Γεωμετρική Ανάλυση

Πρόχειρες Σημειώσεις

Νίκος Γιαλελής

Τμήμα Μαθηματικών
ΕΚΠΑ
Αθήνα, 2021

Περιεχόμενα

Μέρος I

Γεωμετρικός Απειροστικός Λογισμός

Εισαγωγή

Στο παρόν κείμενο θεωρούνται γνωστά βασικά στοιχεία από την Θεωρία Συνόλων, την Γραμμική Άλγεβρα, την Αναλυτική Γεωμετρία, την Πραγματική Ανάλυση και την Βασική Άλγεβρα (συγκεκριμένα τα βασικά για την θεωρία μεταθέσεων), που περιέχονται στην ύλη των βασικών μαθημάτων των δύο πρώτων ετών του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών. Τονίζεται ότι δεν γίνεται χρήση εργαλείων Θεωρίας Μέτρου, χωρίς όμως έκπτωση στο εύρος των αποτελεσμάτων.

Στο Κεφάλαιο 1 ορίζονται οι περιορισμοί και οι επεκτάσεις μεταξύ ευκλείδειων χώρων, μαζί με άλλες συγγενείς έννοιες όπως, π.χ., το γράφημα συνάρτησης.

Ορισμένα προαπαιτούμενα παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2.

Στο Κεφάλαιο 3 ορίζονται αυστηρά και με προσοχή οι βασικοί διαφορικοί τελεστές.

Τα βασικά αποτελέσματα από τον Απειροστικό Λογισμό στον $\mathbb{R}^n$ παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4. Η συλλογιστική πίσω από την εξαγωγή των αποτελεσμάτων είναι ότι όσα δεν μπορούν να αποδειχθούν άμεσα, αποδεικνύονται πρώτα για «κουτιά» και μετά για αυθαίρετες «γεωμετρίες».

Στο Κεφάλαιο 5 εισάγονται οι πολλαπλότητες και μελετώνται οι βασικές ιδιότητές τους.

Η ολοκλήρωση συνάρτησης επί πολλαπλότητας εισάγεται και μελετάται στο Κεφάλαιο 6.

Στο Κεφάλαιο 7 δίνεται ένας αναλυτικός ορισμός των διαφορικών μορφών και μελετώνται οι ιδιότητές τους.

Στο Κεφάλαιο 8 γενικεύεται το 2ο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στις n διαστάσεις. Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως θεώρημα του Stokes. Επίσης, παρουσιάζονται οι βασικές συνέπειες αυτού.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 9 εισάγεται και μελετάται το πρόβλημα της παράγουσας, το οποίο, όπως είναι αναμενόμενο, είναι άμεσα συνδεδεμένο με το θεώρημα του Stokes.

Ενδεικτική βιβλιογραφία, που καλύπτει εν πολλοίς, αλλά όχι πλήρως (!), τα αποτελέσματα του παρόντος κειμένου, αποτελεί η ακόλουθη λίστα: [7], [17], [26], [6], [32], [20], [21], και [25].

Συμβολισμός

Χαρακτήρες για σύνολα υποσυνόλων

1. $\mathcal{B} \leftarrow$ σύνολο φραγμένων (<u>b</u>ounded) συνόλων, βλ. παρακάτω.

2. $\mathcal{C} \leftarrow$ σύνολο σχετικά κλειστών (<u>c</u>losed) συνόλων, βλ. παρακάτω.

3. $\mathcal{D} \leftarrow$ σύνολο συνόλων διαφόρισης (<u>d</u>ifferentiation), βλ. το Κεφάλαιο 3.

4. $\mathcal{I} \leftarrow$ σύνολο διαστημάτων (<u>i</u>ntervals), βλ. παρακάτω.

5. $\mathcal{J} \leftarrow$ σύνολο <u>J</u>ordan μετρήσιμων συνόλων, βλ. την Υποενότητα 4.3.3.

6. $\mathcal{M} \leftarrow$ σύνολο πολλαπλοτήτων (<u>m</u>anifolds), βλ. το Κεφάλαιο 5.

7. $\mathcal{N} \leftarrow$ σύνολο μηδενοσυνόλων (<u>n</u>ull set), βλ. την Ενότητα 4.2.

8. $\mathcal{O} \leftarrow$ σύνολο σχετικά ανοικτών (<u>o</u>pen) συνόλων, βλ. παρακάτω.

9. $\mathfrak{p} \leftarrow$ σύνολο διαμερίσεων (<u>p</u>artitions) διαστήματος, βλ. την Υποενότητα 4.3.1.

10. $\mathcal{P} \leftarrow$ δυναμοσύνολο (<u>p</u>ower set), βλ. παρακάτω.

Χαρακτήρες για σύνολα συναρτήσεων

1. $Aff \leftarrow$ σύνολο ομοπαραλληλικών (affine) συναρτήσεων, βλ. παρακάτω.
2. $B \leftarrow$ σύνολο φραγμένων (bounded) συναρτήσεων, βλ. παρακάτω.
3. $C \leftarrow$ σύνολο συνεχών (continuous) συναρτήσεων, βλ. παρακάτω.
4. $D \leftarrow$ σύνολο διαφορικών μορφών (differential forms), βλ. το Κεφάλαιο 7. Σημειώνουμε ότι μια διαφορική μορφή είναι μια συνολοσυνάρτηση (δλδ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο συνόλων), και πιο συγκεκριμένα, μια «πολλαπλοτητοσυνάρτηση». Επίσης,

   $D^E \leftarrow$ σύνολο ακριβών (exact) διαφορικών μορφών και

   $D^C \leftarrow$ σύνολο κλειστών (closed) διαφορικών μορφών.
5. $Hth \leftarrow$ σύνολο ομοθετικών (homothetic) συναρτήσεων, βλ. παρακάτω.
6. $Ism \leftarrow$ σύνολο ισομετρικών (isometric) συναρτήσεων, βλ. παρακάτω.
7. $L \leftarrow$ σύνολο γραμμικών (linear) συναρτήσεων, βλ. παρακάτω.
8. $Lip \leftarrow$ σύνολο Lipschitz συναρτήσεων, βλ. παρακάτω.
9. $RM \leftarrow$ σύνολο άκαμπτων κινήσεων (rigid motion), βλ. παρακάτω.
10. $\mathit{\Pi} \leftarrow$ σύνολο περιορισμών μεταξύ ευκλειδείων χώρων, βλ. το Κεφάλαιο 1.
11. $\mho \leftarrow$ σύνολο επεκτάσεων μεταξύ ευκλειδείων χώρων, βλ. το Κεφάλαιο 1.

Γενικά

1. Χρησιμοποιούμε το $\mathscr{I}$, με ή χωρίς δείκτη, για αυθαίρετα σύνολα.
2. i. Γράφουμε $\approx$ για να εκφράσουμε την ισοδυναμία δύο συνόλων, δλδ $\mathscr{I}_1 \approx \mathscr{I}_2$ ανν $\exists\ 1-1$ & επί $f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2$.

   ii. Γράφουμε $\cong$ για εκφράσουμε την γραμμική ισομορφία δύο διανυσματικών χώρων επάνω στο ίδιο σώμα, δλδ αν $\mathscr{I}_1$ & $\mathscr{I}_1$ είναι δύο διανυσματικοί χώροι επάνω στο ίδιο σώμα, τότε $\mathscr{I}_1 \cong \mathscr{I}_2$ ανν $\exists$ γραμμική, $1-1$ & επί $f\colon \mathscr{I}_1 \to \mathscr{I}_2$.
3. i. Χρησιμοποιούμε το $\prod\limits_{j\in\mathscr{I}}$ για να εκφράσουμε το σύνηθες καρτεσιανό γινόμενο ως προς $j \in \mathscr{I}$, δλδ

   $$\prod_{j\in\mathscr{I}} \mathscr{I}_j = \left\{ f\colon \mathscr{I} \to \bigcup_{j\in\mathscr{I}} \mathscr{I}_j \,\middle|\, f(j) \in \mathscr{I}_j\ \forall j \in \mathscr{I} \right\} \approx \left\{ i = (i_j)_{j\in\mathscr{I}} \,\middle|\, i_j \in \mathscr{I}_j\ \forall j \in \mathscr{I} \right\}.$$

   ii. Χρησιμοποιούμε το $\coprod\limits_{j\in\mathscr{I}}$ για να εκφράσουμε τον εξαρτώμενο τύπο (dependent type) ως προς $j \in \mathscr{I}$ που έχει ως εξής

   $$\coprod_{j\in\mathscr{I}} \mathscr{I}_j = \left\{ i = (j, i_j) \,\middle|\, j \in \mathscr{I}\ \&\ i_j \in \mathscr{I}_j \right\}.$$

   Ο τύπος αυτός συμβολίζεται στην βιβλιογραφία και ως $\sum\limits_{i\in\mathscr{I}}$ (ή ακόμα και ως $\biguplus\limits_{i\in\mathscr{I}}$) κάτι που θα το αποφύγουμε λόγω του παρόμοιου συμβολισμού για το άθροισμα του Minkowski που χρησιμοποιούμε κι εδώ (βλ. παρακάτω).
4. Το $\pm$ σημαίνει είτε $+$, είτε $-$.
5. i. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ και $\overline{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \overline{\mathbb{N}}$.

   ii. Θα γράφουμε k, l, m, n, κ.ο.κ., με ή χωρίς δείκτη, για αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbb{N}$, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.
6. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Θυμίζουμε ότι στον $\overline{\mathbb{R}}$ ορίζονται, μεταξύ άλλων, τα γινόμενα $0\,(\pm\infty) = 0$.

7. i. Θα χρησιμοποιούμε τα t, x, y, z, κ.ο.κ., με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $\mathbb{R}^{n\times m} = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^n = \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}$. Θυμίζουμε ότι γενικά $\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n} \mathbb{R} \neq \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}$, παρά μόνο αν $n = m$.

   ii. Για $x \in \mathbb{R}^{n\times m}$ θα γράφουμε $x = \left(\left(x_{ij}\right)_{i=1}^{n}\right)_{j=1}^{m} = \left(x_{ij}\right)_{i,j=1}^{n,m}$ με $x_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall\, (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\}$, για την ανάλυση του x σε συντεταγμένες (ή, εναλλακτικά, μεταβλητές), δλδ για την γραφή του ως διατεταγμένη m-άδα στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ (όπως προκύπτει από τον ορισμό του $\mathbb{R}^{n\times m}$).

   iii. Αν $x \in \mathbb{R}^{n\times m}$, τότε $x^{\mathrm{T}} = \left(x_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

   iv. $\mathbb{R}^{n\times m} \cong \mathbb{R}^{nm} \cong \mathbb{R}^{m\times n}$ & $\mathbb{R}^1 \cong \mathbb{R}$. Έτσι, όλα τα παραπάνω καλύπτουν τόσο την περίπτωση του $\mathbb{R}^n$ όσο και αυτή του $\mathbb{R}$.

   v. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{n\times m}$ καλούνται (πραγματικοί) πίνακες, τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ (πραγματικά) διανύσματα και τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ (πραγματικοί) αριθμοί.

8. Συμβολίζουμε με $Sym_n \subsetneq \mathbb{R}^{n\times n}$ το σύνολο των συμμετρικών πινάκων του $\mathbb{R}^{n\times n}$, δλδ

$$Sym_n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, x^{\mathrm{T}} = x\right\}.$$

9. i. Θα συμβολίζουμε με 0_n το (μοναδικό) μηδενικό στοιχεία του $\mathbb{R}^n$, δλδ $0_n = (0)_{i=1}^{n}$. Προφανώς, $0_1 \equiv 0$.

   ii. $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$.

10. Συμβολίζουμε με $Diag_n \subsetneq \mathbb{R}^{n\times n}$ το σύνολο των διαγώνιων πινάκων του $\mathbb{R}^{n\times n}$, δλδ

$$Diag_n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, x_{ij} = 0 \text{ για } i,j \in \{1,\dots,n\} \text{ με } i \neq j\right\}.$$

11. i. Θα γράφουμε $\star\cdot\bigstar\colon \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{m\times k} \to \mathbb{R}^{n\times k}$ για το σύνηθες γινόμενο στοιχείων του $\mathbb{R}^{n\times m}$ επί στοιχείων του $\mathbb{R}^{m\times k}$.

    ii. Μέσω της ισομορφικής ταύτισης των στοιχείων των προαναφερθέντων πραγματικών γραμμικών χώρων, το γινόμενο αυτό επεκτείνεται κατά φυσικό τρόπο ώστε να καλύπτει γινόμενα μεταξύ στοιχείων από διαφορετικούς τέτοιους χώρους.

    iii. Κατά την συνήθη πρακτική, θα παραλείπουμε το $\cdot$ από το γινόμενο που περιλαμβάνει στοιχείο του $\mathbb{R}$.

12. Συμβολίζουμε με $Pos_n \subsetneq \mathbb{R}^{n\times n}$ το σύνολο των θετικά ορισμένων πινάκων του $\mathbb{R}^{n\times n}$, δλδ

$$Pos_n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, y^{\mathrm{T}} \cdot x \cdot y > 0,\ \forall y \in (\mathbb{R}^n)^*\right\}.$$

13. Γράφουμε 1_n για το (μοναδικό) ταυτοτικό στοιχείο του $\mathbb{R}^{n\times n}$, δλδ $1_{n\,ij} = \delta_{ij}\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\}$, κάνοντας χρήση του δέλτα του Kronecker. Προφανώς $1_1 \equiv 1$.

14. Συμβολίζουμε με $Orth_{n\times m} \subsetneq \mathbb{R}^{n\times m}$ το

$$Orth_{n\times m} = \left\{x \in \mathbb{R}^{n\times m} \,\middle|\, x^{\mathrm{T}} \cdot x = 1_n\right\}.$$

Έχει καθιερωθεί (βλ., π.χ., [12]) να λέγονται ορθογώνιοι οι πίνακες που είναι στοιχεία αποκλειστικά του $Orth_{n\times n}$, για το οποίο ισχύει ότι το ζεύγος $(Orth_{n\times n}, \cdot)$ είναι ομάδα.

15. i. Γράφουμε $\langle\star,\bigstar\rangle_F$ για το εσωτερικό γινόμενο του Frobenius στον $\mathbb{R}^{n\times m}$, δλδ για την συνάρτηση

$$\begin{aligned}\langle\star,\bigstar\rangle_F\colon (\mathbb{R}^{n\times m})^2 &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto \langle x,y\rangle_F = \operatorname{tr}\left(x^{\mathrm{T}}\cdot y\right) = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_{ij}y_{ij}.\end{aligned}$$

ii. Συμβολίζουμε με $|\star|$ και $\|\star\|$ τις παρακάτω νόρμες στον $\mathbb{R}^{n\times m}$

$$|\star|\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto |x| = \left(\langle x,x\rangle_F\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i,j=1}^{n,m} (x_{ij})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

και

$$\|\star\|\colon \mathbb{R}^{n\times m} \to [0,\infty)$$
$$x \mapsto \|x\| = \max\left\{|x_{ij}| \;\middle|\; (i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}\right\}.$$

Θυμίζουμε ότι οι νόρμες αυτές στον $\mathbb{R}^{n\times m}$, όπως όλες οι νόρμες σε έναν γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάτασης, είναι ισοδύναμες, και συγκεκρινένα ισχύει ότι $\|\star\| \le |\star| \le (nm)^{\frac{1}{2}}\|\star\|$.

16. Για $i\in\{1,\ldots,n\}$ γράφουμε $e_i\in\mathbb{R}^n$ για το i-οστό στοιχείο της συνήθους διατεταγμένης βάσης του $\mathbb{R}^n$, δλδ

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \;\; \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

17. i. Χρησιμοποιούμε το $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ για το δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}^n$.
    ii. Γράφουμε S, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
    iii. Χρησιμοποιούμε το $\mathcal{P}(S)$ για το δυναμοσύνολο του $S\subseteq\mathbb{R}^n$.
    iv. Γράφουμε N, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα στοιχεία του $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$.

18. Για $i\in\{1,\ldots,n\}$ γράφουμε

$$\mathbb{R}^n_{i,+} = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i>0\right\} \;\&\; \mathbb{R}^n_{i,-} = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; x_i<0\right\}.$$

Όταν $n=i=1$, θα παραλείπουμε τον δείκτη i (και προφανώς το n) από τον συμβολισμό.

19. Για $S\subseteq\mathbb{R}^n$ γράφουμε

$$\operatorname{span}(S) = \left\{y\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists\;\; (m\in\mathbb{N}),\;\; \left(\{a_i\}_{i=1}^m \subsetneq \mathbb{R}\right) \;\&\; \left(\{x_i\}_{i=1}^m\subseteq S\right) \text{ τ.ω.: } y=\sum_{i=1}^m a_i x_i\right\}$$

για την γραμμική θήκη του S.

20. Για $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ και $S_1,S_2\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$,

$$a_1S_1 + a_2S_2 = \left\{y\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists\,(x_1,x_2)\in S_1\times S_2 \text{ τ.ω.: } y=a_1x_1+a_2x_2\right\}.$$

Το άθροισμα αυτό (για $a_1=a_2=1$) καλείται στην βιβλιογραφία και ως άθροισμα του Minkowski. Αν $S_1=\{x_1\}$, και δεν υπάρχει πιθανότητα παρεξήγησης, τότε θα γράφουμε σκέτο x_1 αντί για $\{x_1\}$ στην θέση του S_1 στην παραπάνω έκφραση.

21. Έστω $m\le n$ και μια συλλογή $\{x_i\}_{i=1}^m\subsetneq\mathbb{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων. Συμβολίζουμε το αντίστοιχο m-διάστατο παραλληλεπίπεδο που παράγεται από τα στοιχεία αυτά, $\Pi\left(\{x_i\}_{i=1}^m\right)$, ως

$$\Pi\left(\{x_i\}_{i=1}^m\right) = \left\{y\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists\prod_{i=1}^m a_i\in(0,1)^m \text{ τ.ω.: } y=\sum_{i=1}^m a_i x_i\right\}.$$

Αν, επιπλέον, $x_i{\cdot}x_j=0\;\forall i,j\in\{1,\ldots,m\}$ με $i\ne j$, τότε το παραλληλεπίπεδο καλείται ορθογώνιο.

Τοπολογία

1. Γράφουμε την ανοικτή μπάλα, ως προς την μετρική που επάγει η $|\star|$ και ως προς την αντίστοιχη που επάγει η $\|\star\|$, στον $\mathbb{R}^{n\times m}$, με κέντρο το $x_0\in\mathbb{R}^n$ και ακτίνα $\rho>0$, ως

$$B(x_0,\rho) = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; |x-x_0|<\rho\right\} \text{ και } Q(x_0,\rho) = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x-x_0\|<\rho\right\},$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι

$$B(x_0,\rho)\subsetneq Q(x_0,\rho)\subsetneq B\left(x_0,n^{\frac{1}{2}}\rho\right),$$

από την ισοδυναμία των νορμών.

2. i. Θα χρησιμοποιούμε το U, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετα ανοικτά στοιχεία του $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.
   ii. Για $S \subseteq \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με S° το εσωτερικό του S και με $\overline{S}$ την κλειστή θήκη του.
3. i. Συμβολίζουμε ως $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ το
$$\mathcal{I}(\mathbb{R}) = \left\{ S \subseteq \mathbb{R} \,\middle|\, \text{το } S \text{ είναι συνεκτικό, δλδ διάστημα με την συνήθη έννοια} \right\}$$
   και
$$\mathcal{I}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \prod_{i=1}^n S_i \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \ \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$
   Θα καλούμε ένα αυθαίρετο στοιχείο του $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ διάστημα του $\mathbb{R}^n$ και θα χρησιμοποιούμε το I, με η χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυτό.
   ii. Π.χ.:
      α'. προφανώς, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$,
      β'. αν $i \in \{1, \dots, n\}$, τότε $\mathbb{R}^n_{i,\pm}, \overline{\mathbb{R}^n_{i,\pm}} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$,
      γ'. $\varnothing \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
      δ'. αν $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε $\{x_0\} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ &
      ε'. αν $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\rho > 0$, τότε $Q(x_0, \rho) \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, καθώς
$$Q(x_0, \rho) = \prod_{i=1}^n (x_{0i} - \rho, x_{0i} + \rho).$$
   iii. Τα μονοσύνολα και το $\varnothing$ θα τα λέμε τετριμμένα διαστήματα.
4. Για $S \subseteq \mathbb{R}^n$, γράφουμε την διάμετρο του S ως
$$\operatorname{diam}(S) = \begin{cases} \sup_{x,y \in S} \{|x - y|\}, & \text{αν } S \neq \varnothing, \\ 0 \text{ (ή εναλλακτικά } -\infty), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$
   Επιπλέον, θα λέμε ότι S είναι φραγμένο ανν $\operatorname{diam}(S) < \infty$ (σε κάθε περίπτωση, το $\varnothing$ θεωρείται φραγμένο). Θα συμβολίζουμε $\mathcal{B}(S) \subsetneq \mathcal{P}(S)$ για το
$$\mathcal{B}(S) = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, \operatorname{diam}(S_0) < \infty \right\}.$$
   Πιο εύχρηστη είναι η εξής, εύκολα αποδεικτή, ισοδύναμη μορφή
$$\mathcal{B}(S) = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, S_0 \subseteq Q(x_0, \rho), \text{ για κάποια } x_0 \in \mathbb{R}^n \ \&\ \rho > 0 \right\}.$$
5. Για $S_1, S_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\}$, συμβολίζουμε την απόσταση του S_1 από το S_2 με
$$\operatorname{dist}(S_2, S_1) = \operatorname{dist}(S_1, S_2) = \inf_{(x,y) \in S_1 \times S_2} \{|x - y|\}.$$
   Για $S_1 = \{x\}$ με $x \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(S_2, x) = \operatorname{dist}(S_2, \{x\})$.
6. i. Θυμίζουμε ότι όταν $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$, το S_0 είναι (σχετικά) ανοικτό στο S ανν $\exists U \subseteq \mathbb{R}^n$, τ.ω.: $S_0 = U \cap S$.
   ii. $\forall S \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $\mathcal{O}(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$ για το
$$\mathcal{O}(S) = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, \exists U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ τ.ω.: } S_0 = U \cap S \right\}.$$
   Έτσι, σύμφωνα με τον συμβολισμό μας, $U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\ \forall U \subseteq \mathbb{R}^n$.
   iii. Αν $S \neq \varnothing$, $\forall x \in S$ θα γράφουμε $\mathcal{O}_x(S) \subsetneq \mathcal{O}(S)$ για το
$$\mathcal{O}_x(S) = \mathcal{O}(S) \cap \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, x \in S_0 \right\}.$$
7. i. Θυμίζουμε ότι όταν $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^n$, το S_0 είναι (σχετικά) κλειστό στο S ανν το $S \setminus S_0$ είναι ανοικτό στο S, δλδ ανν $\exists$ κλειστό $S_* \subseteq \mathbb{R}^n$, τ.ω.: $S_0 = S_* \cap S$.
   ii. $\forall S \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $\mathcal{C}(S) \subseteq \mathcal{P}(S)$ για το
$$\mathcal{C}(S) = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, S \setminus S_0 \in \mathcal{O}(S) \right\} = \left\{ S_0 \subseteq S \,\middle|\, \exists \text{ κλειστό } S_* \subseteq \mathbb{R}^n \text{ τ.ω.: } S_0 = S_* \cap S \right\}.$$
8. Για $S, S_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, γράφουμε $S_0 \subset\subset S$ και λέμε ότι το S_0 περιέχεται συμπαγώς στο S ανν
   i. $\overline{S_0} \subseteq S^\circ$ &
   ii. το $\overline{S_0}$ είναι συμπαγές.

Συναρτήσεις

1. Ενδιαφερόμαστε για συναρτήσεις μεταξύ των προαναφερθέντων πραγματικών γραμμικών χώρων.

2. Θα παραβλέπουμε το όρισμα μιας συνάρτησης σε μια σχέση, όταν τα συμφραζόμενα μας το επιτρέπουν.

3. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. Αν $f(S) = \varnothing$, τότε $S = \varnothing$. Επίσης, αν $S = \varnothing$, τότε η f είναι μοναδική και καλείται κενή συνάρτηση (empty function).

4. Για $S \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $\chi_S\colon S \to \{0,1\}$ για την χαρακτηριστική συνάρτηση του S, δλδ
$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in S, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

5. Καλούμε ακολουθίες τις συναρτήσεις της μορφής $f\colon N \to \mathbb{R}^n$ με $N \subseteq \mathbb{Z}^m$, και μόνο αυτές.

6. i. Καλούμε μεταθέσεις τις ακολουθίες που έχουν ίδιο το πεδίο ορισμού τους με το σύνολο τιμών τους, και μόνο αυτές.
   ii. Συμβολίζουμε μια αυθαίρετη μετάθεση με σ. Δλδ, αν $N \subseteq \mathbb{Z}^n$, τότε για την $\sigma\colon N \to \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\sigma(N) = N$.
   iii. Γράφουμε $\operatorname{sgn}(\sigma)$ για το πρόσημο της σ (βλ., π.χ., το [2]).

7. Έστω $c \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^l &\to \mathbb{R}^{n\times m} \\ x &\mapsto f(x) = (f_{ij}(x))_{i,j=1}^{n,m}. \end{aligned}$$
Τότε $f = c$ ανν $f_{ij}(x) = c_{ij}$ $\forall$ x, i & j όπως πριν, και σε αυτή την περίπτωση γράφουμε απλά c για μια τέτοια σταθερή f.

8. i. Για $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$, γράφουμε $f|_{S_0}$ τον περιορισμό της f στο S_1, δλδ
$$\begin{aligned} f|_{S_0}\colon S_0 &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f|_{S_0}(x) = f(x). \end{aligned}$$
   ii. Πιο φορμαλιστικά, $f|_{S_0} = f \circ \iota$, όπου $\iota\colon S_0 \to \mathbb{R}^n$ με $\iota(S_0) = S$, είναι η συνάρτηση εγκλεισμού $S_0 \subseteq S$.
   iii. Τετριμμένη είναι η ισότητα $(f|_{S_2})|_{S_1} = f|_{S_1}$, για $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S$.
   iv. Στα πλαίσια μιας συνήθους απλούστευσης του συμβολισμού, θα αποφεύγουμε την χρήση του συμβόλου του περιορισμού, όταν δεν υπάρχει πιθανότητα παρερμηνείας.

9. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f\colon S \to \mathbb{R}$. Γράφουμε $f_\pm\colon S \to \mathbb{R}$ για τις συναρτήσεις
$$f_+ = \max\{f, 0\} \text{ και } f_- = \max\{-f, 0\}.$$
Προφανώς $f_\pm(S) \subseteq [0,\infty)$, καθώς επίσης $f = f_+ - f_-$ και $|f| = f_+ + f_-$.

10. Για $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S \to \mathbb{R}$, γράφουμε $\operatorname{supp}(f)$ για τον φορέα της f, δλδ
$$\operatorname{supp}(f) = \overline{f^{-1}\big(\{0\}^c\big)} \cap S = \overline{\big\{x \in S \,\big|\, f(x) \neq 0\big\}} \cap S,$$
όπου προφανώς το 0 εδώ συμβολίζει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{F}$. Περιφραστικά, αν $x \notin \operatorname{supp}(f)$, τότε $\exists S_0 \in \mathcal{O}_x(S)$ τ.ω.: $f = 0$, δλδ το $S \smallsetminus \operatorname{supp}(f)$ είναι το μέγιστο σχετικά ανοικτό στο S υποσύνολό του στο οποίο μηδενίζεται η f.

11. i. Θα γράφουμε
$$\begin{aligned} L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) &= \big\{f\colon\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \,\big|\, \text{η } f \text{ είναι γραμμική}\big\} = \\ &= \big\{f\colon\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \,\big|\, f(ax+by) = af(x) + bf(y),\ \forall\ a,b \in \mathbb{R}\ \&\ x,y \in \mathbb{R}^m\big\}. \end{aligned}$$

ii. Για μια $f \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ θα συμβολίζουμε με $[f] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ τον επαγόμενο πίνακα της f, δλδ τον πίνακα παράστασης της f ως προς τις συνήθεις διατεταγμένες βάσεις των $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$. Έτσι, $f(x) = [f]\cdot x \ \forall x \in \mathbb{R}^m$.

iii. Θα συμβολίζουμε με $\mathrm{id}_n \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ την ταυτοτική συνάρτηση, δλδ $\mathrm{id}_n(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, και συνεπώς $[\mathrm{id}_n] = 1_n$.

iv. Για $n = 1$, η συνάρτηση της ορίζουσας, det, των τετραγωνικών πινάκων, εκφυλίζεται στην ταυτοτική συνάρτηση, δλδ $\det = \mathrm{id}_1$.

12. i. Θα γράφουμε

$$\begin{aligned}Aff(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) &= \left\{f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι ομοπαραλληλική}\right\} = \\ &= \left\{f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists\ (f_0 \in L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n))\ \&\ (x_0 \in \mathbb{R}^n)\ \text{τ.ω.: } f = f_0 + x_0\right\}.\end{aligned}$$

ii. Για μια $f \in Aff(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ θα συμβολίζουμε με $[f] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ τον επαγόμενο πίνακα της f, δλδ τον επαγόμενο πίνακα της αντίστοιχης γραμμικής απεικόνισης. Έτσι, $f(x) = [f]\cdot x + x_0$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ & για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

13. i. Θα γράφουμε

$$\begin{aligned}Ism(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) &= \left\{f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι ισομετρική}\right\} = \\ &= \left\{f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, |f(x) - f(y)| = |x-y|\ \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^m\right\}.\end{aligned}$$

ii. Είναι γνωστό (βλ., π.χ., [8]) ότι

$$\left\{f \in Aff(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \,\middle|\, [f] \in Orth_{n\times m}\right\} = Ism(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n).$$

Θα γράφουμε

$$\begin{aligned}RM_n &= \left\{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι άκαμπτη κίνηση}\right\} = \\ &= \left\{f \in Aff(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \,\middle|\, [f] \in Orth_{n\times n}\right\} = Ism(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

14. Για $r \in \mathbb{R}$, θα γράφουμε

$$Hth_{n,r} = \left\{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι ομοθετική με λόγο } r\right\} = \left\{f \in Aff(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \,\middle|\, [f] = r1_n\right\}.$$

15. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$.

i. Θα γράφουμε

$$B(S;\mathbb{R}^n) = \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι φραγμένη}\right\} = \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, f(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

ii. Θα γράφουμε

$$\begin{aligned}B_{loc}(S;\mathbb{R}^n) &= \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι τοπικά φραγμένη}\right\} = \\ &= \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, f|_{S_0} \in B(S_0;\mathbb{R}^n)\ \forall \text{ συμπαγές } S_0 \subseteq S\right\}.\end{aligned}$$

16. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$.

i. Θα γράφουμε

$$\begin{aligned}C(S;\mathbb{R}^n) &= \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι συνεχής}\right\} = \\ &= \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \forall x \in S\ \&\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists S_0 \in \mathcal{O}_x(S)\ \text{τ.ω.: } |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall y \in S_0\right\} = \\ &= \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, f^{-1}(S_0) \in \mathcal{O}(S),\ \ \forall S_0 \in \mathcal{O}(f(S))\right\} = \\ &= \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, f^{-1}(S_0) \in \mathcal{C}(S),\ \ \forall S_0 \in \mathcal{C}(f(S))\right\}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ένα σημείο συνέχειας δεν είναι απαραίτητα σ.σ (δλδ σημείο συσσώρευσης), όπως θα απαιτούνταν σε ένα lim-ορισμό, και μάλιστα κάθε απ.σ. (δλδ απομονωμένο σημείο) είναι σημείο συνέχειας.

ii. Θα γράφουμε

$$C_c(S;\mathbb{R}^{n\times m}) = \left\{ f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι συνεχής με συμπαγώς περιεχόμενο φορέα} \right\} = \\ = \left\{ f \in C(S;\mathbb{R}^{n\times m}) \,\middle|\, \mathrm{supp} f \subset\subset S \right\}.$$

17. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$.

i. Θα γράφουμε

$$Lip(S;\mathbb{R}^n) = \left\{ f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι Lipschitz} \right\} = \\ = \left\{ f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists M > 0 \text{ τ.ω.: } |f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y| \ \ \forall\, x, y \in S \right\}.$$

ii. Θα γράφουμε

$$Lip_{loc}(S;\mathbb{R}^n) = \left\{ f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι τοπικά Lipschitz} \right\} = \\ = \left\{ f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, f|_{S_0} \in Lip(S_0;\mathbb{R}^n) \ \forall \text{ συμπαγές } S_0 \subseteq S \right\}.$$

Κεφάλαιο 1

Περιορισμοί/επεκτάσεις μεταξύ των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$

Σε όλο το κείμενο θα γίνεται συστηματική χρήση των στοιχείων που θα αναπτύξουμε εδώ.

Ορισμός 1.1 (*περιορισμός μεταξύ ευκλειδείων χώρων*). *1. Έστω $m < n$.*

i. Συμβολίζουμε τον περιορισμό από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$, και συγκεκριμένα

$$\forall\, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, n\} \;\; \text{με}\; 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$$

τον περιορισμό ως προς το $x_{i_1} \dots x_{i_m}$ «επίπεδο» ως

$$\begin{aligned} \pi^n_{i_1 \dots i_m} \colon \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ & x = (x_i)^n_{i=1} \mapsto \pi^n_{i_1 \dots i_m}(x) = \left(x_{i_j}\right)^m_{j=1}, \end{aligned}$$

όπως επίσης τον περιορισμό ως προς το συμπληρωματικό «επίπεδο» ως

$$\begin{aligned} \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m} \colon \quad & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m} \\ & x = (x_i)^n_{i=1} \mapsto \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(x) = (x_{j_i})^{n-m}_{i=1} \end{aligned}$$

για $j_1, \dots, j_{n-m} \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_m\}$ με $1 \leq j_1 < \dots < j_{n-m} \leq n$.

ii. $\pi^n_{i_1 \dots i_n} = \mathrm{id}_n$.

2. Συμβολίζουμε

$$\varPi^n_m = \left\{\pi^n_{i_1 \dots i_m}\right\}, \;\; \forall\, m \leq n.$$

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια σχετικά με τον Ορισμό 1.1.*

1. *Ένας περιορισμός $\pi^n_{i_1 \dots i_m}$ δεν είναι η προβολή στον $\operatorname{span}\left(\left\{e_{i_j}\right\}^m_{j=1}\right)$, όπως και ο $\hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}$, αν $m < n$, δεν είναι η προβολή στον $\left(\operatorname{span}\left(\left\{e_{i_j}\right\}^m_{j=1}\right)\right)^{\perp}$.*

2. *Είναι προφανές ότι*

$$\hat{\hat{\pi}}^n_{i_1 \dots i_m} = \pi^n_{i_1 \dots i_m}, \;\; \forall\, m < n.$$

3. *Προς τί η διάταξη; Για να είναι μοναδικός κάθε περιορισμός ως προς το αντίστοιχο «επίπεδο». Είναι ο ίδιος λόγος για τον οποίο παίρνουμε διατεταγμένη την βάση του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, λόγω αυτής της διάταξης,*

$$\operatorname{card} \varPi^n_m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Παράδειγμα. *1. $\forall x \in \mathbb{R}^5$,*

$$\pi^5_{24}(x) = (x_2, x_4), \quad \hat{\pi}^5_{24}(x) = (x_1, x_3, x_5) \quad \& \quad \pi^5_{12345}(x) = x.$$

2. $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$ & περιορισμό $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$,

$$\pi^n_{i_1\ldots i_m}(B(x_0,\rho)) = B\big(\pi^n_{i_1\ldots i_m}(x_0),\rho\big) \quad \& \quad \pi^n_{i_1\ldots i_m}(Q(x_0,\rho)) = Q\big(\pi^n_{i_1\ldots i_m}(x_0),\rho\big).$$

Ορισμός 1.2 (*γράφημα συνάρτησης*). 1. *Έστω*

i. $m < n$,

ii. $S \subseteq \mathbb{R}^m$,

iii. $f\colon S \to \mathbb{R}^{n-m}$ &

iv. *και περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$.

Γράφουμε $\mathrm{gr}\big(f;\pi^n_{i_1\ldots i_m}\big) \subseteq \mathbb{R}^n$ *για το γράφημα (graph) της* f *ως προς το* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}(\mathbb{R}^n)$, *δλδ*

$$\mathrm{gr}\big(f;\pi^n_{i_1\ldots i_m}\big) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \pi^n_{i_1\ldots i_m}(x) \in S \text{ και } \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(x) = \big(f \circ \pi^n_{i_1\ldots i_m}\big)(x)\big\}.$$

2. *Έστω* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *και* $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. *Θέτουμε*

$$\mathrm{gr}\big(f;\pi^n_{i_1\ldots i_n}\big) = f(S).$$

Ορισμός 1.3 (*επιγράφημα συνάρτησης*).
Έστω

i. $S \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$,

ii. $f\colon S \to \mathbb{R}$ &

iii. *και περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}$.

Γράφουμε $\mathrm{epi}\big(f;\pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}\big) \subseteq \mathbb{R}^n$ *για το επιγράφημα (epigraph) της* f *ως προς το* $\pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}(\mathbb{R}^n)$, *δλδ*

$$\mathrm{epi}\big(f;\pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}\big) = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}(x) \in S \text{ και } \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_{n-1}}(x) \geq \big(f \circ \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}\big)(x)\big\}.$$

Σημείωση. *Αντίστοιχα με τον Ορισμό 1.3, ορίζεται και το υπογράφημα μιας συνάρτησης αλλά δεν θα μας απασχολήσει αυτό, μιας και δεν είναι τίποτα άλλο από την εικόνα του αντίστοιχου επιγραφήματος μέσω μιας άκαμπτης κίνησης (και συγκεκριμένα ενός απλού αντικατοπτρισμού (reflection).*

Ορισμός 1.4 (*επέκταση μεταξύ ευκλειδείων χώρων*). 1. *Έστω* $m < n$.

i. *Συμβολίζουμε την επέκταση από τον* $\mathbb{R}^n$ *στον* $\mathbb{R}^m$, *και συγκεκριμένα* $\forall$ *περιορισμό* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$ *την αντίστοιχη επέκταση «εκτός» του* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}(\mathbb{R}^n)$ *ως*

$$\varpi^n_{i_1\ldots i_m}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

με

$$\pi^n_{i_1\ldots i_m} \circ \varpi^n_{i_1\ldots i_m} = \mathrm{id}_m \quad \& \quad \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m} \circ \varpi^n_{i_1\ldots i_m} = 0_{n-m},$$

όπως επίσης την επέκταση «εκτός» του $\hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(\mathbb{R}^n)$ *ως*

$$\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}\colon \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n$$

με

$$\pi^n_{i_1\ldots i_m} \circ \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m} = 0_m \quad \& \quad \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m} \circ \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m} = \mathrm{id}_{n-m}.$$

ii. $\varpi^n_{i_1\ldots i_n} = \mathrm{id}_n$.

2. *Συμβολίζουμε*

$$\mho^n_m = \big\{\varpi^n_{i_1\ldots i_m}\big\},\ \forall\, m \leq n.$$

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια σχετικά με τον Ορισμό 1.4.*

1. *Είναι προφανές ότι*

$$\hat{\hat{\varpi}}^n_{i_1\ldots i_m} = \varpi^n_{i_1\ldots i_m},$$

όπως επίσης ότι

$$\big(\varpi^n_{i_1\ldots i_m} \circ \pi^n_{i_1\ldots i_m}\big) + \big(\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m} \circ \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}\big) = \mathrm{id}_n.$$

2. *Εξ ορισμού, η συζηγής συνάρτηση μιας επέκτασης είναι ο αντίστοιχος περιορισμός.*

3. *Προφανώς* $\operatorname{card} \mho^n_m = \operatorname{card} \Pi^n_m$.

