rangle_{\mathbb{R}^m}},\end{aligned} \quad \forall n \in \mathbb{Z}^m.$$

Ισχύουν ότι

1. *κάθε e_n είναι περιοδική με περίοδο L, δλδ*
$$\mathcal{T}_{Ln} e_n = e_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^m,$$
2. *$e_n \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$, $\forall n \in \mathbb{Z}^m$*
3. *$(\mathcal{T}_x e_n)|_{x+\frac{L}{2}(-1,1)^m} \in \bigcap_{p=1}^{\infty} \mathcal{L}^p\left(x + \frac{L}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\forall n \in \mathbb{Z}^m$, και*
4. *$\forall x \in \mathbb{R}^m$, το σύνολο*
$$\left\{\left[(\mathcal{T}_x e_n)|_{x+\frac{L}{2}(-1,1)^m}\right]\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq \bigcap_{p=1}^{\infty} L^p\left(x + \frac{L}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)$$
αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2\left(x + \frac{L}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)$, δλδ
$$[f] = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \langle [\mathcal{T}_x e_n], [f] \rangle_{L^2(x+\frac{L}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C})} [\mathcal{T}_x e_n], \ \forall [f] \in L^2\left(x + \frac{L}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right).$$

Απλά παραφράζοντας το σημείο 4. του Θεωρήματος 2.4.2 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 2.4.2. *Έστω*

1. *$x \in \mathbb{R}^m$,*
2. *$L > 0$ και*
3. *$[f] \in L^2\left(x + \frac{L}{2}(-1,1)^m;\mathbb{C}\right)$.*

Ισχύει ότι

$$[f] = \frac{1}{L^m} \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{F}_{x,L} f\left(\frac{1}{L}n\right)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle \frac{1}{L}n,\lozenge \rangle_{\mathbb{R}^m}}\right],$$

όπου

$$\mathcal{F}_{x,L} f = \int_{x+\frac{L}{2}(-1,1)^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle \lozenge,y \rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y) \mathrm{d}y.$$

Κεφάλαιο 3

Χώροι συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^m$

Εδώ μελετάμε τους διανυσματικούς χώρους των συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων ορισμένων σε ανοικτά υποσύνολα $U \subseteq \mathbb{R}^m$ από την μετρική τοπολογική τους σκοπιά.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [27], [4], [15], [14], [3], [1] και [12], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

3.1 Πλήρεις μετρικοί διανυσματικοί χώροι

Συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτά υποσύνολα έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στα προηγούμενα κεφάλαια. Εδώ όμως εφοδιάζουμε με τοπολογική (γραμμική ξέρουμε ότι έχουν, κάτι που άλλωστε είναι προφανές) δομή πλήρους μετρικού χώρου τα σύνολα που αποτελούνται από αυτές.

3.1.1 Διανυσματικός χώρος Banach C_b^k

Καταρχήν, αξιοποιώντας τον συμβολισμό του §1 παρατηρούμε ότι

$$C_b^k(U;\mathbb{F}) = \left\{ f \in C^k(U;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^\alpha f \in \mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \leq k \right\},\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Τώρα σταθεροποιούμε τυχαίο $k \in \mathbb{N}_0$ και διευκρινίζουμε την κατάσταση με τον παραπάνω διανυσματικό χώρο.

- Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $\left(C_b^k(U;\mathbb{F}),\ \|\lozenge\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}\Big|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} \right)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με νόρμα.
- Αν $k \in \mathbb{N}$, τότε ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C_b^k(U;\mathbb{F}),\ \|\lozenge\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}\Big|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} \right)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του $\mathbb{F}$. Πράγματι, για $U = (-1,1)$ και $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty((-1,1);\mathbb{R})$ με

  $$f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}},\ \forall x \in (-1,1),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Παρατηρούμε όμως ότι

  $$\lim_{n\to\infty} \left\| f_n - |\mathrm{id}_1|_{(-1,1)} \right\|_{\mathcal{L}^\infty((-1,1);\mathbb{F})} \leq \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

  ενώ $|\mathrm{id}_1|_{(-1,1)} \notin C_b^1((-1,1);\mathbb{R}) \supseteq C_b^k((-1,1);\mathbb{R})$.

Άρα αν θέλουμε να βρούμε νόρμα στον $C_b^k(U;\mathbb{F})$ που θα του δίνει την τοπολογική δομή διανυσματικού χώρου Banach, τότε σίγουρα χρειαζόμαστε μια ισχυρότερη από την $\|\lozenge\|_{\mathcal{L}(U;\mathbb{F})}$ η οποία να «ελέγχει» και τις διαφορίσεις.

Το επόμενο είναι κλασικό, όπου για $k = 0$ αξιοποιείται η πληρότητα του $\mathbb{F}$ και για $k \neq 0$ χρησιμοποιείται επαγωγικά η πρώτη περίπτωση σε συνδυασμό με το θεώρημα Taylor.

Θεώρημα 3.1.1.1 (διανυσματικός χώρος Banach C_b^k). *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*

ii. $k \in \mathbb{N}_0$.

Θέτουμε

$$\|\lozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} \colon C_b^k(U;\mathbb{F}) \to [0,\infty)$$
$$f \mapsto \|f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = \max\Big\{\|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})} \,\Big|\, \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k\Big\}.$$

Ισχύουν ότι

1. *το ζεύγος* $\left(C_b^k(U;\mathbb{F}), \|\lozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\right)$ *είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του* $\mathbb{F}$ *και*
2. *το ζεύγος* $\left(C_b^k(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\right)$, *όπου* $\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}$ *η επαγόμενη μετρική της νόρμας* $\|\lozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}$, *είναι μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Σημείωση 3.1.1.1. *Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.1.1, ισχύει προφανώς ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\|D^\alpha(f_n - f)\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k.$$

Γι αυτό τον λόγο θα μπορούσαμε ισοδύναμα να είχαμε θέσει, για παράδειγμα,

$$\|\lozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} \colon C_b^k(U;\mathbb{F}) \to [0,\infty)$$
$$f \mapsto \|f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = \sum_{\substack{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\\ \text{τ.ω.: } |\alpha| \le k}} \|D^\alpha f\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}$$

για την νόρμα στον $C_b^k(U;\mathbb{F})$, *καθώς τελικά οι δύο αυτές νόρμες είναι ισοδύναμες.*

Το επόμενο είναι άμεσο από τον ορισμό της νόρμας στο Θεώρημα 3.1.1.1.

Πρόταση 3.1.1.1. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ *τ.ω.:* $k_1 < k_2$.

Ισχύει ότι

$$C_b^{k_2}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_b^{k_1}(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C_b^{k_2}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C_b^{k_1}(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Για το επόμενο γίνεται χρήση των σχέσεων $D^\alpha \circ D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ & $|\alpha| + |\beta| = |\alpha + \beta|$, $\forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$.

Πρόταση 3.1.1.2. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι $D^\alpha \in CL\Big(C_b^k(U;\mathbb{F}); C_b^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})\Big)$, $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \le k$.

Για το επόμενο αξιοποιείται η κλειστότητα του συνόλου των ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων.

Πρόταση 3.1.1.3. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$\overline{C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}} = C^k_{b,u}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k_b(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο διανυσματικός χώρος $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_b(U;\mathbb{F})$.

Άμεσα από το Θεώρημα 3.1.1.1 και την Πρόταση 3.1.1.3 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.1.1.2 (διανυσματικός χώρος Banach $C^k_{b,u}$)**.** *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$k \in \mathbb{N}_0$.*

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^k_{b,u}(U;\mathbb{F}),\ \|\lozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})}\right)$ είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του $\mathbb{F}$.

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.1.1.3, το επόμενο είναι άμεσο.

Πρόταση 3.1.1.4. *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$k \in \mathbb{N}_0$.*

Ισχύει ότι

$$\overline{C^k_0(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}} = C^k_0(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο διανυσματικός χώρος $C^k_0(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

Άμεσα από το Θεώρημα 3.1.1.2 και την Πρόταση 3.1.1.4 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.1.1.3 (διανυσματικός χώρος Banach C^k_0)**.** *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$k \in \mathbb{N}_0$.*

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^k_0(U;\mathbb{F}),\ \|\lozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^k_0(U;\mathbb{F})}\right)$ είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του $\mathbb{F}$.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 3.1.1.3, και συγκεκριμένα της επαγόμενης μετρικής τοπολογίας με την οποία εφοδιάσαμε τον $C^k_0(U;\mathbb{F})$, ακολουθεί ένα αποτέλεσμα που θα φανεί χρήσιμο στην §5.4. Για την απόδειξή του επαναλαμβάνεται η τεχνική της αντίστοιχης του Θεωρήματος 1.10.4.2.

Θεώρημα 3.1.1.4. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_0(U;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C^\infty_c(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b(U;\mathbb{F})}} = C_0(U;\mathbb{F}).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.1.1.4, απευθείας από την κλειστότητα του συμπαγώς περιεχόμενου υπερσυνόλου του φορέα των συναρτήσεων του υπό μελέτη διανυσματικού χώρου έπεται το επόμενο.

Πρόταση 3.1.1.5. *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$,*
2. *$U_0 \subset\subset U$ και*
3. *$k \in \mathbb{N}_0$.*

Ισχύει ότι

$$\overline{C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}} = C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k_0(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο διανυσματικός χώρος $C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C^k_0(U;\mathbb{F})$.

Άμεσα από το Θεώρημα 3.1.1.3 και την Πρόταση 3.1.1.5 έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.1.1.5 (διανυσματικός χώρος Banach $C^k_{\overline{U_0}}$). *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $U_0 \subset\subset U$ *και*
3. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}),\, \|\lozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})} \right)$ *είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του* $\mathbb{F}$.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 3.1.1.5, και συγκεκριμένα της επαγόμενης μετρικής τοπολογίας με την οποία εφοδιάσαμε τον $C^k_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$, ακολουθεί ένα αποτέλεσμα που θα φανεί χρήσιμο στην §4.1.1. Για την απόδειξή του χρησιμοποιείται για το πρώτο σημείο η συμπάγεια των φορέων και για το δεύτερο ότι το άθροισμα δύο συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^m$ είναι επίσης συμπαγές σε συνδυασμό με το Θεώρημα 1.9.5.1.

Πρόταση 3.1.1.6. *Έστω*

α΄. $k \in \mathbb{N}_0$,

β΄. *μη τετριμμένη* $f_1 \in C^k_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*

γ΄. *μη τετριμμένη* $f_2 \in C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Έχουμε τα εξής.

1. *Ισχύει ότι*
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{C}_x f_1(hn) h^m f_2(hn) < \infty,\ \forall x \in \mathbb{R}^m,\ \forall h \in \mathbb{R}.$$
2. *Θέτουμε*
$$\begin{aligned} g_h\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto g_h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{C}_x f_1(hn) h^m f_2(hn), \end{aligned} \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$
Ισχύουν ότι
   i. $\{g_h\}_{h \in \mathbb{R}} \subsetneq C^k_{\operatorname{supp}(f_1)+\operatorname{supp}(f_2)}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
   ii. $\lim_{h\to 0} \|g_h - f_1 * f_2\|_{C^k_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0$.

Σημείωση 3.1.1.2. *$\forall x \in \mathbb{R}^m$, τα αθροίσματα $\{g_h(x)\}_{h\in\mathbb{R}} \subsetneq \mathbb{R}$ στην Πρόταση 3.1.1.6 αποτελούν αθροίσματα Riemann του ολοκληρώματος Riemann (στην προκειμένη) $(f_1 * f_2)(x)$.*

3.1.2 Διανυσματικός χώρος με οικογένεια νορμών C^∞_b

Και αν για την περίπτωση του $C^k_b(U;\mathbb{F})$ με $k \in \mathbb{N}_0$ τα πράγματα ήταν στρωτά, εδώ θα δούμε ότι απαιτείται μεγαλύτερη προσπάθεια για να αποκτήσει τοπολογική δομή πλήρους μετρικού χώρου ο $C^\infty_b(U;\mathbb{F})$, η οποία προφανώς θα είναι «λογική συνέχεια» της αντίστοιχης δομής του κάθε $C^k_b(U;\mathbb{F})$.

Πριν δούμε όμως τι ακριβώς θέλουμε να σημαίνει η έννοια «λογική συνέχεια», πρώτα διευκρινίζουμε την κατάσταση με τον υπό μελέτη $C^\infty_b(U;\mathbb{F})$. Έστω λοιπόν $k \in \mathbb{N}_0$.

- Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $\left(C^\infty_b(U;\mathbb{F}),\, \|\lozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^\infty_b(U;\mathbb{F})} \right)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με νόρμα.
- Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^\infty_b(U;\mathbb{F}),\, \|\lozenge\|_{C^k_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{C^\infty_b(U;\mathbb{F})} \right)$ δεν είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του $\mathbb{F}$. Πράγματι, το αντίστοιχο αντιπαράδειγμα της §3.1.1 μας δίνει το ζητούμενο για $k = 0$, ενώ για το τυχαία επιλεγμένο $k \in \mathbb{N}$ είτε χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.1.1.1 είτε θεωρούμε το παραπάνω αντιπαράδειγμα με την διαφορά ότι τώρα επιλέγουμε μια $(k-1)$-αντιδιαφόριση της συνάρτησης που πήραμε εκεί.

Μιας και το ζεύγος $\left(C_b^\infty(U;\mathbb{F}),\ \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\Big|_{(C_b^\infty(U;\mathbb{F}))^2}\right)$ δεν είναι πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$, πρέπει να σκεφτούμε κάτι λιγότερο προφανές. Πρέπει πρώτα να διερωτηθούμε τι ακριβώς θέλουμε; Καθώς η σύγκλιση μιας ακολουθίας $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F})$ σε μια συνάρτηση $f \in C_b^k(U;\mathbb{F})$ σημαίνει σύγκλιση - υπό την έννοια του $\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})$ - κάθε $\{D^\alpha f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})$ στην $D^\alpha f \in C_b^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})$ με $|\alpha| \le k$, είναι λογικό να θέλουμε μια έννοια σύγκλισης μιας $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ σε μια $f \in C_b^\infty(U;\mathbb{F})$, σύμφωνα με την οποία κάθε $\{D^\alpha f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ συγκλίνει - υπό την έννοια του $\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})$ - στην $D^\alpha f \in C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ με $|\alpha| < \infty$. Χρειαζόμαστε δλδ

1. μια μετρική που να συνθέτει όλες αυτές τις αριθμήσιμα άπειρες επιμέρους συγκλίσεις σε μία και
2. ο $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$ εφοδιασμένος με αυτή την μετρική να είναι πλήρης.

Ως προς αυτό, πρώτα παραθέτουμε το επόμενο αποτέλεσμα, για το οποίο αξιοποιείται η μονοτονία της συνάρτησης

$$\begin{aligned}\phi\colon [0,\infty) &\to [0,1)\\ x &\mapsto \phi(x) = \frac{x}{1+x}\end{aligned}$$

σε μια κλασική κατασκευή μετρικής ακολουθιών.

Πρόταση 3.1.2.1 (μετρικός διανυσματικός χώρος C_b^∞)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}\colon (C_b^\infty(U;\mathbb{F}))^2 &\to [0,\infty)\\ (f,g) &\mapsto \|f-g\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = \sum_{k=0}^\infty \frac{2^{-k}\|f-g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}}{1+\|f-g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}}.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C_b^\infty(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}\right)$ είναι μετρικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.

Στην συνέχεια, άμεσα παίρνουμε το πρώτο ζητούμενο.

Θεώρημα 3.1.2.1. *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$\{f_n\}_{n=1}^\infty \cup \{f\} \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})$.*

Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Σημείωση 3.1.2.1. *Η διπλή συνεπαγωγή του Θεωρήματος 3.1.2.1 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|D^\alpha(f_n - f)\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ζητούμενο χρειαζόμαστε πρώτα το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο έπεται με τα ίδια άμεσα επιχειρήματα όπως και το Θεώρημα 3.1.2.1.

Πρόταση 3.1.2.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Σημείωση 3.1.2.2. *Η διπλή συνεπαγωγή της Πρότασης 3.1.2.2 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\begin{aligned}\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \{D^\alpha f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq \mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\end{aligned}$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|D^\alpha(f_m - f_n)\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m.\end{aligned}$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.1.2.2, έπεται άμεσα από το Θεώρημα 3.1.1.1 το δεύτερο ζητούμενο.

Θεώρημα 3.1.2.2 (πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος C_b^∞)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C_b^\infty(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}\right)$ είναι πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Σημείωση 3.1.2.3. *Όλη η ανάλυση που προηγήθηκε παραμένει ανεπηρέαστη αν στην Πρόταση 3.1.2.1 ορίζαμε την μετρική όχι μέσω της οικογένειας νορμών*

$$\left\{ \|\lozenge\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\Big|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} \right\}_{k=0}^{\infty},$$

αλλά μέσω της οικογένειας ψευδονορμών

$$\left\{ \rho_k = \max\left\{ \|D^\alpha \lozenge\|_{\mathcal{L}^\infty(U;\mathbb{F})}\Big|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{N}_0 \text{ τ.ω.: } |\alpha| = k \right\} \right\}_{k=0}^{\infty}$$

(είναι άμεσο ότι κάθε ρ_k είναι όντως ψευδονόρμα), δλδ αν

$$\begin{aligned} \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} \colon (C_b^\infty(U;\mathbb{F}))^2 &\to [0,\infty) \\ (f,g) &\mapsto \|f-g\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}\rho_k(f-g)}{1+\rho_k(f-g)}, \end{aligned}$$

καθώς τελικά οι δύο αυτές μετρικές είναι ισοδύναμες.

Επίσης παραμένει ανεπηρέαστη αν ορίζαμε την μετρική ως είτε

$$\begin{aligned} \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} \colon (C_b^\infty(U;\mathbb{F}))^2 &\to [0,\infty) \\ (f,g) &\mapsto \|f-g\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = \sum_{k=0}^{\infty} \min\left\{2^{-k}, \|f-g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}\right\}, \end{aligned}$$

είτε

$$\begin{aligned} \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} \colon (C_b^\infty(U;\mathbb{F}))^2 &\to [0,\infty) \\ (f,g) &\mapsto \|f-g\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})} = \sum_{k=0}^{\infty} \min\left\{2^{-k}, \rho_k(f-g)\right\}. \end{aligned}$$

Οπότε τώρα μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε όλα τα αντίστοιχα αποτελέσματα της §3.1.1.

Πρόταση 3.1.2.3. *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$k \in \mathbb{N}_0$.*

Ισχύει ότι

$$C_b^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_b^k(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C_b^\infty(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C_b^k(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Πρόταση 3.1.2.4. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι $D^\alpha \in CL(C_b^\infty(U;\mathbb{F}); C_b^\infty(U;\mathbb{F}))$, $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$.*

Πρόταση 3.1.2.5. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$\overline{C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}} = C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F}) \subsetneq C_b^\infty(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο διανυσματικός χώρος $C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F})$ είναι κλειστός γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $C_b^\infty(U;\mathbb{F})$.

Θεώρημα 3.1.2.3 (πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος $C_{b,u}^\infty$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b^\infty(U;\mathbb{F})}\Big|_{(C_{b,u}^\infty(U;\mathbb{F}))^2}\right)$ είναι πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Πρόταση 3.1.2.6. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $U_0 \subset\subset U$.

Ισχύει ότι

$$\overline{C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty_b(U;\mathbb{F})}} = C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty_b(U;\mathbb{F})$$

και άρα ο διανυσματικός χώρος $C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})$ *είναι κλειστός γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του* $C^\infty_{b,u}(U;\mathbb{F})$.

Θεώρημα 3.1.2.4 (διανυσματικός χώρος Banach $C^\infty_{\overline{U_0}}$)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $U_0 \subset\subset U$.

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty_b(U;\mathbb{F})}\Big|_{\left(C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F})\right)^2}\right)$ *είναι διανυσματικός χώρος Banach επί του* $\mathbb{F}$.

Έχοντας δώσει στον $C^\infty_b(U;\mathbb{F})$ την συγκεκριμένη επιθυμητή - στα πλαίσια της προαναφερόμενης έννοιας της «λογικής συνέχειας» - δομή πλήρους μετρικού χώρου, διερωτόμαστε μήπως θα μπορούσαμε να πάμε ένα βήμα παραπέρα και να βρούμε μια νόρμα αυτή την φορά

$$\begin{aligned} \|\lozenge\| : C^\infty_b(U;\mathbb{F}) &\to [0,\infty) \\ f &\mapsto \|f\| \end{aligned}$$

τ.ω.: το ζεύγος $(C^\infty_b(U;\mathbb{F}), \|\lozenge\|)$ να είναι χώρος Banach ο οποίος όμως θα έχει την ίδια επιθυμητή τοπολογική δομή; Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, καθώς αν υπήρχε μια τέτοια νόρμα, τότε η συνάρτηση D^α, $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$, δεν θα μπορούσε να ήταν ποτέ συνεχής με την επιθυμητή μας έννοια, κάτι το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.2.4. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, επιλέγουμε $U = \mathbb{R}$ και $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Καθώς $D \in CL(C^\infty_b(\mathbb{R};\mathbb{C}); C^\infty_b(\mathbb{R};\mathbb{C}))$, έπεται ότι

$$\exists K > 0 \text{ τ.ω.: } \|Df\| \le K\|f\|, \ \forall f \in C^\infty_b(\mathbb{R};\mathbb{C}).$$

Επιλέγοντας όμως είτε $f = e^{i2K\lozenge}$, είτε $f = \frac{e^{iK_0\lozenge}}{K_0}$ με $K_0 > K$, τότε καταλήγουμε σε άτοπο, καθώς

$$\left\|2Ke^{i2K\lozenge}\right\| \le K\left\|e^{i2K\lozenge}\right\| \ \& \ \left\|e^{iK_0\lozenge}\right\| \le K\left\|\frac{e^{iK_0\lozenge}}{K_0}\right\|,$$

δλδ ισοδύναμα (το μοιραίο βήμα)

$$2K\left\|e^{i2K\lozenge}\right\| \le K\left\|e^{i2K\lozenge}\right\| \ \& \ \left\|e^{iK_0\lozenge}\right\| \le \frac{K}{K_0}\left\|e^{iK_0\lozenge}\right\|,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συμπερασματικά, η κατασκευή του πλήρους μετρικού διανυσματικού χώρου του Θεωρήματος 3.1.2.2 είναι το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα που μπορούμε να πετύχουμε σε αυτά τα πλαίσια.

Η συλλογιστική πίσω από τα αποτελέσματα της παρούσας υποενότητας θα αποτελέσει την βάση για την αντίστοιχη των επόμενων.

3.1.3 Διανυσματικός χώρος με οικογένεια ψευδονορμών C^k

Έστω $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U)$ τ.ω.: $U_i \nearrow U$, $k \in \mathbb{N}_0$ και $i \in \mathbb{N}$.

- Παρατηρούμε ότι το ζεύγος $\left(C^k(U;\mathbb{F}), \left\|\lozenge|_{U_i}\right\|_{C^k_b(U_i;\mathbb{F})}\right)$ είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ με ψευδονόρμα.
- Το ερώτημα αν το ζεύγος $\left(C^k(U;\mathbb{F}), \left\|(\lozenge - \blacklozenge)|_{U_i}\right\|_{C^k_b(U_i;\mathbb{F})}\right)$, όπου $\left\|(\lozenge - \blacklozenge)|_{U_i}\right\|_{C^k_b(U_i;\mathbb{F})}$ η επαγόμενη ψευδομετρική της ψευδονόρμας $\left\|\lozenge|_{U_i}\right\|_{C^k_b(U_i;\mathbb{F})}$, είναι πλήρης ψευδομετρικός διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$ μας είναι αδιάφορο καθώς σκοπεύουμε να μετατρέψουμε τον $C^k(U;\mathbb{F})$ σε έναν πλήρη μετρικό διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{F}$.

Όπως έχουμε αναφέρει, θα ακολουθήσουμε την συλλογιστική πίσω από τα αποτελέσματα της §3.1.2. Μάλιστα για τις αποδείξεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων εδώ γίνεται χρήση των ίδιων επιχειρημάτων με πριν.

Πρόταση 3.1.3.1 (μετρικός διανυσματικός χώρος C^k). *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$
2. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$ *και*
3. $k \in \mathbb{N}_0$.

Θέτουμε

$$\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} : \left(C^k(U;\mathbb{F})\right)^2 \to [0,\infty)$$

$$(f,g) \mapsto \|f-g\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{-i}\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}}{1+\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})}}.$$

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^k(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)}\right)$ *είναι μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Παρατηρούμε ότι η μετρική της Πρότασης 3.1.3.1 εξαρτάται από την γνησίως αύξουσα, συμπαγώς περιεχόμενη και καλύπτουσα ακολουθία $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ωστόσο η εξάρτηση αυτή δεν είναι ουσιώδης, καθώς η τοπολογική δομή του $C^k(U;\mathbb{F})$ που παράγει είναι ανεξάρτητη της ίδιας της ακολουθίας, όπως φαίνεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.1.3.1. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$,
3. $k \in \mathbb{N}_0$ *και*
4. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f\} \subsetneq C^k(U;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall U_0 \subset\subset U.$$

Σημείωση 3.1.3.1.

1. *Η διπλή συνεπαγωγή του Θεωρήματος 3.1.3.1 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|D^{\alpha}(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k,\ \forall U_0 \subset\subset U.$$

2. *Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.3.1 είναι η ανεξαρτησία της τοπολογικής δομής του* $C^k(U;\mathbb{F})$ *από την επιλογή της* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$*, καθώς αν θεωρήσουμε δύο τέτοιες ακολουθίες,* $\{U_{1,i}\}_{i=1}^{\infty}$ *&* $\{U_{2,i}\}_{i=1}^{\infty}$*, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{1,i};\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_{2,i};\mathbb{F}\right)} = 0.$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U \ \&\ \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0,\ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U.$$

Πρόταση 3.1.3.2. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^k(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \left\{f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy}, \ \forall U_0 \subset\subset U.$$

Σημείωση 3.1.3.2. *Η διπλή συνεπαγωγή της Πρότασης 3.1.3.2 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\begin{aligned}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^k(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \left\{f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy}, \ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{D^\alpha f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy}, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k, \ \forall U_0 \subset\subset U,\end{aligned}$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}\exists \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U \ \& \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0, \ \forall \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left\|(f_m - f_n)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0, \ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left\|D^\alpha (f_m - f_n)|_{U_0}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F})} = 0, \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \text{ τ.ω.: } |\alpha| \le k, \ \forall U_0 \subset\subset U.\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.1.3.2 (πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος C^k)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$
2. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$ *και*
3. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^k(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^k\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)}\right)$ *είναι πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Σημείωση 3.1.3.3. *Όλη η ανάλυση που προηγήθηκε παραμένει ανεπηρέαστη αν στην Πρόταση 3.1.3.1 ορίζαμε την μετρική όχι μέσω ακολουθίας* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$, *αλλά μέσω ακολουθίας* $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \subset\subset U, \forall i \in \mathbb{N}, \ \& \ U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, *χωρίς δλδ να ζητούσαμε συγκεκριμένη μονοτονία της ακολουθίας, καθώς τελικά οι δύο αυτές μετρικές είναι ισοδύναμες.*

Πρόταση 3.1.3.3. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ *τ.ω.:* $k_1 < k_2$.

Ισχύει ότι

$$C^{k_2}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^{k_1}(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C^{k_2}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^{k_1}(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Πρόταση 3.1.3.4. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι $D^\alpha \in CL\big(C^k(U;\mathbb{F}); C^{k-|\alpha|}(U;\mathbb{F})\big), \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ *τ.ω.:* $|\alpha| \le k$.

3.1.4 Διανυσματικός χώρος με οικογένεια ψευδονορμών C^∞

Είναι πλέον αναμενόμενο πως θα χειριστούμε την περίπτωση του $C^\infty(U;\mathbb{F})$, καθώς μια αριθμήσιμη οικογένεια ψευδονορμών στον διανυσματικό χώρο αυτόν είναι η

$$\left\{ \left\| \lozenge|_{U_i} \right\|_{C_b^k(U_i;\mathbb{F})} \middle| k \in \mathbb{N}_0 \ \& \ \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U \right\}.$$

Πρόταση 3.1.4.1 (μετρικός διανυσματικός χώρος C^∞). *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \Rsh U$.

Θέτουμε

$$\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} : \left(C^\infty(U;\mathbb{F})\right)^2 \to [0,\infty)$$

$$(f,g) \mapsto \|f-g\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = \sum_{i=1}^\infty \frac{2^{-i}\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^i(U_i;\mathbb{F})}}{1+\left\|(f-g)|_{U_i}\right\|_{C_b^i(U_i;\mathbb{F})}}.$$

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^\infty(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)}\right)$ *είναι μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Θεώρημα 3.1.4.1. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $\{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \Rsh U$ *και*
3. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \cup \{f\} \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \subset\subset U.$$

Σημείωση 3.1.4.1.