Παράδειγμα. $\forall x \in \mathbb{R}^5$,

$$\varpi^5_{24}(x) = (0, x_1, 0, x_2, 0)\,, \quad \hat{\varpi}^5_{24}(x) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3) \quad \& \quad \varpi^5_{12345}(x) = x.$$

Ορισμός 1.5. *Έστω*

1. $m < n$,

2. $S \subseteq \mathbb{R}^n$,

3. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1 \ldots i_m}$ &

4. $f\colon S \to \mathbb{R}$.

$\forall y \in \hat{\pi}^n_{i_1 \ldots i_m}(S)$, *γράφουμε*

$$\begin{aligned} f(\star; y)\colon \Big\{ x \in \pi^n_{i_1 \ldots i_m}(S) \,\Big|\, \big(\varpi^n_{i_1 \ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1 \ldots i_m}(y)\big) \in S \Big\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x; y) = f\big(\varpi^n_{i_1 \ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1 \ldots i_m}(y)\big). \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Κάποια προαπαιτούμενα

Εδώ παρουσιάζονται ορισμένα, απαραίτητα για την συνέχεια, στοιχεία.

2.1 Τοπολογικά αποτελέσματα

Αρχικά παραθέτουμε, ένα τετριμμένο, αλλά θεμελιώδες, αποτέλεσμα μαζί με ένα πόρισμά του, τα οποία και θα χρησιμοποιούμε χωρίς να τα αναφέρουμε.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$.*

i. *Έστω ότι $\partial S = \varnothing$.*

   α΄. *Τότε το S είναι και κλειστό και ανοικτό.*

   β΄. *Τότε $S \in \{\varnothing, \mathbb{R}^n\}$.*

ii. *Έστω ότι $\partial S \neq \varnothing$ και $x_0 \in \partial S$.*

   α΄. *Αν $x_0 \notin S$, τότε το x_0 είναι σ.σ. (υπενθυμίζουμε, σημείο συσσώρευσης) του S.*

   β΄. *Αν $x_0 \in S$, τότε το x_0 είναι είτε σ.σ. του S, είτε απ.σ. (υπενθυμίζουμε, απομονωμένο σημείο) (του S).*

Πόρισμα 2.1.1. *Έστω*

1. $S \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{το } x_0 \text{ είναι σ.σ. του } S\right\}$,
3. $S_2 = \left\{x \in S \,\middle|\, \text{το } x_0 \text{ είναι σ.σ. του } S\right\} \subseteq S_1$ *&*
4. $S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{το } x_0 \text{ είναι απ.σ του } S\right\} = \left\{x \in S \,\middle|\, \text{το } x_0 \text{ είναι απ.σ.}\right\} \subseteq \partial S$.

Τότε

i. $S_1 \cap S_3 = \varnothing$,

ii. $S_1 \setminus S = \partial S \setminus S_3$ *και άρα* $(S_1 \setminus S) \cup S_3 = \partial S$,

iii. $S_1 \cup S_3 = \overline{S}$ *&*

iv. $S_2 \cup S_3 = S$.

Παρατήρηση. *Το Πόρισμα 2.1.1 υπονοεί, μεταξύ άλλων, ότι μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ως την ένωση του συνόλου των απ.σ. του και του συνόλου των μη απ.σ. του.*

Όσο τετριμμένα και αν είναι, τα επόμενα είναι κομβικά, και συνήθως θα χρησιμοποιούμε χωρίς μνεία.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $\{S, S_1, S_2\} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.:*

i. $S_1 \in \mathcal{O}(S)$ *&*

ii. $S_2 \in \mathcal{C}(S)$.

Τότε

1. $S_1 \setminus S_2 \in \mathcal{O}(S)$ *&*

2. $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{C}(S_1) \cap \mathcal{O}(S_2)$.

Πρόταση 2.1.3. *1. Έστω*

α΄. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$,

β΄. $S_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ $\forall i \in N \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ *&*

γ΄. $n = \sum\limits_{i \in N} n_i$.

i. Το $\prod\limits_{i \in N} S_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *είναι ανοικτό ανν το* S_i *είναι ανοικτό* $\forall i \in N$.

ii. Το $\prod\limits_{i \in N} S_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *είναι κλειστό ανν το* S_i *είναι κλειστό* $\forall i \in N$.

2. Έστω

α΄. $m \leq n$,

β΄. $S, S_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *&*

γ΄. περιορισμός $\pi^n_{i_1 \ldots i_m}$.

i. Αν $S_0 \in \mathcal{O}(S)$, *τότε* $\pi^n_{i_1 \ldots i_m}(S_0) \in \mathcal{O}\big(\pi^n_{i_1 \ldots i_m}(S)\big)$.

ii. Αν $S_0 \in \mathcal{C}(S)$, *τότε* $\pi^n_{i_1 \ldots i_m}(S_0) \in \mathcal{C}\big(\pi^n_{i_1 \ldots i_m}(S)\big)$.

Βασική είναι επίσης η παρακάτω ιδιότητα των συμπαγών συνόλων.

Πρόταση 2.1.4 (*λήμμα του Lebesgue*)**.** *Έστω συμπαγές* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *και* $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $S \subseteq \bigcup\limits_{i \in \mathscr{I}} U_i$. *Τότε* $\exists \rho > 0$ *τ.ω.:* $\forall S_0 \subseteq S$ *με* $\operatorname{diam}(S_0) < \rho$, $\exists i_0 \in \mathscr{I}$ *τ.ω.:* $S_0 \subsetneq U_{i_0}$.

Στην συνέχεια παραθέτουμε ορισμένες κατασκευές σε αυθαίρετα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Το πρώτο αποτέλεσμα έπεται εύκολα θεωρώντας κατάλληλες συλλογές από στοιχεία του $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ που αποτελούν κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$, π.χ. την

$$\{Q(x_0, a_i)\}_{i \in \mathbb{N}}, \text{ για } \begin{cases} \text{κάποιο } x_0 \in \mathbb{R}^n \ \& \\ \text{κάποια γνησίως αύξουσα ακολουθία } \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{R} \text{ τ.ω.: } a_i \to \infty \end{cases}$$

& την

$$\big\{[a_{2i-1}, a_{2i+1})^n\big\}_{i \in \mathbb{Z}}, \text{ για κάποια γνησίως αύξουσα ακολουθία } \{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subsetneq \mathbb{R} \text{ τ.ω.: } a_i \xrightarrow{i \to \pm\infty} \pm\infty.$$

Πρόταση 2.1.5. $\forall S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\exists$

1. $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *τ.ω.:* $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ *ανν* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *&*

2. $\{S_i\}_{i \in N} \subseteq \mathcal{B}(S)$ *τ.ω.:* $\forall i \in N$, $\exists I_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $\partial S_i \subseteq \partial S \cup \partial I_i$,

τ.ω.: $S = \bigcup\limits_{i \in N} S_i$.

Μάλιστα, μπορούμε, επιπλέον, να θεωρήσουμε ότι η $\{S_i\}_{i \in N}$ *είναι*

i. είτε γνησίως αύξουσα ακολουθία σχετικά ανοικτών υποσυνόλων του S, *δλδ*

α΄. $S_i \in \mathcal{B}(S) \cap \mathcal{O}(S)$ *&*

β΄. $S_i \subsetneq S_j$, $\forall\, i, j \in N$ *με* $i < j$,

ή

ii. είτε συλλογή ομοιόμορφα φραγμένων και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του S, *δλδ*

α΄. $S_i \cap S_j = \varnothing$, $\forall\, i, j \in N$ *με* $i \neq j$ *&*

β΄. $\exists \delta > 0$ *τ.ω.:* $\exists \{x_i\}_{i \in N} \subsetneq \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $S_i \subseteq Q(x_i, \delta)$.

Το επόμενο είναι άμεσο αν $U = \mathbb{R}^n$, ενώ αν $\partial U \neq \varnothing$, τότε χρησιμοποιούμε την $\operatorname{dist}(\partial U, \star)\colon U \to (0, \infty)$ (βλ., π.χ., το πρώτο μισό της απόδειξης για το [17, Lemma 15.1, σελ. 122]).

Πρόταση 2.1.6. *$\forall U \subseteq \mathbb{R}^n$ $\exists$ αύξουσα $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{P}(U)$ από συμπαγή υποσύνολα του U τ.ω.: $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$.*

Έτσι, βάσει της Πρότασης 2.1.6, παίρνουμε το παρακάτω, η απόδειξη του οποίου είναι μία απλή παραλλαγή της απόδειξης για το [17, Lemma 16.2, σελ. 137].

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\{U_i\}_{i \in \mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(U)$ τ.ω.: $U = \bigcup_{i \in \mathscr{I}} U_i$. Τότε $\exists \{I_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(U)$ τ.ω.:*

1. *το I_i είναι μη τετριμμένο $\forall i \in \mathbb{N}$,*
2. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (I_i)^\circ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{I_i} = U$,
3. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists i_0 \in \mathscr{I}$ *τ.ω.:* $I_i \subset\subset U_{i_0}$ *&*
4. $\forall U_0 \subset\subset U$, $\exists N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *τ.ω.:* $U_0 \subseteq \bigcup_{i \in N} I_i$.

Παραφράζοντας ελαφρώς την Πρόταση 2.1.7 παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 2.1.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $\exists$ αύξουσα $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{B}(U)$, τ.ω.:*

1. $\overline{S_i} \subsetneq U$ $\forall i \in \mathbb{N}$,
2. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists$
   i. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *&*
   ii. $\{I_j\}_{j \in N} \subsetneq \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(S)$

   τ.ω.: $S_i = \bigcup_{j \in N} I_j$ *&*
3. $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$.

Τώρα, τα επόμενα τρία αποτελέσματα είναι θεμελιώδη και συνήθως θα χρησιμοποιούνται χωρίς ιδιαίτερη μνεία. Οι αποδείξεις τους μπορούν να βρεθούν στο [7].

Πρόταση 2.1.8. *Αν ένα $S \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό, τότε κάθε $S_0 \subseteq \mathbb{R}^n$, με $S \subseteq S_0 \subseteq \overline{S}$, είναι συνεκτικό.*

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω συμπαγές $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f \in C(S; \mathbb{R}^n)$.*

1. *Τότε το $f(S) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές.*
2. *Αν, επιπλέον, $n = 1$, τότε $\exists\, x_1, x_2 \in S$ τ.ω.: $f(S) = [f(x_1), f(x_2)]$.*

Θεώρημα 2.1.2 (ΘΕΤ)**.** *Έστω συνεκτικό $S \subsetneq \mathbb{R}^m$ και $f \in C(S; \mathbb{R}^n)$.*

1. *Τότε το $f(S) \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι συνεκτικό.*
2. *Αν, επιπλέον, $n = 1$, τότε $\forall\, x_1, x_2 \in S$ & $\forall a \in (f(x_1), f(x_2))$, $\exists x_0 \in S$ τ.ω.: $f(x_0) = a$.*
3. *Αν, επιπλέον, το S είναι συμπαγές και $n = 1$, τότε $f(S) = \left[\inf_{x \in S}\{f(x)\}, \sup_{x \in S}\{f(x)\}\right]$.*

Μια απλή και χρήσιμη γενίκευση ενός γνωστού αποτελέσματος (βλ., π.χ., το [17, Theorem 18.2, σελ. 154]) είναι το εξής.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in C(U; \mathbb{R}^n)$ τ.ω.:*

α΄. *η f να είναι $1-1$,*

β΄. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*

γ΄. $f^{-1} \in C(f(U); \mathbb{R}^n)$.

Τότε

1. $f(S^{\circ}) = (f(S))^{\circ}$ $\forall S \subseteq U$ *&*
2. $f(\partial S) = \partial(f(S))$ $\forall S \subseteq U$ *τ.ω.:*
   - *i.* $\partial S \subseteq U$ *&*
   - *ii.* $\partial(f(S)) \subseteq f(U)$.

Σημείωση. 1. *Τα σημεία β΄. και γ΄. της Πρότασης 2.1.9 είναι περιττά υπό το πρίσμα ενός προωθημένου αποτελέσματος που δεν θα μας απασχολήσει εδώ (βλ., επίσης, την Σημείωση μετά το Θεώρημα 4.1.6.1, παρακάτω).*

2. *Οι συνθήκες 2.i. και 2.ii. της Πρότασης 2.1.9 ικανοποιούνται, π.χ., για* $S \subset\subset U$, *ή γενικότερα για* $S \subseteq U$ *τ.ω.:* $\overline{S} \subseteq U$.

3. *Προφανώς, οι συνθήκες αυτές ισχύουν ως ισότητες μόνο όταν* $U = S = \varnothing$ *και* $U = S = \mathbb{R}^n$.

2.2 Αναλυτικά αποτελέσματα

Ένα, επίσης, γνωστό κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων σε συνεχή συνάρτηση (βλ., π.χ., [32, Θεώρημα 7.13, σελ. 228]) είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.2.1 (*Dini*)**.** *Έστω συμπαγές* $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ *και* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{f\} \subsetneq C(S;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

1. *η ακολουθία* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *είναι φθίνουσα &*
2. $f_i \to f$.

Τότε $f_i \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

Τέλος, ένα γνωστό αποτέλεσμα σχετικά με τις διπλές ακολουθίες και σειρές, το οποίο αποδεικνύεται με απλά συμβατικά επιχειρήματα (χωρίς δλδ τα θεωρήματα κυριαρχημένης ή μονότονης σύγκλισης της Θεωρίας Μέτρου). Για μια πλήρη παρουσίασή του παραπέμπουμε στο [11].

Πρόταση 2.2.1. 1. *Έστω* $\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}} \cup \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{R}$ *και* $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq [0,\infty)$ *τ.ω.:*

   - *α΄.* $a_{ij} \xrightarrow{i\to\infty} a_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$,
   - *β΄.* $|a_{ij}| \le b_j$ $\forall\, i,j \in \mathbb{N}$ *&*
   - *γ΄.* *η σειρά* $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$ *συγκλίνει (απολύτως).*

   Τότε

   - *i.* *η σειρά* $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ *συγκλίνει απολύτως &*
   - *ii.* *η ακολουθία* $\left\{\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ *συγκλίνει,*

   και μάλιστα

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij} \to \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j.$$

2. *Έστω* $1-1$ *και επί* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, *καθώς επίσης* $\{a_{ij}\}_{i,j\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{R}$ *τ.ω.:*

   - *i.* *είτε κάποια από τις διαδοχικές σειρές*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} \;\&\; \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij},$$

   - *ii.* *είτε η διπλή σειρά*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij},$$

iii. είτε η σειρά

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{f(k)},$$

να συγκλίνει απολύτως. Τότε όλες οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν απολύτως, και μάλιστα

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij} = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{f(k)} = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{ij}.$$

Σημείωση. *Το σημείο 1 της Πρότασης 2.2.1 είναι γνωστό ως θεώρημα του Tannery.*

2.3 Αλγεβρικά αποτελέσματα

Παραθέτουμε ορισμένα αποτελέσματα από την Γραμμική Άλγεβρα.

Καταρχήν, ότι μπορούμε να φράξουμε την ορίζουσα ενός πίνακα από την νόρμα του είναι προφανές, και η ανισότητα του Hadamard (βλ., π.χ., [9, Theorem 14.1.1, σελ. 233]) παρέχει το βέλτιστο φράγμα.

Πρόταση 2.3.1 (*Hadamard*)**.** *Έστω $x \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Τότε*

$$|\det x| \leq \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Μάλιστα, η ισότητα ισχύει ανν

1. *είτε και τα δύο μέρη είναι* 0*,*
2. *είτε*

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik}x_{il} = 0,\ \ \forall k,l \in \{1,\ldots,n\}\ \text{ με } k \neq l,$$

δλδ οι γραμμές (ή, ισοδύναμα, οι στήλες) του x είναι ορθογώνιες ανά δύο.

Ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι παρακάτω εύκολα επαληθεύσιμες ισότητες (βλ., [10, Proposition 3.9.3 και Proposition 3.9.4, σελ. 302 και 303, αντίστοιχα]).

Πρόταση 2.3.2. *Έστω*

i. $x_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

ii. $x_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}$,

iii. $x_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *&*

iv. $x_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

1. *Αν ο x_{11} είναι μη ιδιάζων, τότε*

$$\det\left(\begin{array}{c|c} x_{11} & x_{12} \\ \hline x_{21} & x_{22}\end{array}\right) = (\det x_{11})\det\left(x_{22} - x_{21}\cdot {x_{11}}^{-1}\cdot x_{12}\right).$$

2. *Αν ο x_{22} είναι μη ιδιάζων, τότε*

$$\det\left(\begin{array}{c|c} x_{11} & x_{12} \\ \hline x_{21} & x_{22}\end{array}\right) = (\det x_{22})\det\left(x_{11} - x_{12}\cdot {x_{22}}^{-1}\cdot x_{21}\right).$$

3. *Αν οι x_{11} και x_{22} είναι μη ιδιάζοντες, τότε*

$$(\det x_{11})\det\left(x_{22} - x_{21}\cdot {x_{11}}^{-1}\cdot x_{12}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} x_{11} & x_{12} \\ \hline x_{21} & x_{22}\end{array}\right) = (\det x_{22})\det\left(x_{11} - x_{12}\cdot {x_{22}}^{-1}\cdot x_{21}\right).$$

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.3.2 είναι το εξής.

Πόρισμα 2.3.1 (*ταυτότητα των Weinstein–Aronszajn/του Sylvester*)**.** *Έστω*

1. $x_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ &
2. $x_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Τότε

$$\det(1_n + x_{12} \cdot x_{21}) = \det(1_m + x_{21} \cdot x_{12}).$$

Το ακόλουθο είναι ο τύπος των Cauchy-Binet, η απόδειξη του οποίου μπορεί να γίνει χωρίς (βλ., π.χ., το [27, §2.5, σελ. 39], ή το [13, Theorem 9.25, σελ. 251], ή το [4, §3.2, σελ. 252], για μια απόδειξη μέσω του αναπτύγματος κατά Laplace σε συνδυασμό με το Πόρισμα 2.3.1) ή με (βλ., π.χ., [7, Πρόταση 1.4.2, σελ. 21]) χρήση εννοιών από την Πλειογραμμική Άλγεβρα.

Θεώρημα 2.3.1 (*Cauchy-Binet*). *Έστω $m \le n$ και $x \in \mathbb{R}^{n\times m}$ και $y \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Τότε*

$$\det y \cdot x = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \text{με } 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} \det\left(x_{i_k l}\right)_{k,l=1}^{m} \det\left(y_{i_k l}\right)_{k,l=1}^{m}.$$

Ειδικότερα,

$$\det x^{\mathrm{T}} \cdot x = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \text{με } 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} \left(\det\left(x_{i_k l}\right)_{k,l=1}^{m}\right)^2 \ge 0.$$

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι γνωστό ως πολική ανάλυση (polar decomposition) (ή, εναλλακτικά, παραγοντοποίηση) πίνακα, και για την απλή απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο, π.χ., [13, Theorem 9.24, σελ. 250].

Θεώρημα 2.3.2 (*πολική ανάλυση*). *Έστω $m \le n$ και $x \in \mathbb{R}^{n\times m}$ τ.ω.: το x είναι της μέγιστης τάξης, δλδ $\operatorname{rank} x = m$. Τότε ∃*

1. $x_1 \in Orth_{m\times m}$,
2. $x_2 \in Diag_m \cap Pos_m$ &
3. $x_3 \in Orth_{n\times m}$,

τ.ω.: $x = x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$.

Τέλος, παραθέτουμε την γενίκευση του εξωτερικού γινομένου (cross product) × του $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^n$. Για την άμεση απόδειξή της παραπέμπουμε στο [17, Lemma 38.3, σελ. 314].

Πρόταση 2.3.3 (εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$). *Έστω*

i. *μια συλλογή $\{x_i\}_{i=1}^{n-1} \subsetneq \mathbb{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων,*
ii. *$x = (x_i)_{i=1}^{n-1} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ &*
iii. *$x_0 = (x_{0i})_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω.:*

$$x_{0i} = (-1)^{i-1}\det\left(x(1,\dots,(i),\dots,n)\right),\ \forall i \in \{1,\dots,n\},$$

όπου, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, ο $x(1,\dots,(i),\dots,n) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον x παραλείποντας την i-οστή του γραμμή.

Τότε

1. $x_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$,
2. $x_0 \in \left(\operatorname{span}\left(\{x_i\}_{i=1}^{n-1}\right)\right)^{\perp}$,
3. $\det(x_0 \,|\, x) > 0$ &
4. $|x_0| = \left(\det x^{\mathrm{T}} \cdot x\right)^{1/2}$.

Κεφάλαιο 3

Διαφορικοί τελεστές

Μιλώντας κάπως αόριστα, ένας τελεστής είναι μια συνάρτηση μεταξύ δύο συνόλων συναρτήσεων, διαφορικός είναι ένας τελεστής που σχετίζεται με κάποια διαδικασία διαφόρισης, και μια διαδικασία διαφόρισης είναι μια σημειακή οριακή διαδικασία που αφορά κατάλληλα πηλίκα.

Πριν ορίσει κανείς έναν τελεστή, πρέπει πρώτα να ορίσει τα σύνολα συναρτήσεων όπου δρα. Συνήθως στην βιβλιογραφία, ένας διαφορικός τελεστής ορίζεται επί συνόλου συναρτήσεων ορισμένων σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Εδώ γενικεύουμε τα επιτρεπτά σύνολα ορισμού των συναρτήσεων στις οποίες δρα ένας τέτοιος τελεστής.

3.1 Διαφόριση κατά διεύθυνση

Εδώ εισάγουμε δύο έννοιες, που η δεύτερη προϋποθέτει την πρώτη.

3.1.1 Σύνολο διαφόρισης κατά διεύθυνση

Ορισμός 3.1.1.1 (*σύνολο διαφόρισης κατά διεύθυνση*)**.** *Έστω $x_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$.*

1. *Έστω, επιπλέον, $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το S είναι σύνολο διαφόρισης κατά διεύθυνση (που επάγει το) x_0 ανν $\forall x \in S$, $\exists \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathbb{R}^*$ τ.ω.:*

   i. $a_i \to 0$ *&*

   ii. $\{x\} + \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} a_i \{x_0\} \subseteq S$.

2. *Συμβολίζουμε*

$$\mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n) = \left\{ S \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{το } S \text{ είναι σύνολο διαφόρισης κατά διεύθυνση } x_0 \right\}.$$

Σημείωση. *Διατυπώνοντας περιφραστικά την έννοια του Ορισμού 3.1.1.1, θα μπορούσαμε να πούμε ότι κάθε $x \in S \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ είναι σ.σ. του S ως προς την διεύθυνση x_0.*

Όπως θα φανεί αμέσως τώρα, το $\mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ για $x_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$ περιέχει ένα ευρύ φάσμα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 3.1.1.1. *Έστω $x_0 \in (\mathbb{R}^n)^*$.*

1. $\mathbb{R}^n, \varnothing \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$.
2. *Έστω, επιπλέον, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $U \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Έστω, επιπλέον, $S \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$ και $S_0 \in \mathcal{O}(S)$. Τότε $S_0 \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^n)$.*

3.1.2 Διαφόριση κατά διεύθυνση

Τώρα, περνάμε στον λόγο εισαγωγής της τοπολογίας της διαφόρισης κατά διεύθυνση, που δεν είναι άλλος από το να έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.1.2.1 (*διαφόριση κατά διεύθυνση*)**.** *Έστω $x_0 \in (\mathbb{R}^m)^*$.*

1. *Έστω, επιπλέον,* $S \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^m)$ *και*

$$\begin{aligned} f\colon S &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) = (f_i(x))_{i=1}^n. \end{aligned}$$

   i. *Έστω, επιπλέον,* $x \in S$. *Θα λέμε ότι η* f *είναι διαφορίσιμη κατά διεύθυνση* x_0 *στο* x *ανν* $\exists$ *το (μοναδικό όπως προκύπτει από την μοναδικότητα των ορίων)*

$$\lim_{\mathbb{R}^*\ni t\to 0}\frac{f(x+tx_0)-f(x)}{t} = \left(\lim_{\mathbb{R}^*\ni t\to 0}\frac{f_i(x+tx_0)-f_i(x)}{t}\right)_{i=1}^n,$$

   και σε αυτή την περίπτωση ορίζεται η διαφόριση κατά διεύθυνση x_0 *της* f *στο* x *ως*

$$D_{x_0}f(x) = D^1_{x_0}f(x) = \lim_{\mathbb{R}^*\ni t\to 0}\frac{f(x+tx_0)-f(x)}{t}.$$

   ii. *Λέμε ότι η* f *είναι διαφορίσιμη κατά διεύθυνση* x_0 *στο* $S_0 \subseteq S$ *(δεν θα αναφέρεται το* $S_0 = S$*) ανν η* f *είναι διαφορίσιμη κατά διεύθυνση* x_0 *σε κάθε* $x \in S_0$, *και σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται η διαφόριση κατά διεύθυνση* x_0 *της* $f|_{S_0}$ *ως*

$$\begin{aligned} D_{x_0}f|_{S_0} = D^1_{x_0}f|_{S_0}: S_0 &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto D_{x_0}f(x). \end{aligned}$$

2. *Ο τελεστής της διαφόρισης κατά διεύθυνση* x_0, $D_{x_0} = D^1_{x_0}$, *ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} D_{x_0}\colon \left\{f\colon S\to\mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^m) \text{ \& ορίζεται η } D_{x_0}f|_{S_0}\right\} &\to \{f\colon S_0\to\mathbb{R}^n\} \\ f &\mapsto D_{x_0}f|_{S_0}. \end{aligned}$$

Περνάμε τώρα στις πολλαπλές διαφορίσεις.

Ορισμός 3.1.2.2 (*πολλαπλές διαφορίσεις κατά διεύθυνση*)**.** *Έστω* $x_0 \in (\mathbb{R}^m)^*$.

1. *Έστω, επιπλέον,* $S \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^m)$ *και* $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. *Λέμε ότι η* f *είναι* k *φορές διαφορίσιμη κατά διεύθυνση* x_0 *στο* $S_0 \subseteq S$ *(δεν θα αναφέρεται το* $S_0 = S$*) ανν ορίζεται η*

$$\Bigg(\underbrace{D_{x_0}\circ\cdots\circ D_{x_0}}_{k \text{ φορές}}\Bigg)f|_{S_0}\colon S_0 \to \mathbb{R}^n,$$

   και σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε

$$D^k_{x_0}f|_{S_0} = \Bigg(\underbrace{D_{x_0}\circ\cdots\circ D_{x_0}}_{k \text{ φορές}}\Bigg)f|_{S_0}.$$

2. *Ο τελεστής των* k*-πλών διαφορίσεων κατά διεύθυνση* x_0, $D^k_{x_0}$, *ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} D^k_{x_0}\colon \left\{f\colon S\to\mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^m) \text{ \& ορίζεται η } D^k_{x_0}f|_{S_0}\right\} &\to \{f\colon S_0\to\mathbb{R}^n\} \\ f &\mapsto D^k_{x_0}f|_{S_0}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση. *Τονίζουμε ότι ο Ορισμός 3.1.2.2 δεν είναι σημειακός.*

Τέλος, επεκτείνουμε τον Ορισμό 3.1.2.2, για ευκολία στην διατύπωση των αποτελεσμάτων.

Ορισμός 3.1.2.3. *Έστω* $x_0 \in (\mathbb{R}^m)^*$.

1. *Έστω, επιπλέον,* $S \in \mathcal{D}_{x_0}(\mathbb{R}^m)$ *και* $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. *Τότε ορίζουμε* $D^0_{x_0}f = f$.

2. *Ορίζουμε τον* $D^0_{x_0}$ *να είναι ένας ταυτοτικός τελεστής.*

3.2 Μερική διαφόριση

Η συλλογιστική της παρούσας ενότητας είναι η ίδια με αυτή της Ενότητας 3.1.

3.2.1 Σύνολο μερικής διαφόρισης

Ορισμός 3.2.1.1 (σύνολο μερικής διαφόρισης). *1. Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$.*

i. Έστω, επιπλέον, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Λέμε ότι το S είναι σύνολο μερικής διαφόρισης ως προς την i-οστή συντεταγμένη ανν $S \in \mathcal{D}_{e_i}(\mathbb{R}^n)$.

ii. Λέμε το S είναι σύνολο μερικής διαφόρισης ανν $S \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{e_i}(\mathbb{R}^n)$.

2. Συμβολίζουμε το σύνολο των συνόλων μερικής διαφόρισης ως $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}_{e_i}(\mathbb{R}^n)$.

Το αντίστοιχο της Πρότασης 3.1.1.1 είναι το εξής.

Πρόταση 3.2.1.1. *1. $\mathbb{R}^n, \varnothing \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.*

2. Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$. Τότε $I \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

3. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $U \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

4. Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ και $S_0 \in \mathcal{O}(S)$. Τότε $S_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

3.2.2 Μερική διαφόριση

Ορισμός 3.2.2.1 (μερική διαφόριση ως προς συντεταγμένη)**.** *Έστω $j \in \{1, \ldots, m\}$.*

1. Έστω, επιπλέον, $S \in \mathcal{D}_{e_j}(\mathbb{R}^m)$ και $f \colon S \to \mathbb{R}^n$.

i. Έστω, επιπλέον, $x \in S$. Λέμε ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη ως προς την j-οστή συντεταγμένη στο x ανν ορίζεται το $D_{e_j} f(x)$, και σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^1 f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \frac{\partial^1}{\partial x_j} f(x) = f_{x_j}(x) = D_{e_j} f(x).$$

ii. Λέμε ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη ως προς την j-οστή συντεταγμένη στο $S_0 \subseteq S$ (δεν θα αναφέρεται το $S_0 = S$) ανν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη ως προς την j-οστή συντεταγμένη σε κάθε $x \in S_0$, και σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται η μερική διαφόρισης προς την j-οστή συντεταγμένη της $f|_{S_0}$ ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial f|_{S_0}}{\partial x_j} = \frac{\partial^1 f|_{S_0}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} f|_{S_0} = \frac{\partial^1}{\partial x_j} f|_{S_0} = f|_{S_0 x_j} \colon S_0 &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x). \end{aligned}$$

2. Ο τελεστής της μερικής διαφόρισης προς την j-οστή συντεταγμένη, $\frac{\partial \star}{\partial x_j} = \frac{\partial^1 \star}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial^1}{\partial x_j} = \star_{x_j}$, ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial \star}{\partial x_j} \colon \left\{ f \colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}_{e_j}(\mathbb{R}^m) \text{ \& ορίζεται η } \frac{\partial f|_{S_0}}{\partial x_j} \right\} &\to \{ f \colon S_0 \to \mathbb{R}^n \} \\ f &\mapsto \frac{\partial f|_{S_0}}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Ο συμβολισμός προσαρμόζεται κατά τα συνήθη όταν $m = 1$.

Η αρτιότητα του παρακάτω ορισμού είναι ο λόγος εισαγωγής των συνόλων μερικής διαφόρισης.

Ορισμός 3.2.2.2 (μερική διαφόριση). *1. Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και*

$$\begin{aligned} f \colon S &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) = (f_i(x))_{i=1}^n. \end{aligned}$$

i. *Έστω, επιπλέον, $x \in S$. Λέμε ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη ανν ορίζεται το $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ $\forall j \in \{1,\dots,m\}$, και σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε*

$$Df(x) = D^1 f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right)_{j=1}^{m} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1}^{n,m}$$

και

$$Jf(x) = |\det(Df(x))|\,, \text{ αν } n = m.$$

ii. *Λέμε ότι η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$ (δεν θα αναφέρεται το $S = S_0$) ανν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε $x \in S_0$, και σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται η μερική διαφόριση της f ως*

$$\begin{aligned} Df|_{S_0} = D^1 f|_{S_0} : S_0 &\to \mathbb{R}^{n\times m} \\ x &\mapsto Df(x), \end{aligned}$$

όπως επίσης, αν $n = m$, ορίζεται η

$$\begin{aligned} Jf|_{S_0} : S_0 &\to [0,\infty) \\ x &\mapsto Jf(x), \end{aligned}$$

2. *Ο τελεστής της μερικής διαφόρισης, γνωστός και ως τελεστής του Jacobi, $D = D^1$, ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} D\colon \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \text{ \& η } f|_{S_0} \text{ είναι μερικώς διαφορίσιμη}\right\} &\to \{f\colon S_0 \to \mathbb{R}^{n\times m}\} \\ f &\mapsto Df|_{S_0}, \end{aligned}$$

όπως επίσης, αν $n = m$, ορίζεται ο τελεστής Jacobian, J, ως

$$\begin{aligned} J\colon \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \text{ \& η } f|_{S_0} \text{ είναι μερικώς διαφορίσιμη}\right\} &\to \{f\colon S_0 \to [0,\infty)\} \\ f &\mapsto Jf|_{S_0}. \end{aligned}$$

Γενικεύοντας τον Ορισμό 3.2.2.2, δίνουμε τον ακόλουθο.

Ορισμός 3.2.2.3. 1. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και*

$$\begin{aligned} f\colon S &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) = (f_i(x))_{i=1}^n. \end{aligned}$$

i. *Έστω, επιπλέον, $x \in S$. Στην περίπτωση που ορίζεται το*

$$\frac{\partial f_{i_s}}{\partial x_{j_t}}(x),\ \forall \begin{cases} i_s \in \{1,\dots,n\} \text{ με } s \in \{1,\dots,k\} \text{ για κάποιο } k \\ j_t \in \{1,\dots,m\} \text{ με } t \in \{1,\dots,l\} \text{ για κάποιο } l, \end{cases}$$

συμβολίζουμε

$$\frac{\partial(f_{i_1},\dots,f_{i_k})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})}(x) = \left(\frac{\partial f_{i_s}}{\partial x_{j_t}}(x)\right)_{s,t=1}^{k,l}.$$

ii. *Στην περίπτωση που ορίζονται τα παραπάνω όρια σε κάθε $x \in S_0 \subseteq S$, ορίζουμε την*

$$\begin{aligned} \frac{\partial\big(f|_{S_0 i_1},\dots,f|_{S_0 i_k}\big)}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})} : S_0 &\to \mathbb{R}^{k\times l} \\ x &\mapsto \frac{\partial(f_{i_1},\dots,f_{i_k})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})}(x). \end{aligned}$$

2. *Ο τελεστής $\frac{\partial(\star_{i_1},\dots,\star_{i_k})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})}$, ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(\star_{i_1},\dots,\star_{i_k})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})}\colon \\ &\left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \text{ \& ορίζεται η } \frac{\partial\big(f|_{S_0 i_1},\dots,f|_{S_0 i_k}\big)}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})}\right\} \to \{f\colon S_0 \to \mathbb{R}^{k\times l}\} \\ &\qquad f \mapsto \frac{\partial\big(f|_{S_0 i_1},\dots,f|_{S_0 i_k}\big)}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})}. \end{aligned}$$

Σημείωση. *Ο πίνακας*

$$\frac{\partial(f_{i_1},\dots,f_{i_k})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_l})}(x)\in\mathbb{R}^{k\times l} \text{ στον Ορισμό 3.2.2.3},$$

ενδεχομένως να έχει πολλαπλές γραμμές/στήλες.

Μια ειδική περίπτωση του τελεστή του Ορισμού 3.2.2.3 είναι η ακόλουθη, η οποία, ωστόσο, παραμένει γενίκευση του τελεστή D στον Ορισμό 3.2.2.2.

Ορισμός 3.2.2.4. *Έστω*

α'. $k\le n$ *&* $l\le m$ *&*

β'. περιορισμούς $\pi^n_{i_1\dots i_k}$ *&* $\pi^m_{i_1\dots i_l}$.

1. *Έστω, επιπλέον,* $S\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *και*

$$\begin{aligned} f\colon S&\to\mathbb{R}^n\\ x&\mapsto f(x)=(f_i(x))_{i=1}^n.\end{aligned}$$

   i. *Έστω, επιπλέον,* $x\in S$. *Στην περίπτωση που ορίζεται το*

$$\frac{\partial f_{i_s}}{\partial x_{j_t}}(x),\ \forall s\in\{1,\dots,k\}\ \&\ \forall t\in\{1,\dots,l\},$$

   συμβολίζουμε

$$\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ f}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}(x)=\left(\frac{\partial f_{i_s}}{\partial x_{j_t}}(x)\right)_{s,t=1}^{k,l}.$$

   ii. *Στην περίπτωση που ορίζονται τα παραπάνω όρια σε κάθε* $x\in S_0\subseteq S$, *ορίζουμε την*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ f|_{S_0}}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}\colon S_0&\to\mathbb{R}^{k\times l}\\ x&\mapsto\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ f}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}(x).\end{aligned}$$

2. *Ο τελεστής* $\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ\star}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}$, *ορίζεται ως*

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ\star}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}\colon&\\ \left\{f\colon S\to\mathbb{R}^n\ \middle|\ S_0\subseteq S\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)\ \&\ \text{ορίζεται η }\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ f|_{S_0}}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}\right\}&\to\left\{f\colon S_0\to\mathbb{R}^{k\times l}\right\}\\ f&\mapsto\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ f|_{S_0}}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}.\end{aligned}$$

Σημείωση. *Ο πίνακας*

$$\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_k}\circ f}{\partial\pi^m_{j_1\dots j_l}(x)}(x)\in\mathbb{R}^{k\times l} \text{ στον Ορισμό 3.2.2.4},$$

δεν έχει πολλαπλές γραμμές/στήλες και τα στοιχεία κάθε γραμμής/στήλης έχουν συγκεκριμένη διάταξη (κατά αύξοντα δείκτη).

Με βάση το Θεώρημα 2.3.1 και τον Ορισμό 3.2.2.4, δίνουμε τον επόμενο.

Ορισμός 3.2.2.5 (*γενικευμένος τελεστής Jacobian*). 1. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και μερικώς διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$ $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. Ορίζεται η $\mathfrak{J}f|_{S_0}\colon S_0 \to [0,\infty)$ ως*

$$\mathfrak{J}f|_{S_0} = \begin{cases} \left(\det Df|_{S_0}{}^{\mathrm{T}} \cdot Df|_{S_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_{\pi^n_{i_1\ldots i_m}} \left(\det \frac{\partial \pi^n_{i_1\ldots i_m} \circ f|_{S_0}}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{αν } m \le n, \\ \left(\det Df|_{S_0} \cdot Df|_{S_0}{}^{\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum\limits_{\pi^m_{i_1\ldots i_n}} \left(\det \frac{\partial f|_{S_0}}{\partial \pi^m_{i_1\ldots i_n}(x)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{αν } n \le m. \end{cases}$$

Προφανώς, $\mathfrak{J}f|_{S_0} = Jf|_{S_0}$ όταν $m = n$.

2. *Ο γενικευμένος τελεστής Jacobian, $\mathfrak{J}$, ορίζεται ως*

$$\mathfrak{J}\colon \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \;\&\; \text{η } f|_{S_0} \text{ είναι μερικώς διαφορίσιμη}\right\} \to \{f\colon S_0 \to [0,\infty)\}$$
$$f \mapsto \mathfrak{J}f|_{S_0}.$$

Για το επόμενο κομβικό αποτέλεσμα εφαρμόζουμε απλά το Θεώρημα 2.3.2.

Πρόταση 3.2.2.1. *Έστω $x_0 \in S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.:*

i. η f να είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$ &

ii. ο $Df(x) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ να είναι της μέγιστης τάξης, δλδ $\operatorname{rank} Df(x) = \min\{m,n\}$, $\forall x \in S_0$.

Τότε $\mathfrak{J}f|_{S_0} > 0$.

3.3 Πολλαπλές μερικές διαφορίσεις

Περνάμε τώρα στις πολλαπλές μερικές διαφορίσεις.