1. *Η διπλή συνεπαγωγή του Θεωρήματος 3.1.4.1 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|D^\alpha(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{\mathcal{L}^\infty(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall U_0 \subset\subset U.$$

2. *Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.4.1 είναι η ανεξαρτησία της τοπολογικής δομής του* $C^\infty(U;\mathbb{F})$ *από την επιλογή της* $\{U_i\}_{i=1}^\infty$, *καθώς αν θεωρήσουμε δύο τέτοιες ακολουθίες,* $\{U_{1,i}\}_{i=1}^\infty$ *&* $\{U_{2,i}\}_{i=1}^\infty$, *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_{1,i};\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(f_n-f)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_{2,i};\mathbb{F}\right)} = 0.$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\exists \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U \ \& \ \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)} = 0,\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \Rsh U.$$

Πρόταση 3.1.4.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^{\infty}(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \left\{f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \subset\subset U.$$

Σημείωση 3.1.4.2. *Η διπλή συνεπαγωγή της Πρότασης 3.1.4.2 προφανώς συμπληρώνεται ως*

$$\begin{aligned}\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C^{\infty}(U;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} &\Leftrightarrow \left\{f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq C_b^k(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{D^{\alpha} f_n|_{U_0}\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{L}^{\infty}(U_0;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall U_0 \subset\subset U,\end{aligned}$$

το οποίο γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}&\exists\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U \ \&\ \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_{C^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)} = 0,\ \forall\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \left\|(f_m - f_n)|_{U_0}\right\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_0 \subset\subset U \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \left\|D^{\alpha}(f_m - f_n)|_{U_0}\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(U_0;\mathbb{F})} = 0,\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall U_0 \subset\subset U.\end{aligned}$$

Θεώρημα 3.1.4.2 (πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος C^{∞})**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_i \nearrow U$.

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(C^{\infty}(U;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^{\infty}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i;\mathbb{F}\right)}\right)$ *είναι πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Σημείωση 3.1.4.3. *Σε αντίθεση με την περίπτωση του C^k, όλη η ανάλυση που προηγήθηκε εδώ εξαρτάται ουσιωδώς από το γεγονός ότι η ακολουθία $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ στην Πρόταση 3.1.4.1 είναι αύξουσα.*

Πρόταση 3.1.4.3. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $k \in \mathbb{N}_0$.

Ισχύει ότι

$$C^{\infty}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^k(U;\mathbb{F})$$

και μάλιστα

$$C^{\infty}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^k(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός είναι συνεχής.

Πρόταση 3.1.4.4. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι $D^{\alpha} \in CL(C^{\infty}(U;\mathbb{F}); C^{\infty}(U;\mathbb{F}))$, $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$.*

3.1.5 Διανυσματικός χώρος με οικογένεια νορμών $\mathcal{S}$

Καταρχήν αξιοποιώντας τον συμβολισμό του §1 παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &= \left\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \left((\mathrm{id}_m)^{\alpha} D^{\beta} f\right) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\, \alpha,\beta \in (\mathbb{N}_0)^m\right\} = \\ &= \left\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, D^{\alpha}\left((\mathrm{id}_m)^{\beta} f\right) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\, \alpha,\beta \in (\mathbb{N}_0)^m\right\} = \\ &= \left\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \left(|\mathrm{id}_m|^n D^{\alpha} f\right) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\ &= \left\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \left(\left(1 + |\mathrm{id}_m|^n\right) D^{\alpha} f\right) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\ &= \left\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \left(\left(1 + |\mathrm{id}_m|\right)^n D^{\alpha} f\right) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\} = \\ &= \left\{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \,\middle|\, \left(\left(1 + |\mathrm{id}_m|^2\right)^n D^{\alpha} f\right) \in \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\right\}.\end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι κάθε ένας από του παραπάνω ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του διανυσματικού χώρου αυτού εισάγουν και μια αριθμήσιμη οικογένεια νορμών σε αυτόν, πχ, η

$$\left\{\rho_{\alpha,\beta} = \left\|(\mathrm{id}_m)^{\alpha} D^{\beta} \lozenge\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \,\middle|\, \forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m\right\}.$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $f \in S(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ με $\rho_{\alpha,\beta}(f) = 0$ για κάποια $\alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m$, τότε λόγω συνέχειας έχουμε ότι $D^{\beta} f \equiv 0$, άρα η f είναι πολυώνυμο, οπότε $f \equiv 0$ αφού $f \in C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Οπότε, επιλέγουμε οποιαδήποτε από αυτές τις οικογένειες, πχ, την παραπάνω, και ακολουθώντας την συλλογιστική των προηγούμενων υποενοτήτων έχουμε τα παρακάτω.

Πρόταση 3.1.5.1 (μετρικός διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$)**.** *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \colon (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))^2 &\to [0,\infty)\\ (f,g) &\mapsto \|f-g\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = \sum_{\alpha,\beta \in (\mathbb{N}_0)^m} \frac{2^{-|\alpha|-|\beta|}\left\|(\mathrm{id}_m)^{\alpha} D^{\beta}(f-g)\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}{1+\left\|(\mathrm{id}_m)^{\alpha} D^{\beta}(f-g)\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι το ζεύγος $\left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\right)$ *είναι μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Θεώρημα 3.1.5.1. *Έστω* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f\} \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\|(\mathrm{id}_m)^{\alpha} D^{\beta}(f_n - f)\right\|_{\mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0,\ \forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Πρόταση 3.1.5.2. *Ισχύει ότι*

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \text{ Cauchy} \Leftrightarrow \left\{(\mathrm{id}_m)^{\alpha} D^{\beta} f_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subsetneq \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \text{ Cauchy},\ \forall\, \alpha, \beta \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Θεώρημα 3.1.5.2 (πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος $\mathcal{S}$)**.** *Ισχύει ότι το ζεύγος* $\left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}), \|\lozenge - \blacklozenge\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\right)$ *είναι πλήρης μετρικός διανυσματικός χώρος επί του* $\mathbb{F}$.

Πρόταση 3.1.5.3. *Ισχύει ότι* $D^{\alpha} \in CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}); \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))$, $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$.

3.2 Βασικοί εγκλεισμοί

Εδώ μελετάμε θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των χώρων συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων. Συγκεκριμένα μελετάμε τους εγκλεισμούς $C_c^{\infty}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^{\infty}(U;\mathbb{F})$ και $C_c^{\infty}(U;\mathbb{F}) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \subsetneq C^{\infty}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

3.2.1 $C_c^{\infty} \subsetneq C^{\infty}$

Ξεκινάμε με ένα άμεσο αποτέλεσμα

Πρόταση 3.2.1.1. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $U_0 \subset\subset U$ *και*
3. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{f\} \subsetneq C_{\overline{U_0}}^{\infty}(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C_b^{\infty}(U;\mathbb{F})} = 0.$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left\|(f_n - f)|_{U_1}\right\|_{C_b^k(U_1;\mathbb{F})} = 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall U_1 \subset\subset U.$$

Σημείωση 3.2.1.1. *Παραφράζοντας την Πρόταση 3.2.1.1 έχουμε ότι ο εγκλεισμός*

$$C_{\overline{U_0}}^{\infty}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^{\infty}(U;\mathbb{F})$$

είναι ακολουθιακά συνεχής.

Μιας και στην Πρόταση 3.2.1.1 η συνάρτηση εγκλεισμού ι: $C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \to C^\infty(U;\mathbb{F})$ ορίζεται μεταξύ μετρικών χώρων, έχουμε ότι η ακολουθιακή συνέχεια της είναι ισοδύναμη με την συνέχειά της[1], οπότε έπεται το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2.1.1 (συνέχεια εγκλεισμού $C^\infty_{\overline{U_0}} \subsetneq C^\infty$). *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $U_0 \subset\subset U$.

Ισχύει ότι

$$C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \hookrightarrow C^\infty(U;\mathbb{F}),$$

δλδ ο εγκλεισμός

$$C^\infty_{\overline{U_0}}(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$$

είναι συνεχής.

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.10.3.1, άμεσο είναι επίσης και το ακόλουθο.

Πρόταση 3.2.1.2. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $\{U_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U)$ *τ.ω.:* $U_n \nearrow U$,
3. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subsetneq C^\infty_c(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\forall n \in \mathbb{N}$,
   i. $f_n|_{U_n} \equiv 1$ *και*
   ii. $\mathrm{supp}(f_n) \subset\subset U_{n+1}$

   και
4. $f \in C^\infty(U;\mathbb{F})$.

Ισχύουν ότι

$$f_n f \in C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \;\&\; \lim_{n\to\infty} \|(f_n - 1) f\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{n=1}^\infty U_n;\mathbb{F}\right)} = 0.$$

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 3.2.1.2 παίρνουμε το εξής βασικό.

Θεώρημα 3.2.1.2 (πυκνότητα εγκλεισμού $C^\infty_c \subsetneq C^\infty$). *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*

$$C^\infty_c(U;\mathbb{F}) \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{F})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{C^\infty_c(U;\mathbb{F})}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C^\infty\left(\bigcup\limits_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)}} = C^\infty(U;\mathbb{F}),\ \forall \{U_i\}_{i=1}^\infty \subsetneq \mathcal{P}(U) \text{ τ.ω.: } U_i \nearrow U.$$

3.2.2 $C^\infty_c \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq C^\infty$

Τα δύο πρώτα αποτελέσματα είναι άμεσα.

Πρόταση 3.2.2.1. *Έστω*

1. $U \subset\subset \mathbb{R}^m$ *και*
2. $\{f_n\}_{n=1}^\infty \cup \{f\} \subsetneq C^\infty_{\overline{U}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^\infty_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

[1] Γενικά, η συνέχεια μιας συνάρτησης μεταξύ τοπολογικών χώρων είναι ισχυρότερη της ακολουθιακής συνέχειας. Υπάρχει ισοδυναμία μόνο στην περίπτωση ακολουθιακών τοπολογικών χώρων, που τέτοιοι, για παράδειγμα, είναι οι πρωτίστως αριθμήσιμοι τοπολογικοί χώροι, που τέτοιοι, για παράδειγμα, είναι οι (ψεύδο-)μετρικοί χώροι (βλ, πχ, [18] (με την σημείωση ότι οι τοπολόγοι ορίζουν διαφορετικά τον χώρο Fréchet από τους συναρτησιοαναλύστες) και [17]).

Ισχύει ότι
$$\lim_{n\to\infty}\left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta(f_n-f)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}=0,\ \forall\,\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m.$$

Πρόταση 3.2.2.2. *Έστω*

1. $U\subseteq\mathbb{R}^m$ *και*
2. $\{f_n\}_{n=1}^\infty\cup\{f\}\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*
$$\lim_{n\to\infty}\left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta(f_n-f)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}=0,\ \forall\,\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m.$$

Ισχύει ότι
$$\lim_{n\to\infty}\|\,(f_n-f)|_U\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})}=0,\ \forall k\in\mathbb{N}_0,\ \forall U\subset\subset\mathbb{R}^m.$$

Επιχειρηματολογώντας όπως στην §3.2.1, έπονται από την Πρόταση 3.2.2.1 και την Πρόταση 3.2.2.2 τα αντίστοιχα εξής αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.2.2.1 (συνέχεια εγκλεισμού $C_{\overline{U}}^\infty\subsetneq\mathcal{S}$)**.** *Έστω $U\subset\subset\mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*
$$C_{\overline{U}}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\hookrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),$$
δλδ ο εγκλεισμός
$$C_{\overline{U}}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$
είναι συνεχής.

Θεώρημα 3.2.2.2 (συνέχεια εγκλεισμού $\mathcal{S}\subsetneq C^\infty$)**.** *Ισχύει ότι*
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),$$
δλδ ο εγκλεισμός
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$
είναι συνεχής.

Πάλι υπό την ισχύ του Θεωρήματος 1.10.3.1, παίρνουμε άμεσα το εξής.

Πρόταση 3.2.2.3. *Έστω*

1. $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $f|_{B(0,1)}\equiv 1$ *και*
2. $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Θέτουμε $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *ως*
$$\begin{aligned}f_n\colon \mathbb{R}^m&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto f_n(x)=f\left(\frac{1}{n}x\right),\end{aligned}\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Ισχύουν ότι
$$f_ng\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\ \text{\&}\ \lim_{n\to\infty}\left\|(\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta((f_n-1)\,g)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}=0,\ \forall\,\alpha,\beta\in(\mathbb{N}_0)^m.$$

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 3.2.2.3 παίρνουμε το εξής βασικό.

Θεώρημα 3.2.2.3 (πυκνότητα εγκλεισμού $C_c^\infty\subsetneq S$)**.** *Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*
$$C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$
είναι πυκνός, δλδ
$$\overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}^{\|\lozenge-\blacklozenge\|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 3.2.1.2 με τους ίδιους τους εγκλεισμούς $C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\subsetneq\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ παίρνουμε άμεσα το παρακάτω επίσης βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2.2.4 (πυκνότητα εγκλεισμού $\mathcal{S}\subsetneq C^\infty$)**.** *Ισχύει ότι ο εγκλεισμός*
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\subsetneq C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$$
είναι πυκνός, δλδ
$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}^{\|\lozenge-\blacklozenge\|_{C^\infty\left(\bigcup_{i=1}^\infty U_i;\mathbb{F}\right)}}=C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}),\ \forall\{U_i\}_{i=1}^\infty\subsetneq\mathcal{P}(\mathbb{R}^m)\ \text{τ.ω.:}\ U_i\nearrow\mathbb{R}^m.$$

Κεφάλαιο 4

Χώροι κατανομών στον $\mathbb{R}^m$

Εδώ μελετάμε θεμελιώδεις διανυσματικούς χώρους κατανομών, δλδ διανυσματικούς χώρους των γραμμικών και συνεχών[1] συναρτήσεων από κάποιο χώρο συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{F}$.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [15], [14], [3], [1], [12], [4], [16] και [7], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

4.1 Διανυσματικοί χώροι κατανομών

Εδώ εισάγουμε μόνο τους θεμελιώδεις διανυσματικούς χώρους κατανομών και μελετάμε τις βασικές ιδιότητές τους.

4.1.1 Διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)'$

Ξεκινάμε με την μελέτη του διανυσματικού χώρου $(C_c^\infty)'$, ο οποίος αποτελείται από γραμμικές και «συνεχείς» συναρτήσεις από τον C_c^∞ στον $\mathbb{F}$.

Σύνολο $(C_c^\infty)'$

Μιας και δεν έχουμε ορίσει τοπολογία στον $C_c^\infty(U;\mathbb{F})$, δεν μπορούμε άμεσα να μιλάμε για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε αυτόν τον διανυσματικό χώρο. Αξιοποιούμε όμως την δυνατότητά μας να μιλάμε για συνέχεια συναρτήσεων ορισμένων σε κάθε έναν από τους $C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})$ με $U_0 \subset\subset U$, τους οποίους έχουμε εφοδιάσει με μετρική τοπολογία, όπως φαίνεται στο ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.1.1 (σύνολο $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' = \left\{ f\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ γραμμική } \&\ f|_{C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})} \text{ συνεχής, } \forall U_0 \subset\subset U \right\}.$$

Μπορούμε άμεσα με απλά επιχειρήματα να δώσουμε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς για τα στοιχεία του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, οι πιο βασικοί από τους οποίους δίνονται στο επόμενο.