Ορισμός 3.3.1 (*πολλαπλές μερικές διαφορίσεις ως προς συντεταγμένες*). *Έστω $j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,m\}$.*

1. *Έστω, επιπλέον, $S \in \bigcap\limits_{s=1}^{k} \mathcal{D}_{e_{j_s}}(\mathbb{R}^m) = \mathfrak{S}$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f είναι $j_1,\ldots,j_k$ μερικώς διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$ (δεν θα αναφέρεται το $S_0 = S$) ανν ορίζεται η*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right) f|_{S_0}\colon S_0 \to \mathbb{R}^n,$$

και σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε

$$\frac{\partial^k f|_{S_0}}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}} f|_{S_0} = f|_{S_0 x_{j_1}\ldots x_{j_k}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_k}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right) f|_{S_0}\colon S_0 \to \mathbb{R}^n.$$

2. *Ο τελεστής των $j_1,\ldots,j_k$ μερικών διαφορίσεων, $\frac{\partial^k \star}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}} = \star_{x_{j_1}\ldots x_{j_k}}$, ορίζεται ως*

$$\frac{\partial^k \star}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\colon \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathfrak{S} \;\&\; \text{ορίζεται η } \frac{\partial^k f|_{S_0}}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\right\} \to \{f\colon S_0 \to \mathbb{R}^n\}$$
$$f \mapsto \frac{\partial^k f|_{S_0}}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}.$$

Ορισμός 3.3.2 (*πολλαπλές μερικές διαφορίσεις*). 1. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και*

$$f\colon S \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto f(x) = (f_i(x))_{i=1}^n.$$

Λέμε ότι η f είναι k φορές μερικώς διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$ (δεν θα αναφέρεται το $S_0 = S$) ανν ορίζεται η $\frac{\partial^k f|_{S_0}}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}$ $\forall j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,m\}$, και σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε

$$D^k f|_{S_0} = \left(\frac{\partial^k f|_{S_0}}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\right)_{j_1,\ldots,j_k \in\{1,\ldots,m\}} = \left(\frac{\partial^k f_i|_{S_0}}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}}\right)_{i\in\{1,\ldots,n\},\; j_1,\ldots,j_k \in\{1,\ldots,m\}}\colon S_0 \to \mathbb{R}^{n\times m^k}.$$

2. *Ο τελεστής των k-πλών μερικών διαφορίσεων, D^k, ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} D^k\colon \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, S_0 \subseteq S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \text{ \& ορίζεται η } D^k f|_{S_0}\right\} &\to \left\{f\colon S_0 \to \mathbb{R}^{n\times m^k}\right\} \\ f &\mapsto D^k_{x_0} f|_{S_0}. \end{aligned}$$

Ορισμός 3.3.3. 1. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. Τότε ορίζουμε $D^0 f = f$.*

2. *Ορίζουμε τον D^0 να είναι ένας ταυτοτικός τελεστής.*

3.4 Τελεστές του Διανυσματικού Λογισμού

Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και

$$\begin{aligned} f\colon S &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) = (f_i(x))_{i=1}^n. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας οτι ορίζονται οι μερικές διαφορίσεις, παραθέτουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις τελεστών, βασικοί για τον Διανυσματικό Λογισμό.

1. Έστω $n = 1$. Ο τελεστής του Jacobi παίρνει την μορφή του τελεστή της κλίσης (gradient)

   $$Df = \nabla f = \operatorname{grad} f = (f_{x_i})_{i=1}^n.$$

   Επίσης, ο τελεστής του Hesse και ο τελεστής του Laplace έχουν την μορφή

   $$D^2 f = \left(f_{x_i x_j}\right)_{i,j=1}^n$$

   και

   $$\Delta f = \operatorname{tr} D^2 f = \sum_{i=1}^n f_{x_i x_i},$$

   αντίστοιχα. Επαληθεύουμε εύκολα τον τύπο

   $$D^2 f = D(Df),$$

   ο οποίος και δικαιολογεί τον συμβολισμό που χρησιμοποιούμε.

2. Ο τελεστής της απόκλισης (divergence) δίνεται από τον τύπο

   $$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \operatorname{tr} Df = \sum_{i=1}^n f_{i x_i}.$$

3. Έστω $n = 1$. Ο τελέστης του Laplace παίρνει την μορφή

   $$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

4. Έστω $m = n = 3$. Ο τελεστής του στροβιλισμού (curl) δίνεται από τον τύπο

   $$\operatorname{curl} f = \operatorname{rot} f = \nabla \times f = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).$$

Κεφάλαιο 4

Στοιχεία Απειροστικού Λογισμού στον $\mathbb{R}^n$

Εδώ γίνεται μία συνοπτική παρουσίαση των βασικών αποτελεσμάτων του Απειροστικού Λογισμού στον $\mathbb{R}^n$.

4.1 Διαφορικός Λογισμός

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [7], [17], και [26], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

4.1.1 Διαφορικό

Ορισμός 4.1.1.1 (διαφορισιμότητα). *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (ή αλλιώς παραγωγίσιμη) στο $x_0 \in S$ ανν*

1. *το $x_0 \in S$ είναι σ.σ. &*
2. *$\exists (df)_{x_0} \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, τ.ω.:*

$$\lim_{S \setminus \{x_0\} \ni x \to x_0} \frac{\left|f(x) - f(x_0) - (df)_{x_0}(x - x_0)\right|}{|x - x_0|} = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$f(x) = f(x_0) + (df)_{x_0}(x - x_0) + o(|x - x_0|), \text{ καθώς } S \setminus \{x_0\} \ni x \to x_0.$$

Λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη (παντού στο S) ανν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in S$.

Το επόμενα είναι άμεσα από τον Ορισμού 4.1.1.1.

Πρόταση 4.1.1.1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ με $f = (f_i)_{i=1}^n$. Η f είναι διαφορίσιμη ανν η f_i είναι διαφορίσιμη $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Πρόταση 4.1.1.2. *Αν $f \in Aff(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ όπου $f = f_0 + x_0$ με $f_0 \in L(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ και $x_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε η f είναι διαφορίσιμη με*

$$(df)_x = f_0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Ειδικότερα, κάθε περιορισμός $\pi^n_{i_1 \ldots i_m}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (με $m \leq n$) είναι διαφορίσιμος, και μάλιστα

$$\left(d\pi^n_{i_1 \ldots i_m}\right)_x = \pi^n_{i_1 \ldots i_m} \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Επίσης, με χρήση του Ορισμού 4.1.1.1 και της συνέχειας μιας γραμμικής συνάρτησης, παίρνουμε το επόμενο.

Θεώρημα 4.1.1.1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ να είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in S$. Τότε η f είναι και συνεχής στο x_0.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι εύκολα επαληθεύσιμο.

Πρόταση 4.1.1.3. *Η $(df)_{x_0}$ του Ορισμού 4.1.1.1 είναι μοναδική.*

Λόγω της Πρότασης 4.1.1.3 ο παρακάτω ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.1.1.2 (διαφορικό)**.** *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^m$.*

1. *Έστω, επιπλέον, $f\colon S \to \mathbb{R}^n$.*
   i. *Έστω, επιπλέον, $x_0 \in S$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in S$, τότε και μόνο τότε η μοναδική $(df)_{x_0}$ του Ορισμού 4.1.1.1 θα ονομάζεται διαφορικό (ή αλλιώς παράγωγος) της f στο x_0.*
   ii. *Αν η f είναι διαφορίσιμη, τότε και μόνο τότε ορίζεται το διαφορικό της, df, ως εξής*

$$\begin{aligned} df\colon S &\to L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \\ x &\mapsto (df)_x. \end{aligned}$$

2. *Ο τελεστής διαφορικό, d, ορίζεται ως εξής*

$$\begin{aligned} d\colon \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{η } f \text{ είναι διαφορίσιμη}\right\} &\to \{f\colon S \to L(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)\} \\ f &\mapsto df. \end{aligned}$$

Αξιοποιώντας τον Ορισμό 3.2.2.2 και τον Ορισμό 4.1.1.1, άμεσα καταλήγουμε στο εξής.

Θεώρημα 4.1.1.2. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ να είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in S$. Τότε η f είναι μερικώς διαφορίσιμη, και μάλιστα*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = (df)_{x_0}(e_j),\ \forall j \in \{1,\ldots,m\}.$$

Σημείωση. *Το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.1.1.2 δεν ισχύει πάντα.*

Απλή συνέπεια του Θεώρημα 4.1.1.2 είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο μας δίνει ένα εύχρηστο τρόπο για τον υπολογισμό του διαφορικού μιας συνάρτησης.

Θεώρημα 4.1.1.3. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ να είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in S$. Τότε*

$$Df(x_0) = \left[(df)_{x_0}\right].$$

Σημείωση. *Στην Υποενότητα 4.1.3 θα δούμε κάποιου είδους αντίστροφο του Θεωρήματος 4.1.1.3.*

Τώρα, απευθείας από την Πρόταση 4.1.1.2 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.1.1.3, παίρνουμε την εξής κλειστή διατύπωση του τελεστή d.

Θεώρημα 4.1.1.4. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.*

1. *Αν μια $f\colon S \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$, τότε*

$$df|_{S_0} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f|_{S_0}}{\partial x_j} d\pi_j^m.$$

2. *Γενικότερα, αν μια $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$, τότε $df|_{S_0} = (df_i|_{S_0})_{i=1}^n$.*

Σημείωση. *Σε ότι αφορά τον συμβολισμό, έχει καθιερωθεί στο τύπο του σημείου 1 του Θεωρήματος 4.1.1.4 να αντικαθίσταται κάθε π_j^m από την εικόνα του, και έτσι να γράφουμε*

$$df = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Τέλος, παίρνουμε άμεσα το εξής.

Πρόταση 4.1.1.4. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ και διαφορίσιμη στο $x_0 \in S$ $f\colon S \to \mathbb{R}$. Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0, τότε $Df(x_0) = 0_n$.*

4.1.2 Κανόνας αλυσίδας

Σε αυτή την υποενότητα μας ενδιαφέρει η διαφορική μελέτη των σύνθετων συναρτήσεων. Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 4.1.1.1 και του Θεωρήματος 4.1.1.3 παίρνουμε το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα, γνωστό ως κανόνας αλυσίδας (chain rule).

Θεώρημα 4.1.2.1 (*κανόνας αλυσίδας*). *Έστω*

1. $x_0 \in S_1 \subseteq \mathbb{R}^l$,
2. $S_2 \subseteq \mathbb{R}^m$,
3. $f_1 : S_1 \to \mathbb{R}^m$ *τ.ω.:*
   i. $f_1(S_1) \subseteq S_2$ *&*
   ii. *η* f_1 *να είναι διαφορίσιμη στο* x_0 *&*
4. $f_2 : S_2 \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.: η* f_2 *να είναι διαφορίσιμη στο* $f_1(x_0)$.

Τότε η $f_2 \circ f_1$ *είναι διαφορίσιμη στο* x_0*, και επίσης*

$$(d(f_2 \circ f_1))_{x_0} = (df_2)_{f_1(x_0)} \circ (df_1)_{x_0}.$$

Μάλιστα, αν, επιπλέον, $S_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^l)$ *και* $S_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$*, τότε μπορούμε να γράψουμε*

$$D(f_2 \circ f_1)(x_0) = Df_2(f_1(x_0)) \cdot Df(x_0).$$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδεικνύεται στην γενικότητά του έχοντας πρώτα αποδείξει την μονοδιάστατη περίπτωση και στην συνέχεια εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.2.1.

Πόρισμα 4.1.2.1 (*ΘΜΤ, διαφορική εκδοχή*). *Έστω*

1. $x, y \in \mathbb{R}^n$,
2. $S = \left\{z \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists t \in [0,1] \text{ τ.ω.: } z = x + t(y-x)\right\}$,
3. $S_0 = \left\{z \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \exists t \in (0,1) \text{ τ.ω.: } z = x + t(y-x)\right\}$ *&*
4. $f\colon S \to \mathbb{R}$ *τ.ω.:*
   i. $f \in C(S;\mathbb{R})$ *&*
   ii. *η* $f|_{S_0}$ *να είναι διαφορίσιμη.*

Τότε $\exists x_0 \in S_0$ *τ.ω.:*

$$f(y) - f(x) = (df)_{x_0}(y-x).$$

Μάλιστα, αν αντί της υπόθεσης $f\colon S \to \mathbb{R}$ *έχουμε ότι* $f\colon S_1 \to \mathbb{R}$ *για κάποιο* $S_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *με* $S \subseteq S_1$ *(η ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν* $n = 1$*), τότε μπορούμε να γράψουμε*

$$f(y) - f(x) = Df(x_0) \cdot (y-x).$$

Το επόμενο είναι άμεση εφαρμογή του Πορίσματος 4.1.2.1.

Πρόταση 4.1.2.1. *Έστω*

1. *κυρτό* $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *&*
2. *διαφορίσιμη* $f : S \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $\|Df\| \in B(S;\mathbb{R})$.

Τότε $f \in Lip(S;\mathbb{R}^n)$.

Με βάση την Πρόταση 4.1.2.1 έχουμε το εξής.

Πόρισμα 4.1.2.2. *Έστω*

1. $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *&*
2. *διαφορίσιμη* $f : S \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $\|Df\| \in B_{loc}(S;\mathbb{R})$.

Τότε $f \in Lip_{loc}(S;\mathbb{R}^n)$.

Ένα άλλο άμεσο πόρισμα του κανόνα αλυσίδας (σε συνδυασμό με γνωστή ιδιότητα των οριζουσών πινάκων) είναι το ακόλουθο, όπου απλά υπολογίζουμε το διαφορικό της αντίστροφης απεικόνισης.

Πόρισμα 4.1.2.3. *Έστω*

1. $x_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $f \in C(S;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*
   - *i.* *η* f *να είναι διαφορίσιμη στο* x_0,
   - *ii.* *η* f *να είναι* $1-1$ *&*
   - *iii.* *η* f^{-1} *να είναι διαφορίσιμη στο* $f(x_0)$.

Τότε

$$\left(df^{-1}\right)_{f(x_0)} = \left((df)_{x_0}\right)^{-1},$$

δλδ είναι αναγκαίο η $(df)_{x_0}$ *να είναι αντιστρέψιμη.*

Μάλιστα αν, επιπλέον, $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *τότε μπορούμε να γράψουμε*

$$Df^{-1}(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1},$$

δλδ είναι αναγκαίο ο πίνακας $Df(x_0)$ *να είναι μη ιδιάζων, ή, ισοδύναμα* $\det Df(x_0) \neq 0$, *ή, ισοδύναμα,* $Jf(x_0) > 0$.

Σημείωση. *Αν ισχυροποιήσουμε τις υποθέσεις μας, τότε η συνθήκη* $Jf(x_0) > 0$ *είναι και επαρκής για την ύπαρξη διαφορίσιμης αντίστροφης. Αυτό είναι και το κεντρικό αποτέλεσμα της Υποενότητας 4.1.6.*

4.1.3 C^k συνάρτηση, $k \in \overline{\mathbb{N}}$

Ορισμός 4.1.3.1 ($k \in \mathbb{N}_0$)**.** *Έστω* $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *και* $k \in \mathbb{N}_0$. *Ορίζουμε το σύνολο των* k *φορές συνεχώς μερικώς διαφορίσιμων συναρτήσεων* $f\colon S \to \mathbb{R}^n$, $C^k(S;\mathbb{R}^n)$, *ως*

$$C^k(S;\mathbb{R}^n) = \left\{f\colon S \to \mathbb{R}^n \,\middle|\, D^k f \in C\left(S;\mathbb{R}^{nm^k}\right)\right\}.$$

Επιπλέον, ορίζουμε

$$C_c^k(S;\mathbb{R}^n) = C^k(S;\mathbb{R}^n) \cap C_c(S;\mathbb{R}^n).$$

Η περίπτωση $k = 0$ *θεωρείται για ευκολία στην διατύπωση των αποτελεσμάτων.*

Με τη χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1, παίρνουμε περίπου το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.1.1.3 αν ισχυροποιήσουμε τις προϋποθέσεις, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 4.1.3.1. *Έστω* $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *και* $f \in C^1(S;\mathbb{R}^n)$. *Τότε η* f *είναι διαφορίσιμη.*

Παρατήρηση. *Το Θεώρημα 4.1.3.1 δεν είναι σημειακό όπως το Θεώρημα 4.1.1.3 αλλά τοπικό, που είναι και το τίμημα που πληρώνουμε.*

Εφαρμόζοντας επαγωγικά το Θεώρημα 4.1.3.1, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.1.1.1 και το Θεώρημα 4.1.1.3, παίρνουμε μια ισοδύναμη μορφή των k φορές συνεχώς μερικώς διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Πρόταση 4.1.3.1. *Έστω* $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *και* $k \in \mathbb{N}_0$. *Τότε*

$$C^k(S;\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i=0}^{k} C^i(S;\mathbb{R}^n).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.1.3.1, ο επόμενος ορισμός έρχεται φυσικά.

Ορισμός 4.1.3.2 ($k = \infty$)**.** *Έστω* $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. *Ορίζουμε το σύνολο των ομαλών συναρτήσεων* $f\colon S \to \mathbb{R}^n$, $C^\infty(S;\mathbb{R}^n)$, *ως*

$$C^\infty(S;\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i \in \overline{\mathbb{N}}_0} C^i(S;\mathbb{R}^n).$$

Επιπλέον, ορίζουμε

$$C_c^\infty(S;\mathbb{R}^n) = C^\infty(S;\mathbb{R}^n) \cap C_c(S;\mathbb{R}^n).$$

Τώρα, μέσω του Πορίσματος 4.1.2.1, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 4.1.3.1 (*Clairaut-Schwarz*)**.** *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και $f \in C^2(S;\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_t \partial x_s}, \ \forall\, s,t \in \{1,\dots,m\}.$$

Με χρήση του Πορίσματος 4.1.3.1, μπορούμε με επαγωγή να πάρουμε το επόμενο.

Θεώρημα 4.1.3.2. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ και $f \in C^k(S;\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{j_{\sigma(k)}}}, \ \forall \text{ μετάθεση } \sigma \text{ του } \{1,\dots,k\},\ \forall\, j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,m\}.$$

Σημείωση. *Το Θεώρημα 4.1.3.2 μας επιτρέπει να κάνουμε χρήση του συμβολισμού της διαφόρισης μέσω πολυδεικτών, για συναρτήσεις $f \in C^k(S;\mathbb{R}^n)$ με $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Έτσι, αν ανάμεσα στα $j_1,\dots,j_k$ υπάρχουν α_1 το πλήθος j_t που είναι ίσα με 1, κ.ο.κ., α_m το πλήθος j_t που είναι ίσα με m, τότε μπορούμε να εκφράσουμε κάθε μία από όλες αυτές τις ίσες μεικτές διαφορίσεις ως*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \text{ όπου } \alpha = (\alpha_j)_{j=1}^m \in \mathbb{N}_0^m \text{ πολυδείκτης τάξης } |\alpha| = \sum_{j=1}^m \alpha_j, \text{ με } 1 \le |\alpha| \le k.$$

Επιπλέον, επιτρέπουμε $\alpha = 0_m$, με τον αντίστοιχο προφανή συμβολισμό.

Τέλος, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1, μπορούμε εύκολα με επαγωγή να πάρουμε το παρακάτω, (η περίπτωση $k = 0$ είναι γνωστή και αποδεινύεται με χρήση μόνο του ορισμού της συνέχειας).

Θεώρημα 4.1.3.3. *Έστω*

1. $S_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^l)$,
2. $S_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$,
3. $k \in \overline{\mathbb{N}}_0$,
4. $f_1 \in C^k(S_1;\mathbb{R}^m)$ *τ.ω.:* $f_1(S_1) \subseteq S_2$ *&*
5. $f_2 \in C^k(S_2;\mathbb{R}^n)$.

Τότε $(f_2 \circ f_1) \in C^k(S_1;\mathbb{R}^n)$.

Σημείωση. *Είναι γνωστός ο γενικευμένος πολυμεταβλητός τύπος του Faá di Bruno για τις μεγαλύτερης σε τάξη διαφορίσεις των σύνθετων συναρτήσεων (βλ. το [14], αλλιώς το [23] για μια πιο συμπαγή παρουσίαση). Αναφορικά, αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.1.3.3 με $k \in \mathbb{N}$ και $n = 1$, τότε*

$$D^\alpha(f_2 \circ f_1) = \sum_{1 \le |\beta| \le |\alpha|} \big((D^\beta f_2) \circ f_1 \big) M_{\alpha,\beta}(f_1),$$

$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^l$ με $1 \le |\alpha| \le k$, όπου

$$M_{\alpha,\beta}(f_1) = \alpha! \sum_{s=1}^{|\alpha|} \sum_{p_s(\alpha,\beta)} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{\gamma_j! (\delta_j!)^{|\gamma_j|}} \big(D^{\delta_j} f_1\big)^{\gamma_j},$$

με $0^0 = 1$, $\gamma_j, \delta_j \in \mathbb{N}_0^l$,

$$\big(D^{\delta_j} f_1\big)^{\gamma_j} = \prod_{t=1}^{l} \big(D^{\delta_j} f_1\big)^{\gamma_{jt}},$$

$$p_s(\alpha,\beta) = \left\{ (\gamma_1,\dots,\gamma_s,\delta_1,\dots,\delta_s) \;\middle|\; |\gamma_j| > 0,\ 0_l \prec \delta_1 \prec \dots \prec \delta_s,\ \sum_{j=1}^s \gamma_j = \beta,\ \sum_{j=1}^s |\gamma_j|\, \delta_j = \alpha \right\}$$

και $\mu \prec \nu$ για $\mu,\nu \in \mathbb{N}_0^l$ αν ισχύει ένα από τα επόμενα:

1. $|\mu| < |\nu|$,
2. $|\mu| = |\nu|$ *και* $\mu_1 < \nu_1$, *ή*
3. $|\mu| = |\nu|$, $\mu_1 = \nu_1, \dots, \mu_t = \nu_t$ *και* $\mu_{t+1} < \nu_{t+1}$ *για κάποιο* $t \in \{1,\dots,l-1\}$.

4.1.4 Ομαλή διαμέριση της μονάδας

Εδώ ακολουθούμε σε γενικές γραμμές την συλλογιστική στην αντίστοιχη υποενότητα στο [17]. Το αντικείμενο της παρούσας ενότητας, το οποίο είναι σχετικά πρόσφατο στα μαθηματικά, αποτελεί βασικό προαπαιτούμενο της σύγχρονης Ανάλυσης και των εφαρμογών της. Γενικά μιλώντας, οι ομαλές διαμερίσεις της μονάδας μας επιτρέπουν να περνάμε από το «τοπικό επίπεδο» στο «ολικό» κατά την αναλυτική μελέτη συναρτήσεων.

Ορισμός

Όπως θα δούμε σε λίγο (βλ. το Θεώρημα 4.1.4.1), ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.1.4.1 (*ομαλή διαμέριση της μονάδας*). *Έστω*

i. *συμπαγές* $S \subsetneq \mathbb{R}^n$,

ii. $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$ *τ.ω.:* $S = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} S_i$,

iii. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *&*

iv. $\{f_i\}_{i\in N} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$.

Η $\{f_i\}_{i\in N}$ *λέγεται ομαλή διαμέριση της μονάδας στο* S *που κυριαρχείται από την* $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}}$ *ανν*

1. $f_i(\mathbb{R}^n) \subseteq [0,1]$ $\forall i \in N$,
2. $\forall i \in N$, $\exists i_0 \in \mathscr{I}$ *τ.ω.:* $(\mathrm{supp} f_i \cap S) \subseteq S_{i_0}$ *&*
3. $\sum_{i\in N} f_i|_S = 1$.

Μάλιστα, θα παραλείπεται το «που κυριαρχείται από την $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}}$*» ανν* $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}} = \{S\}$.

Παρατήρηση. *Προφανώς,* $(\mathrm{supp} f_i \cap S) \in \mathcal{C}(S) \cap \mathcal{C}(S_{i_0}) \cap \mathcal{B}(S_{i_0})$ $\forall i \in N$ *στον Ορισμό 4.1.4.1.*

Σημείωση. *Ο Ορισμός 4.1.4.1 των ομαλών διαμερίσεων της μονάδας διαφέρει από αυτόν που συνήθως εμφανίζεται στην βιβλιογραφία (βλ., παρακάτω, την Σημείωση μετά την Πρόταση 4.1.4.2).*

Ένα πρώτο αποτέλεσμα ύπαρξης για ανοικτά σύνολα

Για το ακόλουθο κατασκευαστικό αποτέλεσμα χρησιμοποιείται η $f \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.1.3.3. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι το n-πλο γινόμενο κατάλληλων μονοδιάστατων συναρτήσεων.

Πρόταση 4.1.4.1. $\forall$ *μη τετριμμένο* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\exists f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

$$f(\mathbb{R}^n) \subseteq (0,\infty) \;\&\; \mathrm{supp} f = \overline{I}.$$

Από την Πρόταση 2.1.7 και την Πρόταση 4.1.4.1 παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 4.1.4.2. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *και* $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(U)$ *τ.ω.:* $U = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} U_i$. *Τότε* $\exists \{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

1. $f_i(\mathbb{R}^n) \subseteq [0,1]$ $\forall i \in \mathbb{N}$,
2. $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists i_0 \in \mathscr{I}$ *τ.ω.:* $\mathrm{supp} f_i \subseteq U_{i_0}$,
3. $\forall U_0 \subset\subset U$, $\exists N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *τ.ω.:* $U_0 \subseteq \bigcup_{i\in N} \mathrm{supp} f_i$ *&*
4. $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i|_U = 1$.

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια σχετικά με την Πρόταση 4.1.4.2.*

1. *Το σημείο 3 δίνει νόημα στο σημείο 4.*
2. *Ισοδύναμα, το σημείο 3 γράφεται: Η συλλογή $\{\mathrm{supp} f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι τοπικά πεπερασμένη.*

Σημείωση. *Συνήθως στην βιβλιογραφία, οι ομαλές διαμερίσεις της μονάδας σχετίζονται μόνο με ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και ορίζονται να είναι οι $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ της Πρότασης 4.1.4.2.*

Μέσω της Πρότασης 4.1.4.2 εξάγουμε εύκολα το παρακάτω.

Πόρισμα 4.1.4.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(U)$ τ.ω.: $U = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} U_i$.*

1. i. *Έστω, επιπλέον, συλλογή $\{f_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in\mathscr{I}}$ διαφορίσιμων συναρτήσεων. Τότε $\exists$ διαφορίσιμη $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.: $f|_{U_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$.*

   ii. *Έστω, επιπλέον, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ και $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subsetneq C^k(U_i;\mathbb{R}^n)$. Τότε $\exists$ $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f|_{U_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$.*

2. *Έστω, επιπλέον, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$.*

   i. *Αν $\exists$ συλλογή $\{f_i\colon U_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in\mathscr{I}}$ διαφορίσιμων συναρτήσεων τ.ω.: $f|_{U_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$, τότε η f είναι διαφορίσιμη.*

   ii. *Έστω, επιπλέον, $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Αν $\exists\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subsetneq C^k(U_i;\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f|_{U_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$, τότε $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$.*

Σημείωση. *Το σημείο 2 του Πορίσματος 4.1.4.1 λέει ότι μια ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ συνάρτηση είναι (ολικά) διαφορίσιμη, ή C^k για κάποιο $k \in \overline{\mathbb{N}}$, ανν είναι τοπικά διαφορίσιμη, ή C^k, αντίστοιχα. Αυτό ισχύει προφανώς για τις συνεχείς συναρτήσεις.*

Ύπαρξη

Επιλέγοντας κατάλληλο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ τ.ω.: $S \subseteq U$, όπου το $S \subseteq U$ είναι το δεδομένο μας υποσύνολο, και κάνοντας χρήση της Πρότασης 4.1.4.2, παίρνουμε το κεντρικό αποτέλεσμα, το οποίο έχει ως εξής.

Θεώρημα 4.1.4.1. *Έστω συμπαγές $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ και $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$ τ.ω.: $S = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} S_i$. Τότε $\exists$ ομαλή διαμέριση της μονάδας στο S που κυριαρχείται από την $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}}$.*

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 3.2.1.1, μέσω του Θεωρήματος 4.1.4.1, εξάγουμε εύκολα το αντίστοιχο του Πορίσματος 4.1.4.1.

Πόρισμα 4.1.4.2. *Έστω συμπαγές $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ και $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$ τ.ω.: $S = \bigcup_{i\in\mathscr{I}} S_i$.*

1. i. *Έστω, επιπλέον, συλλογή $\{f_i\colon S_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in\mathscr{I}}$ διαφορίσιμων συναρτήσεων. Τότε $\exists$ διαφορίσιμη $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.: $f|_{S_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$.*

   ii. *Έστω, επιπλέον, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ και $\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subsetneq C^k(S_i;\mathbb{R}^n)$. Τότε $\exists$ $f \in C^k(S;\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f|_{S_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$.*

2. *Έστω, επιπλέον, $f\colon S \to \mathbb{R}^n$.*

   i. *Αν $\exists$ συλλογή $\{f_i\colon S_i \to \mathbb{R}^n\}_{i\in\mathscr{I}}$ διαφορίσιμων συναρτήσεων τ.ω.: $f|_{S_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$, τότε η f είναι διαφορίσιμη.*

   ii. *Έστω, επιπλέον, $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Αν $\exists\{f_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subsetneq C^k(S_i;\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f|_{S_i} = f_i$ $\forall i \in \mathscr{I}$, τότε $f \in C^k(S;\mathbb{R}^n)$.*

4.1.5 Επέκταση συνάρτησης

Η υποενότητα αυτή πραγματεύεται ένα μη τετριμμένο και πολύπτυχο θέμα της σύγχρονης Ανάλυσης. Έτσι, εδώ θα αναφερθούμε σε ορισμένα αποτελέσματα σχετικά με την επεκτασιμότητα συναρτήσεων, υπό συνθήκες διατήρησης συγκεκριμένων αναλυτικών χαρακτηριστικών.

Καταρχήν, υπενθυμίζουμε ότι για την επεκτασιμότητα συνεχών συναρτήσεων ορισμένων σε κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ υπάρχει το γνωστό θεώρημα επέκτασης των Tietze–Urysohn–Brouwer (the Tietze–Urysohn–Brouwer extension theorem, βλ., π.χ., [7, Θεώρημα 1.9.6, σελ. 88]).

Επίσης, η επεκτασιμότητα Lipschitz συναρτήσεων ορισμένων σε οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, εξασφαλίζεται από ένα απλό (βλ., π.χ., [22, Theorem 3.1, σελ. 102]) αλλά και από ένα πιο σύνθετο αλλά ισχυρότερο αποτέλεσμα, το θεώρημα του Kirszbraun (βλ., π.χ., [22, Remark μετά το Theorem 3.1, σελ. 102]).

Τώρα, παρατηρούμε ότι για να μελετήσουμε την επεκτασιμότητα διαφορίσιμων συναρτήσεων ορισμένων σε κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, αρκεί να μελετήσουμε ξεχωριστά την επεκτασιμότητα των περιορισμών τους τόσο στο σύνολο των απ.σ. του υποσυνόλου όσο και στο σύνολο των μη απ.σ. αυτού.

Σε ό,τι αφορά την επεκτασιμότητα διαφορίσιμων συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο αποκλειστικά απ.σ. του $\mathbb{R}^n$, αυτή έπεται απευθείας από το θεώρημα του Borel (βλ., π.χ., [7, Θεώρημα 2.10.7, σελ. 195]), και μάλιστα είναι της τάξης C^∞.

Σε ό,τι αφορά την επεκτασιμότητα διαφορίσιμων συναρτήσεων ορισμένων σε ένα σύνολο αποκλειστικά μη απ.σ. του $\mathbb{R}^n$, παραθέτουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα.

Το πρώτο είναι η επέκταση του Whitney (the Whitney extension), η οποία εξάγεται μέσω μιας πιο εξειδικευμένης μορφής της Πρότασης 2.1.7, γνωστής ως αποσύνθεση του Whitney (the Whitney decomposition), καθώς επίσης μιας αντίστοιχης μορφής της Πρότασης 4.1.4.2, η οποία έπεται από το προηγούμενο αποτέλεσμα. Η απόδειξή της επέκτασης αυτής καθώς και των προαπαιτούμενών της, τα οποία δεν προϋποθέτουν γνώση αποτελεσμάτων πλην όσων έχουμε αναφέρει ως τώρα, μπορούν να βρεθούν στο [16] (βλ. επίσης, π.χ., το [13, §9.4]).

Θεώρημα 4.1.5.1 (*Whitney*)**.** *Έστω*

i. *κλειστό* $S \subseteq \mathbb{R}^m$ *τ.ω.: να είναι σύνολο μη απ.σ.,*

ii. $f \in C(S;\mathbb{R}^n)$ *με* $f = (f_i)_{i=1}^n$,

iii. $k \in \mathbb{N}_0$ *&*

iv. $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$,

  α΄. $f_{i\alpha} \in C(S;\mathbb{R})$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ *με* $1 \le |\alpha| \le k$ *αν* $k \neq 0$ *&*

  β΄. $f_{i0_m} = f_i$.

Αν $\forall$

1. $i \in \{1,\ldots,n\}$,

2. $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ *με* $0 \le |\alpha| \le k$,

3. $x_0 \in S$ *&*

4. $\varepsilon > 0$,

$\exists S_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(S)$ *τ.ω.:*

$$\left| f_{i\alpha}(x) - \sum_{0\le|\beta|\le k-|\alpha|} \frac{1}{\beta!} f_{i\beta}(y)(x-y)^\beta \right| \le \varepsilon |x-y|^{k-|\alpha|} \ \forall\, x,y \in S_0,$$

τότε $\exists \widetilde{f} \in C^k(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ *με* $\widetilde{f} = \left(\widetilde{f}_i\right)_{i=1}^n$ *τ.ω.:*

$$D^\alpha \widetilde{f}_i|_S = f_{i\alpha},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \text{ με } 0 \le |\alpha| \le k \ \&\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Παρατήρηση. *Αν* $k = 0$, *τότε το Θεώρημα 4.1.5.1 εκφυλίζεται στο θεώρημα επέκτασης των Tietze–Urysohn–Brouwer.*

Σημείωση. *Η ικανή συνθήκη του Θεωρήματος 4.1.5.1, είναι κατά κάποιο τρόπο μια παράφραση του θεωρήματος του Taylor, το οποίο δεν θα μελετήσουμε εδώ.*

Το δεύτερο είναι ένα ισχυρότερο (ακόμα και υπό μία έννοια που δεν θα μας απασχολήσει εδώ) αποτέλεσμα, αυτό του Seeley, αλλά για συγκεκριμένα υποσύνολα μόνο. Ωστόσο, τα υποσύνολα αυτά είναι βασικά για εμάς. Για την απόδειξη του αποτελέσματος χρησιμοποιείται μια γενίκευση της απλής τεχνικής αντικατοπτρισμού (reflection technique) (βλ., π.χ., το [24]) και μπορεί να βρεθεί στο [30] (βλ., π.χ., το [29, το πρώτο μέρος των Theorem 5.19, σελ. 22, Lemma 5.20, σελ. 149 και Theorem 5.21, σελ. 150] για μια πιο εκτενή παρουσίαση). Μια απλουστευμένη, αλλά συγχρόνως κατάλληλα διατυπωμένη, παραλλαγή του είναι η παρακάτω, πριν από την οποία ανατρέχουμε στην Πρόταση 3.2.1.1.

Θεώρημα 4.1.5.2 (*Seeley*)**.** *Έστω*

i. $j \in \{1, \ldots, m\}$,

ii. $S \subseteq \mathbb{R}^m$ *τ.ω.:* $S \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ *&* $S \in \mathcal{O}\big(\overline{\mathbb{R}^m_{j,\pm}}\big)$ *&*

iii. $f_0 \in L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \cap RM_n$ *ο αντικατοπτρισμός ως το* 0, *αν* $m = 1$, *και ως προς τον υπόχωρο* $\hat{\varpi}^m_j\big(\hat{\pi}^m_j(\mathbb{R}^m)\big)$, *αλλιώς.*

1. *Έστω, επιπλέον, διαφορίσιμη* $f\colon S \to \mathbb{R}^n$. *Τότε* $\exists$ *διαφορίσιμη* $\widetilde{f}\colon S \cup f_0(S) \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:*

$$D^l \widetilde{f}|_S = D^l f, \;\; \forall l \in \{0,1\}\,.$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *και* $f \in C^k(S;\mathbb{R}^n)$. *Τότε* $\exists \widetilde{f} \in C^k(S \cup f_0(S);\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

$$D^\alpha \widetilde{f}|_S = D^\alpha f, \;\; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m \text{ με } 0 \le |\alpha| \le k.$$

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια σχετικά με το Θεώρημα 4.1.5.2.*

1. *Ο* $[f_0] \in Orth_{n\times n}$ *δεν είναι άλλος από τον*

$$[f_0] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & & \overset{j}{\downarrow} & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

2. *Είναι προφανές ότι* $(S \cup f_0(S)) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$. *Αυτός είναι και ο λόγος που το παραπάνω αποτέλεσμα είναι κομβικό για εμάς, όπως θα φανεί αργότερα στο Κεφάλαιο 5 και δη για την εξαγωγή του Θεωρήματος 5.2.1.1.*

4.1.6 Θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης

Όπως αναφέραμε στην Υποενότητα 4.1.2, εδώ δείχνουμε ότι η συνθήκη $Jf(x_0) > 0$, για μια διαφορίσιμη $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ με $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, είναι επίσης επαρκής, τουλάχιστον τοπικά, για να $\exists$ διαφορίσιμη αντίστροφη f^{-1}.

Θα δούμε δύο εκδοχές αυτού του θεμελιώδους αποτελέσματος. Στο πρώτο και κλασικό, υποθέτουμε επίσης ότι $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$, το οποίο και θα μας κατοχυρώσει οτι $f^{-1} \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$. Στο δεύτερο και πιο σύγχρονο, δεν απαιτείται επιπλέον συνθήκη. Ωστόσο, πριν κάνουμε τον διαχωρισμό, εξάγουμε ορισμένα γενικότερα αποτελέσματα.

Με χρήση της Πρότασης 4.1.1.4 έπεται το επόμενο.

Θεώρημα 4.1.6.1. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii. $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

α΄. *η* f *να είναι διαφορίσιμη,*

β΄. $Jf > 0$ *&*

γ΄. *η* f *να είναι* $1-1$.

Τότε

1. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*
2. $f^{-1} \in C(f(U);\mathbb{R}^n)$.

Σημείωση. *Τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 4.1.6.1 ισχύουν με ασθενέστερες υποθέσεις. Συγκεκριμένα, δεν είναι απαραίτητα τα σημεία ii.α΄. και ii.β΄.. Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως θεώρημα αναλλοίωτου πεδίου του Brouwer (the Brouwer theorem on invariance of domain), για την απόδειξη του οποίου απαιτούνται εργαλεία από την Αλγεβρική Τοπολογία (βλ., π.χ., το [18]).*

Για την απλή απόδειξη του ακόλουθου αποτελέσματος παραπέμπουμε στο [19, Lemma 2].

Πρόταση 4.1.6.1. *Έστω*

i. $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii. $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

   α΄. *η* f *να είναι διαφορίσιμη στο* x_0 *&*

   β΄. $Jf|_{x_0}(x_0) > 0$.

Τότε $\exists$

1. $a > 0$ *&*

2. $U_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$,

τ.ω.:

$$|f(x) - f(x_0)| \geq a\,|x - x_0|\,, \quad \forall x \in U_0.$$

Από το Θεώρημα 4.1.6.1 και την Πρόταση 4.1.6.1, έπεται το εξής.

Πόρισμα 4.1.6.1. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii. $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

   α΄. *η* f *να είναι διαφορίσιμη,*

   β΄. $Jf > 0$ *&*

   γ΄. *η* f *να είναι* $1-1$.

Τότε

1. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*

2. *η* f^{-1} *είναι διαφορίσιμη.*

Έτσι, με χρήση του Πορίσματος 4.1.2.3, μπορούμε εύκολα να πάρουμε με επαγωγή το επόμενο.

Πόρισμα 4.1.6.2. *Έστω*

i. $k \in \overline{\mathbb{N}}$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

iii. $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

   α΄. $Jf > 0$ *&*

   β΄. *η* f *να είναι* $1-1$.

Τότε

1. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*

2. $f^{-1} \in C^k(f(U);\mathbb{R}^n)$.

C^k περίπτωση, $k \in \overline{\mathbb{N}}$

Ισχυροποιώντας τις υποθέσεις της Πρόταση 4.1.6.1, παίρνουμε και ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.1.6.2. *Έστω*

i. $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii. $f \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $Jf|_{x_0}(x_0) > 0$.

Τότε $\exists$

1. $a > 0$ *&*
2. $U_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$,

τ.ω.:

$$|f(x) - f(y)| \geq a\,|x-y|\,,\ \forall\, x, y \in U_0,$$

από το οποίο έπεται άμεσα ότι η $f|_{U_0}$ *είναι* $1-1$.

Από το Πόρισμα 4.1.6.2 και την Πρόταση 4.1.6.2, έπεται το ζητούμενο.

Θεώρημα 4.1.6.2 (*αντίστροφης απεικόνισης,* C^k *περίπτωση*)**.** *Έστω*

i $k \in \overline{\mathbb{N}}$,

ii $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

iii $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $Jf(x_0) > 0$.

Τότε $\exists U_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$ *τ.ω.:*

1. $f(U_0) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$,
2. *η* $f|_{U_0}$ *να είναι* $1-1$ *&*
3. $f|_{U_0}{}^{-1} \in C^k(f(U_0);\mathbb{R}^n)$.

Διαφορίσιμη περίπτωση

Υπό το πρίσμα του Πορίσματος 4.1.6.1 μένει να δειχθεί ότι μια διαφορίσιμη, πλέον, f θα είναι και τοπικά $1-1$ (δλδ το αντίστοιχο της Πρότασησ 4.1.6.2), έτσι ώστε να πάρουμε την ασθενέστερη μορφή του θεωρήματος. Για την απόδειξη της δεν χρειάζονται παρά συμβατικά εργαλεία της Τοπολογίας. (βλ. το [19] ή το [5]).

Το αποτέλεσμα έχει ως εξής.

Θεώρημα 4.1.6.3 (*αντίστροφης απεικόνισης, διαφορίσιμη περίπτωση*)**.** *Έστω*

i $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii διαφορίσιμη $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $Jf(x_0) > 0$.

Τότε $\exists U_0 \in \mathcal{O}_{x_0}(U)$ *τ.ω.:*

1. $f(U_0) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$,
2. *η* $f|_{U_0}$ *να είναι* $1-1$ *&*
3. *η* $f|_{U_0}{}^{-1}\colon f(U_0) \to \mathbb{R}^n$ *να είναι διαφορίσιμη.*

4.1.7 Αλλαγή μεταβλητών

Εδώ εισάγουμε και μελετάμε μια έννοια απαραίτητη για την Ενότητα 4.5, αυτήν της αλλαγής μεταβλητών (change of variables), ή αλλιώς της αμφιδιαφόρισης, ή του διαφομορφισμού (diffeomorphism).

C^k περίπτωση, $k \in \overline{\mathbb{N}}$

Ορισμός 4.1.7.1. *Έστω*

i. $k \in \overline{\mathbb{N}}$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

iii. $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$.

Λέμε ότι η f είναι μία C^k αλλαγή μεταβλητών (στον $\mathbb{R}^n$) ανν

1. $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$,
2. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
3. *η f είναι* $1-1$ *&*
4. $f^{-1} \in C^k(f(U);\mathbb{R}^n)$.

Σημείωση. *Προφανώς, μια C^k, για κάποιο $k \in \overline{\mathbb{N}}$, αλλαγή μεταβλητών είναι ένας ομοιομορφισμός (ανοικτών συνόλων).*

Το παρακάτω αποτέλεσμα δίνει ουσιαστικά έναν ισοδύναμο ορισμό μιας C^k αλλαγής μεταβλητών. Η μία κατεύθυνση έπεται από το Πόρισμα 4.1.2.3, ενώ η άλλη από το Πόρισμα 4.1.6.2.

Πρόταση 4.1.7.1. *Έστω*

i. $k \in \overline{\mathbb{N}}$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

iii. $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$.

Η f είναι μια C^k αλλαγή μεταβλητών ανν

1. $f \in C^k(U;\mathbb{R}^n)$,
2. *η f είναι* $1-1$ *&*
3. $Jf > 0$.

Παράδειγμα (*πολικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^n$*). *Για $n \neq 1$ και για ανοικτό $I_0 \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ όπου*

$$I_0 = \begin{cases} (0,\rho)\times(0,2\pi), & \text{αν } n = 2, \\ (0,\rho)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)^{n-2}, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

μια βασική C^∞ αλλαγή μεταβλητών, οι συνιστώσες της οποίας είναι γνωστές ως πολικές συντεταγμένες (κυκλικές αν $n = 2$, σφαιρικές αν $n = 3$), είναι η $f_0\colon I_0 \to \mathbb{R}^n$ με

$$f_0(I_0) = B(0_n,\rho) \smallsetminus \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_1 \in [0,\rho) \text{ \& } x_2 = 0\right\},$$

όπου

$$\begin{aligned} f_0\colon I_0 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x_1\cos x_2, x_1 \sin x_2) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} &f_0\colon I_0 \to \mathbb{R}^n, \text{ για } n \geq 3 \\ &x \mapsto \left(x_1\cos x_2 \prod_{i=1}^{n-2}\sin x_{i+2},\, x_1\sin x_2 \prod_{i=1}^{n-2}\sin x_{i+2},\, x_1\cos x_3 \prod_{i=2}^{n-2}\sin x_{i+2},\, \ldots,\, x_1\cos x_n\right). \end{aligned}$$

Μάλιστα, μπορούμε να υπολογίσουμε με επαγωγή (με χρήση του αναπτύγματος κατά Laplace βρίσκουμε έναν αναδρομικό τύπο τον οποίο και αξιοποιούμε για την επαγωγή), ότι

$$\det Df_0(x) = \begin{cases} x_1, & \text{αν } n = 2, \\ (-1)^n {x_1}^{n-1} \prod\limits_{i=3}^{n+1} (\sin x_i)^{i-2}, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \qquad \forall x \in I_0$$

και άρα

$$Jf_0(x) = \begin{cases} x_1, & \text{αν } n = 2, \\ {x_1}^{n-1} \prod_{i=3}^{n+1} (\sin x_i)^{i-2}, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \quad \forall x \in I_0.$$

Γενικεύοντας, για επέκταση $\varpi^n_{i_1 i_2}$ *και*

$$I = \left(\left(\varpi^n_{i_1 i_2} \circ \pi^n_{12} \right) + \left(\hat{\varpi}^n_{i_1 i_2} \circ \hat{\pi}^n_{12} \right) \right) (I_0),$$

μπορούμε να θεωρήσουμε την C^∞ *αλλαγή μεταβλητών*

$$f = \left(\left(\varpi^n_{i_1 i_2} \circ \pi^n_{12} \right) + \left(\hat{\varpi}^n_{i_1 i_2} \circ \hat{\pi}^n_{12} \right) \right) \circ f_0 : I \to \mathbb{R}^n$$

με

$$f(I) = B(0_n, \rho) \smallsetminus \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x_{i_1} \in [0, \rho) \;\; \& \; x_{i_2} = 0 \right\}.$$

Από τις ιδιότητες της ορίζουσας, παίρνουμε ότι επίσης

$$\det Df(x) = \begin{cases} x_1, & \text{αν } n = 2, \\ (-1)^n {x_1}^{n-1} \prod_{i=3}^{n+1} (\sin x_i)^{i-2}, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \quad \forall x \in I_0$$

και άρα

$$Jf(x) = \begin{cases} x_1, & \text{αν } n = 2, \\ {x_1}^{n-1} \prod_{i=3}^{n+1} (\sin x_i)^{i-2}, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \quad \forall x \in I_0.$$

Στην συνέχεια παραθέτουμε ένα τεχνικό, αλλά όχι δύσκολο, αποτέλεσμα το οποίο μας λέει ότι μια αυθαίρετη C^k αλλαγή μεταβλητής μπορεί να γραφεί τοπικά ως πεπερασμένη σύνθεση συγκεκριμένης μορφής C^k αλλαγών μεταβλητής. Πρώτα ορίζουμε ποιά είναι αυτή η συγκεκριμένη μορφή.

Ορισμός 4.1.7.2. *Έστω* $k \in \overline{\mathbb{N}}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *και μια* C^k *αλλαγή μεταβλητών* $f \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$.

1. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, *λέμε ότι η* f *διατηρεί την* i*-οστή συντεταγμένη ανν* $f_i(x) = x_i \;\forall x \in U$.
2. *Λέμε ότι η* f *είναι απλή* C^k *αλλαγή μεταβλητών ανν διατηρεί όλες εκτός μιας από τις συντεταγμένες.*

Έτσι, με χρήση του Θεώρημα 4.1.2.1 και του Θεωρήματος 4.1.6.2, παίρνουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.1.7.1. *Έστω*

i. $k \in \overline{\mathbb{N}}$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

iii. μια C^k *αλλαγή μεταβλητών* $f \in C^k(U; \mathbb{R}^n)$.

Τότε $\forall x_0 \in U$, $\exists$

1. $m \in \mathbb{N}$ *&*
2. *μια συλλογή* $\{f_i\}_{i=1}^m$ *απλών* C^k *αλλαγών μεταβλητών ως εξής*

$$\mathcal{O}_{x_0}(U) \ni U_0 \xrightarrow{f_1} U_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_m} U_m \subseteq f(U),$$

τ.ω.: $f|_{U_0} = f_1 \circ \cdots \circ f_m$.

Διαφορίσιμη περίπτωση

Για όλα τα παραπάνω υπάρχει η ασθενέστερη εκδοχή που απαιτεί μόνο διαφορισιμότητα, και οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων είναι όμοιες.

Ορισμός 4.1.7.3. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii. $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$.

Λέμε ότι η f είναι μία διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών (στον $\mathbb{R}^n$) ανν

1. *η f είναι διαφορίσιμη,*
2. $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
3. *η f είναι $1-1$ &*
4. *η f^{-1} είναι διαφορίσιμη.*

Σημείωση. *Προφανώς, μια διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών είναι ένας ομοιομορφισμός.*

Πρόταση 4.1.7.2. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii. $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$.

Η f είναι μια διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών ανν

1. *η f είναι διαφορίσιμη,*
2. *η f είναι $1-1$ &*
3. $Jf > 0$.

Ορισμός 4.1.7.4. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και μια διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$.*

1. $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, *λέμε ότι η f διατηρεί την i-οστή συντεταγμένη ανν $f_i(x) = x_i \ \forall x \in U$.*
2. *Λέμε ότι η f είναι απλή διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών ανν διατηρεί όλες εκτός μιας από τις συντεταγμένες.*

Θεώρημα 4.1.7.2. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

ii. *μια διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών $f \in C(U;\mathbb{R}^n)$.*

Τότε $\forall x_0 \in U$, $\exists$

1. $m \in \mathbb{N}$ *&*
2. *μια συλλογή $\{f_i\}_{i=1}^m$ απλών διαφορίσιμων αλλαγών μεταβλητών ως εξής*

$$\mathcal{O}_{x_0}(U) \ni U_0 \xrightarrow{f_1} U_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_m} U_m \subseteq f(U),$$

τ.ω.: $f|_{U_0} = f_1 \circ \dots \circ f_m$.

4.1.8 Θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης

Εδώ θα μας απασχολήσουν δύο προβλήματα. Πρώτον, η εύρεση των διαφορίσεων συναρτήσεων που εμπλέκονται σε μια εξίσωση, δλδ συναρτήσεων σε «πεπλεγμένη μορφή». Δεύτερον, θα καταδείξουμε κατάλληλες συνθήκες που μας επιτρέπουν την ύπαρξη διαφορίσιμων τέτοιων συναρτήσεων.

Καταρχήν, μία απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.2.1 μας δίνει το εξής.

Πρόταση 4.1.8.1. *Έστω*

i. $m < n$,

ii. $U_0 \subseteq \mathbb{R}^m$,

iii. *διαφορίσιμη* $f_0 \colon U_0 \to \mathbb{R}^{n-m}$,

iv. *επέκταση* $\varpi^n_{i_1 \dots i_m}$,

v. $U = \left(\varpi^n_{i_1 \dots i_m}(U_0) + \hat{\varpi}^n_{i_1 \dots i_m}(f_0(U_0))\right) \subseteq \mathbb{R}^n$,

vi. $c \in \mathbb{R}^{n-m}$ *&*

vii. *διαφορίσιμη* $f \colon U \to \mathbb{R}^{n-m}$, *τ.ω.:*

$$f\left(\varpi^n_{i_1 \dots i_m}(x) + \left(\hat{\varpi}^n_{i_1 \dots i_m} \circ f_0\right)(x)\right) = c, \ \forall x \in U_0.$$

Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(t)}(t) \cdot \left(D f_0 \circ \pi^n_{i_1, \dots, i_m}\right)(t) = -\frac{\partial f}{\partial \pi^n_{i_1 \dots i_m}(t)}(t), \ \forall t \in U.$$

Το επόμενο είναι άμεσο.

Πόρισμα 4.1.8.1. *Αν, επιπλέον των υποθέσεων της Πρότασης 4.1.8.1, υποθέσουμε ότι*

vii.

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(t)}(t_0)\right) \neq 0, \ \text{για κάποιο } t_0 \in U,$$

τότε

$$\left(D f_0 \circ \pi^n_{i_1, \dots, i_m}\right)(t_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(t)}(t_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial \pi^n_{i_1 \dots i_m}(t)}(t_0).$$

Έτσι, με επαγωγή παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4.1.8.2. *Αν, επιπλέον των υποθέσεων της Πρότασης 4.1.8.1, υποθέσουμε ότι*

vii. $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *&*

viii. $f \in C^k(U; \mathbb{R}^{n-m})$ *με*

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(t)}(t)\right) \neq 0, \ \forall t \in U,$$

τότε $f_0 \in C^k(U_0; \mathbb{R}^{n-m})$ *και είναι τ.ω.:* $\forall$

1. $k_0 \in \mathbb{N}$,

2. $i \in \{1, \dots, n-m\}$ *&*

3. $j_1, \dots, j_{k_0} \in \{1, \dots, m\}$,

να ισχύει

$$\left(\frac{\partial^{k_0} f_{0i}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{k_0}}} \circ \pi^n_{i_1 \dots i_m}\right)(t) = \frac{p^{(k_0)}_{i, j_1, \dots, j_{k_0}}(t)}{\left(\det\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(t)}(t)\right)\right)^{2k_0 - 1}}, \ \forall t \in U,$$

όπου κάθε $p^{(k_0)}_{i, j_1, \dots, j_{k_0}}$ *είναι πολυωνυμική έκφραση των μερικών διαφορίσεων τάξης* $\leq k_0$ *των* f_s *με* $s \in \{1, \dots, n-m\}$.

Στις επόμενες δύο εκδοχές του βασικού αποτελέσματος, οι οποίες είναι ουσιαστικά εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.6.2 και του Θεωρήματος 4.1.6.3, αντίστοιχα, παίρνουμε δυο ικανές, από κοινού, συνθήκες για την ύπαρξη οικογένειας συναρτήσεων όπως η f_0.

C^k περίπτωση, $k \in \overline{\mathbb{N}}$

Θεώρημα 4.1.8.1 (*πεπλεγμένης συνάρτησης, C^k περίπτωση*). *Έστω*

α΄. $m < n$,

β΄. $t_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$,

γ΄. $k \in \overline{\mathbb{N}}$,

δ΄. $f \in C^k(U;\mathbb{R}^{n-m})$ *&*

ε΄. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$,

τ.ω.:

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(t)}(t_0)\right) \neq 0.$$

Τότε

1. $f(t_0) \in (f(U))^\circ$ *&*
2. $\exists$

   i. $U_1 \in \mathcal{O}_{\pi^n_{i_1\ldots i_m}(t_0)}\big(\pi^n_{i_1\ldots i_m}(U)\big)$,

   ii. $U_2 \in \mathcal{P}(f(U)) \cap \mathcal{O}_{f(t_0)}(\mathbb{R}^{n-m})$ *&*

   iii. *μοναδική συλλογή* $\{f_c\}_{c \in U_2} \subsetneq C^k(U_1;\mathbb{R}^{n-m})$,

   τ.ω.:

$$\left\{t \in U \,\middle|\, \pi^n_{i_1\ldots i_m}(t) \in U_1\right\} \cap f^{-1}(\{c\}) = \mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\ldots i_m}\big),\ \forall c \in U_2.$$

Άμεσα από το σημείο 1 του Θεωρήματος 4.1.8.1, έπεται το εξής.

Πόρισμα 4.1.8.3. *Έστω*

1. $m < n$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
3. $k \in \overline{\mathbb{N}}$,
4. $f \in C^k(U;\mathbb{R}^{n-m})$,
5. $\operatorname{rank} Df(t) = n - m,\ \forall t \in U$, *ή ισοδύναμα*, $\mathfrak{J}f > 0$.

Τότε $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-m})$.

Διαφορίσιμη περίπτωση

Θεώρημα 4.1.8.2 (*πεπλεγμένης συνάρτησης, διαφορίσιμη περίπτωση*). *Έστω*

i. $m < n$,

ii. $t_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. *διαφορίσιμη* $f \in C(U;\mathbb{R}^{n-m})$ *&*

iv. *περιορισμός* $\pi_{i_1\ldots i_m}$,

τ.ω.:

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(t)}(t_0)\right) \neq 0.$$

Τότε

1. $f(t_0) \in (f(U))^\circ$ *&*
2. $\exists$

i. $U_1 \in \mathcal{O}_{\pi^n_{i_1\dots i_m}(t_0)}\big(\pi^n_{i_1\dots i_m}(U)\big)$,

ii. $U_2 \in \mathcal{P}(f(U)) \cap \mathcal{O}_{f(t_0)}(\mathbb{R}^{n-m})$ &

iii. *μοναδική συλλογή διαφορίσιμων συναρτήσεων* $\{f_c\}_{c\in U_2} \subsetneq C(U_1;\mathbb{R}^{n-m})$,

τ.ω.:

$$\big\{t \in U \,\big|\, \pi^n_{i_1\dots i_m}(t) \in U_1\big\} \cap f^{-1}(\{c\}) = \mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big), \ \forall c \in U_2.$$

Πόρισμα 4.1.8.4. *Έστω*

1. $m < n$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
3. *διαφορίσιμη* $f \in C(U;\mathbb{R}^{n-m})$,
4. $\operatorname{rank} Df(t) = n - m$, $\forall t \in U$, *ή ισοδύναμα,* $\mathfrak{J}f > 0$.

Τότε $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-m})$.

4.1.9 Σύνολο στάθμης

Αφορμώμενοι από τα κεντρικά αποτελέσματα της Υποενότητας 4.1.8, εισάγουμε και μελετάμε ορισμένες έννοιες, οι οποίες είναι βασικές για την Ενότητα 6.4.

Ορισμός 4.1.9.1 (*σύνολο στάθμης*)**.** *Έστω μια συλλογή συνόλων*

$$\big\{\mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big)\big\}_{c\in U_2}$$

όπως στο Θεώρημα 4.1.8.2 (ή στο Θεώρημα 4.1.8.1).

1. *Κάθε* $c \in U_2$ *καλείται στάθμη.*
2. *Η ίδια η συλλογή των συνολών καλείται σταθμική δέσμη.*
3. *Κάθε στοιχείο της δέσμης στάθμεων καλείται σύνολο στάθμης (level set)* c.
4. *Το σύνολο*

$$U_\dagger = \bigcup_{c\in U_2} \mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big) \in \mathcal{O}_{t_0}(U)$$

καλείται σταθμική περιοχή.

Λόγω της μοναδικότητας της συλλογής συναρτήσεων του Θεωρήματος 4.1.8.2 (και του Θεωρήματος 4.1.8.1), έπεται άμεσα το ακόλουθο.

Πόρισμα 4.1.9.1. *Τα σύνολα στάθμης της σταθμικής δέσμης*

$$\big\{\mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big)\big\}_{c\in U_2}$$

του Θεωρήματος 4.1.8.1 (και του Θεωρήματος 4.1.8.1) είναι ξένα ανά δύο, δλδ

$$\mathrm{gr}\big(f_{c_1};\pi^n_{i_1\dots i_m}\big) \cap \mathrm{gr}\big(f_{c_2};\pi^n_{i_1\dots i_m}\big) = \varnothing, \ \forall\, c_1, c_2 \in U_2 \ \text{τ.ω.: } c_1 \neq c_2,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\big\{t \in U \,\big|\, \pi^n_{i_1\dots i_m}(t) \in U_1\big\} \cap f^{-1}(\{c_1\}) \cap f^{-1}(\{c_2\}) = \varnothing, \ \forall\, c_1, c_2 \in U_2 \ \text{τ.ω.: } c_1 \neq c_2.$$

Από το Θεώρημα 4.1.8.2 (και το Θεώρημα 4.1.8.1) και το Πόρισμα 4.1.9.1, παίρνουμε άμεσα το εξής.

Θεώρημα 4.1.9.1. *Έστω σταθμική δέσμη*

$$\big\{\mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big)\big\}_{c\in U_2}$$

όπως στο Θεώρημα 4.1.8.2 (ή στο Θεώρημα 4.1.8.1), και η αντίστοιχη σταθμική περιοχή

$$U_\dagger = \bigcup_{c\in U_2} \mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big).$$

Τότε

1. *$\exists$ $1-1$ αντιστοιχίες*
$$U_{\dagger} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} f(U_{\dagger}) = U_2 \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \{f_c\}_{c\in U_2},$$
όπου η πρώτη αντιστοιχία προκύπτει από το γεγονός ότι $\forall t \in U_{\dagger}$, $\exists! c \in U_2$ *τ.ω.:*
$$f(t) = f\big(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\big) = y - f_c(x) + c,$$
όπου (προφανώς) $x = \pi^n_{i_1\dots i_m}(t)$ *&* $y = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}(t)$.

2. *$\forall$ t & x όπως στο σημείο 1, ισχύει ότι*
$$\mathfrak{J}f(t) = \Big(\det\big(1_{n-m} + Df_c(x)\cdot Df_c{}^{\mathrm{T}}(x)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\det\big(1_m + Df_c{}^{\mathrm{T}}(x)\cdot Df_c(x)\big)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Σημείωση. *Λίγα λόγια σχετικά με το Θεώρημα 4.1.9.1.*

1. *Η έκφραση στο σημείο 1 είναι τετριμμένη, μιας και* $y = f_c(x)$. *Ωστόσο, μέσω αυτής της τετριμμένης έκφρασης παίρνουμε το ιδιαίτερα χρήσιμο αποτέλεσμα, σχετικά με τον γενικευμένο Jacobian, του σημείου 2.*

2. *Για την δεύτερη ισότητα του σημείου 2 χρησιμοποιήθηκε το Πόρισμα 2.3.1.*

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 4.1.9.1, εύκολα δείχνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, σύμφωνα με το οποίο μπορούμε να βρούμε μια αλλαγή μεταβλητών που να ισοπεδώνει/επιπεδοποιεί/ισιώνει (straighten/flatten out) μια σταθμική δέσμη.

Πρόταση 4.1.9.1 (*ισοπέδωση σταθμικής δέσμης*). *Έστω*

i. *σταθμική δέσμη*
$$\big\{\mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big)\big\}_{c\in U_2}$$
όπως στο Θεώρημα 4.1.8.2 (ή στο Θεώρημα 4.1.8.1), και η αντίστοιχη σταθμική περιοχή
$$U_{\dagger} = \bigcup_{c\in U_2} \mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big) = \bigcup_{c\in f(U_{\dagger})} \mathrm{gr}\big(f_c;\pi^n_{i_1\dots i_m}\big) \quad \&$$

ii. *συνάρτηση*
$$f_{\dagger}\colon U_{\dagger} \to \mathbb{R}^n$$
$$t = \varpi^n_{i_1\dots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y) \mapsto f_{\dagger}(t) = \varpi^n_{i_1\dots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(f(t)) = \widetilde{t}.$$
όπου $x = \pi^n_{i_1\dots i_m}(t)$ *και* $y = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}(t)$.

Τότε

1. *η $f_{\dagger}$ είναι διαφορίσιμη (C^k, αντίστοιχα) αλλαγή μεταβλητών,*

2. *η ${f_{\dagger}}^{-1}$ έχει ως εξής*
$${f_{\dagger}}^{-1}\colon f_{\dagger}(U_{\dagger}) \to \mathbb{R}^n$$
$$\widetilde{t} = \varpi^n_{i_1\dots i_m}(\widetilde{x}) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(\widetilde{y}) \mapsto {f_{\dagger}}^{-1}(t) = \varpi^n_{i_1\dots i_m}(\widetilde{x}) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(\widetilde{y} + f_c(\widetilde{x}) - c) = t,$$
όπου $\widetilde{x} = \pi^n_{i_1\dots i_m}\big(\widetilde{t}\big)$ *και* $\widetilde{y} = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}\big(\widetilde{t}\big)$.

3. *ισχύει ότι*
$$Jf_{\dagger} = J{f_{\dagger}}^{-1} = 1, \quad \&$$

4. *ισχύει ότι*
$$f_{\dagger}(U_{\dagger}) = \varpi^n_{i_1\dots i_m}(U_1) + \hat{\varpi}_{i_1\dots i_m}(f(U_{\dagger})) = \bigcup_{c\in f(U_{\dagger})} \mathrm{gr}\big(c|_{U_1};\pi^n_{i_1\dots i_m}\big).$$

Σημείωση. *Λίγα λόγια σχετικά με την Πρόταση 4.1.9.1.*

1. *Σε ό,τι αφορά την $f_{\dagger}$, $\exists$ $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των $t \in U_{\dagger}$ και των $c \in f(U_{\dagger})$, άρα η $f_{\dagger}$ είναι καλά ορισμένη.*

2. *Σε ό,τι αφορά την ${f_{\dagger}}^{-1}$, ο τύπος της εξάγεται άμεσα από την τετριμμένη έκφραση* $f(t) = y - f_c(x) + c$.

3. *Σε ό,τι αφορά τους τελεστές Jacobian, αρκεί να υπολογίσουμε τον $J{f_{\dagger}}^{-1}$, το οποίο είναι άμεσο.*

4.2 Μηδενοσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$

Τα μηδενοσύνολα (null sets), ή αλλιώς σύνολα μέτρου 0 (sets of measure zero), μας είναι απαραίτητα για την εξαγωγή βασικών αποτελεσμάτων της Ενότητας 4.3.

4.2.1 Όγκος διαστήματος του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 4.2.1.1 (όγκος διαστημάτων). *Καλούμε όγκο διαστημάτων του $\mathbb{R}^n$ μία συνολοσυνάρτηση $v\colon \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, τ.ω.:*

1. *αν $n = 1$, τότε $v(I) =$ μήκος του I $\forall I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$. Συγκεκριμένα, για αυθαίρετα $a, b \in \mathbb{R}$ με $a \leq b$ έχουμε*

   i. $v((a,b)) = v([a,b)) = v((a,b]) = v([a,b]) = b - a$ *και*

   ii. $v((-\infty,a)) = v((-\infty,a]) = v((a,\infty)) = v([a,\infty)) = v((-\infty,\infty)) = \infty$.

2. *στην γενική περίπτωση,*

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} v(I_i),\ \ \forall I = \prod_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\ \ (\text{δλδ } I_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R})\ \forall i \in \{1,\dots,n\}).$$

Η απόδειξη του παρακάτω αποτελέσματος, που δεν απαιτεί γνώσεις Θεωρίας Μέτρου Lebesgue, υπάρχει στο [3, Λήμμα 3.6, σελ. 22].

Πρόταση 4.2.1.1. 1. *Η οικογένεια*

$$\left\{ S = \bigcup_{i\in N} I_i \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\},\ I_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\ \forall i \in N\ \&\ I_i \cap I_j = \varnothing\ \forall\ i,j \in N \text{ με } i \neq j \right\}$$

είναι άλγεβρα στον $\mathbb{R}^n$.

2. *Έστω*

   i. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$,

   ii. $\{I_i\}_{i\in N} \subsetneq \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $I_i \cap I_j = \varnothing\ \forall\ i,j \in N$ *με* $i \neq j$ &

   iii. $S = \bigcup_{i\in N} I_i$ *και* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $S \subseteq I$.

   Τότε $\sum_{i\in N} v(I_i) \leq v(I)$, *και αν, επιπλέον,* $S \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$, *τότε* $\sum_{i\in N} v(I_i) = v(S)$.

4.2.2 Ορισμός και ιδιότητες μηδενοσυνόλων

Ορισμός 4.2.2.1. 1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το S είναι μηδενοσύνολο ανν*

$$\inf\left\{ \sum_{i\in\mathscr{I}} v(I_i) \,\middle|\, S \subseteq \bigcup_{i\in\mathscr{I}} I_i,\ \text{όπου } \{I_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subsetneq \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \right\} = 0,$$

ή ισοδύναμα

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \{I_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subsetneq \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \text{ τ.ω.: } S \subseteq \bigcup_{i\in\mathscr{I}} I_i\ \&\ \sum_{i\in\mathscr{I}} v(I_i) < \varepsilon.$$

2. *Θα συμβολίζουμε*

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \left\{ S \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{το } S \text{ είναι μηδενοσύνολο} \right\}.$$

Σημείωση. 1. *Στον Ορισμό 4.2.2.1 τα I_i μπορούν να απαιτηθούν κλειστά, ανοικτά, ούτε κλειστά ούτε ανοικτά, ή να μην απαιτηθεί τίποτα επ᾽ αυτού (όπως και κάναμε), κάτι που έπεται άμεσα με την χρήση του «$\frac{\varepsilon}{2^i}$ τεχνάσματος». Επιπλέον, η ένωση θα μπορούσε να είχε απαιτηθεί να είναι αριθμήσιμη (κάτι το οποίο δεν κάναμε). Επίσης, δεν γίνεται να απαιτηθούν μη φραγμένα τα I_i, αλλά μπορεί να απαιτηθούν φραγμένα ή να μην απαιτηθεί τίποτα (όπως και κάναμε).*

2. *Χρησιμοποιώντας όρους από την Θεωρία Μέτρου Lebesgue, ένα μηδενοσύνολο δεν είναι τίποτα άλλο από ένα σύνολο του οποίου το μέτρο Lebesgue $\exists$ και είναι ίσο με 0.*

3. *Η ιδιότητα «μηδενοσύνολο» είναι τοπική.*

Από τον Ορισμό 4.2.2.1 έπεται άμεσα το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.2.2.1. *Έστω $\{S, S_0, U\} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$.*

1. $\varnothing \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.
2. *Αν το S είναι αριθμήσιμο, τότε $S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Αν $S_0 \subseteq S$ και $S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, τότε $S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*
4. *Το $I \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*
5. *Αν $U \neq \varnothing$, τότε $U \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*

Συνδυάζοντας το σημείο 3 και το σημείο 4 της Πρότασης 4.2.2.1 με τον ορισμό του εσωτερικού ως προς την μετρική $\|\star\|$ ενός συνόλου, έπεται εύκολα το εξής.

Πόρισμα 4.2.2.1. 1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$ με $S^\circ \neq \varnothing$. Τότε το $S \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$. Αντίστροφα, αν $S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, τότε $S^\circ = \varnothing$.*

2. *Έστω $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$. Τότε $\partial S = S$.*

Με βάση την Πρόταση 4.2.1.1 παίρνουμε επίσης το εξής, για την απόδειξη του οποίου, η οποία δεν απαιτεί γνώσεις Θεωρίας Μέτρου Lebesgue, παραπέμπουμε στο [3, Πρόταση 3.7, σελ. 24].

Θεώρημα 4.2.2.1. *Έστω $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και $\{I\} \cup \{I_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Αν $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, τότε $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} S_i \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Αν $I \subseteq \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} I_i$, τότε $\upsilon(I) \le \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \upsilon(I_i)$.*

Χρησιμοποιώντας το σημείο 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1 και τον Ορισμό 4.2.2.1, μπορούμε εύκολα να πάρουμε το εξής.

Πρόταση 4.2.2.2. 1. *Έστω*

   i. $m < n$,
   ii. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*
   iii. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$.

   Αν $\pi^n_{i_1\ldots i_m}(S) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m)$, τότε $S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Έστω $m < n$, $S \subseteq \mathbb{R}^m$ και επέκταση $\varpi^n_{i_1\ldots i_m}$. Τότε $\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(S) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Αν $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$, τότε $\partial I \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*
4. *Έστω*

   i. $m < n$,
   ii. $S_0 \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^m$ *τ.ω.:* $S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m)$,
   iii. $f\colon S \to \mathbb{R}^{n-m}$ *τ.ω.:* $f \in C(S \setminus S_0; \mathbb{R}^{n-m})$ *&*
   iv. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$.

   Τότε $\mathrm{gr}\big(f; \pi^n_{i_1\ldots i_m}\big) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

Άμεσα από το σημείο 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1 και το σημείο 4 του Θεωρήματος 4.2.2.2, έπεται το ακόλουθο.

Πόρισμα 4.2.2.2. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\rho > 0$. Τότε $\partial B(x_0, \rho) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*

4.2.3 Μηδενοσύνολα και συναρτήσεις

Εδώ παρουσιάζουμε ορισμένα κομβικά αποτελέσματα που αφορούν την σχέση συγκεκριμένων συναρτήσεων με τα μηδενοσύνολα.

Εικόνα μηδενοσυνόλων

Κάνοντας χρήση του σημείου 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1 σε συνδυασμό με την ισοδυναμία των νορμών $|\star|$ και $\|\star\|$, άμεσα επαληθεύουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.2.3.1. *Έστω*

1. $S \subseteq \mathbb{R}^m$,
2. $f \in Lip_{loc}(S;\mathbb{R}^n)$ &
3. $S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m)$.

Τότε $f(S_0 \cap S) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

Σημείωση. 1. *Η ιδιότητα μιας συνάρτησης να απεικονίζει μηδενοσύνολα σε μηδενοσύνολα, είναι γνωστή ως ιδιότητα/συνθήκη N του Lusin (the Lusin N-property/condition).*

2. *Έστω* $S \subseteq \mathbb{R}^m$. *Αν ισχύει απλά ότι* $f \in C(S;\mathbb{R}^n)$, *τότε η* f *δεν έχει απαραίτητα την ιδιότητα N του Lusin. Για παράδειγμα, για την καμπύλη* $f \in C\big([0,1];\mathbb{R}^2\big)$ *του Peano που γεμίζει τον χώρο (Peano space-filling curve) (βλ., π.χ., το [15] και το [18]) ισχύει ότι* $f([0,1]) = [0,1]^2$. *Έτσι, αν ορίσουμε μια* $f_0\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ *ως* $f_0(x) = f(x_1)$ $\forall x \in [0,1]^2$, *τότε* $f_0([0,1]\times\{x\}) \notin \mathcal{N}\big(\mathbb{R}^2\big)$ $\forall x \in [0,1]$, *σύμφωνα με το σημείο 4 της Πρότασης 4.2.2.1, ενώ* $([0,1]\times\{x\}) \in \mathcal{N}\big(\mathbb{R}^2\big)$ $\forall x \in [0,1]$, *σύμφωνα με το σημείο 2 της Πρότασης 4.2.2.1 και το σημείο 1 της Πρότασης 4.2.2.2.*

Απευθείας από το Πόρισμα 4.1.2.2 και την Πρόταση 4.2.3.1, έπεται το ακόλουθο.

Πόρισμα 4.2.3.1. *Έστω*

i. $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$,

ii. *διαφορίσιμη* $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $\|Df\| \in B_{loc}(S;\mathbb{R})$ &

iii. $S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m)$.

Τότε $f(S_0 \cap S) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

Πόρισμα για τους γραμμικούς υποχώρους του $\mathbb{R}^n$

Τώρα, ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα, το οποίο έπεται με χρήση του σημείου 2 της Πρότασης 4.2.2.2 και της Πρότασης 4.2.3.1, είναι το εξής.

Θεώρημα 4.2.3.1. *Έστω γραμμικός υπόχωρος* $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ *με* $\dim S < n$. *Τότε* $S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ $\forall S_0 \subseteq S$.

Θεώρημα των Morse-Sard

Τέλος, παραθέτουμε το θεώρημα των Morse-Sard, η απόδειξη του οποίου μαζί με αυτές των προαπαιτούμενών της (ένα από αυτά είναι και το Θεώρημα 4.1.5.1) μπορούν να βρεθούν στο [28] και η μελέτη τους ωστόσο δεν απαιτεί γνώση εξειδικευμένων αποτελεσμάτων πλην όσων ήδη έχουμε παραθέσει.

Σημείωση. *Αν και στην απόδειξη που αναφέρουμε παραπάνω φαίνεται να χρησιμοποιείται το Θεώρημα 4.3.1.5 της επόμενης ενότητας, ωστόσο κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο. Όπου επικαλείται το θεώρημα αυτό αρκεί μονάχα η χρήση του Θεωρήματος 4.2.3.1, όπως γίνεται ξεκάθαρο και από την αναφορά στο [31] εντός της ίδιας της απόδειξης.*

Πρώτα όμως θα χρειαστεί να επεκτείνουμε κάποιες γνωστές έννοιες.

Ορισμός 4.2.3.1. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και* $f\colon U \to \mathbb{R}^n$.

1. *Λέμε ένα σημείο* $x \in U$ *κρίσιμο της* f *ανν ο* $Df(x)$ *είτε δεν ορίζεται, είτε δεν είναι της μέγιστης τάξης, δλδ* $\operatorname{rank} Df(x) < \min\{m,n\}$.
2. *Λέμε μία τιμή* $y \in f(U)$ *κρίσιμη της* f *ανν* $y = f(x)$ *για κάποιο κρίσιμο σημείο* x *της* f.

Παρατήρηση. *Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.3.1, το σύνολο των κρίσιμων σημείων μιας* C^1 *συνάρτησης* f *είναι το σύνολο των σημείων για τα οποία ο* Df *δεν είναι της μέγιστης τάξης.*

Θεώρημα 4.2.3.2 (*Morse-Sard*)**.** *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *και* $f \in C^{\max\{1,m-n+1\}}(U,\mathbb{R}^n)$. *Τότε το σύνολο των κρίσιμων τιμών της* f *είναι μηδενοσύνολο.*

4.3 Ολοκληρωτικός Λογισμός κατά Riemann

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [7], [17], και [26], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

4.3.1 Ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης επί συμπαγούς διαστήματος του $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 4.3.1.1 (*διαμέριση συμπαγούς διαστήματος*)**.** *1. Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$, με $\partial I = \{a, b\}$ και $a < b$. Ορίζουμε μία διαμέριση P του $\overline{I}$ να είναι ένα πεπερασμένο $\subsetneq \overline{I}$ τ.ω.:*

$$P = \{t_i\}_{i=0}^{k} \text{ με } a = t_0 < \cdots < t_k = b,$$

και συμβολίζουμε

$$\{P\} = \{[t_{i-1}, t_i]\}_{i=0}^{k} \subsetneq \mathcal{I}(\mathbb{R}).$$

Θα χρησιμοποιούμε το P, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετες 1-dim διαμερίσεις.

2. Γενικότερα, έστω μη τετριμμένο $I = \prod_{i=1}^{n} I_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, δλδ $I_i \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Ορίζουμε μία διαμέριση P του $\overline{I}$ να είναι ένα πεπερασμένο $\subsetneq \overline{I}$ τ.ω.:

$$P = \prod_{i=1}^{n} P_i, \text{ όπου } P_i \text{ διαμέριση του } \overline{I_i} \ \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

και συμβολίζουμε

$$\{P\} = \prod_{i=1}^{n} \{P_i\} \subsetneq \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \ \& \ \|P\| = \max_{J \in \{P\}} \{\upsilon(J)\},$$

καθώς επίσης

$$\mathfrak{p}_{\overline{I}} = \left\{P \subsetneq \overline{I} \,\middle|\, \text{η } P \text{ είναι διαμέριση του } \overline{I}\right\}.$$

Θα χρησιμοποιούμε το P, με ή χωρίς δείκτη, για να αναφερθούμε σε αυθαίρετες n-dim διαμερίσεις.