Πρόταση 4.1.1.1 (ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}
&(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' = \\
&\quad= \left\{ f\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ γραμμική } \&\ f|_{C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F})} \text{ ακολουθιακά συνεχής, } \forall U_0 \subset\subset U \right\} = \\
&\quad= \Big\{ f\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\Big|\, f \text{ γραμμική } \&\ \forall U_0 \subset\subset U,\ \exists\, (K>0\ \&\ k \in \mathbb{N}) \text{ τ.ω.:} \\
&\qquad\qquad \text{τ.ω.: } |f(g)| \le K \|g\|_{C_b^k(U;\mathbb{F})},\ \forall g \in C_{\overline{U_0}}^\infty(U;\mathbb{F}) \Big\}.
\end{aligned}$$

Παρακάτω δίνουμε δύο βασικά παραδείγματα κατανομών (δλδ στοιχείων) του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$. Το πρώτο αποτέλεσμα, λοιπόν, είναι συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

[1] Προσοχή, στον C_c^∞ δεν έχουμε ορίσει τοπολογία, οπότε δεν μπορούμε να μιλάμε για συνεχείς συναρτήσεις από αυτόν. Ωστόσο, μπορούμε να παρακάμψουμε αυτό το εμπόδιο, όπως θα δούμε παρακάτω.

Πρόταση 4.1.1.2. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \ell_f \colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \ell_f(g) = \int_U g(x)f(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\ell_f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Άραγε είναι όλα τα στοιχεία του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ της μορφής της Πρότασης 4.1.1.2; Η απάντηση είναι αρνητική, όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα, για το οποίο αξιοποιείται το Θεώρημα 1.10.5.1.

Πρόταση 4.1.1.3. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
ii. $x \in U$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} \delta_x \colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \delta_x(g) = g(x). \end{aligned}$$

Ισχύουν ότι

1. $\delta_x \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $\nexists f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $\delta_x = \ell_f$, *όπου* ℓ_f *όπως στην Πρόταση 4.1.1.2.*

Τόσο η Πρόταση 4.1.1.2 όσο και η Πρόταση 4.1.1.3 μας οδηγούν στους επόμενους αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.1.2 (σύνολο $(C_c^\infty)'_r$)**.** *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r = \left\{ \ell \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \;\middle|\; \exists f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } \ell(g) = \int_U g(x)f(x)\mathrm{d}x,\ \forall g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \right\} \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε κανονικές και για τις οποίες χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\ell_f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$ *που καταδεικνύει την εξάρτησή τους από την αντίστοιχη συνάρτηση* $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$.

Ορισμός 4.1.1.3 (σύνολο $(C_c^\infty)'_s$)**.** *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$. *Θέτουμε*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_s = (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \smallsetminus (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε ιδιάζουσες.

Άμεσα από το Θεώρημα 1.10.5.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 4.1.1.4. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1_{loc}(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:*

$$(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r \ni \ell_{f_1} = \ell_{f_2} \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r.$$

Ισχύει ότι

$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)'$

Εδώ εφοδιάζουμε το σύνολο $(C_c^\infty)'$ με δομή διανυσματικού χώρου, μέσω του επόμενου άμεσου αποτελέσματος.

Θεώρημα 4.1.1.1 (διανυσματικός χώρος $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Άμεσα είναι επίσης και τα επόμενα.

Πρόταση 4.1.1.5 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C_c^\infty)'_r$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Πρόταση 4.1.1.6 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C_c^\infty)'_s$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_s$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Συνήθεις πράξεις στον $(C_c^\infty)'$

Οι πράξεις στον $(C_c^\infty)'$ ορίζονται με «φυσικότητα» μέσω των αντίστοιχων πράξεων στον C_c^∞. Εδώ εισάγουμε αυτή την πρακτική με κάποιες συνήθεις πράξεις.

Ορισμός 4.1.1.4 (συνήθεις πράξεις στον $(C_c^\infty)'$)**.** *Έστω*

α΄. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και

β΄. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Ορίζουμε τα εξής.

1. *Έστω $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. Θέτουμε $hf \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ ως*

$$\begin{aligned} hf\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto hf(g) = f(hg). \end{aligned}$$

2. *Θέτουμε $\overline{f} \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ ως*

$$\begin{aligned} \overline{f}\colon C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \overline{f}(g) = \overline{f(\overline{g})}. \end{aligned}$$

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ και

   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Θέτουμε $\mathcal{T}_x f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x f\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{T}_x f(g) = f(\mathcal{T}_{-x} g) = f(g(\lozenge - x)). \end{aligned}$$

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ και

   ii. $K \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.

   Θέτουμε $\mathcal{H}_K f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K f\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{H}_K f(g) = f\Big(\mathcal{H}_{\frac{1}{K},1} g\Big) = f\left(\frac{1}{|K|^m} g\left(\frac{1}{K}\lozenge\right)\right) = \frac{1}{|K|^m} f\left(g\left(\frac{1}{K}\lozenge\right)\right). \end{aligned}$$

5. *Έστω*

i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

ii. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Θέτουμε

$$\begin{aligned} f * g : \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto (f * g)(x) = f(\mathcal{C}_x g) = f(g(x - \Diamond)). \end{aligned}$$

6. *Έστω* $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. *Θέτουμε* $D^\alpha f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} D^\alpha f : C_c^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto D^\alpha f(g) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha g). \end{aligned}$$

7. *Έστω* $U_0 \subseteq U$. *Θέτουμε* $f|_{U_0} \in (C_c^\infty(U_0;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} f|_{U_0} : C_c^\infty(U_0;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto f|_{U_0}(g) = f(\mathring{g}^U). \end{aligned}$$

Σημείωση 4.1.1.1. *Η ορθότητα του Ορισμού 4.1.1.4 είναι άμεσα επαληθεύσιμη. Για παράδειγμα, στο σημείο* 1. *αξιοποιείται η συνεπαγωγή*

$$h \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \ \&\ g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \Rightarrow hg \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}).$$

Από τους παραπάνω ορισμούς σε συνδυασμό με γνωστά αποτελέσματα προκύπτουν νέα που αφορούν κατανομές.

Σημείο 4. και 1. του Ορισμού 4.1.1.4. Άμεσα από τα σημεία 1. και 4. του Ορισμού 4.1.1.4 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 4.1.1.7. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$,
2. $g \in C_c(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και*
3. $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ισχύει ότι

$$|K|^m \mathcal{H}_K f(g) = f\left(\mathcal{H}_{\frac{1}{K}} g\right).$$

Οπότε ο επόμενος ορισμός έπεται «φυσικά» από την Πρόταση 4.1.1.7.

Ορισμός 4.1.1.5. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Θέτουμε $\mathcal{H}_{K,1} f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{K,1} f : C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{H}_{K,1} f(g) = f\left(\mathcal{H}_{\frac{1}{K}} g\right) = f\left(g\left(\frac{1}{K}\Diamond\right)\right) \end{aligned}$$

και άρα

$$\mathcal{H}_{K,1} f = |K|^m \mathcal{H}_K f.$$

Επίσης με το σημείο 4. Ορισμού 4.1.1.4 εισάγουμε «φυσικά» τον ορισμό της ανάκλασης κατανομής του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Ορισμός 4.1.1.6. *Έστω* $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. *Θέτουμε* $\mathcal{R}f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\mathcal{R}f\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$
$$g \mapsto \mathcal{R}f(g) = f(\mathcal{R}g) = f(g(-\Diamond)).$$

Οπότε έπονται και οι ορισμοί της άρτιας και περιττής κατανομής.

Ορισμός 4.1.1.7 (άρτια κατανομή του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$). *Καλούμε μία* $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *άρτια όταν*

$$\mathcal{R}f = f.$$

Ορισμός 4.1.1.8 (περιττή κατανομή του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$). *Καλούμε μία* $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *περιττή όταν*

$$\mathcal{R}f = -f.$$

Η «φυσικότητα» του Ορισμού 4.1.1.7 και του Ορισμού 4.1.1.8 γίνεται φανερή από το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 4.1.1.8. *Έστω* $\ell_f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$. *Ισχύουν ότι*

1. ℓ_f *άρτια* $\Leftrightarrow$ f *άρτια και*
2. ℓ_f *περιττή* $\Leftrightarrow$ f *περιττή.*

Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.1.1.3.

Πρόταση 4.1.1.9. *Ισχύει ότι η* δ_0 *είναι άρτια.*

Σημεία 5. και 6. του Ορισμού 4.1.1.4. Το επόμενο είναι άμεσο υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.1.1.3.

Πρόταση 4.1.1.10. *Έστω* $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. *Ισχύει ότι*

$$\delta_0 * g = g.$$

Το ακόλουθο, το οποίο έπεται άμεσα από την Πρόταση 3.1.1.6 (για $k = 0$), είναι το αντίστοιχο της Πρότασης 1.9.3.1.

Πρόταση 4.1.1.11 (προσεταιριστική ιδιότητα). *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g_1, g_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$(f * g_1) * g_2 = f * (g_1 * g_2)\,.$$

Σημείωση 4.1.1.2. *Από την Πρόταση 4.1.1.11, σε σύγκριση με την Πρόταση 1.9.3.1, γίνεται εμφανής η «φυσικότητα» του σημείου 5. του Ορισμού 4.1.1.4.*

Για το επόμενο αξιοποιούνται ο ορισμός του διαφορικού και ο κανόνας αλυσίδας.

Πρόταση 4.1.1.12. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *και μάλιστα*

$$D^\alpha(f * g) = f * (D^\alpha g) = (D^\alpha f) * g,\ \ \forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^m.$$

Σημείωση 4.1.1.3. *Συγκρίνοντας την Πρόταση 4.1.1.12 με το Θεώρημα 1.9.5.1 και την Πρόταση 1.9.5.2 διαφαίνεται επίσης η «φυσικότητα» των σημείων 5. και 6. του Ορισμού 4.1.1.4.*

Υπό την ισχύ της Πρότασης 4.1.1.12, το επόμενο είναι άμεση συνέπεια των ορισμών.

Πρόταση 4.1.1.13. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $U \subset\subset \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι η συνάρτηση $(f * \Diamond)|_{C_{\overline{U}}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} : C_{\overline{U}}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ *είναι συνεχής.*

Σημείωση 4.1.1.4. *Καθώς η συνάρτηση της Πρότασης 4.1.1.13 ορίζεται μεταξύ μετρικών χώρων, κατά την συνήθη πλέον πρακτική, αρκεί για την συνέχειά της να δειχθεί η ακολουθιακή της συνέχεια.*

Σημεία 7. και 5. του Ορισμού 4.1.1.4. Με το σημείο 7. του Ορισμού 4.1.1.4 εισάγουμε τον περιορισμό ενός στοιχείου του $(C_c(U;\mathbb{F}))'$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο $U_0 \subseteq U$, κάτι που μας επιτρέπει να δώσουμε τον επόμενο.

Ορισμός 4.1.1.9 (φορέας κατανομής). *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Θέτουμε

$$\operatorname{supp}(f) = U \smallsetminus \bigcup_{U_0 \in \mathcal{U}_f} U_0, \text{ όπου } \mathcal{U}_f = \left\{ U_0 \subseteq U \,\middle|\, f|_{U_0} \equiv 0 \right\},$$

για τον φορέα της f.

Σημείωση 4.1.1.5. *Προφανώς το 0 στον Ορισμό 4.1.1.9 είναι το μηδενικό στοιχείο του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, ο ορισμός του οποίου είναι ο προφανής.*

Απευθείας από τον Ορισμό 4.1.1.9 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 4.1.1.14. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *και*
3. $g \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g) = \varnothing$.

Ισχύει ότι $f(g) = 0$.

Η «φυσικότητα» του Ορισμού 4.1.1.9 γίνεται φανερή από το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.10.5.1.

Πρόταση 4.1.1.15. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $\ell_f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$.

Ισχύει ότι

$$\operatorname{supp}(\ell_f) = \operatorname{ess\,supp}(f).$$

Το επόμενο είναι το αντίστοιχο της Πρότασης 1.9.4.2.

Πρόταση 4.1.1.16. *Έστω*

1. $f \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *και*
2. $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ισχύει ότι

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Σημείωση 4.1.1.6. *Μιας και ένα από τα δύο (κλειστά) σύνολα* $\operatorname{supp}(f)$ *και* $\operatorname{supp}(g)$ *στην Πρόταση 4.1.1.16 είναι συμπαγές (και συγκεκριμένα το δεύτερο), έπεται ότι το άθροισμά τους είναι κλειστό.*

4.1.2 Διανυσματικός χώρος $(C^\infty)'$

Συνεχίζουμε με την μελέτη του διανυσματικού χώρου $(C^\infty)'$, ο οποίος αποτελείται από γραμμικές και συνεχείς συναρτήσεις από τον C^∞ στον $\mathbb{F}$.

Σύνολο $(C^\infty)'$

Σε αντίθεση με την περίπτωση του C_c^∞, έχουμε ορίσει τοπολογία στον C^∞ και συγκεκριμένα μετρική τοπολογία, οπότε μπορούμε άμεσα να μιλάμε για συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε αυτόν τον διανυσματικό χώρο.

Ορισμός 4.1.2.1 (σύνολο $(C^\infty)'$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' = \left\{f\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ γραμμική \& συνεχής}\right\}.$$

Άμεσα εξάγουμε τους πιο βασικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ ως εξής.

Πρόταση 4.1.2.1 (ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $(C^\infty)'$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}(C^\infty(U;\mathbb{F}))' &= \left\{f\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ γραμμική \& ακολουθιακά συνεχής}\right\} = \\ &= \Big\{f\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\Big|\, f \text{ γραμμική \& } \exists\,(K>0,\ k\in\mathbb{N} \text{ \& } U_0 \subset\subset U) \text{ τ.ω.:} \\ &\qquad \text{τ.ω.: } |f(g)| \le K \big\| g|_{U_0} \big\|_{C_b^k(U_0;\mathbb{F})},\ \forall g \in C^\infty(U;\mathbb{F})\Big\}.\end{aligned}$$

Παρακάτω δίνουμε δύο βασικά παραδείγματα κατανομών του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$. Το πρώτο αποτέλεσμα, λοιπόν, είναι συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος και του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Πρόταση 4.1.2.2. *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$.*

Θέτουμε

$$\begin{aligned}\ell_f\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \ell_f(g) = \int_U g(x)f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\ell_f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Δεν είναι όλα τα στοιχεία του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ της μορφής της Πρότασης 4.1.1.2, όπως φαίνεται στο επόμενο αποτέλεσμα, για το οποίο αξιοποιείται το Θεώρημα 1.10.5.1.

Πρόταση 4.1.2.3. *Έστω*

i. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*

ii. *$x \in U$.*

Θέτουμε

$$\begin{aligned}\delta_x\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \delta_x(g) = g(x).\end{aligned}$$

Ισχύουν ότι

1. *$\delta_x \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και*
2. *$\nexists f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$ τ.ω.: $\delta_x = \ell_f$, όπου ℓ_f όπως στην Πρόταση 4.1.2.2.*

Τόσο η Πρόταση 4.1.2.2 όσο και η Πρόταση 4.1.2.3 μας οδηγούν στους επόμενους αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.2.2 (σύνολο $(C_c^\infty)'_r$). *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r = \left\{ \ell \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \;\middle|\; \exists f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } \ell(g) = \int_U g(x) f(x) \mathrm{d}x,\ \forall g \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \right\} \subsetneq (C^\infty(U;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε κανονικές και για τις οποίες χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\ell_f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$ που καταδεικνύει την εξάρτησή τους από την αντίστοιχη συνάρτηση $f \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$.

Ορισμός 4.1.2.3 (σύνολο $(C_c^\infty)'_s$). *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))'_s = (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \smallsetminus (C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r \subsetneq (C^\infty(U;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε ιδιάζουσες.

Άμεσα από το Θεώρημα 1.10.5.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 4.1.2.4. *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$f_1, f_2 \in M_c(U;\mathbb{F}) \cap \mathcal{L}^1(U;\mathbb{F})$ τ.ω.:*
$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r \ni \ell_{f_1} = \ell_{f_2} \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r.$$

Ισχύει ότι
$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Διανυσματικός χώρος $(C^\infty)'$

Εδώ εφοδιάζουμε το σύνολο $(C^\infty)'$ με δομή διανυσματικού χώρου, μέσω του επόμενου άμεσου αποτελέσματος.

Θεώρημα 4.1.2.1 (διανυσματικός χώρος $(C^\infty)'$). *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι το σύνολο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Άμεσα είναι επίσης και τα επόμενα.

Πρόταση 4.1.2.5 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C^\infty)'_r$). *Ισχύει ότι το σύνολο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Πρόταση 4.1.2.6 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(C^\infty)'_s$). *Ισχύει ότι το σύνολο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'_s$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Συνήθεις πράξεις στον $(C^\infty)'$

Μιας και δεν θα μας χρειαστούν στο παρόν κείμενο, απλά παραθέτουμε κάποιες πράξεις που ορίστηκαν στον $(C_c^\infty)'$ και μπορούν να οριστούν και στον $(C^\infty)'$.

Ορισμός 4.1.2.4 (συνήθεις πράξεις στον $(C^\infty)'$). *Έστω*

i. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
ii. *$f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.*

Ορίζουμε τα εξής.

1. *Έστω $h \in C^\infty(U;\mathbb{F})$. Θέτουμε $hf \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ ως*
$$\begin{aligned} hf\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto hf(g) = f(hg). \end{aligned}$$

2. *Θέτουμε* $\overline{f} \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}\overline{f}\colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \overline{f}(g) = \overline{f(\overline{g})}.\end{aligned}$$

3. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $x \in \mathbb{R}^m$.

   Θέτουμε $\mathcal{T}_x f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_x f\colon C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{T}_x f(g) = f(\mathcal{T}_{-x} g) = f(g(\lozenge - x)).\end{aligned}$$

4. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Θέτουμε $\mathcal{H}_K f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_K f\colon C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{H}_K f(g) = f\Big(\mathcal{H}_{\frac{1}{K},1} g\Big) = f\left(\frac{1}{|K|^m} g\left(\frac{1}{K}\lozenge\right)\right) = \frac{1}{|K|^m} f\left(g\left(\frac{1}{K}\lozenge\right)\right).\end{aligned}$$

5. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Θέτουμε $\mathcal{H}_{K,1} f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *ως*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{K,1} f\colon C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F}\\ g &\mapsto \mathcal{H}_{K,1} f(g) = f\Big(\mathcal{H}_{\frac{1}{K}} g\Big) = f\left(g\left(\frac{1}{K}\lozenge\right)\right).\end{aligned}$$

6. *Έστω*

   i. $U = \mathbb{R}^m$ *και*

   ii. $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

   Θέτουμε

$$\begin{aligned}f * g\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F}\\ x &\mapsto (f * g)(x) = f(\mathcal{C}_x g) = f(g(x - \lozenge)).\end{aligned}$$

Σημείωση 4.1.2.1. *Η ορθότητα του Ορισμού 4.1.1.4 είναι άμεσα επαληθεύσιμη. Για παράδειγμα, στο σημείο* 1. *χρησιμοποιήθηκε η συνεπαγωγή*

$$h \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \;\&\; g \in C^\infty(U;\mathbb{F}) \Rightarrow hg \in C^\infty(U;\mathbb{F}).$$

4.1.3 Διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'$

Τέλος εισάγουμε τον διανυσματικού χώρο $(\mathcal{S})'$, ο οποίος αποτελείται από γραμμικές και συνεχείς συναρτήσεις από τον $\mathcal{S}$ στον $\mathbb{F}$.

Σύνολο $(\mathcal{S})'$

Η μετρική τοπολογία με την οποία έχουμε εφοδιάσει τον $\mathcal{S}$ εξασφαλίζει την ορθότητα του επόμενου ορισμού.

Ορισμός 4.1.3.1 (σύνολο $(\mathcal{S})'$)**.** *Θέτουμε*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' = \left\{ f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ γραμμική \& συνεχής} \right\}.$$

Άμεσα εξάγουμε τους πιο βασικούς ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του $(\mathcal{S})'$ ως εξής.

Πρόταση 4.1.3.1 (ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί του $(\mathcal{S})'$)**.** *Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' &= \left\{ f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\middle|\, f \text{ γραμμική \& ακολουθιακά συνεχής} \right\} = \\ &= \Bigg\{ f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to \mathbb{F} \,\Bigg|\, f \text{ γραμμική \& } \exists\, (K > 0, \text{ \& } k_1, k_2 \in \mathbb{N}) \text{ τ.ω.:} \\ &\qquad \text{τ.ω.: } |f(g)| \le K \sum_{\substack{\alpha,\beta \in (\mathbb{N}_0)^m \\ \text{τ.ω.:} \\ |\alpha| \le k_1 \text{ \& } |\beta| \le k_2}} \left\| (\mathrm{id}_m)^\alpha D^\beta g \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})},\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Bigg\}.\end{aligned}$$

Όπως έγινε και στις προηγούμενες ενότητες, έτσι κι εδώ δίνουμε δύο βασικά παραδείγματα γνήσιων υποσυνόλων του $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, για την εξαγωγή των οποίων αξιοποιούνται τα ίδια αποτελέσματα με πριν.

Πρόταση 4.1.3.2. *Έστω $f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\ell_f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \ell_f(g) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) f(x) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Πρόταση 4.1.3.3. *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\delta_x\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \delta_x(g) = g(x).\end{aligned}$$

Ισχύουν ότι

1. *$\delta_x \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ και*
2. *$\nexists f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ τ.ω.: $\delta_x = \ell_f$, όπου ℓ_f όπως στην Πρόταση 4.1.3.2.*

Οπότε από τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούμαστε στους εξής αντίστοιχους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.3.2 (σύνολο $(\mathcal{S})'_r$)**.** *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r = \Bigg\{ \ell \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \,\Bigg|\, &\exists f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.:} \\ &\text{τ.ω.: } \ell(g) = \int_U g(x) f(x) \mathrm{d}x,\ \forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Bigg\} \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',\end{aligned}$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε κανονικές και για τις οποίες χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$ που καταδεικνύει την εξάρτησή τους από την αντίστοιχη συνάρτηση $f \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$.

Ορισμός 4.1.3.3 (σύνολο $(\mathcal{S})'_s$)**.** *Θέτουμε*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_s = (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \setminus (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',$$

τις κατανομές του οποίου καλούμε ιδιάζουσες.

Άμεσα από το Θεώρημα 1.10.5.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 4.1.3.4. *Έστω $f_1, f_2 \in M_{si}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ τ.ω.:*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r \ni \ell_{f_1} = \ell_{f_2} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r.$$

Ισχύει ότι

$$f_1 = f_2,\ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'$

Εδώ εφοδιάζουμε το σύνολο $(\mathcal{S})'$ με δομή διανυσματικού χώρου, μέσω του επόμενου άμεσου αποτελέσματος.

Θεώρημα 4.1.3.1 (διανυσματικός χώρος $(\mathcal{S})'$)**.** *Ισχύει ότι το σύνολο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$, εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης στοιχείων του και του πολλαπλασιασμού στοιχείου του με στοιχείο του $\mathbb{F}$, είναι διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{F}$.*

Άμεσα είναι επίσης και τα επόμενα.

Πρόταση 4.1.3.5 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(\mathcal{S})'_r$)**.** *Ισχύει ότι το σύνολο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Πρόταση 4.1.3.6 (γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος $(\mathcal{S})'_s$)**.** *Ισχύει ότι το σύνολο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_s$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Συνήθεις πράξεις στον $(\mathcal{S})'$

Μιας και δεν θα μας χρειαστούν στο παρόν κείμενο, απλά παραθέτουμε κάποιες πράξεις που ορίστηκαν στον $(C_c^\infty)'$ και μπορούν να οριστούν και στον $(\mathcal{S})'$.

Ορισμός 4.1.3.4 (συνήθεις πράξεις στον $(\mathcal{S})'$)**.** *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. Ορίζουμε τα εξής.*

1. *Έστω $h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θέτουμε $hf \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*
$$\begin{aligned} hf\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto hf(g) = f(hg). \end{aligned}$$

2. *Θέτουμε $\overline{f} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*
$$\begin{aligned} \overline{f}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \overline{f}(g) = \overline{f(\overline{g})}. \end{aligned}$$

3. *Έστω $x \in \mathbb{R}^m$. Θέτουμε $\mathcal{T}_x f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{T}_x f(g) = f(\mathcal{T}_{-x} g) = f(g(\lozenge - x)). \end{aligned}$$

4. *Έστω $K \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Θέτουμε $\mathcal{H}_K f \in (\mathcal{S}(\mathcal{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_K f\colon \mathcal{S}(\mathcal{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{H}_K f(g) = f\Big(\mathcal{H}_{\frac{1}{K},1} g\Big) = f\bigg(\frac{1}{|K|^m} g\Big(\frac{1}{K}\lozenge\Big)\bigg) = \frac{1}{|K|^m} f\bigg(g\Big(\frac{1}{K}\lozenge\Big)\bigg). \end{aligned}$$

5. *Έστω $K \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Θέτουμε $\mathcal{H}_{K,1} f \in (\mathcal{S}(\mathcal{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*
$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{K,1} f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto \mathcal{H}_{K,1} f(g) = f\Big(\mathcal{H}_{\frac{1}{K}} g\Big) = f\bigg(g\Big(\frac{1}{K}\lozenge\Big)\bigg). \end{aligned}$$

6. *Έστω $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Θέτουμε*
$$\begin{aligned} f * g\colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{F} \\ x &\mapsto (f * g)(x) = f(\mathcal{C}_x g) = f(g(x - \lozenge)). \end{aligned}$$

7. *Έστω $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$. Θέτουμε $D^\alpha f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ ως*
$$\begin{aligned} D^\alpha f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto D^\alpha f(g) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha g). \end{aligned}$$

Σημείωση 4.1.3.1. *Η ορθότητα του Ορισμού 4.1.3.4 είναι άμεσα επαληθεύσιμη. Για παράδειγμα, στο σημείο 1. αξιοποιείται η συνεπαγωγή*
$$h \in \tilde{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \ \&\ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \Rightarrow hg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}).$$

4.2 Βασικοί εγκλεισμοί

Εδώ μελετάμε θεμελιώδεις σχέσεις μεταξύ των χώρων κατανομών. Συγκεκριμένα εξάγουμε και μελετάμε τους εγκλεισμούς $(C^\infty(U;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

4.2.1 $(C^\infty)' \subsetneq (C_c^\infty)'$

Καταρχάς η έκφραση $(C^\infty(U;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ με την «κυριολεκτική» της έννοια δεν έχει νόημα καθώς μιλάμε για διανυσματικούς συναρτησιακούς χώρους των οποίων τα στοιχεία δεν έχουν καν το ίδιο πεδίο ορισμού. Οπότε αυτό που θα κάνουμε εδώ είναι να δώσουμε νόημα στον παραπάνω εγκλεισμό.

Εξάγουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα σε βήματα. Το πρώτο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.1.1.

Πρόταση 4.2.1.1. *Εστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Ισχύει ότι $f|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 4.2.1.1 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 4.2.1.2. *Εστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι ο* $\lozenge|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$ *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$.

Το επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε τον $\lozenge|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\big((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\big)$. Είναι άραγε γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$; Υπάρχει άραγε ένας «απτός» χαρακτηρισμός του; Απαντάμε ταυτόχρονα και στα δύο αυτά ερωτήματα δίνοντας απάντηση στο δεύτερο. Ως προς αυτό, υπό το πρίσμα του το Θεωρήματος 1.10.3.1 και αξιοποιώντας την Πρόταση 4.1.1.14 έπεται το εξής.

Πρόταση 4.2.1.3. *Εστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset U$ *και*
3. $g_1, g_2 \in C_c^\infty(U;\mathbb{F})$ *τ.ω.:* $g_1|_{(\operatorname{supp}(f))^\varepsilon} = g_2|_{(\operatorname{supp}(f))^\varepsilon}$, *για κάποιο* $\varepsilon > 0$.

Ισχύει ότι

$$f(g_1 g) = f(g_2 g), \ \forall g \in C^\infty(U;\mathbb{F}).$$

Απευθείας από την Πρόταση 4.2.1.3 έπεται το πρώτο σημείο του παρακάτω αποτελέσματος, ενώ το δεύτερο είναι άμεσο.

Πρόταση 4.2.1.4. *Εστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και*
ii. $f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset U$.

Ισχύουν ότι

1. *η συνάρτηση* $f_0 \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ *με*

$$\begin{aligned} f_0 \colon C^\infty(U;\mathbb{F}) &\to \mathbb{F} \\ g &\mapsto f_0(g) = f(g_0 g), \end{aligned} \quad \text{για κάποια } \varepsilon > 0 \text{ και } g_0 \in C_c^\infty(U;\mathbb{F}) \text{ τ.ω.: } g_0|_{(\operatorname{supp}(f))^\varepsilon} \equiv 1,$$

είναι ορισμένη ανεξάρτητα της επιλογής των ε *και* g_0 *και*

2. $f_0|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} = f$.