Ορισμός 4.3.1.2 (*κάτω & άνω αθροίσματα του Darboux*)**.** *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}$ και $f \in B(\overline{I}; \mathbb{R})$. Θέτοντας*

$$m_{I_*}(f) = \inf\left\{f(x) \,\middle|\, x \in I_*\right\} \ \& \ M_{I_*}(f) = \sup\left\{f(x) \,\middle|\, x \in I_*\right\}, \ \forall I_* \in \{P\},$$

ορίζουμε το κάτω & άνω, αντίστοιχα, αθροίσμα της f καθοριζόμενο από την P, μέσω των εξισώσεων

$$L(f, P) = \sum_{I_* \in \{P\}} m_{I_*}(f)\upsilon(I_*) \ \& \ U(f, P) = \sum_{I_* \in \{P\}} M_{I_*}(f)\upsilon(I_*).$$

Ορισμός 4.3.1.3 (*εκλέπτυνση διαμέρισης*)**.** *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $P_1, P_2 \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}$. Η P_2 λέγεται εκλέπτυνση της P_1 ανν*

1. *$P_2 \supsetneq P_1$ &*
2. *$\operatorname{card} P_2 > \operatorname{card} P_1$,*

και σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $P_2 > P_1$.

Το επόμενο είναι άμεσο.

Πρόταση 4.3.1.1. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $P_1, P_2 \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}$ και $f \in B(\overline{I}; \mathbb{R})$. Αν $P_2 > P_1$, τότε*

$$L(f, P_1) \leq L(f, P_2) \text{ και } U(f, P_2) \leq U(f, P_1).$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.1.1 και το ότι η ένωση δύο διαμερίσεων είναι εκλέπτυνση έκαστης, παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.3.1.2. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $P_1, P_2 \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$. Τότε*

$$L(f,P_1) \le U(f,P_2).$$

Βάσει της Πρόταση 4.3.1.2 ο ακόλουθος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.3.1.4 (*κάτω & άνω ολοκλήρωμα επί συμπαγούς διαστήματος*)**.** *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$. Ορίζουμε το κάτω & άνω, αντίστοιχα, ολοκληρώμα της f (επί του $\overline{I}$), μέσω των εξισώσεων*

$$\underline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx = \sup_{P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}} \{L(f,P)\} \text{ και } \overline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx = \inf_{P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}} \{U(f,P)\}.$$

Πάλι μέσω της Πρόταση 4.3.1.2, παίρνουμε άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 4.3.1.3. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$. Τότε*

$$\underline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx \le \overline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx.$$

Ορισμός 4.3.1.5 (*ολοκλήρωμα επί συμπαγούς διαστήματος*)**.** *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$. Αν*

$$\underline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx = \overline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx,$$

τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη (επί του $\overline{I}$) και ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f (επί του $\overline{I}$) μέσω των εξισώσεων

$$\int_{\overline{I}} f(x)dx = \underline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx = \overline{\int_{\overline{I}}} f(x)dx.$$

Το επόμενο αποτελεί άμεση εφαρμογή των ορισμών, σε συνδυασμό με το σημείο 3 και το σημείο 4 της Πρότασης 4.2.2.1.

Πρόταση 4.3.1.4. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, καθώς επίσης ολοκληρώσιμη $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$.*

1. *Αν $f \ge 0$, τότε*
$$\int_{\overline{I}} f(x)dx \ge 0.$$

2. *Αν $\exists S \in \mathcal{P}(\overline{I}) \cap \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f|_{\overline{I} \setminus S} = 0$, τότε*
$$\int_{\overline{I}} f(x)dx = 0.$$

Ύπαρξη ολοκληρώματος φραγμένης συνάρτησης επί συμπαγούς διαστήματος του $\mathbb{R}^n$

Εδώ καταδεικνύουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα μη τετριμμένο και συμπαγές διάστημα του $\mathbb{R}^n$.

Συνθήκη του Riemann. Το επόμενο εύκολο αποτέλεσμα μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ολοκληρωσιμότητας μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα μη τετριμμένο και συμπαγές διάστημα του $\mathbb{R}^n$, μέσω των διαμερίσεων του διαστήματος.

Θεώρημα 4.3.1.1 (*Riemann*)**.** *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$. Η f είναι ολοκληρώσιμη ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}$ τ.ω.:*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, το Θεώρημα 4.3.1.1 μπορεί να πάρει τις εξής δύο μορφές.

Θεώρημα 4.3.1.2. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω.:*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,\ \forall P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}} \text{ με } \|P\| < \delta.$$

Θεώρημα 4.3.1.3. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη με*

$$\int_{\overline{I}} f(x)dx = a$$

ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω.:

$$\left| \sum_{I_* \in \{P\}} f(x_{I_*})\upsilon(I_*) - a \right| < \varepsilon,\ \forall P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}} \text{ με } \|P\| < \delta \ \&\ \forall \{x_{I_*} \in I_*\}_{I_* \in \{P\}}.$$

Μία άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.1.1 είναι το εξής αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4.3.1.1. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $c \in \mathbb{R}$. Τότε η $c|_{\overline{I}}$ είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\int_{\overline{I}} c dx = c\upsilon(I) = c \sum_{I_* \in \{P\}} \upsilon(I_*),\ \forall P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}.$$

Από το Θεώρημα 4.3.1.1 και το Πόρισμα 4.3.1.1, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 4.3.1.5. *Έστω*

1. *μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,*
2. *$f \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ &*
3. *ακολουθία $\big\{f_i \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big) \,\big|\, \text{η } f_i \text{ είναι ολοκληρώσιμη}\big\}_{i \in \mathbb{N}}$ τ.ω.: $f_i \xrightarrow{\text{ομ}} f$.*

Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα

$$\int_{\overline{I}} f_i(x)dx \to \int_{\overline{I}} f(x)dx.$$

Μια ακόμα εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.1.1 είναι το εξής.

Πρόταση 4.3.1.6. *Έστω*

1. *μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,*
2. *ολοκληρώσιμη $f \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ τ.ω.: $f\big(\overline{I}\big) \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ μη τετριμμένο &*
3. *$f_0 \in C\big(f\big(\overline{I}\big);\mathbb{R}\big)$.*

Τότε η $(f_0 \circ f) \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ είναι ολοκληρώσιμη.

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.3.1.6, είναι το επόμενο.

Πόρισμα 4.3.1.2. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και ολοκληρώσιμες $f_1, f_2 \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$. Τότε*

1. *η $|f_1| \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ είναι ολοκληρώσιμη,*
2. *η ${f_1}^2 \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ είναι ολοκληρώσιμη &*
3. *η $(f_1 f_2) \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Θεώρημα του Lebesgue. Εδώ παραθέτουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ολοκληρωσιμότητας μιας συνάρτησης f ορισμένης σε ένα μη τετριμμένο και συμπαγές διάστημα του $\mathbb{R}^n$, μέσω των μηδενοσυνόλων. Θα χρειαστούμε κάποια προαπαιτούμενα.

Για το επόμενο, αρκεί να δούμε ότι η συνάρτηση, της οποίας το όριο θεωρούμε, είναι φθίνουσα.

Πρόταση 4.3.1.7. *Αν $x_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$, τότε $\exists$ το*

$$\inf\left\{\sup f(Q(x_0;\rho)\cap S) - \inf f(Q(x_0;\rho)\cap S)\,\middle|\,\rho > 0\right\}.$$

Ορισμός 4.3.1.6 (*ταλάντωση φραγμένης συνάρτησης*)**.** *Έστω $x_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$. Ορίζουμε την ταλάντωση $\tau_f(x_0)$ της f στο x_0, ως το infimum της Πρότασης 4.3.1.7.*

Η $\tau_f(x_0)$ μετρά κατά πόσον η f είναι συνεχής στο x_0, όπως φαίνεται παρακάτω.

Πρόταση 4.3.1.8. *Έστω $x_0 \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$. Η f είναι συνεχής στο x_0 ανν $\tau_f(x_0) = 0$.*

Παρακάτω δίνουμε δύο εύκολα αποτελέσματα σχετικά με την ταλάντωση μιας φραγμένης συνάρτησης. Το πρώτο έπεται κατευθείαν από τους ορισμούς.

Πρόταση 4.3.1.9. *Έστω κλειστό $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in B(S;\mathbb{R})$ και $\varepsilon > 0$. Τότε το $\left\{x \in S \,\middle|\, \tau_f(x) \geq \varepsilon\right\}$ είναι κλειστό (ως σύνολο στον $\mathbb{R}^n$).*

Το δεύτερο έπεται με χρήση του Πρόταση 2.1.4.

Πρόταση 4.3.1.10. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $f \in B(S;\mathbb{R})$ και $\varepsilon > 0$. Αν $\tau_f(x) < \varepsilon$ $\forall x \in \overline{I}$, τότε $\exists P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}$ τ.ω.:*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon\, v(I).$$

Τώρα, αξιοποιώντας την Πρόταση 4.3.1.9 και την Πρόταση 4.3.1.10, εξάγουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.3.1.4 (*Lebesgue*)**.** *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$. Η f είναι ολοκληρώσιμη ανν το σύνολο των σημείων ασυνέχειάς της είναι μηδενοσύνολο.*

Με χρήση του Θεωρήματος 4.3.1.4, εξάγουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Πρόταση 4.3.1.11. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $f_1, f_2 : \overline{I} \to \mathbb{R}^n$ και $f_3, f_4 : \overline{I} \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.:*

$$f_3(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \text{ και } f_4(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\},\ \forall x \in S.$$

1. *Αν οι f_1 και f_2 είναι συνεχής στο $x_0 \in S$, τότε το ίδιο θα είναι και οι f_3 και f_4.*
2. *Αν οι f_1 και f_2 είναι ολοκληρώσιμες, τότε το ίδιο θα είναι και οι f_3 και f_4.*

Πρόταση 4.3.1.12. *Έστω μη τετριμμένα $I_1, I_2 \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, καθώς επίσης $f \in B(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ τ.ω.: $f\Big(\big(\overline{I_1}\cap\overline{I_2}\big)^c\Big) = \{0\}$. Τότε η $f|_{\overline{I_1}}$ είναι ολοκληρώσιμη ανν η $f|_{\overline{I_2}}$ είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση θα ισχύει*

$$\int_{\overline{I_1}} f(x)dx = \int_{\overline{I_2}} f(x)dx.$$

Συνδυάζοντας την Πρόταση 4.3.1.4 με το Θεώρημα 4.3.1.4, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 4.3.1.13. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$.*

1. *Έστω, επιπλέον, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη.*
   i. *Αν $f \geq 0$ και*
   $$\int_{\overline{I}} f(x)dx = 0,$$
   τότε $\exists S \in \mathcal{P}(\overline{I})\cap\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f|_{\overline{I}\setminus S} = 0$.
   ii. *Αν $f > 0$, τότε*
   $$\int_{\overline{I}} f(x)dx > 0.$$
2. *Αν $\exists$ κλειστό $S \in \mathcal{P}(\overline{I})\cap\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f|_{\overline{I}\setminus S} = 0$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και*
   $$\int_{\overline{I}} f(x)dx = 0.$$

Υπολογισμός ολοκληρώματος φραγμένης συνάρτησης επί συμπαγούς διαστήματος του $\mathbb{R}^n$

Εδώ ασχολούμαστε με το θεώρημα του Fubini, ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε πολλαπλά ολοκληρώματα συναρτήσεων.

Παρατήρηση. *Έστω*

1. $m < n$,
2. *μη τετριμμένο* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
3. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1 \ldots i_m}$,
4. $I_1 = \pi^n_{i_1 \ldots i_m}(I)$ & $I_2 = \hat{\pi}^n_{i_1 \ldots i_m}(I)$ &
5. $f \in B\big(\overline{I}; \mathbb{R}\big)$.

Τότε ορίζονται καλά οι πραγματικές ποσότητες

$$\underline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;x)dy \quad \& \quad \overline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;x)dy, \ \forall x \in \overline{I_1},$$

όπως επίσης, και οι

$$\underline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;y)dx \quad \& \quad \overline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;y)dx, \ \forall y \in \overline{I_2}.$$

Έτσι, ορίζονται καλά οι συναρτήσεις

$$\underline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;\star)dy \colon \overline{I_1} \to \mathbb{R} \quad \& \quad \overline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;\star)dy \colon \overline{I_1} \to \mathbb{R},$$

όπως επίσης οι

$$\underline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;\star)dx \colon \overline{I_2} \to \mathbb{R} \quad \& \quad \overline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;\star)dx \colon \overline{I_2} \to \mathbb{R}.$$

Θεώρημα 4.3.1.5 (*Fubini*)**.** *Έστω*

1. $m < n$,
2. *μη τετριμμένο* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
3. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1 \ldots i_m}$,
4. $I_1 = \pi^n_{i_1 \ldots i_m}(I)$ & $I_2 = \hat{\pi}^n_{i_1 \ldots i_m}(I)$ &
5. $f \in B\big(\overline{I}; \mathbb{R}\big)$.

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη (επί του $\overline{I}$), τότε και οι

$$\underline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;\star)dy \colon \overline{I_1} \to \mathbb{R} \quad \& \quad \overline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;\star)dy \colon \overline{I_1} \to \mathbb{R}$$

είναι ολοκληρώσιμες (επί του $\overline{I_1}$) και μάλιστα

$$\int_{\overline{I}} f(t)dt = \int_{\overline{I_1}} \left(\underline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;x)dy \right) dx = \int_{\overline{I_1}} \left(\overline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;x)dy \right) dx.$$

Θεωρώντας τις εξής αλλαγές $x \leftrightarrow y$ και $\pi^n_{i_1 \ldots i_m} \leftrightarrow \hat{\pi}^n_{i_1 \ldots i_m}$, στο Θεώρημα 4.3.1.5, παίρνουμε απευθείας το εξής.

Πόρισμα 4.3.1.3. *Έστω*

1. $m < n$,
2. *μη τετριμμένο* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
3. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1 \dots i_m}$,
4. $I_1 = \pi^n_{i_1 \dots i_m}(I)$ & $I_2 = \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(I)$ &
5. $f \in B(\overline{I}; \mathbb{R})$.

Αν η f *είναι ολοκληρώσιμη (επί του* $\overline{I}$*), τότε και οι*

$$\underline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;\star)dy : \overline{I_1} \to \mathbb{R} \quad \& \quad \overline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;\star)dy : \overline{I_1} \to \mathbb{R}$$

είναι ολοκληρώσιμες (επί του $\overline{I_1}$*), όπως επίσης και οι*

$$\underline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;\star)dx : \overline{I_2} \to \mathbb{R} \quad \& \quad \overline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;\star)dx : \overline{I_2} \to \mathbb{R}$$

είναι ολοκληρώσιμες (επί του $\overline{I_2}$*), και μάλιστα*

$$\int_{\overline{I}} f(t)dt = \int_{\overline{I_1}} \left(\underline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;x)dy \right) dx = \int_{\overline{I_1}} \left(\overline{\int_{\overline{I_2}}} f(y;x)dy \right) dx =$$

$$= \int_{\overline{I_2}} \left(\underline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;y)dx \right) dy = \int_{\overline{I_2}} \left(\overline{\int_{\overline{I_1}}} f(x;y)dx \right) dy.$$

Έτσι, τα επόμενα είναι άμεσα.

Πόρισμα 4.3.1.4. *Έστω*

1. $m < n$,
2. *μη τετριμμένο* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
3. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1 \dots i_m}$,
4. $I_1 = \pi^n_{i_1 \dots i_m}(I)$ & $I_2 = \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(I)$ &
5. $f \in B(\overline{I}; \mathbb{R})$.

Αν $\exists$ *τα*

$$\int_{\overline{I}} f(t)dt \quad \& \quad \int_{\overline{I_2}} f(y;x)dy \;\; \forall x \in \overline{I_1},$$

τότε

$$\int_{\overline{I}} f(t)dt = \int_{\overline{I_1}} \left(\int_{\overline{I_2}} f(y;x)dy \right) dx.$$

Πόρισμα 4.3.1.5. *Έστω*

1. $m < n$,
2. *μη τετριμμένο* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
3. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1 \dots i_m}$,
4. $I_1 = \pi^n_{i_1 \dots i_m}(I)$ & $I_2 = \hat{\pi}^n_{i_1 \dots i_m}(I)$ &

5. $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$.

Αν $\exists$ *τα*

$$\int_{\overline{I}} f(t)dt, \quad \int_{\overline{I_2}} f(y;x)dy \ \forall x \in \overline{I_1} \ \ \& \ \int_{\overline{I_1}} f(x;y)dx \ \forall y \in \overline{I_2},$$

τότε

$$\int_{\overline{I}} f(t)dt = \int_{\overline{I_1}} \left(\int_{\overline{I_2}} f(y;x)dy \right) dx = \int_{\overline{I_2}} \left(\int_{\overline{I_1}} f(x;y)dx \right) dy.$$

4.3.2 Ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης επί φραγμένου υποσύνολου του $\mathbb{R}^n$

Λόγω της Πρότασης 4.3.1.12 ο παρακάτω γενικότερος ορισμός του ολοκληρώματος έχει νόημα, καθώς είναι ανεξάρτητος της επιλογής του διαστήματος I.

Ορισμός 4.3.2.1 (*ολοκλήρωμα επί φραγμένου υποσύνολου*)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
2. $f \in B(S;\mathbb{R})$, *μέσω της οποίας ορίζουμε την* $\widetilde{f} \in B(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *με*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in S, \\ 0, & \text{αλλιώς } \& \end{cases}$$

3. *μη τετριμμένο* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $S \subseteq \overline{I}$.

Θα λέμε ότι η f *είναι ολοκληρώσιμη (επί του* S*) ανν η* $\widetilde{f}|_{\overline{I}}$ *είναι ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε το ολοκλήρωμα της* f *(επί του* S*) ως*

$$\int_S f(x)dx = \int_{\overline{I}} \widetilde{f}(x)dx.$$

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 4.3.2.1, η Πρόταση 4.3.2.1 και η Πρόταση 4.3.1.13 παίρνουν τις εξής μορφές, αντίστοιχα.

Πόρισμα 4.3.2.1. *Έστω* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*, καθώς επίσης ολοκληρώσιμη* $f \in B(S;\mathbb{R})$.

1. *Αν* $f \geq 0$*, τότε*

$$\int_S f(x)dx \geq 0.$$

2. *Αν* $\exists S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f|_{S \setminus S_0} = 0$*, τότε*

$$\int_S f(x)dx = 0.$$

3. *Αν* $S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$*, τότε*

$$\int_S f(x)dx = 0.$$

Πόρισμα 4.3.2.2. *Έστω* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και* $f \in B(S;\mathbb{R})$.

1. *Έστω, επιπλέον, ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη.*

   i. *Αν* $f \geq 0$ *και*

$$\int_S f(x)dx = 0,$$

   τότε $\exists S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f|_{S \setminus S_0} = 0$.

ii. *Αν* $S \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *και* $f > 0$, *τότε*

$$\int_S f(x)dx > 0.$$

2. *Αν* $\exists\ S_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f|_{S \setminus S_0} = 0$, *τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_S f(x)dx = 0.$$

Από το σημείο 2 του Πορίσματος 4.3.2.2 (είτε απευθείας από το σημείο 2 της Πρότασης 4.3.1.13), παίρνουμε άμεσα το επόμενο.

Πόρισμα 4.3.2.3. *Έστω* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και* $f \in B(S;\mathbb{R})$. *Αν* $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, *τότε η* f *είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_S f(x)dx = 0.$$

Από την Πρόταση 4.3.1.11, εξάγουμε το εξής.

Πόρισμα 4.3.2.4. *Έστω* $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_1, f_2 : S \to \mathbb{R}^n$ *και* $f_3, f_4 : S \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:*

$$f_3(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \text{ και } f_4(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\},\ \forall x \in S.$$

1. *Αν οι* f_1 *και* f_2 *είναι συνεχής στο* $x_0 \in S$, *τότε το ίδιο θα είναι και οι* f_3 *και* f_4.
2. *Αν οι* f_1 *και* f_2 *είναι ολοκληρώσιμες, τότε το ίδιο θα είναι και οι* f_3 *και* f_4.

Η Πρόταση 4.3.1.5 γενικεύεται με την σειρά της ως εξής.

Πόρισμα 4.3.2.5. *Έστω*

1. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
2. $f \in B(S;\mathbb{R})$ &
3. *ακολουθία* $\{f_i \in B(S;\mathbb{R}) \,|\, \text{η } f_i \text{ είναι ολοκληρώσιμη}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *τ.ω.:* $f_i \xrightarrow{\text{ομ}} f$.

Τότε η f *είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\int_S f_i(x)dx \to \int_S f(x)dx.$$

Επίσης, το Πόρισμα 4.3.1.2 παίρνει την εξής μορφή.

Πόρισμα 4.3.2.6. *Έστω* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και ολοκληρώσιμες* $f_1, f_2 \in B(S;\mathbb{R})$. *Τότε*

1. *η* $|f_1| \in B(S;\mathbb{R})$ *είναι ολοκληρώσιμη,*
2. *η* ${f_1}^2 \in B(S;\mathbb{R})$ *είναι ολοκληρώσιμη &*
3. *η* $(f_1 f_2) \in B(S;\mathbb{R})$ *είναι ολοκληρώσιμη.*

Με χρήση του Ορισμού 4.3.1.5, του Θεωρήματος 4.3.1.4, του σημείου 3 του Πορίσματος 4.3.2.1 και του Πορίσματος 4.3.2.6 παίρνουμε το επόμενο.

Πρόταση 4.3.2.1. *Έστω* $a, b \in \mathbb{R}$, *μη τετριμμένο* $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$, $\{S, S_0\} \cup \{S_i\}_{i\in N} \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\}$ *και* $f_1, f_2 \in B(S;\mathbb{R})$.

1. *Αν οι* f_1 *και* f_2 *είναι ολοκληρώσιμες, τότε και η* $(af_1 + bf_2) : S \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\int_S (af_1 + bf_2)(x)dx = a\int_S f_1(x)dx + b\int_S f_2(x)dx.$$

2. *Αν οι* f_1 *και* f_2 *είναι ολοκληρώσιμες και* $f_1(x) \le f_2(x)\ \forall x \in S$, *τότε*

$$\int_S f_1(x)dx \le \int_S f_2(x)dx.$$

3. *Αν η* f_1 *είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η* $|f_1|\colon S \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\left|\int_S f_1(x)dx\right| \leq \int_S |f_1(x)|\,dx.$$

4. *Αν* $S_0 \subseteq S$, $f_1 \geq 0$ *και επίσης οι* f_1 *και* $f_1|_{S_0}$ *είναι ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\int_{S_0} f_1(x)dx \leq \int_S f_1(x)dx.$$

5. *Αν* $S = S_i \cup S_j$ *με* $i,j \in N$ *και επίσης οι* $f_1|_{S_i}$ *και* $f_1|_{S_j}$ *είναι ολοκληρώσιμες, τότε και οι* f_1, $f_1|_{S_i \cap S_j}$, $f_1|_{S_i \smallsetminus S_j}$ *και* $f_1|_{S_j \smallsetminus S_i}$ *είναι ολοκληρώσιμες, και μάλιστα*

$$\int_S f_1(x)dx = \int_{S_i} f_1(x)dx + \int_{S_j} f_1(x)dx - \int_{S_i \cap S_j} f_1(x)dx,$$

$$\int_{S_i \smallsetminus S_j} f_1(x)dx = \int_{S_i} f_1(x)dx - \int_{S_i \cap S_j} f_1(x)dx$$

και

$$\int_{S_j \smallsetminus S_i} f_1(x)dx = \int_{S_j} f_1(x)dx - \int_{S_j \cap S_i} f_1(x)dx.$$

6. *Αν* $S = \bigcup_{i \in N} S_i$, $S_i \cap S_j \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ $\forall i,j \in N$ *με* $i \neq j$ *και η* $f_1|_{S_i}$ *είναι ολοκληρώσιμη* $\forall i \in N$, *τότε και η* f_1 *είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\int_S f_1(x)dx = \sum_{i \in N} \int_{S_i} f_1(x)dx.$$

Σημείωση. 1. *Λόγω του σημείου 1 της Πρότασης 4.3.2.1 σε συνδυασμό με το γεγονός ότι* $f = f^+ - f^-$ $\forall f\colon S \to \mathbb{R}$, *για να δείξουμε μία ιδιότητα που αφορά ολοκληρώσιμες* $f \in B(S;\mathbb{R})$, *αρκεί να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου* $f \geq 0$.

2. *Το αντίστροφο του σημείου 3 της Πρότασης 4.3.2.1 δεν ισχύει πάντα.*

Με βάση το σημείο 4 της Πρότασης 4.3.2.1, παίρνουμε άμεσα τα παρακάτω, κάνοντας χρήση του Πορίσματος 4.3.2.1 και του Πορίσματος 4.3.2.2, αντίστοιχα.

Πόρισμα 4.3.2.7. *Έστω* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και ολοκληρώσιμες* $f_1, f_2 \in B(S;\mathbb{R})$.

1. *Αν* $f_1 \leq f_2$, *τότε*

$$\int_S f_1(x)dx \leq \int_S f_2(x)dx.$$

2. *Αν* $\exists S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f_1|_{S \smallsetminus S_0} = f_2|_{S \smallsetminus S_0}$, *τότε*

$$\int_S f_1(x)dx = \int_S f_2(x)dx.$$

Πόρισμα 4.3.2.8. *Έστω μη τετριμμένο* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και ολοκληρώσιμες* $f_1, f_2 \in B(S;\mathbb{R})$.

1. *Αν* $f_1 \leq f_2$ *και*

$$\int_S f_1(x)dx = \int_S f_2(x)dx,$$

τότε $\exists S_0 \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f_1|_{S \smallsetminus S_0} = f_2|_{S \smallsetminus S_0}$.

2. *Αν* $S \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *και* $f_1 < f_2$, *τότε*

$$\int_S f_1(x)dx < \int_S f_2(x)dx.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3.1.4, παίρνουμε τα δύο παρακάτω αποτελέσματα.

Πρόταση 4.3.2.2. *Έστω $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε και η $f|_{S^\circ}$ είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\int_{S^\circ} f(x)dx = \int_S f(x)dx.$$

Σημείωση. *1. Το αντίστροφο της Πρότασης 4.3.2.2 δεν ισχύει.*

2. Αν κάνουμε τις αλλαγές $\overline{S}$ αντί για S και S αντί για S°, στις υποθέσεις της Πρότασης 4.3.2.2, τότε δεν ισχύει το αντίστοιχο συμπέρασμα.

Θεώρημα 4.3.2.1 (*Lebesgue*)**.** *Έστω $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$. Η f είναι ολοκληρώσιμη ανν τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$*

1. $\left\{x \in S \,\middle|\, \text{η } f \text{ δεν είναι συνεχής στο } x\right\}$ *&*

2. $\left\{x \in \partial S \,\middle|\, \text{το } x \text{ είναι σ.σ. του } S \text{ \& δεν ισχύει ότι } \lim_{S\setminus\{x\}\ni y\to x} f(y) = 0\right\}$,

είναι αμφότερα μηδενοσύνολα.

Σημείωση. *$\forall S \subseteq \mathbb{R}^n$ (με τον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τις συνήθεις μετρικές που χρησιμοποιούμε και εδώ), το $\left\{x \in S \,\middle|\, \text{το } x \text{ είναι απ.σ. του } S\right\}$ είναι αριθμήσιμο και άρα μηδενοσύνολο.*

Μπορούμε να δώσουμε έναν χαρακτηρισμό του ολοκληρώματος επί συμπαγούς $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ μέσω των ομαλών διαμερίσεων της μονάδας.

Ειδικότερα, έχουμε με χρήση του Θεωρήματος 4.3.2.1 το εξής αποτέλεσμα, το οποίο έχει νόημα υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 4.1.4.1.

Πρόταση 4.3.2.3. *Έστω*

1. *συμπαγές $S \subsetneq \mathbb{R}^n$,*

2. *ομαλή διαμέριση της μονάδας $\{f_i\}_{i\in N} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ στο S που κυριαρχείται από την $\{S_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι $N \subseteq \mathscr{I}$ &*

3. *$f \in B(S;\mathbb{R})$.*

Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ανν η $f_i|_{S_i} f|_{S_i}$ είναι ολοκληρώσιμη $\forall i \in N$, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$\int_S f(x)dx = \sum_{i\in N} \int_{S_i} (f_i f)(x)dx = \sum_{i\in N} \int_{\operatorname{supp} f_i \cap S} (f_i f)(x)dx.$$

Μάλιστα, έχουμε το ακόλουθο, που είναι απλή εφαρμογή της αντιμεταθετικότητας των αυθαίρετων πεπερασμένων πολλαπλών αθροισμάτων.

Πρόταση 4.3.2.4. *Έστω*

i. *συμπαγές $S \subsetneq \mathbb{R}^n$,*

ii. *δύο ομαλές διαμερίσεις της μονάδας, $\{f_{1i}\}_{i\in N_1} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ και $\{f_{2i}\}_{i\in N_2} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, στο S, που κυριαρχούνται από την $\{S_{1i}\}_{i\in\mathscr{I}_1} \subseteq \mathcal{O}(S)$ και την $\{S_{2i}\}_{i\in\mathscr{I}_2} \subseteq \mathcal{O}(S)$, αντίστοιχα, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι $N_j \subseteq \mathscr{I}_j$ $\forall j \in \{1,2\}$ &*

iii. *ολοκληρώσιμη $f \in B(S;\mathbb{R})$.*

Τότε

$$\sum_{i\in N_1} \int_{S_{1i}} (f_{1i} f)(x)dx = \int_S f(x)dx = \sum_{i\in N_2} \int_{S_{2i}} (f_{2i} f)(x)dx.$$

Με βάση το Πόρισμα 4.3.1.4 και θεωρώντας την μηδενική επέκταση $\widetilde{\star}$, παίρνουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 4.3.2.2 (*Fubini*)**.** *Έστω $m < n$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, περιορισμός $\pi^n_{i_1 \dots i_m}$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$. Θέτουμε $S_1 = \pi^n_{i_1\dots i_m}(S)$ και $S_2 = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}(S)$. Αν $\exists$ τα*

$$\int\limits_S f(t)dt \quad \& \quad \int\limits_{\left\{y\in S_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in S\right\}} f(y;x)dy \ \forall x \in S_1,$$

τότε

$$\int\limits_S f(t)dt = \int\limits_{S_1}\left(\int\limits_{\left\{y\in S_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in S\right\}} f(y;x)dy\right)dx.$$

Αν, επιπλέον, $\exists$ το

$$\int\limits_{\left\{x\in S_1 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in S\right\}} f(x;y)dx \ \forall y \in S_2,$$

τότε

$$\int\limits_S f(t)dt = \int\limits_{S_1}\left(\int\limits_{\left\{y\in S_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in S\right\}} f(y;x)dy\right)dx =$$

$$= \int\limits_{S_2}\left(\int\limits_{\left\{x\in S_1 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in S\right\}} f(x;y)dx\right)dy.$$

Περνάμε τώρα σε κάτι διαφορετικό.

Με χρήση του Θεωρήματος 4.3.2.1, παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 4.3.2.5. *Έστω $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in C_c(S;\mathbb{R})$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.*

Από το σημείο 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1, το σημείο 3 της Πρότασης 4.2.2.2, το Πόρισμα 4.3.1.1 και το σημείο 6 της Πρότασης 4.3.2.1, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 4.3.2.6. *Έστω μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Έστω, επιπλέον, μη τετριμμένο $I_0 \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $I_0 \subseteq I$. Τότε η $\chi_{I_0}|_{\overline{I}}$ είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\int\limits_{\overline{I}} \chi_{I_0}(x)dx = v(I_0).$$

2. *Έστω, επιπλέον, $P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}}$ και $f \in B(\overline{I};\mathbb{R})$. Τότε οι*

$$\sum_{I_*\in\{P\}} m_{I_*}(f)\chi_{I_*^\circ}|_{\overline{I}} : \overline{I} \to \mathbb{R} \quad \& \quad \sum_{I_*\in\{P\}} M_{I_*}(f)\chi_{I_*^\circ}|_{\overline{I}} : \overline{I} \to \mathbb{R}$$

είναι ολοκληρώσιμες και

$$L(f,P) = \int\limits_{\overline{I}}\left(\sum_{I_*\in\{P\}} m_{I_*}(f)\chi_{I_*^\circ}\right)(x)dx \quad \& \quad U(f,P) = \int\limits_{\overline{I}}\left(\sum_{I_*\in\{P\}} M_{I_*}(f)\chi_{I_*^\circ}\right)(x)dx.$$

Αξιοποιώντας το λήμμα του Urysohn (βλ., π.χ., [7, Λήμμα 1.9.4, σελ. 87]) (ή, εναλλακτικά, μέσω μιας άμεσης κατασκευαστικής προσέγγισης μέσω ενός n-πλου γινομένου μονοδιάστατων κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων), μπορούμε να πάρουμε το εξής.

Πρόταση 4.3.2.7. *Έστω μη τετριμμένα $I, I_0 \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ με $I_0 \subseteq I$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f \in C_c(\overline{I};\mathbb{R})$ τ.ω.:*

$$f(\overline{I}) \subseteq [0,1] \quad \& \quad \int\limits_{\overline{I}} |\chi_{I_0} - f|(x)dx < \varepsilon.$$

Μέσω της Πρότασης 4.3.2.6 και της Πρότασης 4.3.2.7, σε συνδυασμό με το σημείο 2 του Πορίσματος 2 και το Θεώρημα 4.3.2.1, παίρνουμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές μεταξύ των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 4.3.2.3 (*πυκνότητα*)**.** *Έστω $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και ολοκληρώσιμη $f \in B(S;\mathbb{R})$. Τότε $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_1, f_2 \in C_c(S;\mathbb{R})$ τ.ω.:*

1. $f_1(S) \subseteq f(S)$ & $f(S) \subseteq f_2(S)$ &
2. *να ισχύει ότι*
$$\int_S |f - f_l|(x)dx < \varepsilon, \ \forall l \in \{1,2\}.$$

Από το Θεώρημα 2.2.1, το Πόρισμα 4.3.2.4, το Πόρισμα 4.3.2.5, το σημείο 2 του Πορίσματος 4.3.2.7, το Θεώρημα 4.3.2.1, την Πρόταση 4.3.2.6 και το Θεώρημα 4.3.2.3, έπεται το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.3.2.8. *Έστω*

1. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,
2. *φθίνουσα ακολουθία* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq B(S;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $f_i \to 0$ &
3. $\{\widetilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq B(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *και* $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *όπως στον Ορισμό 4.3.2.1.*

Τότε
$$\int_{\underline{I}} \widetilde{f}_i(x)dx \to 0.$$

Μέσω της Πρότασης 4.3.2.8 παίρνουμε άμεσα την ακόλουθη μορφή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης του Arzelà.

Θεώρημα 4.3.2.4 (*Arzelà*)**.** *Έστω*

1. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ &
2. *συλλογή ολοκληρώσιμων* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{f\} \subsetneq B(S;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*
   i. $f_i \to f$ &
   ii. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Τότε
$$\int_S |f_i - f|(x)dx \to 0 \text{ και άρα } \int_S f_i(x)dx \to \int_S f(x)dx.$$

Παρατήρηση. *Η συνθήκη του σημείου 2.ii. του Θεωρήματος 4.3.2.4 είναι απλά παράφραση της $|f_i| \leq a$ $\forall i \in \mathbb{N}$ & για κάποιο $a \geq 0$.*

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.3.2.4 είναι το επόμενο.

Πόρισμα 4.3.2.9. *Έστω*

1. $m < n$,
2. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$,
3. $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:*
   i. $S_1 = \pi^n_{i_1\ldots i_m}(S)$ &
   ii. $S_2 = \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-m})$ &
4. $f \in B(S;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*
   i. $\forall y \in S_2$, *για την* $f(\star;y) \in B\Big(\big\{x \in S_1 \,\big|\, \big(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\big) \in S\big\};\mathbb{R}\Big)$ *να ισχύει ότι*
$$f(\star;y) \in C\Big(\big\{x \in S_1 \,\big|\, \big(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\big) \in S\big\};\mathbb{R}\Big) \ \&$$

ii. $\forall x \in S_1$, *η* $f(\star; x) \in B\Big(\big\{y \in S_2 \,\big|\, \big(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\big) \in S\big\}; \mathbb{R}\Big)$ *να είναι ολοκληρώσιμη.*

Τότε

$$\int\limits_{\left\{y \in S_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right) \in S\right\}} f(y; \star) dy \in C(S_1; \mathbb{R}).$$

Τέλος, κάνοντας χρήση του Πορίσματος 4.1.2.1, του Θεωρήματος 4.3.2.4 και του Πορίσματος 4.3.2.9, παίρνουμε με επαγωγή το εξής.

Πρόταση 4.3.2.9. *Έστω*

1. $m < n$,
2. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$,
3. $S \subseteq \mathbb{R}^n$, *τ.ω.:*
   i. $S_1 = \pi^n_{i_1\ldots i_m}(S) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ *&*
   ii. $S_2 = \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-m})$,
4. $k \in \mathbb{N}_0$ *&*
5. $f\colon S \to \mathbb{R}$ *τ.ω.:*
   i. $\forall y \in S_2$, *να ισχύει ότι*
   $$f(\star; y) \in C^k\Big(\big\{x \in S_1 \,\big|\, \big(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\big) \in S\big\}; \mathbb{R}\Big),$$
   ii. $\bigcup\limits_{0 \le |\alpha| \le k} D^\alpha_x f(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *&*
   iii. $\forall x \in S_1$ *&* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m_0$ *με* $0 \le |\alpha| \le k$, *η*
   $$D^\alpha_x f(\star; x) \in B\Big(\big\{y \in S_2 \,\big|\, \big(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\big) \in S\big\}; \mathbb{R}\Big)$$
   να είναι ολοκληρώσιμη,

   όπου το D^α_x *δηλώνει το προφανές, δλδ* D^α*-μερική διαφόριση μόνο για τις συντεταγμένες του* S_1*, δλδ την* i_1*-οστή,* $\ldots$*,* i_m*-οστή.*

Τότε

$$\int\limits_{\left\{y \in S_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right) \in S\right\}} f(y; \star) dy \in C^k(S_1; \mathbb{R}),$$

και μάλιστα, $\forall x \in S_1$ *&* $\forall \alpha \in \mathbb{N}^m_0$ *με* $0 \le |\alpha| \le k$ *ισχύει ότι*

$$D^\alpha \left(\int\limits_{\left\{y \in S_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right) \in S\right\}} f(y; x) dy \right) = \int\limits_{\left\{y \in S_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right) \in S\right\}} D^\alpha_x f(y; x) dy.$$

Σημείωση. *Με χρήση της Πρότασης 4.3.2.9, το Θεώρημα 4.3.2.3 μπορεί να βελτιωθεί περαιτέρω αν περιοριστούμε σε υποσύνολα* $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$*, έτσι ώστε το* $C_c(S; \mathbb{R})$ *να γίνει* $C^\infty_c(S; \mathbb{R})$*. Ωστόσο, αυτή η προσέγγιση απαιτεί χρήση των συνελίξεων, τις ιδιότητες των οποίων δεν θα αναπτύξουμε εδώ.*

4.3.3 Ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης επί Jordan μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

Εδώ ενδιαφερόμαστε για μια ειδική κατηγορία χρήσιμων φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Επεκτείνουμε το ορισμό του όγκου σε αυτά και συνδέουμε αυτή την επέκταση με την θεωρία ολοκλήρωσης που ήδη αναπτύξαμε. Έτσι, υπό το πρίσμα του Πορίσματος 4.3.1.1, ο επόμενος ορισμός γενικεύει την συνολοσυνάρτηση του όγκου, υ (βλ. τον Ορισμό 4.2.1.1), των φραγμένων διαστημάτων.