Σημείωση 4.2.1.1. *Ούτε το μονοσήμαντο στο σημείο 1. της Πρότασης 4.2.1.4 και άρα ούτε η Πρόταση 4.2.1.3 αξιοποιούνται στην συνέχεια, αλλά παρατέθηκαν στο κείμενο για λόγους πληρότητας.*

Οπότε με άτοπο για τον ένα εγκλεισμό ($\subseteq$) και κάνοντας χρήση της Πρότασης 4.2.1.4 για τον άλλο ($\supseteq$) έπεται το εξής.

Πρόταση 4.2.1.5. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\left((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\right) = \left\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset U\right\} \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$$

και άρα ο $\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}\left((C^\infty(U;\mathbb{F}))'\right)$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c(U;\mathbb{F}))'$.

Σημείωση 4.2.1.2. *Ο γνήσιος εγκλεισμός της Πρότασης 4.2.1.5 είναι άμεσος. Για παράδειγμα, επιλέγοντας την*

$$\ell_1 \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'_r$$

(οποιοδήποτε πολυώνυμο στην θέση της συνάρτησης 1 μας κάνει) έχουμε ότι

$$\ell_1 \notin \left\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset U\right\},$$

καθώς

$$\operatorname{supp}(\ell_1) = \mathbb{R}^m.$$

Έχοντας μελετήσει διεξοδικά την εικόνα του $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ μέσω της $\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}$, συνεχίζουμε με το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.1.2.

Πρόταση 4.2.1.6. *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^m$ και*
2. *$f_1, f_2 \in (C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ τ.ω.: $f_1|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} = f_2|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}$.*

Ισχύει ότι $f_1 = f_2$.

Απλή παράφραση της Πρότασης 4.2.1.6 αποτελεί το επόμενο.

Πρόταση 4.2.1.7. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι η*

$$\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})} : (C^\infty(U;\mathbb{F}))' \to \left\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset U\right\}$$

είναι $1-1$.

Συνθέτοντας την Πρόταση 4.2.1.5 με την Πρόταση 4.2.1.7 έπεται το εξής βασικό.

Θεώρημα 4.2.1.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' \overset{\Diamond|_{C_c^\infty(U;\mathbb{F})}}{\cong} \left\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m\right\} \subsetneq (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'.$$

Το Θεώρημα 4.2.1.1 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Ταύτιση:

Ταυτίζουμε τον $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ με τον $\left\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m\right\}$, δλδ

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' = \left\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m\right\}.$$

Υπό το πρίσμα της παραπάνω ταύτισης, καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Θεώρημα 4.2.1.2 ($(C^\infty)' \subsetneq (C_c^\infty)'$)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι ο $(C^\infty(U;\mathbb{F}))'$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(U;\mathbb{F}))'$ και μάλιστα*

$$(C^\infty(U;\mathbb{F}))' = \left\{f \in (C_c^\infty(U;\mathbb{F}))' \,\middle|\, \operatorname{supp}(f) \subset\subset \mathbb{R}^m\right\}.$$

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 4.2.1.2, προκύπτουν νέα αποτελέσματα όπως για παράδειγμα το επόμενο, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του συνδυασμού της Πρότασης 4.1.1.13 με την Πρόταση 4.1.1.16.

Πρόταση 4.2.1.8. *Έστω*

1. *$f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ και*
2. *$U \subset\subset \mathbb{R}^m$.*

Ισχύει ότι η συνάρτηση $(f * \Diamond)|_{C_{\overline{U}}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} : C_{\overline{U}}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \to C_{\operatorname{supp}(f)+\overline{U}}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$ είναι συνεχής.

4.2.2 $(C^\infty)' \subsetneq (\mathcal{S})' \subsetneq (C_c^\infty)'$

Εδώ νοηματοδοτούμε τους εγκλεισμούς $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \subsetneq (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Το επόμενο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.2.1.

Πρόταση 4.2.2.1. *Έστω $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. Ισχύει ότι $f|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 4.2.2.1 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 4.2.2.2. *Ισχύει ότι ο $\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Για την γνησιότητα του εγκλεισμού της Πρότασης 4.2.2.2 αξιοποιείται η

$$\ell_{\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}} \in (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$$

(οποιαδήποτε συνάρτηση Gauss στην θέση της συνάρτησης $\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}$ μας κάνει) για την οποία ισχύει ότι

$$\ell_{\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}} \notin (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',$$

καθώς σε διαφορετική περίπτωση

$$\ell_{\mathrm{e}^{|\lozenge|^2}}\left(\mathrm{e}^{-|\lozenge|^2}\right) = \int_{\mathbb{R}^m} 1\mathrm{d}x = \infty,$$

δλδ άτοπο.

Πρόταση 4.2.2.3. *Ισχύει ότι ο $\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Με χρήση, τώρα, του Θεωρήματος 3.2.2.3 έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Πρόταση 4.2.2.4. *Έστω $f_1, f_2 \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ τ.ω.: $f_1|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = f_2|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$. Ισχύει ότι $f_1 = f_2$.*

Απλή παράφραση της Πρότασης 4.2.2.4 αποτελεί το επόμενο.

Πρόταση 4.2.2.5. *Ισχύει ότι η*

$$\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \to \lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$$

είναι $1-1$.

Συνθέτοντας την Πρόταση 4.2.2.3 με την Πρόταση 4.2.2.5 έπεται το εξής βασικό.

Θεώρημα 4.2.2.1 $((\mathcal{S})' \subsetneq (C_c^\infty)')$**.** *Ισχύει ότι*

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \overset{\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}{\cong} \lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right) \subsetneq (C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'.$$

Το Θεώρημα 4.2.2.1 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Ταύτιση:
Ταυτίζουμε τον $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ με τον $\lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right)$, δλδ

$$(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' = \lozenge|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\left((\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\right).$$

Υπό το πρίσμα της παραπάνω ταύτισης, καταλήγουμε στο πρώτο ζητούμενο.

Θεώρημα 4.2.2.2 $((\mathcal{S})' \subsetneq (C_c^\infty)')$**.** *Ισχύει ότι ο $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του $(C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Από την άλλη, το επόμενο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.2.2.

Πρόταση 4.2.2.6. *Έστω $f \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$. Ισχύει ότι $f|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.*

Απλά παραφράζοντας την Πρόταση 4.2.2.6 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 4.2.2.7. *Ισχύει ότι ο* $\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\big((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$ *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Για την γνησιότητα του εγκλεισμού της Πρότασης 4.2.2.7 αξιοποιείται η

$$\ell_1 \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'_r$$

(οποιοδήποτε πολυώνυμο στην θέση της συνάρτησης 1 μας κάνει) για την οποία ισχύει ότι

$$\ell_1 \notin (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))',$$

καθώς

$$\operatorname{supp}(\ell_1) = \mathbb{R}^m.$$

Πρόταση 4.2.2.8. *Ισχύει ότι ο* $\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\big((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$ *είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Με χρήση, τώρα, του Θεωρήματος 3.2.2.4 έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Πρόταση 4.2.2.9. *Έστω* $f_1, f_2 \in (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *τ.ω.:* $f_1|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = f_2|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}$. *Ισχύει ότι* $f_1 = f_2$.

Απλή παράφραση της Πρότασης 4.2.2.9 αποτελεί το επόμενο.

Πρόταση 4.2.2.10. *Ισχύει ότι η*

$$\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} : (C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \to \Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\big((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$$

είναι $1-1$.

Συνθέτοντας την Πρόταση 4.2.2.8 με την Πρόταση 4.2.2.10 έπεται το εξής βασικό.

Θεώρημα 4.2.2.3 $((C^\infty)' \subsetneq (\mathcal{S})')$. *Ισχύει ότι*

$$(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' \overset{\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}}{\cong} \Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\big((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big) \subsetneq (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'.$$

Το Θεώρημα 4.2.2.3 μας επιτρέπει την παρακάτω ταύτιση.

Ταύτιση:
Ταυτίζουμε τον $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ με τον $\Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\big((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big)$, δλδ

$$(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))' = \Diamond|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})}\big((C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'\big).$$

Υπό το πρίσμα της παραπάνω ταύτισης, καταλήγουμε στο δεύτερο ζητούμενο.

Θεώρημα 4.2.2.4 $((C^\infty)' \subsetneq (\mathcal{S})')$. *Ισχύει ότι ο* $(C^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$ *είναι γνήσιος διανυσματικός υπόχωρος του* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}))'$.

Κεφάλαιο 5

Μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F}$ στον $\mathbb{R}^m$

Ο μετασχηματισμός Fourier εισέρχεται «φυσικά» στην ανάλυση του L^2, καθώς προκύπτει από το ερώτημα ύπαρξης αποτελέσματος αντίστοιχου της Πρότασης 2.4.2 για την περίπτωση όπου $L \to \infty$. Συγκεκριμένα, θυμίζουμε ότι

$$[f] = \frac{1}{L^m} \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} \mathcal{F}_{x,L} f\Big(\frac{1}{L} n\Big) \Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \langle \frac{1}{L} n, \Diamond \rangle_{\mathbb{R}^m}} \Big], \ \forall\, [f] \in L^2\Big(x + \frac{L}{2}(-1,1)^m; \mathbb{C}\Big), \ \forall x \in \mathbb{R}^m, \ \forall L > 0,$$

όπου

$$\mathcal{F}_{x,L} f = \int\limits_{x + \frac{L}{2}(-1,1)^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi \langle \Diamond, y \rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y) \mathrm{d}y.$$

οπότε παίρνοντας, χωρίς αυστηρότητα, $L \to \infty$ καταλήγουμε σε τελεστές $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$ που θέλουμε να ορίζονται ως

$$\mathcal{F} f = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi \langle \Diamond, y \rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y) \mathrm{d}y$$

και

$$\overline{\mathcal{F}} f = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \langle \Diamond, y \rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y) \mathrm{d}y$$

και για τους οποίους επίσης θέλουμε να ισχύει ότι

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{ο ταυτοτικός τελεστής.}$$

Παρατηρούμε ότι για να ορίζονται οι παραπάνω τελεστές θα πρέπει τουλάχιστον να ισχύει ότι $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Ωστόσο ήταν πρώτος ο Schwartz ο οποίος αντιλήφθηκε ότι ο ομώνυμος $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$ αποτελεί το καταλληλότερο πεδίο ορισμού για αυτούς. Και αφού οριστούν στους παραπάνω χώρους, τότε επεκτείνεται ο ορισμός τους και στον $L^2(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [2], [12], [15], [14], [3], [1], [4], [16] και [7], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

5.1 $\mathcal{F}$ στον $\mathcal{L}^1$

Πρώτα μελετάμε τους $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$ στον $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$.

5.1.1 $\mathcal{F} \in CL(\mathcal{L}^1; C_0)$

Ξεκινάμε με τον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.1.1.1 (μετασχηματισμός Fourier στον $\mathcal{L}^1$). *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{C})$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} f \colon \mathbb{R}^m &\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \mathcal{F} f(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y) \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

για τον μετασχηματισμό Fourier της f.

Απευθείας από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει το ακόλουθο.

Πρόταση 5.1.1.1. *Έστω*

1. $x_0 \in \mathbb{R}^m$ *και*
2. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$.

Ισχύει ότι

$$\left(\mathcal{F} \circ \mathcal{M}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\right) f = \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}} f\right) = \mathcal{F}f(x_0 + \lozenge) = (\mathcal{T}_{x_0} \circ \mathcal{F})\, f.$$

Το πρώτο βήμα είναι η μελέτη της δράσης του $\mathcal{F}$, η οποία θα γίνει σε στάδια. Έτσι, το επόμενο είναι άμεσο από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Πρόταση 5.1.1.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big) \subseteq C(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Στην συνέχεια θα χρειαστούμε το ακόλουθο άμεσα επαληθεύσιμο.

Πρόταση 5.1.1.3. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$|\mathcal{F}f(x)| \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}, \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 5.1.1.2 και της Πρότασης 5.1.1.3 έπεται η παρακάτω βελτιωμένη εκδοχή της πρώτης.

Πρόταση 5.1.1.4. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big) \subseteq C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.1.1.4, άμεσα από την Πρόταση 5.1.1.3 προκύπτει το εξής αποτέλεσμα, το οποίο συνοψίζει όλα τα προηγούμενα.

Πρόταση 5.1.1.5. *Ισχύει ότι $\mathcal{F} \in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}); C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ με*

$$\|\mathcal{F}\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))} \le 1.$$

Αξιοποιώντας τώρα το Θεώρημα 1.7.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.1.1.5 έπεται η εξής βελτιωμένη εκδοχή της τελευταίας.

Πρόταση 5.1.1.6. *Ισχύει ότι $\mathcal{F} \in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}); C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ με*

$$\|\mathcal{F}\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))} \le 1.$$

Μάλιστα η τιμή 1 της νόρμας του $\mathcal{F}$ πιάνεται, όπως προκύπτει από το παράδειγμα της συνάρτησης

$$\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$

για την οποία έχουμε ότι

$$\left\|\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m}\right\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = 1,$$

καθώς επίσης

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m}\right)(x) = \prod_{i=1}^m \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}\right)(x_i) = \prod_{i=1}^m \begin{cases} \frac{\sin(2\pi x_i)}{2\pi x_i}, & \text{αν } x_i \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x_i = 0, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

και άρα

$$\left\|\mathcal{F}\left(\frac{1}{2^m}\chi_{(-1,1)^m}\right)\right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = 1,$$

οπότε η Πρόταση 5.1.1.6 έχει πλέον ως εξής.

Θεώρημα 5.1.1.1. *Ισχύει ότι* $\mathcal{F} \in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}); C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ *με*

$$\|\mathcal{F}\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))} = 1.$$

Θα επανέλθουμε στην μελέτη του $\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ αργότερα όταν θα έχουμε στην διάθεσή μας τα προαπαιτούμενα. Προς ώρας εξάγουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες του $\mathcal{F}$ όπως οι παρακάτω, οι οποίες έπονται απευθείας από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.