Ορισμός 4.3.3.1 (*Jordan μετρήσιμο σύνολο και όγκος αυτού*)**.** *Καλούμε ένα $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ Jordan μετρήσιμο ανν η $1|_S$ είναι ολοκληρώσιμη, και θα γράφουμε*

$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) = \left\{ S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \eta\ 1|_S \text{ είναι ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Επιπλέον, ορίζουμε τον όγκο ενός $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $\upsilon(S)$, ως

$$\upsilon(S) = \int_S 1 dx.$$

Σημείωση. *Ένα Jordan μετρήσιμο σύνολο είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.*

Με χρήση του Πορίσματος 4.3.2.1, του Πορίσματος 4.3.2.2, του σημείου 3 του Πορίσματος 4.3.2.1, του σημείου 1.ii. του Πορίσματος 4.3.2.2, της Πρότασης 4.3.2.1 και της Πρότασης 4.3.2.2, παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 4.3.3.1. *Έστω $c \in \mathbb{R}$, $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ και $\{S, S_0\} \cup \{S_i\}_{i \in N} \subsetneq \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Τότε $\upsilon(S) \geq 0$.*
2. *Αν $S_0 \subseteq S$, τότε $\upsilon(S_0) \leq \upsilon(S)$.*
3. *Τότε $S_0 \cup S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $S_0 \cap S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $S_0 \setminus S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ και $S \setminus S_0 \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, και μάλιστα*
   i. *$\upsilon(S_0 \cup S) = \upsilon(S_0) + \upsilon(S) - \upsilon(S_0 \cap S)$,*
   ii. *$\upsilon(S_0 \setminus S) = \upsilon(S_0) - \upsilon(S_0 \cap S)$ &*
   iii. *$\upsilon(S \setminus S_0) = \upsilon(S) - \upsilon(S \cap S_0)$.*
4. *$\upsilon(S) = 0$ ανν $S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*
5. *Αν $S = \bigcup_{i \in N} S_i$ και $S_i \cap S_j \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ $\forall i, j \in N$ με $i \neq j$, τότε $\upsilon(S) = \sum_{i \in N} \upsilon(S_i)$.*
6. *Τότε $S^\circ \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ και $\upsilon(S^\circ) = \upsilon(S)$.*
7. *Τότε $\overline{S} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ και $\upsilon(\overline{S}) = \upsilon(S)$.*
8. *Τότε η $c|_S$ είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\int_S c dx = c\upsilon(S).$$

Σημείωση. *Αν $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $S^\circ, \overline{S} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ τότε δεν ισχύει πάντα ότι $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.*

Λόγω του Πορίσματος 4.2.2.1 και της Πρότασης 4.3.3.1, έπεται ότι για να μελετήσουμε τα (Jordan μετρήσιμα) σύνολα με μη τετριμμένο, δλδ μη μηδενικό, όγκο, αρκεί να περιοριστούμε στα ανοικτά σύνολα χωρίς να χάσουμε πληροφορία. Αυστηρά, αυτό το συμπέρασμα διατυπώνεται στο αποτέλεσμα που έπεται του επόμενου ορισμού.

Ορισμός 4.3.3.2 (*μη τετριμμένος όγκος*)**.** *Ορίζουμε την συνάρτηση του μη τετριμμένου όγκου, υ°, ως*

$$\upsilon^\circ = \upsilon|_{\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\}}.$$

Πρόταση 4.3.3.2. *Ισχύει ότι $\upsilon^\circ > 0$, όπως επίσης ότι*

$$\upsilon(S) = \upsilon^\circ(S^\circ), \ \forall S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{R}^n).$$

Σημείωση. *Με τον υ° περιορίζεται μεν το πεδίο ορισμού του υ, χωρίς ωστόσο εκπτώσεις κατά την μελέτη των συνόλων μη τετριμμένου όγκου. Η χρησιμότητα αυτής της προσέγγισης, δλδ του ίδιου του Ορισμού 4.3.3.2, θα φανεί αργότερα στην Ενότητα 6.3 (βλ. την Παρατήρηση μετά τον Ορισμό 6.3.1), όπου θα γίνει εφικτή η γενίκευση, με ουσιαστικό τρόπο, του πεδίου ορισμού του υ°.*

Τώρα, άμεσα από το Θεώρημα 4.3.2.1 έπεται το εξής.

Πόρισμα 4.3.3.1. *$S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ ανν*

1. *$S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ &*
2. *$\partial S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*

Σημείωση. *$\exists S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $\partial S \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, δλδ $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Δεδομένης της Πρότασης 2.1.5, του Πορίσματος 2.1.2, του σημείου 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1, του σημείου 3 της Πρότασης 4.2.2.2, καθώς και του Πορίσματος 4.3.3.1, παίρνουμε άμεσα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4.3.3.2. *1. $\forall S \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\partial S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, $\exists$*

i. $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$ τ.ω.: $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ ανν $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ &

ii. $\{S_i\}_{i \in N} \subseteq \mathcal{P}(S) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: η $\{S_i\}_{i \in N}$ είναι

α΄. είτε γνησίως αύξουσα ακολουθία σχετικά ανοικτών υποσυνόλων του S,

β΄. είτε συλλογή ομοιόμορφα φραγμένων και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του S,

τ.ω.: $S = \bigcup_{i \in N} S_i$.

2. $\forall U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\exists$ αύξουσα ακολουθία $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.:

i. $S_i \subset\subset U$ $\forall i \in \mathbb{N}$ &

ii. $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$.

Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε κάθε τέτοιο $S_i \subsetneq \mathbb{R}^n$ να είτε ανοικτό, είτε κλειστό, είτε τίποτα από τα δύο.

Άμεση απόρροια του Θεωρήματος 4.3.2.1, σε συνδυασμό με το Πόρισμα 4.3.3.1, είναι το εξής.

Πόρισμα 4.3.3.3. *Έστω $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$. Η f είναι ολοκληρώσιμη ανν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενοσύνολο.*

Μάλιστα, υπό το πρίσμα του σημείου 6 της Πρότασης 4.3.2.1, έχουμε το ακόλουθο, το οποίο αποτελεί το αντίστροφο της Πρότασης 4.3.2.2 στην περίπτωση των Jordan μετρήσιμων.

Πρόταση 4.3.3.3. *Έστω $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ανν η $f|_{S^\circ}$ είναι ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι*

$$\int_S f(x)dx = \int_{S^\circ} f(x)dx.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα εξάγεται με χρήση του σημείου 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1, του σημείου 3 της Πρότασης 4.2.2.2, του Θεωρήματος 4.3.1.3, της Πρότασης 4.3.2.6, της Πρότασης 4.3.3.1, και του Πορίσματος 4.3.3.1.

Πόρισμα 4.3.3.4. *Έστω $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$.*

1. Έστω, επιπλέον, μη τετριμμένο $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $S \subseteq \overline{I}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη με

$$\int_S f(x)dx = a$$

ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω.:

$$\left| \sum_{I_* \in \{P\} \cap S} f(x_{I_*}) v(I_*) - a \right| < \varepsilon, \ \forall P \in \mathfrak{p}_{\overline{I}} \text{ με } \|P\| < \delta \ \& \ \forall \{x_{I_*} \in J\}_{I_* \in \{P\} \cap S}.$$

2. Γενικότερα, η f είναι ολοκληρώσιμη με

$$\int_S f(x)dx = a$$

ανν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ τ.ω.:

i. $\forall \{S_i\}_{i\in N} \subsetneq \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, *με* $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$, *τ.ω.:*

α΄. $S_i \cap S_j \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, $\forall i,j \in N$ *με* $i \neq j$,

β΄. $S = \bigcup\limits_{i\in N} S_i$ *&*

γ΄. $\max\limits_{i\in N}\{\upsilon(S_i)\} < \delta\ \forall i \in N$

&

ii. $\forall \{x_i \in S_i\}_{i\in N}$,

να ισχύει

$$\left|\sum_{i\in N} f(x_i)\upsilon(S_i) - a\right| < \varepsilon.$$

Τώρα, υπό το πρίσμα του σημείο 5 της Πρότασης 4.2.2.1, του σημείο 4 της Πρότασης 4.3.3.1 και του Πορίσματος 4.3.3.3, ο ακόλουθος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.3.3.3. *Έστω* $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *και ολοκληρώσιμη* $f \in B(S;\mathbb{R})$. *Τότε ορίζουμε την μέση τιμή της* f *(επί του* S*),* μ_f*, ως*

$$\mu_f = ⨍_S f(x)dx = \frac{1}{\upsilon(S)} \int_S f(x)dx.$$

Με χρήση της Πρότασης 2.1.8 και του Θεωρήματος 2.1.2, εύκολα παίρνουμε το παρακάτω.

Πόρισμα 4.3.3.5 (*ΘΜΤ, ολοκληρωτική εκδοχή*)**.** *Έστω συνεκτικό* $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ *και* $f \in C(\overline{S};\mathbb{R})$. *Τότε* $\exists x_0 \in \overline{S}$ *τ.ω.:* $f(x_0) = \mu_f$.

Έτσι, από το Πόρισμα 4.3.3.3 και το Πόρισμα 4.3.3.5, έπεται, επίσης εύκολα, το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο αποτελεί μια διαδικασία διαφόρισης καθώς βρίσκουμε μια συνάρτηση από τα ολοκληρώματά της. Είναι δε μια απλή εκδοχή του γνωστού θεωρήματος διαφόρισης των Lebesgue-Besicovitch (the Lebesgue-Besicovitch differentiation theorem) της Θεωρίας Μέτρου.

Πρόταση 4.3.3.4 (*Lebesgue-Besicovitch*)**.** *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *και* $f \in C(U;\mathbb{R})$. *Τότε* $\forall\ x \in U$ *&* $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ *τ.ω.:*

$$\left|\mu_{f|_{B(x,\delta)}} - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Απλές περιοχές του $\mathbb{R}^n$

Συνεχίζουμε με την μελέτη μιας συγκεκριμένης κατηγορίας ιδιαίτερα χρήσιμων Jordan μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, τα οποία ονομάζονται «απλές περιοχές» (simple regions) του $\mathbb{R}^n$. Μάλιστα, για αυτά τα σύνολα ισχύει μια εύχρηστη εκδοχή του Θεωρήματος 4.3.2.2, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ορισμός 4.3.3.4. *Έστω*

1. $n \neq 1$,
2. $S \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n-1}) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^{n-1})$,
3. $f_1, f_2 \in C(S;\mathbb{R})$ *με* $f_1 \leq f_2$ *&*
4. *προβολή* $\pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}$.

Το συμπαγές $S_{i_1\ldots i_{n-1}} \subsetneq \mathbb{R}^n$*, που ορίζεται ως*

$$S_{i_1\ldots i_{n-1}} = \left\{t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}(t) \in S \text{ και } \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_{n-1}}(t) \in \left[\left(f_1 \circ \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}\right)(t), \left(f_2 \circ \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}\right)(t)\right]\right\},$$

καλείται απλή περιοχή του $\mathbb{R}^n$.

Γράφοντας $\partial S_{i_1\ldots i_{n-1}} = \mathrm{gr}_{i_1\ldots i_{n-1}} f_1 \cup S_0 \cup \mathrm{gr}_{i_1\ldots i_{n-1}} f_2$, όπου

$$S_0 = \left\{t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}(t) \in \partial S \text{ και } \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_{n-1}}(t) \in \left[\left(f_1 \circ \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}\right)(t), \left(f_2 \circ \pi^n_{i_1\ldots i_{n-1}}\right)(t)\right]\right\},$$

και εφαρμόζοντας Θεώρημα 4.2.2.1, την Πρόταση 4.2.2.2 και το Πόρισμα 4.3.3.1, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.3.3.5. *Έστω* $n \neq 1$. $\forall$ *απλή περιοχή* $S_{i_1\ldots i_{n-1}}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *ισχύει ότι* $S_{i_1\ldots i_{n-1}} \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$.

Μάλιστα, το Θεώρημα 4.3.2.2 παίρνει την παρακάτω εύχρηστη μορφή.

Θεώρημα 4.3.3.1 (*Fubini*). *Έστω*

i. $n \neq 1$,

ii. *απλή περιοχή* $S_{i_1\ldots i_{n-1}}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *όπως στον Ορισμό 4.3.3.4 &*

iii. $f \in B(S_{i_1\ldots i_{n-1}};\mathbb{R})$.

Αν $\exists$ *τα*

$$\int_{S_{i_1\cdots i_{n-1}}} f(t)dt \quad \& \quad \int_{\left[f_1(x),f_2(x)\right]} f(y;x)dy \ \forall x \in S,$$

τότε

$$\int_{S_{i_1\cdots i_{n-1}}} f(t)dt = \int_S \left(\int_{\left[f_1(x),f_2(x)\right]} f(y;x)dy \right) dx.$$

4.3.4 Γενικευμένο ολοκλήρωμα

Εδώ μελετάμε την ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων που επιτρέπουμε να είναι τόσο ορισμένες σε μη φραγμένα ανοικτά σύνολα, όσο και μη φραγμένες. Συγκεκριμένα, η υπό μελέτη συνάρτηση μπορεί να είναι μη φραγμένη κοντά στο σύνορο αυθαίρετου ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$. Στο πλαίσιο αυτό, εισάγουμε την έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος (improper integral) και μελετούμε τις ιδιότητές του. Όπως θα δούμε (βλ., παρακάτω, την Πρόταση 4.3.4.4 και την Σημείωση που ακολουθεί) το ολοκλήρωμα αυτό αποτελεί γενίκευση του «συμβατικού» ολοκληρώματος του Ορισμού 4.3.2.1 με το οποίο ασχοληθήκαμε ως τώρα, στην περίπτωση ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, υπάρχει στενή σχέση μεταξύ της «συμβατικής» και της γενικευμένης ολοκληρωσιμότητας (βλ., παρακάτω, το Πόρισμα 4.3.4.3).

Η ιδέα για τον ορισμό του ολοκληρώματος μιας μη φραγμένης στο σύνορο συνάρτησης έπεται φυσικά από την Πρόταση 4.3.2.3 υπό το πρίσμα της Πρόταση 4.1.4.2. Για αυτό τον σκοπό θα χρειαστούμε ένα προκαταρκτικό αποτελέσματα, το οποίο και παίρνουμε μέσω του σημείου 2 της Πρότασης 2.2.1, του σημείου 1 της Πρότασης 4.3.2.6 και του Θεωρήματος 4.3.2.1.

Πρόταση 4.3.4.1. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

ii. *δύο συλλογές ανοικτών υποσυνόλων* $\{U_{1i}\}_{i\in\mathscr{I}_1} \subseteq \mathcal{O}(U)$ *και* $\{U_{2i}\}_{i\in\mathscr{I}_2} \subseteq \mathcal{O}(U)$, *τ.ω.:*

$$\bigcup_{i\in\mathscr{I}_1} U_{1i} = U = \bigcup_{i\in\mathscr{I}_2} U_{2i},$$

iii. *δύο συλλογές συναρτήσεων* $\{f_{1i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *και* $\{f_{2i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *όπως στην Πρόταση 4.1.4.2, η κάθε μια από τις οποίες σχετίζεται με την αντίστοιχη παραπάνω συλλογή ανοικτών υποσυνόλων, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι* $\mathbb{N} \subseteq \mathscr{I}$ *&*

iv. $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.: το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της* f *να είναι μηδενοσύνολο.*

1. *Τότε η* $f_{ji}|_{\mathrm{supp} f_{ji}} f|_{\mathrm{supp} f_{ji}}$ *και η* $f_{ji}|_{\mathrm{supp} f_{ji}} |f||_{\mathrm{supp} f_{ji}}$ *είναι ολοκληρώσιμες* $\forall\ i \in \mathbb{N}$ *&* $j \in \{1,2\}$.

2. *Αν*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{supp} f_{ji}} \big(f_{ji}|f|\big)(x)dx < \infty \text{ για κάποιο } j \in \{1,2\},$$

τότε

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{supp} f_{1i}} (f_{1i}|f|)(x)dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{supp} f_{2i}} (f_{2i}|f|)(x)dx$$

και

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{supp} f_{1i}} (f_{1i}f)(x)dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\mathrm{supp} f_{2i}} (f_{2i}f)(x)dx.$$

Παρατήρηση. *Θυμίζουμε ότι για το αντίστοιχο αποτέλεσμα της Πρότασης 4.3.4.1 σε περίπτωση συμπαγών συνόλων, δλδ για την Πρόταση 4.3.2.4, το σημείο 2 της Πρότασης 2.2.1 δεν είναι απαραίτητο παρά μόνο η αντιμεταθετικότητα των αυθαίρετων πεπερασμένων πολλαπλών αθροισμάτων. Γι αυτό στην Πρόταση 4.3.2.4 δεν είναι απαραίτητη η συνθήκη της Πρότασης 4.3.4.1 με την συγκλίνουσα σειρά των ολοκληρωμάτων που εμπλέκει την $|f|$.*

Και έτσι, υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.3.4.1, ο παρακάτω ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 4.3.4.1 (*γενικευμένο ολοκλήρωμα*). *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$. Θα λέμε ότι η f είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη (επί του U) ανν*

1. *το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f να είναι μηδενοσύνολο &*
2. *$\exists$ συλλογές $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(U)$ και $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ όπως στην Πρόταση 4.1.4.2, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι $\mathbb{N} \subseteq \mathscr{I}$, τ.ω.:*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{\operatorname{supp} f_i} (f_i|f|)(x)dx < \infty,$$

και σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f (επί του U) ως

$$\int\limits_U^{\gamma\epsilon\nu} f(x)dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{\operatorname{supp} f_i} (f_i f)(x)dx.$$

Τα επόμενα είναι άμεσα από τον Ορισμό 4.3.4.1.

Πόρισμα 4.3.4.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f να είναι μηδενοσύνολο. Η f είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη ανν η $|f|$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.*

Πόρισμα 4.3.4.2. *Έστω μη φραγμένο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και γενικευμένα ολοκληρώσιμη $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$. Αν, επιπλέον, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε*

$$f(x) \overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Σημείωση. *Το συμπέρασμα του Πορίσματος 4.3.4.2 δεν ισχύει πάντα για απλά συνεχή f.*

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα από «μέσα» με «συμβατικά» ολοκληρώματα. Πράγματι, υπό το πρίσμα του Πορίσματος 4.3.3.2, το ακόλουθο αποτέλεσμα έχει νόημα, για το οποίο γίνεται χρήση της Πρότασης 4.3.2.1 και του Πορίσματος 4.3.4.1.

Πρόταση 4.3.4.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f να είναι μηδενοσύνολο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *Η f είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.*
2. *$\exists$ αύξουσα ακολουθία $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ με*

   i. *$S_i \subset\subset U$ $\forall i \in \mathbb{N}$ &*

   ii. *$U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$,*

   τ.ω.:

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{S_i} |f|(x)dx < \infty.$$

3. *Ισχύει ότι*

$$\sup\left\{ \int\limits_S |f|(x)dx \,\middle|\, S \in \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \text{ και } S \subset\subset U \right\} < \infty.$$

Μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(x)dx = \lim_{i\to\infty}\int_{S_i} f(x)dx = \sup\left\{\int_S f^+(x)dx \,\middle|\, S\in\mathcal{P}(U)\cap\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \text{ και } S\subset\subset U\right\} - \sup\left\{\int_S f^-(x)dx \,\middle|\, S\in\mathcal{P}(U)\cap\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \text{ και } S\subset\subset U\right\}.$$

Με χρήση της Πρότασης 4.3.4.2 έπεται το αντίστοιχο της Πρότασης 4.3.2.1.

Πρόταση 4.3.4.3. *Έστω $a,b\in\mathbb{R}$, μη τετριμμένο $N\in\mathcal{B}(\mathbb{N})\setminus\{\varnothing\}$, $\{U,U_0\}\cup\{U_i\}_{i\in N}\subsetneq\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\setminus\{\varnothing\}$ και $f_1,f_2\in B_{loc}(U;\mathbb{R})$.*

1. *Αν οι f_1 και f_2 είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμες, τότε και η $(af_1+bf_2)\colon U\to\mathbb{R}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U}(af_1+bf_2)(x)dx = a\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_1(x)dx + b\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_2(x)dx.$$

2. *Αν οι f_1 και f_2 είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμες και $f_1(x)\le f_2(x)$ $\forall x\in S$, τότε*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_1(x)dx \le \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_2(x)dx.$$

3. *Αν η f_1 είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, τότε και η $|f_1|\colon U\to\mathbb{R}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\left|\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_1(x)dx\right| \le \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U}|f_1(x)|\,dx.$$

4. *Αν $U_0\subseteq U$, $f_1\ge 0$ και επίσης οι f_1 και $f_1|_{U_0}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_0}} f_1(x)dx \le \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_1(x)dx.$$

5. *Αν $U=U_i\cup U_j$ με $i,j\in N$ και επίσης οι $f_1|_{U_i}$ και $f_1|_{U_j}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμες, τότε και οι f_1, $f_1|_{U_i\cap U_j}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμες, και μάλιστα*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_1(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_i}} f_1(x)dx + \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_j}} f_1(x)dx - \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_i\cap U_j}} f_1(x)dx.$$

6. *Αν $U=\bigcup_{i\in N}U_i$, $U_i\cap U_j\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ $\forall i,j\in N$ με $i\ne j$ και η $f_1|_{U_i}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη $\forall i\in N$, τότε και η f_1 είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_1(x)dx = \sum_{i\in N}\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_i}} f_1(x)dx.$$

Σημείωση. *Λόγω του Πορίσματος 4.3.4.1 σε συνδυασμό με το σημείο 1 της Πρότασης 4.3.4.3 και με το γεγονός ότι $f=f^+-f^-$ $\forall f\colon S\to\mathbb{R}$, για να δείξουμε την γενικευμένη ολοκληρωσιμότητα των $f\in B_{loc}(U;\mathbb{R})$ με μηδενοσύνολο το σύνολο των σημείων ασυνέχειας, αρκεί να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $f\ge 0$.*

Τώρα, από την Πρόταση 4.3.2.1 και την Πρόταση 4.3.4.2, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο λέει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα είναι όντως μια γενίκευση των «συμβατικών» ολοκληρωμάτων σε φραγμένα ανοικτά σύνολα.

Πρόταση 4.3.4.4. *Έστω $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενοσύνολο. Τότε η f είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη. Αν, επιπλέον, η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(x)dx = \int_U f(x)dx.$$

Σημείωση. *Έστω $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενοσύνολο. Τότε η f δεν είναι πάντα ολοκληρώσιμη.*

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.3.2.2 και της Πρότασης 4.3.4.4 αποτελεί το επόμενο.

Πόρισμα 4.3.4.3. *Έστω $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in B(S;\mathbb{R})$ τ.ω.: το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενοσύνολο. Τότε η $f|_{S^\circ}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη. Αν, επιπλέον, η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{S^\circ}} f(x)dx = \int_S f(x)dx.$$

Το πρώτο σημείο του επόμενου αποτελέσματος έπεται άμεσα αξιοποιώντας το Θεώρημα 4.3.2.1, την Πρόταση 4.3.4.2 και το Πόρισμα 4.3.4.3, ενώ για το δεύτερο γίνεται χρήση του Θεωρήματος 4.3.2.1 και του Πορίσματος 4.3.4.3 όταν $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, και επιπλέον του σημείου 6 της Πρότασης 4.3.4.3 όταν $U \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Πρόταση 4.3.4.5. *1. Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ &

ii. $f \in B(U;\mathbb{R})$ τ.ω.:

α΄. το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενοσύνολο &

β΄. $\operatorname{supp} f \subset\subset U$.

Τότε η $f|_{\operatorname{supp} f}$ είναι ολοκληρώσιμη και η f γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_{\operatorname{supp} f} f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(x)dx.$$

Αν, επιπλέον,

i΄. $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

τότε η f είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_{\operatorname{supp} f} f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(x)dx = \int_U f(x)dx.$$

2. Γενικότερα, έστω

i. $S \in \mathcal{O}\left(\overline{\mathbb{R}^n_{i,\pm}}\right)$ &

ii. $f \in B(S;\mathbb{R})$ τ.ω.:

α΄. το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f είναι μηδενοσύνολο &

β΄. $\operatorname{supp} f \in \mathcal{B}(S)$.

Τότε η $f|_{\operatorname{supp} f}$ είναι ολοκληρώσιμη και η $f|_{S^\circ}$ γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_{\operatorname{supp} f} f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{S^\circ}} f(x)dx.$$

Αν, επιπλέον,

i΄. $S \in \mathcal{O}\left(\overline{\mathbb{R}^n_{i,\pm}}\right) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, *τότε η f είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\int\limits_{\mathrm{supp} f} f(x)dx = \int\limits_{S^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} f(x)dx = \int\limits_{S} f(x)dx.$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.3.4.5, ο Ορισμός 4.3.4.1 παίρνει την εξής μορφή.

Πόρισμα 4.3.4.4. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $\exists$ *συλλογές* $\{U_i\}_{i\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(U)$ *και* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *όπως στην Πρόταση 4.1.4.2, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι* $\mathbb{N} \subseteq \mathscr{I}$ *&*
3. *γενικευμένα ολοκληρώσιμη* $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$.

Τότε

$$\int\limits_{U}^{\gamma\epsilon\nu} f(x)dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{U_i}^{\gamma\epsilon\nu} (f_i f)(x)dx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int\limits_{U}^{\gamma\epsilon\nu} (f_i f)(x)dx.$$

Το επόμενο είναι το αντίστοιχο του Θεωρήματος 4.3.2.2.

Θεώρημα 4.3.4.1 (*Fubini*)**.** *Έστω* $m < n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, *περιορισμός* $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$ *και* $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$. *Θέτουμε* $U_1 = \pi^n_{i_1\ldots i_m}(U)$ *και* $U_2 = \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(U)$. *Αν* $\exists$ *τα*

$$\int\limits_{U}^{\gamma\epsilon\nu} f(t)dt \quad \& \quad \int\limits_{\left\{y\in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(y;x)dy \;\; \forall x \in U_1,$$

τότε

$$\int\limits_{U}^{\gamma\epsilon\nu} f(t)dt = \int\limits_{U_1}^{\gamma\epsilon\nu} \left(\int\limits_{\left\{y\in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(y;x)dy \right) dx.$$

Αν, επιπλέον, $\exists$ *το*

$$\int\limits_{\left\{x\in U_1 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(x;y)dx \;\; \forall y \in U_2,$$

τότε

$$\int\limits_{U}^{\gamma\epsilon\nu} f(t)dt = \int\limits_{U_1}^{\gamma\epsilon\nu} \left(\int\limits_{\left\{y\in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(y;x)dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_{U_2}^{\gamma\epsilon\nu} \left(\int\limits_{\left\{x\in U_1 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(x;y)dx \right) dy.$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση όπου $\mathrm{supp} f \subset\subset U$, τότε το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 4.3.2.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.3.4.5.

Για την περίπτωση αυθαίρετης γενικευμένα ολοκληρώσιμης $f \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$, έχουμε τα παρακάτω.

- Επιλέγουμε συλλογές $\{U_1\} \subseteq \mathcal{O}(U_1)$ και $\{f_{1i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$ όπως στην Πρόταση 4.1.4.2, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι $\mathbb{N} \subseteq \mathscr{I}_1$.
- Θέτουμε
$$U_x = \left\{y \in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right) \in U\right\}, \;\; \forall x \in U_1.$$
$\forall x \in U_1$, επιλέγουμε συλλογές $\{U_x\} \subseteq \mathcal{O}(U_x)$ και $\{f_{xi}\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-m};\mathbb{R})$ όπως στην Πρόταση 4.1.4.2.

– Παρατηρούμε ότι
$$U \approx \coprod_{x \in U_1} U_x.$$
Αυτή η έκφραση μας επιτρέπει τον εξής ορθό ορισμό: $\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2$, θέτουμε
$$\begin{aligned} f_{ij} \colon U &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f_{ij}(t) = f_{1i}(x) f_{xj}(y), \text{ όπου } x = \pi^n_{i_1\dots i_m}(t) \;\&\; y = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}(t). \end{aligned}$$

– Αναδιατάσσουμε την διπλή συλλογή $\{\widetilde{f_{ij}}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ (όπως ήδη έχουμε κάνει, γράφουμε $\widetilde{\star}$ για την μηδενική επέκταση) σε μονή ως εξής: $\exists$ $1-1$ και επί $f_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, και θέτωντας
$$f_k = \widetilde{f_{f_0(k)\,f_0(k)}} \;\; \forall k \in \mathbb{N},$$
έχουμε ότι
$$\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\widetilde{f_{ij}}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}.$$

– Οι συλλογές $\{U\} \subseteq \mathcal{O}(U)$ και $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ είναι όπως στην Πρόταση 4.1.4.2. Πράγματι, όλες οι ιδιότητες είναι άμεσες εκτός αυτής του σημείου 4, για την οποία, είτε λόγω του σημείου 2 της Πρότασης 2.2.1, είτε απλά λόγω της τοπικής πεπερατότητας των συλλογών $\{f_{1i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ και $\{f_{xi}\}_{i\in\mathbb{N}}$ άρα και των παρακάτω αθροίσεων, έχουμε ότι
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{f_{ij}}(t) = \cancelto{1}{\sum_{i\in\mathbb{N}} f_{1i}(x)} \; \cancelto{1}{\sum_{j\in\mathbb{N}} f_{xj}(y)} = 1,$$
$\forall t \in U$ με $x = \pi^n_{i_1\dots i_m}(t)$ και $y = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}(t)$.

– Τώρα, αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα για $f \geq 0$.

– Αφού η f είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, επιλέγουμε την συλλογή $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ για την έκφραση του γενικευμένου ολοκληρώματός της, δλδ
$$\overset{\text{γεν}}{\int_U} f(t)dt = \sum_{k\in\mathbb{N}} \overset{\text{γεν}}{\int_U} (f_k f)(t)dt.$$

– Έτσι, από το σημείο 3 της Πρότασης 4.3.4.3 έπεται ότι η σειρά
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \overset{\text{γεν}}{\int_U} (f_k f)(t)dt$$
συγκλίνει απολύτως, και άρα, αξιοποιώντας το σημείο 2 της Πρότασης 2.2.1, έπεται ότι
$$\overset{\text{γεν}}{\int_U} f(t)dt = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\text{γεν}}{\int_U} (f_{ij} f)(t)dt.$$

– Αφού η $f(\star;x)$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη $\forall x \in U_1$, τότε εύκολα έπεται με χρήση του σημείου 3 του Πορίσματος 4.3.2.6 και της Πρότασης 4.3.4.2 ότι και η $(f_{ij}f)(\star;x)$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη $\forall\; x \in U_1 \;\&\; (i,j) \in \mathbb{N}^2$. Έτσι, από το αποτέλεσμά μας για τις συναρτησεις με συμπαγή φορέα εντός του U, παίρνουμε ότι
$$\begin{aligned} \overset{\text{γεν}}{\int_U} f(t)dt &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\text{γεν}}{\int_{U_1}} \left(\overset{\text{γεν}}{\int_{\left\{y\in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in U\right\}}} (f_{ij}f)(y;x)dy \right) dx = \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\text{γεν}}{\int_{U_1}} f_{1i}(x) \left(\overset{\text{γεν}}{\int_{\left\{y\in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in U\right\}}} f_{xj}(y) f(y;x)dy \right) dx, \end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα απλά χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό των f_{ij} υπό το πρίσμα του Ορισμού 1.5, σε συνδυασμό με το σημείο 1 της Πρότασης 4.3.4.3. Συγκεκριμένα, η

$$f_{1_i}\left(\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f_{x_j}(y)f(y;\star)dy\right),\ \forall(i,j)\in\mathbb{N}^2$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη. Μάλιστα, σύμφωνα με την Πρόταση 4.3.4.5, κάθε τέτοια συνάρτηση περιορισμένη στον $\mathrm{supp} f_{1_i}$ είναι ολοκληρώσιμη.

– Από την άλλη, η γενικευμένη ολοκληρωσιμότητα της $f(\star;x)$ $\forall x\in U_1$ σε συνδυασμό με το ότι $f\geq 0$, μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}
&f_{1_i}\left(\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f_{x_j}(y)f(y;\star)dy\right)\leq\\
&\leq f_{1_i}\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f_{x_j}(y)f(y;\star)dy\right)=\\
&= f_{1_i}\left(\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(y;\star)dy\right),\ \forall(i,j)\in\mathbb{N}^2.
\end{aligned}$$

Από το παραπάνω σε συνδυασμό με το ότι $f\in B_{loc}(U;\mathbb{R})$ και $\mathrm{supp} f_{1_i}\subset\subset U_1$, έπεται ότι $\exists\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subsetneq[0,\infty)$ τ.ω.:

$$\left|f_{1_i}\left(\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f_{x_j}(y)f(y;\star)dy\right)\right|\leq a_i,\ \forall(i,j)\in\mathbb{N}^2.$$

– Έχουμε, δλδ, ό,τι χρειαζόμαστε για να αξιοποιήσουμε το Θεώρημα 4.3.2.4, το οποίο συνδυασμένο με την Πρόταση 4.3.4.5 θα μας δώσει ότι

$$\begin{aligned}
\int\limits_U^{\gamma\epsilon\nu} f(t)dt &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_{U_1}^{\gamma\epsilon\nu} f_{1_i}(x)\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f_{x_j}(y)f(y;x)dy\right)dx=\\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}}\int\limits_{U_1}^{\gamma\epsilon\nu} f_{1_i}(x)\left(\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(y;x)dy\right)dx.
\end{aligned}$$

Ειδικότερα, η

$$\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(\star)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(y;\star)dy$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int\limits_U^{\gamma\epsilon\nu} f(t)dt=\int\limits_{U_1}^{\gamma\epsilon\nu}\left(\int\limits_{\left\{y\in U_2\,\middle|\,\left(\varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(y)\right)\in U\right\}}^{\gamma\epsilon\nu} f(y;x)dy\right)dx,$$

δλδ το ζητούμενο.

– Για το υπόλοιπο, αρκεί να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία με τις εξής αλλαγές $x \leftrightarrow y$ και $\pi^n_{i_1\dots i_m} \leftrightarrow \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}$.

$\square$

Ακολουθούν και άλλα αποτελέσματα που έχουμε ήδη δει για τα «συμβατικά» ολοκληρώματα.

Θεώρημα 4.3.4.2 (*Arzelà*)**.** *Έστω*

1. *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ &*
2. *συλλογή γενικευμένα ολοκληρώσιμων $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \{f, f_0\} \subsetneq B_{loc}(U;\mathbb{R})$ τ.ω.:*
   i. *$f_i \to f$ &*
   ii. *$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i(U) \subseteq f_0(U)$.*

Τότε

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} |f_i - f|(x)dx \to 0 \text{ και άρα } \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f_i(x)dx \to \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(x)dx.$$

Παρατήρηση. *Η συνθήκη του σημείου 2.ii. του Θεωρήματος 4.3.4.2 είναι απλά παράφραση της $|f_i| \le |f_0|$ $\forall i \in \mathbb{N}$.*

Πρόταση 4.3.4.6. *Έστω*

1. *$m < n$,*
2. *περιορισμός $\pi^n_{i_1\dots i_m}$,*
3. *$U \subseteq \mathbb{R}^n$, για το οποίο θέτουμε $U_1 = \pi^n_{i_1\dots i_m}(U)$ & $U_2 = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}(U)$,*
4. *$k \in \mathbb{N}_0$ &*
5. *$f\colon U \to \mathbb{R}$ τ.ω.:*
   i. *$\forall y \in U_2$, να ισχύει ότι*
   $$f(\star; y) \in C^k\Big(\Big\{x \in U_1 \,\Big|\, \big(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\big) \in U\Big\}; \mathbb{R}\Big),$$
   ii. *$\exists$ γενικευμένα ολοκληρώσιμη $f_0 \in B_{loc}(U_2;\mathbb{R})$ τ.ω.: $\bigcup_{0\le|\alpha|\le k} D^\alpha_x f(S) \subseteq f_0(U_2)$ &*
   iii. *$\forall x \in U_1$ & $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ με $0 \le |\alpha| \le k$, η*
   $$D^\alpha_x f(\star; x) \in B_{loc}\Big(\Big\{y \in U_2 \,\Big|\, \big(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\big) \in U\Big\}; \mathbb{R}\Big)$$
   να είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη,

   όπου το D^α_x δηλώνει το προφανές, δλδ D^α-μερική διαφόριση μόνο για τις συντεταγμένες του U.

Τότε

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_2}} f(y;\star)dy \in C^k\Big(\Big\{x \in U_1 \,\Big|\, \big(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x) + \hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\big) \in U\Big\}; \mathbb{R}\Big),$$

και μάλιστα, $\forall x \in U_1$ & $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m$ με $0 \le |\alpha| \le k$ ισχύει ότι

$$D^\alpha\left(\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{\left\{y\in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in U\right\}}} f(y;x)dy\right) =$$

$$= \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{\left\{y\in U_2 \,\middle|\, \left(\varpi^n_{i_1\dots i_m}(x)+\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y)\right)\in U\right\}}} D^\alpha_x f(y;x)dy.$$

4.3.5 Ολοκλήρωμα διανυσματικών συναρτήσεων

Αναφέρουμε ότι όλη η θεωρία ολοκλήρωσης βαθμωτών (μονόμετρων) συναρτήσεων που αναπτύχθηκε ως τώρα, μπορεί με φυσικό τρόπο να γενικευτεί και για διανυσματικές, απλά κοιτώντας κάθε συνιστώσα συνάρτηση ξεχωριστά.

4.4 Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Σε αυτή την ενότητα παραθέτουμε τα βασικά θεωρήματα που συνδέουν την διαφόριση και την ολοκλήρωση όταν $\boxed{n=1}$. Θεωρούμε ως πεδίο ορισμού ένα μη τετριμμένο συμπαγές διάστημα $I=[a,b]$.

Ορισμός 4.4.1 (*αόριστο ολοκλήρωμα*)**.** *Έστω ολοκληρώσιμη $f \in B(I;\mathbb{R})$. Γράφουμε F για το αόριστο ολοκλήρωμα της f, δλδ*

$$F = \int_{[a,\star]} f(x)dx \colon I \to \mathbb{R}.$$

Πρόταση 4.4.1. *Έστω ολοκληρώσιμη $f \in B(I;\mathbb{R})$. Τότε $F \in Lip(I;\mathbb{R})$.*

Αν ισχυροποιήσουμε τις υποθέσεις της Πρότασης 4.4.1, παίρνουμε και πιο ισχυρό αποτέλεσμα, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 4.4.1 (1ο ΘΘΑΛ)**.** *Έστω ολοκληρώσιμη $f \in B(I;\mathbb{R})$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in I$, τότε η F είναι διαφορίσιμη στο x_0, και μάλιστα*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Ορίζουμε την παράγουσα ή αντι-διαφόριση/παράγωγο (primitive function/antiderivative) μιας συνάρτησης.

Ορισμός 4.4.2 (*παράγουσα*)**.** *Έστω $f\colon I \to \mathbb{R}$ και διαφορίσιμη $f_0\colon I \to \mathbb{R}$. Τότε η f_0 καλείται παράγουσα της f ανν ${f_0}' = f$.*

Απευθείας από το Θεώρημα 4.4.1, έπεται το εξής.

Πόρισμα 4.4.1. *Έστω $f \in C(I;\mathbb{R})$. Τότε η F είναι παράγουσα της f.*

Για το επόμενο γίνεται χρήση του Πορίσματος 4.1.2.1.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $f \in C(I;\mathbb{R})$ και παράγουσα $f_0 : I \to \mathbb{R}$ της f. Τότε $f_0 \in C(I;\mathbb{R})$, και μάλιστα*

$$f_0 = F + f_0(a).$$

Ειδικότερα,

$$\int_I f(x)dx = f_0(b) - f_0(a).$$

Σημείωση. *Έστω διαφορίσιμη $f \in C(I;\mathbb{R})$. Τότε δεν ισχύει πάντα ότι*

$$\int_I f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

γιατί ενδεχομένως $f' \notin B(I;\mathbb{R})$.

Τέλος, πάλι με χρήση του Πορίσματος 4.1.2.1 και σε συνδυασμό με τον Ορισμό 4.3.1.5, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.2 (2ο ΘΘΑΛ)**.** *Έστω διαφορίσιμη $f \in B(I;\mathbb{R})$ με ολοκληρώσιμη $f' \in B(I;\mathbb{R})$. Τότε*

$$\int_I f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

4.5 Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών

Εδώ ενδιαφερόμαστε για ένα βασικό αποτέλεσμα της σύγχρονης Ανάλυσης και των εφαρμογών της. Το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών και οι παραλλαγές/γενικεύσεις του αποτελούν το απαύγασμα όλης της θεωρίας που αναπτύξαμε στο τρέχον κεφάλαιο, καθώς για την εξαγωγή τους απαιτούνται πρακτικά όλα τα κομβικά αποτελέσματα που έχουν διατυπωθεί ως τώρα.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα κυρίως στα [7], [17], και [26], εκτός και αν αναφέρεται διαφορετικά.