Πρόταση 5.1.1.7. *Έστω* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω* $x_0 \in \mathbb{R}^m$. *Ισχύει ότι*

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{T}_{x_0})\, f(\lozenge) = \mathcal{F}(f(x_0 + \blacklozenge))(\lozenge) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}\mathcal{F}f(\lozenge) = \big(\mathcal{M}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\lozenge\rangle_{\mathbb{R}^m}}} \circ \mathcal{F}\big)\, f(\lozenge).$$

2. *Έστω* $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Ισχύει ότι*

$$(\mathcal{F} \circ \mathcal{H}_K)\, f(\lozenge) = \mathcal{F}(f(K\blacklozenge))(\lozenge) = \frac{1}{|K|^m}\mathcal{F}f\Big(\frac{1}{K}\lozenge\Big) = \Big(\mathcal{H}_{\frac{1}{K},1} \circ \mathcal{F}\Big)\, f(\lozenge).$$

Σημείωση 5.1.1.1. *Μπορούμε άμεσα να γενικεύσουμε την Πρόταση 5.1.1.7 για οποιονδήποτε* $1-1$ *αφινικό μετασχηματισμό.*

Απευθείας από το σημείο 2. της Πρότασης 5.1.1.7 έπεται το επόμενο.

Πρόταση 5.1.1.8. *Έστω* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω* f *άρτια. Ισχύει ότι* $\mathcal{F}f$ *επίσης άρτια και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \int_{\mathbb{R}^m} \cos\big(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\big) f(y)\mathrm{d}y.$$

2. *Έστω* f *περιττή. Ισχύει ότι* $\mathcal{F}f$ *επίσης περιττή και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m} \sin\big(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\big) f(y)\mathrm{d}y.$$

5.1.2 $\overline{\mathcal{F}} \in CL(\mathcal{L}^1; C_0)$

Επίσης ορίζουμε τον συζυγή μετασχηματισμό Fourier ως ακολούθως.

Ορισμός 5.1.2.1 (συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον $\mathcal{L}^1$)**.** *Έστω* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Θέτουμε*

$$\overline{\mathcal{F}}f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \overline{\mathcal{F}}f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}^m}} f(y)\mathrm{d}y,$$

για τον συζυγή μετασχηματισμό Fourier της f.

Το επόμενο είναι άμεσο από τους ορισμούς.

Πρόταση 5.1.2.1. *Ισχύει ότι*

$$\overline{\mathcal{F}}f = \overline{\mathcal{F}\overline{f}},\ \ \forall f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.1.2.1, έπεται η ισχύς των αντίστοιχων όλων των παραπάνω αποτελεσμάτων και για τον $\overline{\mathcal{F}}$.

Πρόταση 5.1.2.2. *Έστω*

1. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ *και*
2. $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

Ισχύει ότι

$$\left(\overline{F}\circ\mathcal{M}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\right)f=\overline{\mathcal{F}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}f\right)=\overline{\mathcal{F}}f(x_0+\Diamond)=\left(\mathcal{T}_{x_0}\circ\overline{\mathcal{F}}\right)f.$$

Θεώρημα 5.1.2.1. *Ισχύει ότι $\overline{\mathcal{F}}\in CL\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$ με*

$$\left\|\overline{\mathcal{F}}\right\|_{CL(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))}=1.$$

Πρόταση 5.1.2.3. *Έστω $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω $x_0\in\mathbb{R}^m$. Ισχύει ότι*

$$\left(\overline{\mathcal{F}}\circ\mathcal{T}_{x_0}\right)f(\Diamond)=\overline{\mathcal{F}}(f(x_0+\blacklozenge))(\Diamond)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}\overline{\mathcal{F}}f(\Diamond)=\left(\mathcal{M}_{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi\langle x_0,\Diamond\rangle_{\mathbb{R}^m}}}\circ\overline{\mathcal{F}}\right)f(\Diamond).$$

2. *Έστω $K\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$. Ισχύει ότι*

$$\left(\overline{\mathcal{F}}\circ\mathcal{H}_K\right)f(\Diamond)=\overline{\mathcal{F}}(f(K\blacklozenge))(\Diamond)=\frac{1}{|K|^m}\overline{\mathcal{F}}f\left(\frac{1}{K}\Diamond\right)=\left(\mathcal{H}_{\frac{1}{K},1}\circ\overline{\mathcal{F}}\right)f(\Diamond).$$

Πρόταση 5.1.2.4. *Έστω $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω f άρτια. Ισχύει ότι $\overline{\mathcal{F}}f$ επίσης άρτια και μάλιστα*

$$\overline{\mathcal{F}}f=\int_{\mathbb{R}^m}\cos\left(2\pi\langle\Diamond,y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right)f(y)\mathrm{d}y.$$

2. *Έστω f περιττή. Ισχύει ότι $\overline{\mathcal{F}}f$ επίσης περιττή και μάλιστα*

$$\overline{\mathcal{F}}f=\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m}\sin\left(2\pi\langle\Diamond,y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right)f(y)\mathrm{d}y.$$

5.2 $\mathcal{F}$ στον $\mathcal{S}$

Εδώ θα συμπεράνουμε, από το εύρος και την κομψότητα των αποτελεσμάτων, ότι ο $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ αποτελεί τον «φυσικό» χώρο των $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$. Μάλιστα, στις επόμενες ενότητες θα δούμε επίσης ότι η μελέτη αυτών των τελεστών στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ οδηγεί σε βασικά συμπεράσματα σχετικά με ορισμούς τους σε άλλους χώρους.

5.2.1 $\mathcal{F}\in CL(\mathcal{S};\mathcal{S})$

Μια βασική πρώτη ιδιότητα του $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ είναι η επόμενη, για την οποία αξιοποιείται η ολοκλήρωση κατά παράγοντες (στην μία διάσταση προφανώς) σε συνδυασμό με το θεώρημα Fubini για το πρώτο σημείο, καθώς επίσης ο ορισμός του διαφορικού για το δεύτερο.

Πρόταση 5.2.1.1. *Έστω*

i. $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ *και*

ii. $\alpha\in(\mathbb{N}_0)^m$.

Ισχύουν ότι

1. $\mathcal{F}(D^\alpha f)=(\mathrm{i}2\pi\Diamond)^\alpha\mathcal{F}f=\left(\mathcal{M}_{(\mathrm{i}2\pi\Diamond)^\alpha}\circ\mathcal{F}\right)f$ *και*
2. $D^\alpha(\mathcal{F}f)=\mathcal{F}\left((-\mathrm{i}2\pi\Diamond)^\alpha f\right)=\left(\mathcal{F}\circ\mathcal{M}_{(-\mathrm{i}2\pi\Diamond)^\alpha}\right)f.$

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 3.1.5.1, άμεσα από την Πρόταση 5.2.1.1 έπεται το εξής βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.2.1.1. *Ισχύει ότι $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\in CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))$.*

5.2.2 $\overline{\mathcal{F}} \in CL(\mathcal{S};\mathcal{S})$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 5.1.2.1, από την Πρόταση 5.2.1.1 και το Θεώρημα 5.2.1.1 έπονται αντιστοίχως τα εξής.

Πρόταση 5.2.2.1. *Έστω*

i. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$ *και*

ii. $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$.

Ισχύουν ότι

1. $\overline{\mathcal{F}}(D^\alpha f) = (-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha \overline{\mathcal{F}} f = \left(\mathcal{M}_{(-\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha} \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f$ *και*
2. $D^\alpha\left(\overline{\mathcal{F}} f\right) = \overline{\mathcal{F}}\left((\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha f\right) = \left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{H}_{(\mathrm{i}2\pi\lozenge)^\alpha}\right) f$.

Θεώρημα 5.2.2.1. *Ισχύει ότι* $\overline{\mathcal{F}}\big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} \in CL(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))$.

5.2.3 Δράση του $\mathcal{F}$ στις συναρτήσεις Gauss

Αρχικά σταθεροποιούμε μία ειδική συνάρτηση Gauss.

Ορισμός 5.2.3.1. *Θέτουμε* $\gamma_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ *για την*

$$\begin{aligned} \gamma_m\colon \mathbb{R}^m &\to (0,1] \\ x &\mapsto \gamma_m(x) = \mathrm{e}^{-\pi|x|^2}. \end{aligned}$$

Για το παρακάτω σημαντικό υπολογιστικό αποτέλεσμα αξιοποιείται το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες και το θεώρημα Fubini.

Πρόταση 5.2.3.1. *Ισχύει ότι*

$$\|\gamma_m\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1.$$

Απευθείας από το θεώρημα Fubini έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 5.2.3.2. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\gamma_m(x) = \prod_{i=1}^m \mathcal{F}\gamma_1(x_i), \ \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Για το επόμενο αξιοποιείται η Πρόταση 5.2.1.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.2.3.1, για να εξαχθεί ένα γραμμικό πρωτοτάξιο ΠΑΤ (στην μία διάσταση), η λύση του οποίου είναι άμεση.

Πρόταση 5.2.3.3. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\gamma_1 = \gamma_1.$$

Άμεσα από τον συνδυασμό της Πρότασης 5.2.3.2 με την Πρότασης 5.2.3.3 προκύπτει το πολυμεταβλητό ανάλογο της δεύτερης, από το οποίο, μέσω της Πρόταση 5.1.2.1, έπεται και το αντίστοιχο για τον συζυγή τελεστή.

Πρόταση 5.2.3.4. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\gamma_m = \gamma_m = \overline{\mathcal{F}}\gamma_m.$$

Σημείωση 5.2.3.1. *Παραφράζοντας η Πρόταση 5.2.3.4 έχουμε ότι η γ_m παραμένει αναλλοίωτη από την δράση των $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$.*

Παρακάτω θα χρειαστούμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.2.3.2. *Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon\colon \mathbb{R}^m &\to (0,1] \\ x &\mapsto \theta_\varepsilon(x) = \mathcal{H}_\varepsilon\gamma_m(x) = \gamma_m(\varepsilon x) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \vartheta_\varepsilon\colon \mathbb{R}^m &\to \left(0, \frac{1}{\varepsilon^m}\right] \\ x &\mapsto \vartheta_\varepsilon(x) = \mathcal{H}_{\frac{1}{\varepsilon},1}\gamma_m(x) = \frac{1}{\varepsilon^m}\gamma_m\left(\frac{1}{\varepsilon}x\right). \end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε μία γενίκευση της Πρότασης 5.2.3.4, όταν αυτή συνδυαστεί με το σημείο 2. της Πρότασης 5.1.1.7 και το αντίστοιχο της Πρότασης 5.1.2.3.

Θεώρημα 5.2.3.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Ισχύει ότι $\theta_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ με*

$$\mathcal{F}\theta_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\theta_\varepsilon \ \& \ \mathcal{F}\vartheta_\varepsilon = \theta_\varepsilon = \overline{\mathcal{F}}\vartheta_\varepsilon.$$

5.2.4 $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$

Εδώ δείχνουμε ότι

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}.$$

Καταρχήν, απευθείας από την Πρόταση 5.2.3.4 παρατηρούμε ότι

$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right)\gamma_m = \gamma_m = \left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right)\gamma_m.$$

Μάλιστα, απευθείας από το Θεώρημα 5.2.3.1 έπονται δύο γενικεύσεις των παραπάνω ισοτήτων.

Πρόταση 5.2.4.1. *Έστω $\varepsilon > 0$. Ισχύει ότι*

$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right)\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon = \left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right)\theta_\varepsilon \ \& \ \left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right)\vartheta_\varepsilon = \vartheta_\varepsilon = \left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right)\vartheta_\varepsilon.$$

Για να εξάγουμε όμως το γενικό ζητούμενο αποτέλεσμα, θα χρειαστούμε πρώτα κάποια προαπαιτούμενα.

Αξιοποιώντας το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, έπεται το επόμενο χρήσιμο.

Πρόταση 5.2.4.2. *Έστω $\varepsilon > 0$. Ισχύουν ότι*

1. $\|\vartheta_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})} = 1$ *και*
2. $\forall r > 0$,
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\| \vartheta_\varepsilon|_{(B(0,r))^c} \right\|_{\mathcal{L}^1((B(0,r))^c;\mathbb{R})} = 0.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 1.9.5.7, το ακόλουθο έχει νόημα και έπεται άμεσα με χρήση της Πρότασης 5.2.4.2.

Πρόταση 5.2.4.3. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})$. Ισχύει ότι*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \|\vartheta_\varepsilon * f - f\|_{C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})} = 0.$$

Επιπλέον θα χρειαστούμε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Fubini.

Πρόταση 5.2.4.4. *Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{F}f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\mathcal{F}g(x)\mathrm{d}x \ \& \ \int_{\mathbb{R}^m} \overline{\mathcal{F}}f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\overline{\mathcal{F}}g(x)\mathrm{d}x.$$

Οπότε, αξιοποιώντας το Θεώρημα 5.2.3.1, την Πρόταση 5.2.4.3 και την Πρόταση 5.2.4.4, έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα 5.2.4.1 ($\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ στον $\mathcal{S}$)**.** *Ισχύει ότι οι $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ και $\overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ είναι $1-1$ με*

$$\left(\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\right)^{-1} = \overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})},$$

δλδ

$$\overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} \circ \mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} \circ \overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

5.2.5 Θεώρημα Plancherel στον $\mathcal{S}$

Εδώ δείχνουμε ότι

$$\|\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}\lozenge\|_{\mathcal{L}^2} = \|\mathrm{id}_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{L}^2} = \left\|\overline{\mathcal{F}}\big|_{\mathcal{S}}\lozenge\right\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Υπό την ισχύ της Πρότασης 1.9.5.7, το ακόλουθο έχει νόημα και έπεται άμεσα με χρήση του θεωρήματος Fubini σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.1.2.1.

Πρόταση 5.2.5.1. *Έστω $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \ \ \&\ \overline{\mathcal{F}}(f * g) = \left(\overline{\mathcal{F}}f\right)\left(\overline{\mathcal{F}}g\right).$$

Άμεσα από την Πρόταση 5.2.5.1 έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 5.2.5.2. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύουν ότι*

1. $\mathcal{R}f = f(-\lozenge) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$,
2. $\left(f * \overline{\mathcal{R}f}\right)(0) = \|f\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ *και*
3. $\mathcal{F}\left(f * \overline{\mathcal{R}f}\right) = |\mathcal{F}f|^2$.

Αξιοποιώντας το Θεώρημα 5.2.4.1 σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.2.5.2 έπεται το εξής.

Θεώρημα 5.2.5.1 (Plancherel στον $\mathcal{S}$)**.** *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\|\mathcal{F}f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \left\|\overline{\mathcal{F}}f\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

5.3 $\mathcal{F}$ στον $(\mathcal{S})'$

Η ορθότητα του επόμενου ορισμού εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 5.2.1.1 και το Θεώρημα 5.2.2.1.

Ορισμός 5.3.1 (μετασχηματισμός και συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον $(\mathcal{S})'$)**.** *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})'$. Θέτουμε $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})' \ni \overline{\mathcal{F}}f$ ως*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \mathcal{F}f(g) = f(\mathcal{F}g) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}f\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) &\to \mathbb{C} \\ g &\mapsto \overline{\mathcal{F}}f(g) = f\left(\overline{\mathcal{F}}g\right), \end{aligned}$$

για τον μετασχηματισμό και τον συζυγή μετασχηματισμό, αντίστοιχα, Fourier της f.

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.4.1 και αποτελεί το ανάλογό του στον $(\mathcal{S})'$.

Θεώρημα 5.3.1 ($\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ στον $(\mathcal{S})'$)**.** *Ισχύει ότι οι $\mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}$ και $\overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}$ είναι $1-1$ με*

$$\left(\mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}\right)^{-1} = \overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'},$$

δλδ

$$\overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} \circ \mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} = \mathrm{id}_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} = \mathcal{F}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'} \circ \overline{\mathcal{F}}|_{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'}.$$

Το επόμενο χρήσιμο έπεται άμεσα από το θεώρημα Fubini.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι $\mathcal{F}\ell_f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))'_r \ni \overline{\mathcal{F}}\ell_f$ με*

$$\mathcal{F}\ell_f = \ell_{\mathcal{F}f} \ \ \&\ \overline{\mathcal{F}}\ell_f = \ell_{\overline{\mathcal{F}}f}.$$

5.4 $\mathcal{F}$ στον $\mathcal{L}^1$ (συνέχεια)

Εδώ συνεχίζουμε την μελέτη των $\mathcal{F}|_{\mathcal{L}^1}$ και $\overline{\mathcal{F}}|_{\mathcal{L}^1}$, έχοντας όμως τώρα ανά χείρας τον ορισμό και τις ιδιότητες των τελεστών αυτών στους $\mathcal{S}$ και $(\mathcal{S})'$.

Άμεσα από την Πρόταση 4.1.3.4 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.3.1 και την Πρόταση 5.3.1 έπεται το ανάλογο του Θεωρήματος 5.2.4.1 και του Θεωρήματος 5.3.1 στον $\mathcal{L}^1$.

Θεώρημα 5.4.1 («$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$» στον $\mathcal{L}^1$)**.** *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\left(\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}\right) f = f, \ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

2. *Έστω $\overline{\mathcal{F}}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\left(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\right) f = f, \ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 5.1.1.1 και του Θεωρήματος 5.1.2.1, απευθείας από το Θεώρημα 5.4.1 έπεται το παρακάτω.

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \smallsetminus C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}f \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \not\ni \overline{\mathcal{F}}f.$$

Παραφράζοντας το Θεώρημα 5.4.2 παίρνουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 5.4.1. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\right) \nsubseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F}) \nsupseteq \overline{\mathcal{F}}\left(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{F})\right).$$

Για να συνεχίσουμε την μελέτη του $\mathcal{F}\left(\mathcal{L}^1\right)$ και του $\overline{\mathcal{F}}\left(\mathcal{L}^1\right)$ χρειαζόμαστε κάποια επιπλέον αποτελέσματα.

Πρώτα παίρνουμε το αντίστροφο της Πρότασης 5.1.1.8 και της Πρότασης 5.1.2.4, αξιοποιώντας τις ίδιες σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.4.1.

Πρόταση 5.4.2. *Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω $\mathcal{F}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύουν ότι*

   i. *$\mathcal{F}f$ άρτια $\Leftrightarrow$ f άρτια, και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \int_{\mathbb{R}^m} \cos\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y$$

   και

   ii. *$\mathcal{F}f$ περιττή $\Leftrightarrow$ f περιττή, και μάλιστα*

$$\mathcal{F}f = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m} \sin\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

2. *Έστω $\overline{\mathcal{F}}f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. Ισχύουν ότι*

   i. *$\overline{\mathcal{F}}f$ άρτια $\Leftrightarrow$ f άρτια, και μάλιστα*

$$\overline{\mathcal{F}}f = \int_{\mathbb{R}^m} \cos\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y$$

   και

   ii. *$\overline{\mathcal{F}}f$ περιττή $\Leftrightarrow$ f περιττή, και μάλιστα*

$$\overline{\mathcal{F}}f = \mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^m} \sin\left(2\pi\langle\lozenge, y\rangle_{\mathbb{R}^m}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

Επιπλέον θα χρειαστούμε το επόμενο, για το οποίο γίνεται χρήση της Πρότασης 5.1.1.8 και της Πρότασης 5.1.2.4, καθώς και του γνωστού αποτελέσματος

$$\int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x < \infty.$$

Πρόταση 5.4.3. *Έστω*

1. *περιττή* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ *και*
2. $r_1, r_2 \in (0,\infty)$ *τ.ω.:* $r_1 < r_2$.

Ισχύει ότι $\exists K > 0$ *τ.ω.:*

$$\left| \int_{(r_1,r_2)} \frac{\mathcal{F}f(x)}{x} \mathrm{d}x \right| \leq K \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R};\mathbb{C})} \geq \left| \int_{(r_1,r_2)} \frac{\overline{\mathcal{F}}f(x)}{x} \mathrm{d}x \right|.$$

Οπότε αξιοποιώντας το παράδειγμα της περιττής $f \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & \text{αν } x \in [\mathrm{e}, \infty) \\ \frac{1}{\mathrm{e}} x, & \text{αν } x \in [-\mathrm{e}, \mathrm{e}] \\ -\frac{1}{\ln(-x)}, & \text{αν } x \in (-\infty, -\mathrm{e}] \end{cases},$$

σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.4.2 και την Πρόταση 5.4.3 έπεται το επόμενο.

Θεώρημα 5.4.3. *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big) \subsetneq C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \supsetneq \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big).$$

Επίσης, απευθείας από τον συνδυασμό του Θεωρήματος 3.1.1.4 και του Θεωρήματος 5.2.4.1 έπεται το παρακάτω.

Θεώρημα 5.4.4. *Ισχύει ότι οι εγκλεισμοί*

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big) \subsetneq C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) \supsetneq \overline{\mathcal{F}}\big(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$$

είναι πυκνοί, δλδ

$$\overline{\mathcal{F}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}} = C_0(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}) = \overline{\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}))}^{\|\lozenge - \blacklozenge\|_{C_b(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}}.$$

Τέλος, με χρήση της Πρότασης 4.1.1.4, του Θεωρήματος 5.3.1 και της Πρότασης 5.3.1 έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 5.4.4. *Έστω* $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$. *Έχουμε τα εξής.*

1. *Έστω ότι* $\mathcal{F}f_1 = \mathcal{F}f_2$. *Ισχύει ότι*
$$f_1 = f_2, \ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$
2. *Έστω ότι* $\overline{\mathcal{F}}f_1 = \overline{\mathcal{F}}f_2$. *Ισχύει ότι*
$$f_1 = f_2, \ \lambda^m\text{-σχεδόν παντού.}$$

5.5 $\mathcal{F}$ στον L^2

Η ορθότητα του παρακάτω ορισμού έπεται λόγω της ισχύς της Πρότασης 1.1.8, καθώς επίσης του Θεωρήματος 5.2.1.1 και του Θεωρήματος 5.2.2.1.

Ορισμός 5.5.1 (μετασχηματισμός και συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον $[\mathcal{S}]$). *Θέτουμε*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\colon \left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\} &\to \left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}\\ [f]&\mapsto \mathcal{F}[f]=[\mathcal{F}f]\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}\colon \left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\} &\to \left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}\\ [f]&\mapsto \overline{\mathcal{F}}[f]=\left[\overline{\mathcal{F}}f\right]\end{aligned}$$

για τον μετασχηματισμό και το συζυγή μετασχηματισμό, αντίστοιχα, Fourier στον

$$\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}.$$

Απευθείας από το θεώρημα Fubini έπεται το παρακάτω.

Πρόταση 5.5.1. *Έστω $[f_1],[f_2]\in\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}$. Ισχύει ότι*

$$\langle\mathcal{F}[f_1],[f_2]\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\left\langle[f_1],\overline{\mathcal{F}}[f_2]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

Το επόμενο αποτελεί άμεση συνέπεια είτε του Θεωρήματος 5.2.5.1 είτε της Πρότασης 5.5.1.

Θεώρημα 5.5.1 (Plancherel στον $[\mathcal{S}]$). *Έστω $[f]\in\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}$. Ισχύει ότι*

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\|[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\left\|\overline{\mathcal{F}}[f]\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

Το ακόλουθο είναι άμεση συνέπεια του συνδυασμού του Θεωρήματος 1.10.4.2 και του Θεωρήματος 5.5.1 με το γνωστό αποτέλεσμα επέκτασης συνεχούς τελεστή από πυκνό διανυσματικό υπόχωρο με νόρμα σε διανυσματικό χώρο Banach (βλ, πχ, [23, Πρόταση 2.1.4]).

Θεώρημα 5.5.2 (μετασχηματισμός και συζυγής μετασχηματισμός Fourier στον L^2). *$\exists!$ τελεστές που ανήκουν στο $CL\big(L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C});L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\big)$, οι οποίοι επεκτείνουν τους $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$, αντίστοιχα, του Ορισμού 5.5.1.*

Αυτούς τους επεκταμένους τελεστές τους συμβολίζουμε επίσης ως $\mathcal{F}$ και $\overline{\mathcal{F}}$, αντίστοιχα, καθώς επίσης τους καλούμε μετασχηματισμό και συζυγή μετασχηματισμό, αντίστοιχα, Fourier στον $L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$.

Ισχύει επίσης ότι

$$\|\mathcal{F}[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\|[f]\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\left\|\overline{\mathcal{F}}[f]\right\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})},\ \forall\,[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Σημείωση 5.5.1. *Προφανώς, λόγω του Θεωρήματος 1.10.4.2, έχουμε ότι ο εγκλεισμός*

$$\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}\subsetneq L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$$

είναι πυκνός, δλδ

$$\overline{\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}}^{\|\lozenge-\blacklozenge\|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}}=L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}),$$

και άρα το ίδιο ισχύει και για τον εγκλεισμό

$$\left\{[f]\in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\,\middle|\,f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})\right\}\subsetneq L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Υπό την ισχύ του Θεωρήματος 5.5.2, το επόμενο έπεται άμεσα από το Θεώρημα 1.10.4.2, το Θεώρημα 5.2.4.1 και την Πρόταση 5.5.1.

Θεώρημα 5.5.3 ($\mathcal{F}^{-1}=\overline{\mathcal{F}}$ στον L^2). *Ισχύει ότι οι $\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$ και $\overline{\mathcal{F}}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$*

1. *είναι $1-1$, με*

$$\left(\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\right)^{-1}=\overline{\mathcal{F}}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})},$$

δλδ

$$\overline{\mathcal{F}}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\circ\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}=\mathcal{F}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}\circ\overline{\mathcal{F}}|_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}.$$

2. *είναι επί,*

3. *είναι ισομετρίες,*

4. *διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο* $\langle \Diamond, \blacklozenge \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}$, *δλδ*

$$\langle \mathcal{F}[f_1], \mathcal{F}[f_2] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \langle [f_1], [f_2] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \left\langle \overline{\mathcal{F}}[f_1], \overline{\mathcal{F}}[f_2] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}, \quad \forall\, [f_1], [f_2] \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})$$

και

5. *είναι μεταξύ τους συζυγείς, ως τελεστές σε χώρο Hilbert, δλδ*

$$\langle \mathcal{F}[f_1], [f_2] \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})} = \left\langle [f_1], \overline{\mathcal{F}}[f_2] \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C})}, \ \forall\, [f_1], [f_2] \in L^2(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}).$$

Κεφάλαιο 6

Χώροι Sobolev $\mathcal{W}^{s,p}$ και $\mathcal{H}^s$ στον $\mathbb{R}^m$

μπλα μπλα...
μπλα μπλα...
μπλα μπλα...
μπλα μπλα...

Κεφάλαιο 7

Χώροι Sobolev $W^{s,p}$ και H^s στον $\mathbb{R}^m$

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

μπλα μπλα...

Βιβλιογραφία

[1] Armen H. Zemanian. *Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions, with Applications.* Dover, 1987.

[2] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction.* Princeton University Press, 2003.

[3] Friedrich G. Friedlander and Mark Joshi. *Introduction to the Theory of Distributions, 2nd edition.* Cambridge University Press, 1999.

[4] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd edition.* John Wiley & Sons, 1999.

[5] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[6] Helmut H. Schaefer and Manfred P. Wolff. *Topological Vector Spaces, 2nd edition.* Springer, 1999.

[7] J. Ian Richards and Heekyung K. Youn. *The Theory of Distributions: A Nontechnical Introduction.* Cambridge University Press, 1990.

[8] James R. Munkres. *Analysis on Manifolds.* CRC Press, 2018.

[9] James R. Munkres. *Topology, 2nd edition.* Pearson, 2018.

[10] James Yeh. *Real Analysis: Theory of Measure and Integration, 3nd edition.* World Scientific, 2014.

[11] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis, 2nd edition.* Springer, 2007.

[12] Josefina Alvarez. A Mathematical Presentation of Laurent Schwartz's Distributions. *Surveys in Mathematics and its Applications*, 15:1–137, 2020. https://www.utgjiu.ro/math/sma/v15/p15_01.pdf.

[13] Karl R. Stromberg. *An Introduction to Classical Real Analysis.* American Mathematical Society, 2015.

[14] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis, 2nd edition.* Springer, 2003.

[15] Laurent Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann, 1978.

[16] Robert S. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.* World Scientific, 2003.

[17] Ronald C. Freiwald. *An Introduction to Set Theory and Topology.* Washington University in St. Louis, 2014. https://openscholarship.wustl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1020&context=books.

[18] Ryszard Engelking. *General Topology, revised and completed edition.* Heldermann Verlag, 1989.

[19] Vladimir I. Bogachev. *Measure Theory, Volume I.* Springer, 2007.

[20] Walter Rudin. *Functional Analysis, 2nd edition.* McGraw-Hill, 1991.

[21] Walter Rudin. *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*. Εκδόσεις Leader Books, 2000.

[22] Απόστολος Γιαννόπουλος. *Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue*. Πρόχειρες Σημειώσεις, 2019. https://eclass.uoa.gr/modules/document/index.php?course=MATH121&openDir=/602835301fxi.

[23] Αριστείδης Κατάβολος. *Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών*. Εκδόσεις Συμμετρία, 2008.

[24] Σταθακόπουλος Α. Κωνσταντίνος. *Πραγματική Ανάλυση*. Αίθρα, 1989.

[25] Γεώργιος Κουμουλλής και Στυλιανός Νεγρεπόντης. *Θεωρία Μέτρου, νέα βελτιωμένη έκδοση*. Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[26] Στυλιανός Νεγρεπόντης και Θεοδόσιος Ζαχαριάδης και Νικόλαος Καλαμίδας και Βασιλική Φαρμάκη. *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*. Εκδόσεις Συμμετρία, 1997.

[27] Τηλέμαχος Ε. Χατζηαφράτης. *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*. Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.