4.5.1 Το θεώρημα, γενικεύσεις και παραλλαγές

Θα εξεταστούν δύο προσεγγίσεις.

C^1 αλλαγή μεταβλητών

Το πρώτο αποτέλεσμα, που αφορά την περίπτωση $n = 1$, έπεται από το Θεώρημα 2.1.2, το Θεώρημα 4.1.2.1, το Πόρισμα 4.1.2.1, την Πρόταση 4.3.1.6, το Πόρισμα 4.3.1.2, το Θεώρημα 4.4.1 και το Θεώρημα 4.4.2.

Θεώρημα 4.5.1.1 (*κανόνας αντικατάστασης, C^1 περίπτωση*)**.** *Έστω*

i. $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

ii. $f_0 \in C^1(\overline{I};\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $f_0' \neq 0$ *(ή ισοδύναμα, λόγω συνέχειας,* $f_0'|_{I^\circ} \neq 0$*) &*

iii. $f \in C(f_0(\overline{I});\mathbb{R})$.

Τότε

1. $f_0(\overline{I}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{I}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *&*

2. *οι* $|f_0'|$, f, $f \circ f_0$ *και* $(f \circ f_0)|f_0'|$ *είναι ολοκληρώσιμες, και μάλιστα*

$$\int_{f_0(\overline{I})} f(x)dx = \int_{\overline{I}} \big((f \circ f_0)|f_0'|\big)(x)dx.$$

Με χρήση της Πρότασης 2.1.9, του Θεωρήματος 4.1.2.1 σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των οριζουσών, του Πορίσματος 4.1.2.3, του Θεωρήματος 4.1.7.1, της Πρότασης 4.3.4.4 και του Θεωρήματος 4.5.1.1, μπορούμε να πάρουμε (με επαγωγή ως προς το n την μία κατεύθυνση και με χρήση του αποτελέσματος της αντίθετης κατεύθυνσης την άλλη) το ακόλουθο κεντρικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.5.1.2 (*αλλαγής μεταβλητών, C^1 περίπτωση*)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

2. *C^1 αλλαγή μεταβλητών* $f_0 \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ *&*

3. $f \in C(f_0(U);\mathbb{R})$.

Τότε η f είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη ανν η $(f \circ f_0)Jf_0$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{f_0(U)}} f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U}} \big((f \circ f_0)Jf_0\big)(x)dx.$$

Σημείωση. *Αν $\exists$ κάποιο από τα γενικευμένα ολοκληρώματα του Θεωρήματος 4.5.1.2 με την συνήθη έννοια, τότε δεν ισχύει απαραίτητα το ίδιο και για το άλλο.*

Μέσω της Πρότασης 4.3.4.4, μπορούμε να πάρουμε αρκετές χρήσιμες παραλλαγές του Θεωρήματος 4.5.1.2. Μία άμεση είναι η ακόλουθη, για την οποία γίνεται χρήση του σημείου 1 της Πρότασης 4.3.4.5.

Πρόταση 4.5.1.1. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

ii. C^1 *αλλαγή μεταβλητών* $f_0 \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ &

iii. $f \in C(f_0(U);\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $S = \operatorname{supp} f \subset\subset f_0(U)$.

Τότε η $f|_S$ *είναι ολοκληρώσιμη ανν η* $\left(f|_S \circ f_0|_{f_0^{-1}(S)}\right) Jf_0|_{f_0^{-1}(S)}$ *είναι ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι*

$$\int_S f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{f_0(U)}} f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx = \int_{f_0^{-1}(S)} ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx.$$

Παρατήρηση. *Αν, επιπλέον, έχουμε*

i΄. $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

στην Πρόταση 4.5.1.1, τότε

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx = \int_U ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx.$$

Ωστόσο, ενδεχομένως να μην ισχύει το ίδιο για το

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{f_0(U)}} f(x)dx,$$

γιατί δεν ξέρουμε αν $f_0(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Υπενθυμίζουμε ότι δεν ισχύει πάντα ότι αν* $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *τότε* $f_0(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν προφανώς και για* $f_0(U)$, U *και* f_0^{-1} *στην θέση των* U, $f_0(U)$ *και* f_0, *αντίστοιχα.*

Γενίκευση της Πρότασης 4.5.1.1 είναι η παρακάτω, για την οποία γίνεται χρήση της Πρότασης 4.1.7.1 και του σημείου 2 της Πρότασης 4.3.4.5.

Πρόταση 4.5.1.2. *Έστω*

i. $S_0 \in \mathcal{O}\left(\overline{\mathbb{R}^n_{i,\pm}}\right)$,

ii. $f_0 \in C^1(S_0;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

- *α΄.* *η* f_0 *να είναι* $1-1$ &
- *β΄.* $Jf_0 > 0$ &

iii. $f \in C(f_0(S_0);\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $S = \operatorname{supp} f \in \mathcal{B}(f_0(S_0))$.

Τότε η $f|_S$ *είναι ολοκληρώσιμη ανν η* $\left(f|_S \circ f_0|_{f_0^{-1}(S)}\right) Jf_0|_{f_0^{-1}(S)}$ *είναι ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι*

$$\int_S f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{(f_0(S_0))^\circ}} f(x)dx = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{S_0{}^\circ}} ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx = \int_{f_0^{-1}(S)} ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx.$$

Σημείωση. *Η Πρόταση 4.5.1.1 και η Πρόταση 4.5.1.2 είναι βασικές για τα επόμενα κεφάλαια.*

Μία άλλη εύκολη εναλλακτική, στην οποία γίνεται χρήση της Πρότασης 2.1.9 και του Πορίσματος 4.2.3.1, είναι η εξής.

Πρόταση 4.5.1.3. *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

ii. C^1 *αλλαγή μεταβλητών* $f_0 \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$,

iii. $S \in \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *(ή, εναλλακτικά,* $f_0(S) \in \mathcal{P}(f_0(U)) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$*) τ.ω.:* $S \subset\subset U$ *(ή,* $f_0(S) \subset\subset f_0(U)$*, αντίστοιχα) &*

iv. $f \in C(f_0(S);\mathbb{R})$.

Τότε

1. $f_0(S) \in \mathcal{P}(f_0(U)) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *(ή,* $S \in \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$*, αντίστοιχα),*
2. *η* $Jf_0|_S$ *είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα*
$$\upsilon(f_0(S)) = \int_S Jf_0(x)dx \text{ \& }$$
3. *η* f *είναι ολοκληρώσιμη ανν η* $(f \circ f_0|_S)\, Jf_0|_S$ *είναι ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι*
$$\int_{f_0(S)} f(x)dx = \int_S ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx.$$

Μάλιστα, υπό το πρίσμα της Πρότασης 4.5.1.3, και την αξιοποίηση της Πρότασης 4.3.3.4, έπεται το ακόλουθο.

Πρόταση 4.5.1.4. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. C^1 *αλλαγή μεταβλητών* $f_0 \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$ *&*
3. $f \in C(f_0(U);\mathbb{R})$.

Τότε
$$((f \circ f_0)\, Jf_0)(x) = \lim_{\rho \to 0}\left(\frac{1}{\upsilon(B(x,\rho))}\int_{f_0(B(x,\rho))} f(t)dt\right), \ \forall x \in U.$$

Ειδικότερα,
$$Jf_0(x) = \lim_{\rho \to 0}\frac{\upsilon(f_0(B(x,\rho)))}{\upsilon(B(x,\rho))}, \ \forall x \in U.$$

Διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών

Βαδίζοντας στα ίδια χνάρια με την προηγούμενη υποενότητα, μπορούμε να καταλήξουμε στις γενικεύσεις όλων των αποτελεσμάτων της, όπου υποθέτουμε πλέον απλή διαφορισιμότητα αντί για C^1 διαφορισιμότητα. Επιπλέον, μπορούμε να πάρουμε το βασικό αποτέλεσμα της παρούσας υποενότητας απευθείας από το αντίστοιχο βασικό της προηγούμενης, όπως αναφέρουμε στην Σημείωση στο τέλος. Όπως και να έχει, παραθέτουμε μόνο το βασικό αποτέλεσμα, καθώς τα υπόλοιπα έπονται με τον ίδιο τρόπο.

Αρχικά, κάνοντας χρήση των ίδιων εργαλείων (εκτός, του Πορίσματος 4.1.2.1), παίρνουμε ένα αντίστοιχο του Θεωρήματος 4.5.1.1.

Θεώρημα 4.5.1.3 (*κανόνας αντικατάστασης, διαφορίσιμη περίπτωση*)**.** *Έστω*

1. $I \in \mathcal{I}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$,
2. $f_0 \in C\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ *τ.ω.:*
   i. *η* f_0 *να είναι διαφορίσιμη &*
   ii. *η* $f_0{}' \in B\big(\overline{I};\mathbb{R}\big)$ *να είναι ολοκληρώσιμη &*
3. $f \in C\big(f_0\big(\overline{I}\big);\mathbb{R}\big)$.

Τότε

1. $f_0\big(\overline{I}\big) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{I}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *&*
2. *οι* $|f_0{}'|$, f, $f \circ f_0$ *και* $(f \circ f_0)\,|f_0{}'|$ *είναι ολοκληρώσιμες, και μάλιστα*
$$\int_{f_0(\overline{I})} f(x)dx = \int_{\overline{I}} \big((f \circ f_0)\,|f_0{}'|\big)(x)dx.$$

Έτσι, με την ίδια συλλογιστική, αλλά χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.7.2 αντί του Θεωρήματος 4.1.7.1 και, προφανώς, το Θεώρημα 4.5.1.3 αντί του Θεωρήματος 4.5.1.1, παίρνουμε το αντίστοιχο του Θεωρήματος 4.5.1.2.

Θεώρημα 4.5.1.4 (*αλλαγής μεταβλητών, διαφορίσιμη περίπτωση*)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. *διαφορίσιμη αλλαγή μεταβλητών* $f_0 \in C(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.: το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της* $Jf_0 \in B_{loc}(U;\mathbb{R})$ *να είναι μηδενοσύνολο &*
3. $f \in C(f_0(U);\mathbb{R})$.

Αν η f *είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, τότε η* $(f \circ f_0)\, Jf_0$ *είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι*

$$\int_{f_0(U)}^{\gamma\epsilon\nu} f(x)dx = \int_{U}^{\gamma\epsilon\nu} ((f \circ f_0)\, Jf_0)(x)dx.$$

Τα λοιπά αποτελέσματα, κατάλληλα διατυπωμένα, έπονται επίσης με τον αντίστοιχο τρόπο.

4.5.2 Ομοπαραλληλικές αλλαγές μεταβλητών

Σε αυτή την υποενότητα αξιοποιούμε την Πρόταση 4.5.1.3 όταν $f_0 \in Aff(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Έτσι, εύκολα από την Πρόταση 4.1.1.2, το Θεώρημα 4.1.1.3, το Θεώρημα 4.2.3.1 και την Πρόταση 4.5.1.3, παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 4.5.2.1. *Έστω*

i. $f_0 \in Aff(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$,

ii. $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ &

iii. $f \in C(f_0(S);\mathbb{R})$.

Τότε

1. $Jf_0 = |\det[f_0]|$ &
2. $f_0(S) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *και μάλιστα*
$$\upsilon(f_0(S)) = |\det[f_0]|\, \upsilon(S),$$
και
$$|\det[f_0]| = \frac{\upsilon(f_0(S))}{\upsilon(S)}, \text{ αν } S \notin \mathcal{N}(\mathbb{R}^n).$$

Αν, επιπλέον,

iv. $|\det[f_0]| = 0$,

τότε η f *είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\int_{f_0(S)} f(x)dx = 0,$$

ενώ αν, επιπλέον,

iv′. $|\det[f_0]| \neq 0$,

τότε οι f *και* $f \circ f_0$ *είναι ολοκληρώσιμες, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\int_{f_0(S)} f(x)dx = |\det[f_0]| \int_{S} (f \circ f_0)(x)dx.$$

Απευθείας από το Θεωρήματος 4.5.2.1 έχουμε το εξής.

Πόρισμα 4.5.2.1. *Έστω f_0, S και f όπως στο Θεώρημα 4.5.2.1.*

1. *Αν $f_0 \in RM_n$, τότε*

   i. $Jf_0 = 1$,

   ii. $f_0(S) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ &

   iii. *οι f και $f \circ f_0$ είναι ολοκληρώσιμες, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\int_{f_0(S)} f(x)dx = \int_S (f \circ f_0)(x)dx.$$

   Ειδικότερα,

$$\upsilon(f_0(S)) = \upsilon(S).$$

2. *Αν $f_0 \in Hth_{n,r}$, τότε*

   i. $Jf_0 = |r|^n$,

   ii. $f_0(S) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ &

   iii. *οι f και $f \circ f_0$ είναι ολοκληρώσιμες, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\int_{f_0(S)} f(x)dx = |r|^n \int_S (f \circ f_0)(x)dx.$$

   Ειδικότερα,

$$\upsilon(f_0(S)) = |r|^n \upsilon(S).$$

Σημείωση. 1. *Το σημείο 1 του Πορίσματος 4.5.2.1 μας λέει ότι εκτός των αποστάσεων, οι άκαμπτες κινήσεις διατηρούν και τους όγκους.*

2. *Το σημείο 2 του Πορίσματος 4.5.2.1 μας δίνει τον τύπο που συσχετίζει τον λόγο των όγκων δύο ομοθετικών συνόλων με τον λόγο της αντίστοιχης ομοθεσίας.*

Επίσης ως άμεσο επακόλουθο του Θεωρήματος 4.5.2.1 έπεται το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πόρισμα 4.5.2.2. *Έστω*

i *μια συλλογή $\{x_i\}_{i=1}^n \subsetneq \mathbb{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων (δλδ μια βάση του $\mathbb{R}^n$),*

ii $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ &

iii $f \in Aff(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ *με* $[f] = x$.

Τότε

1. $Jf = |\det x|$,

2. $\Pi\big(\{x_i\}_{i=1}^n\big) \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$, *και μάλιστα ισχύει ότι*

$$|\det x| = \upsilon\big(\Pi\big(\{x_i\}_{i=1}^n\big)\big).$$

Σημείωση. *Υπό το πρίσμα του Πορίσματος 4.5.2.2, και σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.3.1, θα μπορούσαμε να πούμε ότι «τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα μεγιστοποιούν τον όγκο των παραλληλεπιπέδων».*

Το Πόρισμα 4.5.2.2 γεννά έναν «δυϊσμό» που αφορά το πρόσημο της ορίζουσας μιας βάσης του $\mathbb{R}^n$, και ο οποίος είναι το εφαλτήριο για έναν νέο ορισμό.

4.5.3 Προσανατολισμός του $\mathbb{R}^n$

Με βάση το Πόρισμα 4.5.2.2, δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.5.3.1 (*προσανατολισμός γραμμικού υποχώρου*)**.** *Έστω $m \le n$ και γραμμικός υπόχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\dim S = m$.*

1. *Έστω, επιπλέον, μια διατεταγμένη βάση $\{x_i\}_{i=1}^m$ του S, για την οποία θέτουμε $x = (x_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Η βάση αυτή ονομάζεται δεξιόστροφη (right-handed) ή αλλιώς αριστερόστροφη (left-handed), ανν $\det x > 0$ ή αλλιώς $\det x < 0$, αντίστοιχα.*

2. *Οι συλλογές όλων των δεξιόστροφων και, αντίστοιχα, των αριστερόστοφων διατεταγμένων βάσεων του S ονομάζονται προσανατολισμοί (orientations) του S, με τον έναν να καλείται αντίστροφος (reverse) ή αντίθετος (opposite) του άλλου.*

Άμεσο είναι το ακόλουθο.

Πρόταση 4.5.3.1. *Έστω $f \in Aff(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ να είναι $1-1$ και μια διατεταγμένη βάση $\{x_i\}_{i=1}^n$ του $\mathbb{R}^n$. Αν $\det[f] > 0$ ή αλλιώς $\det[f] < 0$, τότε οι διατεταγμένες βάσεις $\{x_i\}_{i=1}^n$ και $\{f(x_i)\}_{i=1}^n$ του $\mathbb{R}^n$ ανήκουν στον ίδιο ή αλλιώς στον αντίστροφο, αντίστοιχα, προσανατολισμό.*

Λόγω της Πρότασης 4.5.3.1, μπορούμε να δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.5.3.2. *Έστω $f \in Aff(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ να είναι $1-1$. Αν $\det[f] > 0$ ή αλλιώς $\det[f] < 0$, τότε λέμε ότι η f διατηρεί (preserves) ή αλλιώς αντιστρέφει (reverses), αντίστοιχα, τον προσανατολισμό.*

Έτσι, γενικεύουμε τον Ορισμό 4.5.3.2 κατά προφανή τρόπο.

Ορισμός 4.5.3.3. *Έστω $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ και διαφορίσιμη στο $S_0 \subseteq S$ $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ τ.ω.:*

$$Jf|_{S_0}(x) \neq 0, \ \ \forall x \in S_0.$$

Αν

$$\det Df|_{S_0}(x) > 0 \text{ ή αλλιώς } \det Df|_{S_0}(x) < 0, \ \ \forall x \in S_0,$$

τότε λέμε ότι η $f|_{S_0}$ διατηρεί ή αλλιώς αντιστρέφει, αντίστοιχα, τον προσανατολισμό.

4.5.4 Όγκος μπάλας (ως προς την νόρμα $|\star|$) στον $\mathbb{R}^n$

Όπως θα δούμε εδώ, όλα τα βασικά αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου απαιτούνται για να υπολογίσουμε τον όγκο μιας μπάλας (ως προς την νόρμα $|\star|$) στον $\mathbb{R}^n$.

Ξεκινάμε με το πρώτο βασικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.5.4.1. *Ισχύει ότι*

$$\upsilon(B(0_n,1)) = \begin{cases} 2, & \text{αν } n=1 \\ \pi, & \text{αν } n=2 \\ \frac{2\pi}{n}\upsilon(B(0_{n-2},1)), & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Απόδειξη. Για $n=1$ είναι προφανές.

Για $n=2$, επιλέγουμε την C^∞ αλλαγή μεταβλητών των πολικών συντεταγμένων, και έτσι υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 4.3.2.2 και της Πρότασης 4.5.1.3, έχουμε τα εξής

$$\upsilon(B(0_2,1)) = \int_{B(0_2,1)} 1dt = \left(\int_{(0,1)} xdx\right)\left(\int_{(0,2\pi)} 1dx\right) = \pi.$$

Για $n \ge 3$, έχουμε με χρήση του Θεωρήματος 4.3.2.2 ότι

$$\upsilon(B(0_n,1)) = \int_{B(0_n,1)} 1dt = \int_{B(0_2,1)} \left(\int_{B\left(0_{n-2},(1-|x|^2)^{\frac{1}{2}}\right)} 1dy\right)dx = \int_{B(0_2,1)} \upsilon\left(B\left(0_{n-2},\left(1-|x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)dx.$$

Από την άλλη, έχουμε από το σημείο 2 του Πορίσματος 4.5.2.1 ότι

$$\upsilon\left(B\left(0_{n-2},\left(1-|x|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)=\left(1-|x|^2\right)^{\frac{n}{2}-1}\upsilon(B(0_{n-2},1)),$$

άρα

$$\upsilon(B(0_n,1))=\upsilon(B(0_{n-2},1))\int\limits_{B(0_2,1)}\left(1-|x|^2\right)^{\frac{n}{2}-1}dx,$$

οπότε δουλεύοντας όπως πριν έπεται το ζητούμενο. □

Για να βρούμε τον κλειστό τύπο της συνάρτησης που ορίζεται αναδρομικά όπως στην Πρόταση 4.5.4.1, θα χρειαστεί να εισάγουμε την συνάρτηση γάμμα, Γ, του Euler. Πρώτα δίνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 4.5.4.2. *1. $\forall\ a>0$ & $b\in\mathbb{R}$, η συνάρτηση $(b,\infty)\ni t\mapsto e^{-at}\in\mathbb{R}_+$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.*

2. $\forall\ a>0$ & $k\in\mathbb{Z}$, ισχύει ότι

$$\lim_{t\to\infty}t^ke^{-at}=0.$$

3. $\forall\ k\in\mathbb{Z}$ & $b>0$, η συνάρτηση $(b,\infty)\ni t\mapsto e^{-t}t^k\in\mathbb{R}_+$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

4. $\forall a>0$, η συνάρτηση $\mathbb{R}_+\ni t\mapsto e^{-t}t^{a-1}\in\mathbb{R}_+$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

Απόδειξη. Για το πρώτο σημείο έχουμε ότι

$$\int\limits_{(b+\frac{1}{n},b+n)}e^{-at}dt=-\frac{1}{a}\left(e^{-a(b+n)}-e^{-a(b+\frac{1}{n})}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{a}e^{-ab},$$

και μιας και $\left(b+\frac{1}{n},b+n\right)\nearrow(b,\infty)$, παίρνουμε από την Πρόταση 4.3.4.2 το ζητούμενο, και μάλιστα

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int\limits_{(b,\infty)}}e^{-at}dt=\frac{1}{a}e^{-ab}.$$

Για το δεύτερο διακρίνουμε περιπτώσεις.

– Η περίπτωση $k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ είναι άμεση.

– Αν $k\in\mathbb{N}$, τότε με επαγωγή σε συνδυασμό με τον κανόνα του L'Hôpital παίρνουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty}t^ke^{-at}=\lim_{t\to\infty}k!a^{-k}e^{-at}=0.$$

Τώρα, για το τρίτο σημείο, με βάση το δεύτερο σημείο

$$\exists c>0\ \text{τ.ω.:}\ 0<t^k<e^{\frac{t}{2}},\ \forall t>c,$$

και άρα

$$0<e^{-t}t^k<e^{-\frac{t}{2}},\ \forall t>c.$$

Μάλιστα μπορούμε να επιλέξουμε το c αρκετά μεγάλο ώστε $c>b$. Υπό το πρίσμα του σημείου 6 της Πρότασης 4.3.4.3, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση μας περιορισμένη στα (b,c) και (c,∞) είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

– Η συνάρτηση στο (b,c) είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη ως («συμβατικά») ολοκληρώσιμη.

– Όσο για το (c,∞), έχουμε ότι

$$0\le\int\limits_{(c+\frac{1}{n},c+n)}e^{-t}t^kdt\le\int\limits_{(c+\frac{1}{n},c+n)}e^{-\frac{t}{2}}dt\nearrow 2e^{-\frac{c}{2}},$$

όπου στο τελευταίο όριο χρησιμοποιήσαμε το πρώτο σημείο. Έχουμε έτσι μια φραγμένη αύξουσα ακολουθία, άρα συγκλίνουσα, δλδ

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_{(c+\frac{1}{n},c+n)} e^{-t}t^k dt$$

και άρα από την Πρόταση 4.3.4.2 η συνάρτησή μας περιορισμένη στο (c,∞) είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη και μάλιστα

$$\int\limits_{(c,\infty)}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t}t^k dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{(c+\frac{1}{n},c+n)} e^{-t}t^k dt.$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.3.4.2 για την ακολουθία

$$\left(e^{-\star}\,\star^k\,\chi_{(c+\frac{1}{n},c+n)}\right)|_{(c,\infty)} \to \left(e^{-\star}\star^k\right)|_{(c,\infty)},$$

καθώς

$$\left(e^{-\star}\,\star^k\,\chi_{(c+\frac{1}{n},c+n)}\right)|_{(c,\infty)} \le e^{-\frac{\star}{2}}|_{(c,\infty)},$$

όπου η συνάρτηση στο δεξιό μέλος της ανισότητας είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

Τέλος, για το τέταρτο σημείο, υπό το πρίσμα του σημείου 6 της Πρότασης 4.3.4.3, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση περιορισμένη στα $(0,1)$ και $(1,\infty)$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

- Ισχύει ότι $0 < e^{-t}t^{a-1} < t^{a-1}$, $\forall t \in (0,1)$, άρα

$$0 \le \int\limits_{(\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n})} e^{-t}t^{a-1}dt \le \int\limits_{(\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n})} t^{a-1}dt = \frac{1}{a}\left(\left(1-\frac{1}{2n}\right)^a - \frac{1}{(2n)^a}\right) \nearrow \frac{1}{a}.$$

  Έχουμε έτσι μια φραγμένη αύξουσα ακολουθία, άρα συγκλίνουσα, και τελικά η συνάρτησή μας περιορισμένη στο $(0,1)$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

- Όσο για το $(1,\infty)$ επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.: $a-1 < k_0$. Τότε

$$0 < e^{-t}t^{a-1} < e^{-t}t^{k_0},\ \forall t > 1.$$

  Έτσι, αξιοποιώντας το τρίτο σημείο και εργαζόμενοι όπως πριν, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτησή μας είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη στο $(1,\infty)$.

□

Υπό το πρίσμα της σημείου 4 της Πρότασης 4.5.4.2, δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.5.4.1 (*συνάρτηση γάμμα του Euler*). *Ορίζουμε την συνάρτηση συνάρτηση γάμμα του Euler*

$$\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \Gamma(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_+}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t}t^{x-1}dt \quad \mu\epsilon\ \Gamma > 0.$$

Σημείωση. *Το πεδίο ορισμού της* Γ *μπορεί να επεκταθεί από το* $\mathbb{R}^+$ *στο* $\mathbb{R}\setminus(-\mathbb{N}_0)$, *αλλά αυτό δεν θα μας απασχολήσει εδώ.*

Έχουμε με απευθείας εφαρμογή του Θεωρήματος 4.5.1.2 το εξής.

Πρόταση 4.5.4.3. $\forall x > 0$, *η συνάρτηση* $(0,1) \ni t \mapsto (-\ln t)^{x-1} \in \mathbb{R}_+$ *είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\Gamma(x) = \int\limits_{(0,1)}^{\gamma\epsilon\nu} (-\ln t)^{x-1}dt,\ \forall x > 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την C^∞ αλλαγή μεταβλητών $(0,1) \ni t \mapsto e^{-t} \in (0,\infty)$. □

Σημείωση. *Η μορφή της* Γ *στην Πρόταση 4.5.4.3 είναι και αυτή που πρότεινε για πρώτη φορά ο Euler.*

Άμεσες είναι οι παρακάτω ιδιότητες της Γ.

Πρόταση 4.5.4.4.

1. *$\forall x > 0$, ισχύει ότι $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.*
2. *$\forall n \in \mathbb{N}_0$, ισχύει ότι $\Gamma(n+1) = n!$.*
3. *Η συνάρτηση $\ln\circ\Gamma$ είναι κυρτή.*

Απόδειξη. Το πρώτο σημείο έπεται με ολοκλήρωση κατά μέρη. Για το δεύτερο χρησιμοποιούμε ότι $\Gamma(1) = 1$ σε συνδυασμό με το πρώτο σημείο για να πάρουμε το ζητούμενο με επαγωγή. Όσο για το τρίτο, από την ανισότητα του Hölder προκύπτει ότι

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) \le (\Gamma(x))^{\frac{1}{p}}(\Gamma(y))^{\frac{1}{q}}, \ \forall\ p,q \in (1,\infty)\ \&\ x,y \in (0,\infty).$$

□

Σημείωση. *Λόγω του σημείου 2 της Πρότασης 4.5.4.4 μπορούμε γενικεύσουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης «παραγοντικό», $\star!$, από το $\mathbb{N}_0$ στο $(-1,\infty)$, ως $x! = \Gamma(x+1)$ $\forall\,(-1,\infty)$.*

Το επόμενο, αν και δεν θα μας είναι χρήσιμο εδώ, το παραθέτουμε λόγω κομψότητας. Έτσι, άμεση συνέπεια του ακόλουθου, πολύ μεταγενέστερου αποτελέσματος, για την απλή απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στο [32, Θεώρημα 8.19, σελ. 296], είναι ότι οι συνθήκες της Πρότασης 4.5.4.4 χαρακτηρίζουν αποκλειστικά την Γ.

Θεώρημα 4.5.4.1 (*Bohr-Mollerup*)**.** *Αν $\exists$ συνάρτηση $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ τ.ω.:*

i. $f > 0$,

ii. *$\forall x > 0$, ισχύει ότι $f(x+1) = xf(x)$,*

iii. *$\forall n \in \mathbb{N}_0$, ισχύει ότι $f(n+1) = n!$ &*

iv. *η συνάρτηση $\ln\circ f$ είναι κυρτή.*

τότε

1. *$\forall x > 0$, υπάρχει το όριο*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x+i)} \quad \&$$

2. *$\forall x > 0$, ισχύει ότι*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x+i)}.$$

Έτσι, άμεσα από το Θεώρημα 4.5.4.1 και την μοναδικότητα του ορίου, έπεται το επόμενο.

Πόρισμα 4.5.4.1.

1. *Η συνάρτηση Γ είναι η μοναδική συνάρτηση με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}_+$ που ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 4.5.4.4.*
2. *$\forall x > 0$, ισχύει ότι*

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{\prod\limits_{i=0}^{n}(x+i)}.$$

Ακολουθεί τώρα ο χρήσιμος υπολογισμός της τιμής $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Πρόταση 4.5.4.5. *1. Η συνάρτηση $\mathbb{R}_+ \ni t \to e^{-t^2} \in \mathbb{R}_+$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\int_{\mathbb{R}_+}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t^2}dt = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

2. Ισχύει ότι

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Απόδειξη. Για το πρώτο σημείο, σε ό,τι αφορά την γενικευμένη ολοκληρωσιμότητα, αρκεί να την ελέγξουμε ξεχωριστά στο $(0,1)$ και στο $(1,\infty)$. Αναφέρουμε απλά ότι για το δεύτερο διάστημα, παρατηρούμε ότι

$$0 < e^{-t^2} < e^{-t}, \ \forall t > 1,$$

οπότε, κάνοντας χρήση του σημείου 1 της Πρότασης 4.5.4.2, έπεται κατά τα γνωστά η γενικευμένη ολοκληρωσιμότητα. Τώρα, για την ζητούμενη ισότητα, έχουμε τα εξής.

- Η συνάρτηση $(\mathbb{R}_+)^2 \ni t \to e^{-|t|^2} \in \mathbb{R}_+$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^2}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-|t|^2}dt = \frac{\pi}{4}.$$

  Πράγματι, παρατηρούμε ότι από το Πόρισμα 4.3.1.4 (εύκολα επαληθεύονται οι απαιτήσεις του) έχουμε

$$\int_{[\frac{1}{n},n]\times[\frac{1}{2n},\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2n}]} t_1 e^{-t_1{}^2}dt = \left(\int_{[\frac{1}{n},n]} t_1 e^{-t_1{}^2}dt_1\right)\left(\int_{[\frac{1}{2n},\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2n}]} 1dt_2\right) = \\ = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n}\right)\left(e^{-\frac{1}{n^2}} - e^{-n^2}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4}.$$

  Άρα, με βάση την Πρόταση 4.3.4.2 έπεται ότι η $\mathbb{R}_+ \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \ni t \to t_1 e^{-t_1{}^2} \in \mathbb{R}_+$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη με

$$\int_{\mathbb{R}_+\times\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}^{\gamma\epsilon\nu} t_1 e^{-t_1{}^2}dt = \frac{\pi}{4}.$$

  Θεωρώντας, τώρα, τον κατάλληλο περιορισμό της C^∞ αλλαγής μεταβλητών των πολικών συντεταγμένων, έπεται το ζητούμενο από το παραπάνω σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.5.1.2.

- Έτσι, το Θεώρημα 4.3.4.1 δικαιολογεί τα εξής

$$\frac{\pi}{4} = \int_{(\mathbb{R}_+)^2}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-|t|^2}dt = \int_{(\mathbb{R}_+)^2}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t_1{}^2-t_2{}^2}dt = \left(\int_{\mathbb{R}_+}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t_1{}^2}dt_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}_+}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t_2{}^2}dt_2\right) = \left(\int_{\mathbb{R}_+}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t^2}dt\right)^2.$$

Ως προς το δεύτερο σημείο τώρα, έχουμε εξ ορισμού ότι

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}_+}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt,$$

οπότε, θεωρώντας την C^∞ αλλαγή μεταλητών $\mathbb{R}_+ \ni t \to t^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}_+$, έπεται από το Θεώρημα 4.5.1.2 ότι

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_{\mathbb{R}_+}^{\gamma\epsilon\nu} e^{-t^2}dt.$$

Έτσι, από το πρώτο σημείο έχουμε το ζητούμενο. □

Έτσι, η Πρόταση 4.5.4.1 γίνεται ως ακολούθως.

Πόρισμα 4.5.4.2 (*όγκος μπάλας*)**.** *Έστω* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *και* $\rho > 0$. *Τότε*

$$\upsilon(B(x_0,\rho)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\rho^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\rho^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Απόδειξη. Καταρχάς, η δεύτερη ισότητα έπεται άμεσα από το σημείο 1 της Πρότασης 4.5.4.4. Έτσι, λόγω του Πορίσματος 4.5.2.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\upsilon(B(0_n,1)) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Υπό το πρίσμα του σημείου 2 της Πρότασης 4.5.4.5 και του ότι $\Gamma(1) = 1$, παίρνουμε την ισχύ του τύπου για $n \in \{1,2\}$. Για $n \geq 3$, έχουμε διαδοχικά ότι

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}+1}}{n\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}+1}}{n\frac{n-2}{2}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} = \frac{2\pi}{n}\frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)},$$

δλδ την ισχύ του τύπου και για $n \geq 3$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Πολλαπλότητα στον $\mathbb{R}^n$

Είναι εύκολο να φέρουμε παραδείγματα $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ τ.ω.: $S^\circ = \varnothing$ και να είναι συνεκτικά, όπως είναι τα συνεκτικά τμήματα συνόρων «τυπικών» ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Η διαίσθηση μας μάς λέει ότι πρόκειται κατά μία έννοια για υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ αλλά «μικρότερης διάστασης», ή πιο αυστηρά ότι μπορούν να εκφραστούν τοπικά ως γραφήματα συναρτήσεων κάποιων συντεταγμένων.

Αφορμώμενοι από την ύπαρξη τέτοιων συνόλων λοιπόν, σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τις πολλαπλότητες, ή, εναλλακτικά (και πιο ορθά), τα πολυπτύγματα, στον $\mathbb{R}^n$. Θα μας απασχολήσουν οι πολλαπλότητες που σχετίζονται με κάποιου είδους διαφορισιμότητα από αυτά που μέχρι τώρα μελετήσαμε, σε αντιδιαστολή με τις τοπολογικές πολλαπλότητες, οι οποίες σχετίζονται μονάχα με την συνέχεια.

Τονίζουμε ότι, αν και έχουμε στην διάθεσή μας όλα τα εργαλεία που χρειάζονται για να εισάγουμε τις σκέτα διαφορίσιμες πολλαπλότητες, εντούτοις κάτι τέτοιο δεν είναι αρκετό για το Κεφάλαιο 6. Και αυτό γιατί ο ακρογωνιαίος λίθος της θεωρίας ολοκλήρωσης επί πολλαπλότητας των επόμενων κεφαλαίων είναι το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, το οποίο, ακόμα και στην διαφορίσιμη εκδοχή του (βλ. την Θεώρημα 4.5.1.4), απαιτεί επιπλέον συνθήκη ολοκληρωσιμότητας των μερικών διαφορίσεων.

Σημειώνουμε, επίσης, ότι αν και υπάρχουν τρόποι με τους οποίους μπορούμε να χειριστούμε την ύπαρξη ιδιομορφιών, όπως π.χ. την μη διαφορισιμότητα σε σημεία, δεν θα μας απασχολήσει εδώ αυτή η θεματολογία. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις πολλαπλότητες με γωνίες, τις Lipschitz πολλαπλότητες (απαιτείται Θεωρία Μέτρου), κ.τ.λ..

Υπό το πλαίσιο αυτό, και σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ο συμβολισμός πρέπει να απλουστευθεί για την όσο το δυνατόν «φιλικότερη» προς τον αναγνώστη διατύπωση των αποτελεσμάτων (κυρίως των επόμενων κεφαλαίων), κάνουμε την εξής σύμβαση.

Σύμβαση:
Περιορίζουμε την μελέτη μας στην C^∞ διαφορισιμότητα, δλδ στις ομαλές πολλαπλότητες.

Ωστόσο, ό,τι ορίζουμε/δείχνουμε για την απείρως συνεχώς διαφορίσιμη περίπτωση, ισχύει, με την ανάλογη τροποποίηση στην διατύπωση, για την C^k διαφορίσιμη περίπτωση με $k \in \overline{\mathbb{N}}$.

Τέλος, υπογραμμίζουμε ότι σε αυτό το κεφάλαιο, και για ακόμα μια φορά, κομβικής σημασίας είναι τα βασικά αποτελέσματα της Υποενότητας 4.1.6 και της Υποενότητας 4.1.8.

5.1 Πολλαπλότητα χωρίς σύνορο

Μιλώντας αυθαίρετα προς το παρόν, θα λέγαμε ότι μια πολλαπλότητα χωρίς σύνορο είναι μια πολλαπλότητα η οποία είτε δεν διαθέτει «συνοριακά σημεία», είτε δεν τα περιέχει αν αυτά υπάρχουν. Έτσι, ορθότερος θα ήταν ο όρος «ανοικτές» πολλαπλότητες για αυτόν τον σκοπό. Ωστόσο, ο όρος έχει ήδη καθιερωθεί στην βιβλιογραφία για άλλο σκοπό.

Όπως αναμένουμε, και όπως θα δουμε και στην επόμενη ενότητα, οι πολλαπλότητες χωρίς σύνορο είναι μια υποπερίπτωση των πολλαπλοτήτων. Επιλέγεται η παρουσίαση να ξεκινήσει με τις πρώτες, έτσι ώστε να είναι ομαλή η μετάβαση στην γενική περίπτωση. Έτσι, η γενική θεωρία θα αναπτυχθεί στην επόμενη ενότητα και εδώ απλά θα μελετήσουμε συγκεκριμένες ιδιότητες των πολλαπλοτήτων χωρίς σύνορο.

Ορισμός 5.1.1 (*πολλαπλότητα χωρίς σύνορο διάστασης m, παραμετρική μορφή*)**.** *Έστω $m \leq n$.*

1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το S είναι (ομαλή) πολλαπλότητα (στον $\mathbb{R}^n$) χωρίς σύνορο διάστασης m ανν $\exists$*
$$\{(U_j, f_j)\}_{j\in\mathscr{I}} \subsetneq \coprod_{U\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)} C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$$
τ.ω.:
   i. $S = \bigcup_{j\in\mathscr{I}} f_j(U_j)$ *&*
   ii. $\forall j \in \mathscr{I}$ *να ισχύει ότι*
      α΄. *η* f_j *είναι* $1-1$,
      β΄. $f_j^{-1} \in C(f_j(U_j);\mathbb{R}^m)$ *&*
      γ΄. $\operatorname{rank} Df_j(x) = m$, $\forall x \in U_j$, *ή, ισοδύναμα,* $\mathfrak{J}f_j > 0$.
2. *Συμβολίζουμε*
$$\mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n) = \left\{S \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{το } S \text{ είναι όπως στο 1.}\right\}.$$

Σημείωση. *Η ισοδυναμία που εμφανίζεται στο σημείο 1.ii.γ΄. του Ορισμού 5.1.1 έπεται απευθείας από την Πρόταση 3.2.2.1.*

Παράδειγμα. *Ο Ορισμός 5.1.1 κάθε άλλο παρά κενός είναι. Πράγματι, είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι*

1. $U \in \mathcal{M}_n^\circ(\mathbb{R}^n)$, $\forall U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $\varpi_i^n(I^\circ) \in \mathcal{M}_1^\circ(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ I \in \mathcal{I}(\mathbb{R})$ *&* $i \in \{1,\dots,n\}$,
3. $f(S) \in \mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n)$, $\forall$ *γραμμικό υποχώρο* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *με* $\dim S = m$ *και* $\forall f \in RM_n$ *&*
4. $\partial B(t_0,\rho) \in \mathcal{M}_{n-1}^\circ(\mathbb{R}^n)$, $\forall\ t_0 \in \mathbb{R}^n$ *&* $\rho > 0$.

Ειδικότερα για το $\partial B(x_0,\rho)$, αρκεί να τροποποιήσουμε λίγο την C^∞ αλλαγή μεταβλητών του Παραδείγματος της Υποενότητας 4.1.7.

Με χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1, του Πορίσματος 4.1.4.1 και του Θεωρήματος 4.1.6.2, παίρνουμε την εξής ισοδύναμη μορφή του Ορισμού 5.1.1 όταν $m \neq n$.

Πρόταση 5.1.1 (*πολλαπλότητα χωρίς σύνορο διάστασης m, μορφή γραφημάτων*)**.** *Έστω $m < n$ και $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $S \in \mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n)$ ανν $\exists$*
$$\left\{\left(\left(\pi^n_{i_1\dots i_m}\right)_j, (U_j, f_j)\right)\right\}_{j\in\mathscr{I}} \subsetneq \Pi^n_m \times \coprod_{U\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^m)} C^\infty(U;\mathbb{R}^{n-m})$$
τ.ω.: $S = \bigcup_{j\in\mathscr{I}} \operatorname{gr}\left(f_j; \left(\pi^n_{i_1\dots i_m}\right)_j\right)$.

Τέλος, αυτή την φορά με χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1, του Πορίσματος 4.1.4.1, του Θεωρήματος 4.1.8.1 και της Πρότασης 5.1.1, παίρνουμε την εξής χρήσιμη και κομψή ισοδύναμη μορφή του Ορισμού 5.1.1 όταν $m \neq n$.

Πρόταση 5.1.2 (*πολλαπλότητα χωρίς σύνορο διάστασης m, πεπλεγμένη μορφή*)**.** *Έστω $m < n$ και $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $S \in \mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n)$ ανν $\exists$*
$$\{(U_j, f_j)\}_{j\in\mathscr{I}} \subsetneq \coprod_{U\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)} C^\infty(U;\mathbb{R}^{n-m})$$
τ.ω.:

1. $S = \bigcup_{j\in\mathscr{I}} f_j^{-1}(\{0_{n-m}\})$ *&*
2. $\forall j \in \mathscr{I}$ *να ισχύει ότι* $\operatorname{rank} Df_j(t) = n-m$, $\forall t \in U_j$, *ή, ισοδύναμα,* $\mathfrak{J}f_j > 0$.

Σημείωση.
1. *Η ισοδυναμία που εμφανίζεται στο σημείο 2. της Πρότασης 5.1.2 έπεται απευθείας από την Πρόταση 3.2.2.1.*
2. *Π.χ., $\forall\ t_0 \in \mathbb{R}^n$ & $\rho > 0$, τα $\partial\left(B(t_0,\rho)^c\right)$ και $\partial B(t_0,\rho)$ ικανοποιούν τις συνθήκες της Πρότασης 5.1.2 μέσω της ίδιας f.*

5.2 Πολλαπλότητα

5.2.1 Γενικά στοιχεία

Θέλουμε να ορίσουμε ένα υπερσύνολο του συνόλου των πολλαπλοτήτων χωρίς σύνορο, τ.ω.: τα στοιχεία του δυνητικά να περιέχουν κάποιου είδους «σύνορο». Θα γενικεύσουμε τον Ορισμό 5.1.1 με τέτοιο τρόπο ώστε μέσω του Θεωρήματος 4.1.5.2 να είμαστε πάλι σε θέση να μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα βασικά θεωρήματα της Υποενότητας 4.1.6 και της Υποενότητας 4.1.8. Έτσι, έχοντας κατά νου την Πρόταση 3.2.1.1, δίνουμε τον ακόλουθο γενικότερο (βλ., παρακάτω, το Πόρισμα 5.2.3.3) ορισμό.

Ορισμός 5.2.1.1 (*πολλαπλότητα διάστασης m*)**.** *Έστω $m \leq n$.*

1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το S είναι (ομαλή) πολλαπλότητα (στον $\mathbb{R}^n$) διάστασης m ανν $\exists$*

$$\{(i_j, (S_j, f_j))\}_{j\in\mathscr{I}} \subsetneq \coprod_{i_j \in\{1,\ldots,m\}} \coprod_{S\in\mathcal{O}\left(\overline{\mathbb{R}^m_{i_j,\pm}}\right)} C^\infty(S;\mathbb{R}^n)$$

τ.ω.:

   i. $S = \bigcup_{j\in\mathscr{I}} f_j(S_j)$ *&*

   ii. $\forall j \in \mathscr{I}$ *να ισχύει ότι*

      α΄. *η* f_j *είναι* $1-1$,

      β΄. $f_j^{-1} \in C(f_j(S_j);\mathbb{R}^m)$ *&*

      γ΄. $\operatorname{rank} Df_j(x) = m$, $\forall x \in S_j$, *ή, ισοδύναμα,* $\mathfrak{J} f_j > 0$.

2. *Συμβολίζουμε*

$$\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n) = \left\{S \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{το } S \text{ είναι όπως στο } 1.\right\}.$$

Σημείωση. *Αν δεν λάβουμε υπόψη τις συνθήκες διαφορισιμότητας του Ορισμού 5.2.1.1, τότε θα έχουμε τον ορισμό μιας τοπολογικής πολλαπλότητας στον $\mathbb{R}^n$.*

Παράδειγμα. *Είναι προφανές ότι $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$ ισχύει ότι*

$$\overline{\mathbb{R}^n_{i,\pm}} \in M_n(\mathbb{R}^n), \ \text{ενώ } \overline{\mathbb{R}^n_{i,\pm}} \notin M_n^\circ(\mathbb{R}^n).$$

Επεκτείνουμε, κατά προφανή τρόπο, τον Ορισμό 5.2.1.1 έτσι ώστε να καλύψουμε και την περίπτωση της «μηδενικής» διάστασης.

Ορισμός 5.2.1.2 (*πολλαπλότητα διάστασης 0*)**.** 1. *Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το S είναι πολλαπλότητα (στον $\mathbb{R}^n$) διάστασης 0 ανν $\exists$*

   α΄. $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *&*

   β΄. $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^n$,

   τ.ω.:

   i. *η* $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^n$ *να είναι τοπικά πεπερασμένη &*

   ii. $S = \bigcup_{j\in N} t_j$.

2. *Συμβολίζουμε*

$$\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_0^\circ(\mathbb{R}^n) = \left\{S \subseteq \mathbb{R}^n \,\middle|\, \text{το } S \text{ είναι όπως στο σημείο } 1.\right\}.$$

Σημείωση. *Στο παρόν κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό 5.2.1.2 μόνο στο Θεώρημα 5.2.3.2 (και στα συναφή αποτελέσματα), παρακάτω.*

Ορισμός 5.2.1.3 (*άτλαντας πολλαπλότητας*)**.** *Έστω $m \leq n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. Κάθε συλλογή*

όπως η $\{(S_j, f_j)\}_{j\in\mathscr{I}}$ του Ορισμού 5.2.1.1,

καλείται άτλαντας (atlas) της S.

Παρατήρηση. *Είναι προφανές ότι $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ ανν $\exists$ αντίστοιχος άτλαντας της S.*

Το επόμενο είναι προφανές.

Πρόταση 5.2.1.1. *Έστω $m \le n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. Η ένωση όλων των ατλάντων της S είναι άτλαντας της S.*

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.2.1.1, δίνουμε το παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.2.1.4 (μεγιστικός άτλαντας πολλαπλότητας)**.** *Έστω $m \le n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. Ο άτλαντας της S της Πρότασης 5.2.1.1 καλείται μεγιστικός (maximal).*

Παρατήρηση. *Είναι προφανές ότι ο μεγιστικός άτλαντας της S είναι υπερσύνολο όλων των ατλάντων της S.*

Ορισμός 5.2.1.5 (χάρτης άτλαντα πολλαπλότητας)**.** *Έστω*

1. *$m \le n$,*
2. *$S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ &*
3. *άτλαντας $\{(S_j, f_j)\}_{j\in\mathscr{J}}$ της S.*

Κάθε ζεύγος (S_j, f_j) καλείται χάρτης (chart) του παραπάνω άτλαντα.

Παρατήρηση. *Είναι προφανές ότι ο μεγιστικός άτλαντας μιας πολλαπλότητας περιέχει όλους τους χάρτες κάθε άτλαντά της.*

Ορισμός 5.2.1.6 (επικαλυπτόμενοι χάρτες)**.** *Λέμε ότι δύο χάρτες του μεγιστικού άτλαντα μιας πολλαπλότητας επικαλύπτονται (overlap) (ή είναι επικαλυπτόμενοι) ανν*

η τομή των εικόνων τους είναι μη κενή.

Ορισμός 5.2.1.7 (συναρτήσεις μετάβασης μεταξύ δύο επικαλυπτόμενων χαρτών)**.** *Έστω*

i. *$m \le n$,*

ii. *$S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,*

iii. *δύο επικαλυπτόμενοι χάρτες (S_1, f_1) και (S_2, f_2) του μεγιστικού άτλαντα της S, για τους οποίους θέτουμε*
$$S_\dagger = f_1(S_1) \cap f_2(S_2) \neq \varnothing, \quad S_\star = f_1^{-1}(S_\dagger) \quad \& \quad S_\bigstar = f_2^{-1}(S_\dagger).$$

Η συνάρτηση $f_2^{-1} \circ f_1 \in C(S_\star; \mathbb{R}^m)$, για την οποία ισχύει ότι $\left(f_2^{-1} \circ f_1\right)(S_\star) = S_\bigstar$, καλείται συνάρτηση μετάβασης (transition function) (από τον χάρτη (S_1, f_1) στον (S_2, f_2)).

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι κομβικό. Για την απόδειξή του χρησιμοποιείται το Θεώρημα 4.1.2.1, το Πόρισμα 4.1.4.1, το Θεώρημα 4.1.5.2 (!) και το Θεώρημα 4.1.6.2.

Θεώρημα 5.2.1.1 (διαφορική συσχέτιση χαρτών πολλαπλότητας)**.** *Έστω*

i. *$m \le n$,*

ii. *$S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,*

iii. *δύο επικαλυπτόμενοι χάρτες (S_1, f_1) και (S_2, f_2) του μεγιστικού άτλαντα της S, για τους οποίους θέτουμε*
$$S_\dagger = f_1(S_1) \cap f_2(S_2) \neq \varnothing, \quad \& \quad S_\star = f_1^{-1}(S_\dagger).$$

Τότε, για την συνάρτηση μετάβασης $f_2^{-1} \circ f_1 \in C(S_\star; \mathbb{R}^m)$ ισχύει ότι

1. *η $f_2^{-1} \circ f_1 \in C^\infty(S_\star; \mathbb{R}^m)$ &*
2. *$J\left(f_2^{-1} \circ f_1\right) > 0$.*

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια σχετικά με το Θεώρημα 5.2.1.1.*

1. *Το Θεώρημα 4.1.5.2 είναι απαραίτητο για την απόδειξη του αποτελέσματος, όταν η δεδομένη πολλαπλότητα δεν είναι πολλαπλότητα χωρίς σύνορο (δεν έχουμε βέβαια ακόμα δείξει ότι μια πολλαπλότητα χωρίς σύνορο είναι πολλαπλότητα, αλλά κάτι τέτοιο είναι λίγο πολύ προφανές). Συγκεκριμένα, αξιοποιείται για να χειριστούμε τους συνοριακούς χάρτες ως να ήταν εσωτερικοί - για τους ορισμούς τέτοιων χαρτών βλ. παρακάτω - και άρα να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.1.6.2 που αφορά σε ανοικτά υποσύνολα.*

2. *Το αποτέλεσμα είναι βασικό και για τον καλό ορισμό του ολοκληρώματος επί πολλαπλότητας που θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο.*

Από το Θεώρημα 5.2.1.1, έπεται το εξής βασικό.

Πόρισμα 5.2.1.1. *Έστω $m \leq n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. Τότε $S_0 \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ $\forall S_0 \in \mathcal{O}(S)$.*

Από την Πρόταση 2.1.5, τώρα, το Πόρισμα 4.1.4.1 και το Θεώρημα 5.2.1.1, έπεται το εξής, επίσης, βασικό.

Πόρισμα 5.2.1.2. *Έστω $m \leq n$ και $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ ανν $\exists$ άτλαντας $\{(S_j, f_j)\}_{j\in N}$ της S με $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$.*

5.2.2 Μηδενοσύνολο πολλαπλότητας

Ο επόμενος ορισμός έρχεται φυσικά.

Ορισμός 5.2.2.1 (*μηδενοσύνολο πολλαπλότητας*)**.** *Έστω*

1. $m \leq n$,
2. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ &
3. $S_0 \subseteq S$.

Το S_0 καλείται μηδενοσύνολο της S ανν $\forall$ χάρτη (S_j, f_j) του μεγιστικού άτλαντα της S ισχύει ότι

$$f_j^{-1}(S_0 \cap f_j(S_j)) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m).$$

Με χρήση της Πρότασης 2.1.5, του Πορίσματος 4.2.3.1 και του Πορίσματος 5.2.1.2, μπορούμε να πάρουμε εύκολα μια ισοδύναμη αλλά πιο εύχρηστη μορφή του Ορισμού 5.2.2.1.

Πρόταση 5.2.2.1. *Έστω*

α΄. $m \leq n$,

β΄. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ &

γ΄. $S_0 \subseteq S$.

Το S_0 είναι μηδενοσύνολο της S ανν $\exists$

1. $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ &
2. *συλλογή χαρτών* $\{(S_j, f_j)\}_{j\in N}$ *του μεγιστικού άτλαντα της* S,

τ.ω.:

i. $S_0 \subseteq \bigcup_{j\in N} f_j(S_j)$ &

ii. $f_j^{-1}(S_0 \cap f_j(S_j)) \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^m)$, $\forall j \in N$.

Άμεσα από την Πρόταση 5.2.2.1, έπεται το εξής.

Πρόταση 5.2.2.2. *Έστω*

i. $m \leq n$,

ii. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ &

iii. $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subsetneq \mathcal{P}(S)$.

1. *Το $\varnothing$ είναι μηδενοσύνολο της S.*

2. *Αν το S_1 είναι αριθμήσιμο, τότε το S_1 είναι μηδενοσύνολο της S.*

3. *Αν $S_1 \subseteq S_2$ και το S_2 είναι μηδενοσύνολο της S, τότε και το S_1 είναι μηδενοσύνολο της S.*

4. *Αν $S_1 \in \mathcal{O}(S) \setminus \{\varnothing\}$, τότε το S_1 δεν είναι μηδενοσύνολο της S.*

5. *Αν το S_i είναι μηδενοσύνολο της S $\forall i \in \mathbb{N}$, τότε και το $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} S_i$ είναι μηδενοσύνολο της S.*

5.2.3 Εσωτερικό και σύνορο πολλαπλότητας

Ορισμός 5.2.3.1 (*εσωτερικό και συνοριακό σημείο πολλαπλότητας*)**.** *Έστω $m \le n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Έστω, επιπλέον, $t \in S$.*

   i. *Το t καλείται εσωτερικό σημείο της S ανν $\exists$ χάρτης (S_j, f_j) του μεγιστικού άτλαντα της S, τ.ω.:*

      α΄. *$t \in f_j(S_j)$ &*

      β΄. *$S_j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$.*

   ii. *Το t καλείται συνοριακό σημείο της S ανν το x δεν είναι εσωτερικό σημείο της S, δλδ ανν $\exists$ άτλαντας $\{(S_j, f_j)\}_{j\in\mathscr{I}}$ της S, τ.ω.: $\forall$ χάρτη (S_j, f_j) αυτού του άτλαντα να ισχύει ότι*

$$\text{αν } t \in f_j(S_j),\ \text{ τότε } S_j \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\ \&\ S_j \in \mathcal{O}\Big(\overline{\mathbb{R}^m_{l_j,\pm}}\Big) \text{ για κάποιο } l \in \{1_j, \ldots, m\}\,.$$

2. i. *Συμβολίζουμε*

$$\operatorname{int} S = \Big\{t \in S \,\Big|\, \text{το } t \text{ είναι εσωτερικό σημείο της } S\Big\}\,.$$

   ii. *Συμβολίζουμε*

$$\operatorname{bd} S = \Big\{t \in S \,\Big|\, \text{το } t \text{ είναι συνοριακό σημείο της } S\Big\}\,.$$

Προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 5.2.3.1 το ακόλουθο.

Πόρισμα 5.2.3.1. *Έστω $m \le n$. $\forall S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ ισχύει ότι*

$$S = \operatorname{int} S \cup \operatorname{bd} S \quad \& \quad \operatorname{int} S \cap \operatorname{bd} S = \varnothing.$$

Εσωτερικό πολλαπλότητας

Ξεκινάμε με την μελέτη των εσωτερικών σημείων μιας πολλαπλότητας. Άμεσα από τον Ορισμό 5.2.3.1, έπεται το εξής.

Πρόταση 5.2.3.1. *Έστω*

α΄. *$m \le n$,*

β΄. *$S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,*

γ΄. *$t \in S$ &*

δ΄. *χάρτης (S_j, f_j) του μεγιστικού άτλαντα της S, τ.ω.: $t \in f_j(S_j)$.*

Τότε $t \in \operatorname{int} S$ ανν

1. *είτε $S_j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$,*

2. *είτε*

   i. *$S_j \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ & $S_j \in \mathcal{O}\Big(\overline{\mathbb{R}^m_{l_j,\pm}}\Big)$ για κάποιο $l_j \in \{1, \ldots, m\}$ &*

   ii. *$f_j^{-1}(t) \in \mathbb{R}^m_{l_j,\pm}$.*

Προκύπτει άμεσα το ακόλουθο, από τον Ορισμό 5.1.1, το Πόρισμα 5.2.3.1 και την Πρόταση 5.2.3.1.

Πόρισμα 5.2.3.2. *Έστω $m \le n$. Ισχύει ότι*

$$S \in \mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow (S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n) \,\&\, S = \operatorname{int} S) \Leftrightarrow (S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n) \,\&\, \operatorname{bd} S = \varnothing).$$

Το επόμενο είναι άμεσο από τον συνδυασμό του Παραδείγματος μετά τον Ορισμό 5.2.1.1 και του Πορίσματος 5.2.3.2.

Πόρισμα 5.2.3.3. *Έστω $m \le n$. Τότε*

$$\mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.2.3.1, δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 5.2.3.2 (*εσωτερικός χάρτης πολλαπλότητας*)**.** *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ *&*

iii. χάρτης (S_j, f_j) *του μεγιστικού άτλαντα της* S.

Ο (S_j, f_j) *καλείται εσωτερικός ανν* $S_j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι τετριμμένο.

Θεώρημα 5.2.3.1. *Έστω $m \le n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\operatorname{int} S \in \mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n).$$

Μάλιστα, η συλλογή των εσωτερικών χαρτών του μεγιστικού άτλαντα της S είναι ο μεγιστικός άτλαντας της $\operatorname{int} S$.

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.2.3.1, δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 5.2.3.3 (*εσωτερικό πολλαπλότητας*)**.** *Έστω S και $\operatorname{int} S$ όπως στο Θεώρημα 5.2.3.1. Τότε η $\operatorname{int} S$ καλείται εσωτερικό της S.*

Το επόμενο είναι άμεσο από το Πόρισμα 5.2.3.2.

Πόρισμα 5.2.3.4. *Έστω $m \le n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. Τότε $S \in \mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n)$ ανν $S = \operatorname{int} S$.*

Με βάση το Πόρισμα 5.2.3.4, από το σημείο 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1, το σημείο 4 του Θεωρήματος 4.2.2.2, την Πρόταση 5.1.1 και το Πόρισμα 5.2.1.2, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 5.2.3.2. *Έστω $m < n$ και $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. Τότε $\operatorname{int} S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.*

Σύνορο πολλαπλότητας

Περνάμε τώρα στην μελέτη των συνοριακών σημείων μιας πολλαπλότητας. Από τον Ορισμό 5.2.3.1 και το Θεώρημα 5.2.1.1, παίρνουμε το ακόλουθο χρήσιμο χαρακτηρισμό.

Πρόταση 5.2.3.3. *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,

iii. $x \in S$ *&*

iv. χάρτης (S_j, f_j) *του μεγιστικού άτλαντα της* S, *τ.ω.:* $x \in f_j(S_j)$.

Τότε $t \in \operatorname{bd} S$ *ανν*

1. $S_j \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ *&* $S_j \in \mathcal{O}\left(\overline{\mathbb{R}^m_{l_j,\pm}}\right)$ *για κάποιο* $l_j \in \{1, \ldots, m\}$ *&*

2. $f_j^{-1}(t) \in \partial \mathbb{R}^m_{l_j,\pm}$.

Παρατήρηση. *Απευθείας από την Πρόταση 5.2.3.3 παίρνουμε ότι*

$$\operatorname{bd}\overline{\mathbb{R}^n_{i,\pm}} = \partial\,\mathbb{R}^n_{i,\pm},\ \ \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.2.3.3, δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς.

Ορισμός 5.2.3.4 (*συνοριακός χάρτης πολλαπλότητας*)**.** *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,

iii. $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$ &

iv. *χάρτης* (S_j, f_j) *του μεγιστικού άτλαντα της* S.

Ο (S_j, f_j) *καλείται συνοριακός ανν* $S_j \notin \mathcal{O}(\mathbb{R}^m)$ & $S_j \in \mathcal{O}\Big(\overline{\mathbb{R}^m_{l_j,\pm}}\Big)$ *για κάποιο* $l_j \in \{1,\ldots,m\}$.

Ορισμός 5.2.3.5 (*περιορισμός συνοριακού χάρτη*)**.** *Έστω*

1. $1 < m \le n$,
2. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ &
3. *συνοριακός χάρτης* (S_j, f_j) *του μεγιστικού άτλαντα της* S *με* $S_j \in \mathcal{O}\Big(\overline{\mathbb{R}^m_{l_j,\pm}}\Big)$ *για κάποιο* $l_j \in \{1,\ldots,m\}$.

Το ζεύγος $\left(\hat{\pi}^m_{l_j}(S_j), f_j \circ \hat{\varpi}^m_{l_j}\right)$ *καλείται περιορισμός του* (S_j, f_j).

Έτσι, αξιοποιώντας τους περιορισμούς συνοριακών χαρτών στην περίπτωση $1 < m \le n$, παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα, το οποίο τονίζουμε ότι ισχύει και για $m = 1$.

Θεώρημα 5.2.3.2. *Έστω*

1. $m \le n$,
2. $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ &
3. $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$.

Τότε

$$\operatorname{bd} S \in \mathcal{M}^{\circ}_{m-1}(\mathbb{R}^n).$$

Μάλιστα, η συλλογή των περιορισμών των συνοριακών χαρτών του μεγιστικού άτλαντα της S *είναι ο μεγιστικός άτλαντας της* $\operatorname{bd} S$.

Απευθείας από το Πόρισμα 5.2.3.2 και το Θεώρημα 5.2.3.2 προκύπτει το εξής.

Πόρισμα 5.2.3.5. *Έστω* $m \le n$ *και* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. *Τότε*

$$\operatorname{bd}(\operatorname{bd} S) = \varnothing.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.2.3.2, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.2.3.6 (*σύνορο πολλαπλότητας*)**.** *Έστω* S *και* $\operatorname{bd} S$ *όπως στο Θεώρημα 5.2.3.2. Τότε η* $\operatorname{bd} S$ *καλείται σύνορο της* S.

Από το σημείο 1 του Θεωρήματος 4.2.2.1, το σημείο 4 του Θεωρήματος 4.2.2.2, την Πρόταση 5.1.1, το Πόρισμα 5.2.1.2, την Πρόταση 5.2.3.2 και το Θεώρημα 5.2.3.2, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πρόταση 5.2.3.4. *Έστω* $m \le n$ *και* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. *Τότε*

1. $\operatorname{bd} S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ &
2. *το* $\operatorname{bd} S$ *είναι μηδενοσύνολο της* S.

Τέλος, από την Πρόταση 5.1.2 και την Πρόταση 5.2.3.3, παίρνουμε κάποιου είδους αντίστροφο του Θεωρήματος 5.2.3.2.

Θεώρημα 5.2.3.3. *1. Έστω*

i. $S \in \mathcal{M}^{\circ}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

ii. $(U, f) \in \coprod_{U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)} C^{\infty}(U; \mathbb{R})$ *τ.ω.:*

α΄. $S = f^{-1}(\{0\})$ *&*

β΄. $\operatorname{rank} Df(t) = 1$, $\forall t \in U$, *ή, ισοδύναμα,* $\mathfrak{J}f > 0$ *&*

iii. *α΄.* $S_1 = \{t \in U \,|\, f(t) \geq 0\}$ *&*

β΄. $S_2 = \{t \in U \,|\, f(t) \leq 0\}$.

Τότε $S_1, S_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$*, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\operatorname{bd} S_1 = \operatorname{bd} S_2 = S.$$

2. Έστω

i. $m < n - 1$,

ii. $S \in \mathcal{M}^{\circ}_{m}(\mathbb{R}^n)$,

iii. $(U, f) \in \coprod_{U \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)} C^{\infty}(U; \mathbb{R}^{n-m})$ *τ.ω.:*

α΄. $S = f^{-1}(\{0_{n-m}\})$ *&*

β΄. $\operatorname{rank} Df(t) = n - m$, $\forall t \in U$, *ή, ισοδύναμα,* $\mathfrak{J}f > 0$,

iv. $i \in \{1, \ldots, n-m\}$,

v. *περιορισμός* π_i^{n-m} *&*

vi. *α΄* $S_{i1} = \{t \in U \,|\, (\hat{\pi}_i^{n-m} \circ f)(x) = 0_{n-m-1}$ *&* $(\pi_i^{n-m} \circ f)(t) \geq 0\}$ *&*

β΄ $S_{i2} = \{t \in U \,|\, (\hat{\pi}_i^{n-m} \circ f)(x) = 0_{n-m-1}$ *&* $(\pi_i^{n-m} \circ f)(t) \leq 0\}$.

Τότε $S_{i1}, S_{i2} \in \mathcal{M}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$*, και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\operatorname{bd} S_1 = \operatorname{bd} S_2 = S.$$

Παρατήρηση. *Απευθείας από το Θεώρημα 5.2.3.3 έχουμε ότι*

$$\operatorname{bd} B(x_0, \rho)^c = \operatorname{bd} \overline{B(x_0, \rho)} = \partial B(x_0, \rho), \;\; \forall \;\, x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ \& } \rho > 0.$$

5.2.4 Επιπλέον γενικά στοιχεία

Συνθέτοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να εξάγουμε επιπλέον γενικές ιδιότητες των πολλαπλοτήτων.

Η πρώτη είναι άμεση από την Πρόταση 5.2.3.2 σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.2.3.4.

Πρόταση 5.2.4.1. *Έστω* $m < n$ *και* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$. *Τότε* $S \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$.

Επίσης, το ακόλουθο έπεται από την Πρότασης 2.1.5, το Πόρισμα 5.2.1.1 και την Πρόταση 5.2.3.4.

Πρόταση 5.2.4.2. *Έστω* $m \leq n$. $\forall S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$, $\exists$

1. $N \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ *τ.ω.:* $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ *ανν* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

2. $\{S_i\}_{i \in N} \subseteq \mathcal{B}(S) \cap \mathcal{O}(\operatorname{int} S)$ *τ.ω.:*

i. $S_i \cap S_j = \varnothing$, $\forall\, i, j \in N$ *με* $i \neq j$ *&*

ii. *το* $S \setminus \bigcup_{i \in N} S_i$ *να είναι μηδενοσύνολο της* S.

5.3 Προσανατολισμός πολλαπλότητας

Σε αυτή την ενότητα θα γενικεύσουμε τις έννοιες της Υποενότητας 4.5.3, καθώς επίσης θα εισάγουμε τις έννοιες του εφαπτόμενου και του κάθετου χώρου προσανατολισμένης πολλαπλότητας.

Ο προσανατολισμός πολλαπλότητας είναι απαραίτητος για τον καλό ορισμό των διαφορικών μορφών στο Κεφάλαιο 7, και συγκεκριμένα για να ελεγχθεί το πρόσημο συγκεκριμένων οριζουσών, κάτι που θα επιτρέψει την εφαρμογή του θεωρήματος αλλαγής μεταβλητών, όπως θα δούμε παρακάτω στο προαναφερόμενο κεφάλαιο.

Σε ό,τι αφορά τις έννοιες του εφαπτόμενου και του κάθετου χώρου προσανατολισμένης πολλαπλότητας, τονίζουμε ότι δεν θα μας χρειαστούν για τον ορισμό των διαφορικών μορφών. Αντίθετα, είναι απαραίτητες για τα αποτελέσματα του Διανυσματικού Λογισμού και τις εφαρμογές τους.

5.3.1 Γενικά στοιχεία

Πριν ξεκινήσουμε, ανατρέχουμε στον Ορισμό 4.5.3.3, στον Ορισμό 5.2.1.6 και στον Ορισμό 5.2.1.7.

Ορισμός 5.3.1.1 (*θετικά/αρνητικά επικαλυπτόμενοι χάρτες*)**.** *Δύο επικαλυπτόμενοι χάρτες του μεγιστικού άτλαντα μιας πολλαπλότητας (μη μηδενικής διάστασης) επικαλύπτονται θετικά/αρνητικά (overlap positively/negatively) (ή είναι θετικά/αρνητικά επικαλυπτόμενοι) ανν*

κάποια (άρα και οι δύο) συνάρτηση μετάβασης διατηρεί/αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Ορισμός 5.3.1.2 (*πρασανατολίσιμη και μη πολλαπλότητα*)**.**

1. *Λέμε ότι μια πολλαπλότητα (μη μηδενικής διάστασης) είναι προσανατολίσιμη (orientable) ανν*

   ∃ άτλαντάς τής τ.ω.: όλα τα επικαλυπτόμενα ζεύγη χαρτών τού να επικαλύπτονται θετικά.

2. *Λέμε ότι μια πολλαπλότητα (μη μηδενικής διάστασης) είναι μη προσανατολίσιμη (non orientable) ανν δεν είναι προσανατολίσιμη, δλδ ανν*

   ∃ επικαλυπτόμενο ζεύγος χαρτών του μεγιστικού άτλαντά τής τ.ω.: να επικαλύπτεται αρνητικά.

Το επόμενο είναι προφανές.

Πρόταση 5.3.1.1. *Έστω μια προσανατολίσιμη πολλαπλότητα και ένας άτλαντας με θετικά επικαλυπτόμενα τα επικαλυπτόμενα ζεύγη χαρτών τού. Θεωρούμε την ένωση αυτού του άτλαντα με όλους του χάρτες του μεγιστικού άτλαντα της πολλαπλότητας, καθένας από τους οποίους επικαλύπτεται θετικά με κάποιο από τους χάρτες του πρώτου άτλαντα. Τότε η ένωση αυτή είναι άτλαντας της πολλαπλότητας με θετικά επικαλυπτόμενα τα επικαλυπτόμενα ζεύγη χαρτών τού.*

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.1.1, δίνουμε την γενίκευση (βλ. την Παρατήρηση αμέσως μετά) του Ορισμού 4.5.3.1.

Ορισμός 5.3.1.3 (*προσανατολισμός πολλαπλότητας*)**.**

1. *Ένας άτλαντας μιας προσανατολίσιμης πολλαπλότητας όπως η ένωση της Πρότασης 5.3.1.1, ονομάζεται προσανατολισμός της πολλαπλότητας αυτής.*

2. *Καλούμε προσανατολισμό μιας πολλαπλότητας διάστασης 0, μια συνάρτηση από τα σημεία της πολλαπλότητας στο δισύνολο $\{-1, 1\}$.*

Παρατήρηση. *Έστω $m \leq n$ και γραμμικός υπόχωρος $S \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\dim S = m$. ∀ διατεταγμένη βάση $\{x_i\}_{i=1}^m$ του S που ανήκει σε έναν από τους δύο προσανατολισμούς του S (με την έννοια του Ορισμού 4.5.3.1), το ζεύγος $(\mathbb{R}^m, f)$, όπου $f \in Ism(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ με $f(\mathbb{R}^m) = S$ και $f(e_i) = x_i \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}$, είναι ένας χάρτης της $S \in \mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n)$. Κάθε ζεύγος τέτοιων χαρτών επικαλύπτεται θετικά. Η συλλογή όλων αυτών των χαρτών είναι ένας προσανατολισμός του S (με την έννοια του Ορισμού 5.3.1.3).*

Ορισμός 5.3.1.4 (*προσανατολισμένη πολλαπλότητα*)**.** *Το ζεύγος μιας προσανατολίσιμης πολλαπλότητας με έναν προσανατολισμό της ονομάζεται προσανατολισμένη πολλαπλότητα.*

Το επόμενο γίνεται άμεσο, κάνοντας χρήση κάποιου απλού αντικατοπτρισμού.

Πρόταση 5.3.1.2. *∀ προσανατολισμένη πολλαπλότητα, ∃ ένας διαφορετικός προσανατολισμός τής, κάθε χάρτης του οποίου επικαλύπτεται αρνητικά με κάποιο χάρτη του δοσμένου προσανατολισμού.*

Συγκεκριμένα, έστω

i. $m \leq n$,

ii. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,

iii. (S_j, f_j) *να είναι ένας χάρτης του δεδομένου προσανατολισμού της* S *&*

iv. $f \in RM_m$ *τ.ω.:* $f(x) = (-x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

Τότε

1. *το ζεύγος* $\big(f(S_j), f_j \circ f|_{S_j}\big)$ *είναι χάρτης της* S *&*
2. *ο χάρτης αυτός επικαλύπτεται αρνητικά με τον αρχικό, και άρα δεν ανήκει στον δοσμένο προσανατολισμό .*

Μάλιστα, το σύνολο όλων των χαρτών που παίρνουμε με αυτή την διαδικασία αποτελεί έναν προσανατολισμό.

Παρατήρηση. *Η Πρόταση 5.3.1.2 λέει ότι ∃ τουλάχιστον δύο προσανατολισμοί μιας προσανατολίσιμης πολλαπλότητας.*

Λόγω της Πρότασης 5.3.1.2, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.3.1.5 (*αντίστροφος προσανατολισμός*)**.**

1. *∀ προσανατολισμένη πολλαπλότητα, καλούμε αντίστροφο/αντίθετο του δεδομένου προσανατολισμού της πολλαπλότητας τον προσανατολισμό της Πρότασης 5.3.1.2.*
2. *∀ προσανατολισμένη πολλαπλότητα* S, *γράφουμε* $-S$ *για την προσανατολισμένη πολλαπλότητα στην οποία έχουμε θεωρήσει τον αντίστροφο του δεδομένου προσανατολισμού.*

Με απλά επιχειρήματα, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 5.3.1.1.

1. *∀ συνεκτική προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, ∃ ακριβώς δύο προσανατολισμοί της.*
2. *∀ προσανατολίσιμη πολλαπλότητα, θέτοντας*

   i. S_1 = *το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών της &*

   ii. S_2 = *το σύνολο των προσανατολισμών της,*

   ισχύει ότι
$$\operatorname{card} S_2 = 2^{\operatorname{card} S_1}.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας κάποιο αντικατοπτρισμό όπως στην Πρόταση 5.3.1.2, παίρνουμε εύκολα το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.3.1.2. *Κάθε πολλαπλότητα μέγιστης διάστασης (δλδ πολλαπλότητα διάστασης* n *στον* $\mathbb{R}^n$*) είναι προσανατολίσιμη. Μάλιστα, υπάρχει προσανατολισμός της που αποτελείται αποκλειστικά από χάρτες* (S_j, f_j) *με* $j \in \mathscr{I}$, *τ.ω.:* $\det Df_j > 0$.

Σημείωση. *Ισχύει, επίσης, ότι κάθε πολλαπλότητα διάστασης 1 είναι προσανατολίσιμη.*

Ορισμός 5.3.1.6 (*φυσικός προσανατολισμός πολλαπλότητας μέγιστης διάστασης*)**.** *Ο προσανατολισμός του Θεωρήματος 5.3.1.2 καλείται ο φυσικός (natural) προσανατολισμός της αντίστοιχης πολλαπλότητας μέγιστης διάστασης, και το ζεύγος αυτής με τον συγκεκριμένο προσανατολισμό οναμάζεται φυσικά προσανατολισμένη πολλαπλότητα.*

Η απόδειξη του επόμενου αποτελέσματος ακολουθεί την ίδια συλλογιστική με αυτήν του Θεωρήματος 5.2.3.2.

Θεώρημα 5.3.1.3. *Το σύνορο κάθε προσανατολίσιμης πολλαπλότητας διάστασης* > 1 *(με μη κενό σύνορο), είναι προσανατολίσιμο.*

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.3.1.3, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό, ο οποίος διαφέρει από τον αναμενόμενο (και ουσιαστικά είναι αυτός που δίνεται ακριβώς για να είναι χρηστικός, δλδ για να ισχύει το κεντρικό Θεώρημα 8.1.2, παρακάτω).

Ορισμός 5.3.1.7 (*επαγόμενος προσανατολισμός συνόρου πολλαπλότητας*). *1. Ο επαγόμενος προσανατολισμός του συνόρου μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας διάστασης >1 (με μη κενό σύνορο), ορίζεται ως εξής*

- *i. αν η διάσταση της πολλαπλότητας είναι άρτια, τότε αυτός είναι η συλλογή των περιορισμών των συνοριακών χαρτών του δεδομένου προσανατολισμού της πολλαπλότητας &*
- *ii. αν η διάσταση της πολλαπλότητας είναι περιττή, τότε αυτός είναι ο αντίστροφος του παραπάνω προσανατολισμού.*

2. Ο επαγόμενος προσανατολισμός του συνόρου μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας διάστασης 1 είναι ο προσανατολισμός με τιμή -1 για τα συνοριακά σημεία που ανήκουν στην εικόνα συνοριακού χάρτη όπου το πεδίο ορισμού είναι στοιχείο του $\mathcal{O}\big(\overline{\mathbb{R}_+}\big)$, και με τιμή 1 διαφορετικά.

5.3.2 Εφαπτόμενος και κάθετος χώρος προσανατολισμένης πολλαπλότητας

Στην παρούσα υποενότητα παραθέτουμε ορισμένες έννοιες που σχετίζονται με προσανατολισμένες πολλαπλότητες και έχουν ξεκάθαρη γεωμετρική ερμηνεία, δλδ αυτές του εφαπτόμενου διανύσματος/χώρου και του κάθετου διανύσματος/χώρου.

Στην ουσία, αυτή η υποενότητα αποτελεί την εισαγωγή στον Διανυσματικό Λογισμό.

Εφαπτόμενος χώρος

Πρώτα εισάγουμε την έννοια της μοναδιαίας εφαπτόμενης διανυσματικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας διάστασης 1 (unit tangent vector function/field corresponding to the orientation of oriented manifold of dimension 1). Η έννοια αυτή έχει γεωμετρική ερμηνεία, και είναι μια απλή γενίκευση της αντίστοιχης γνωστής έννοιας από την Αναλυτική Γεωμετρία.

Πρώτα όμως θα χρειαστούμε το εξής, το οποίο έπεται εύκολα, υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 5.2.1.1, με χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1.

Πρόταση 5.3.2.1. *Έστω*

1. *προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$,*
2. *δύο επικαλυπτόμενοι χάρτες, (S_1, f_1) και (S_2, f_2), του δεδομένου προσανατολισμού της S,*
3. *$t \in f_1(S_1) \cap f_2(S_2) \neq \varnothing$ &*
4. *$x_1 = f_1^{-1}(t)$ & $x_2 = f_2^{-1}(t)$.*

Τότε

$$\frac{Df_1(x_1)}{\mathfrak{J}f_1(x_1)} = \frac{Df_1(x_1)}{|Df_1(x_1)|} = \frac{Df_2(x_2)}{|Df_2(x_2)|} = \frac{Df_2(x_2)}{\mathfrak{J}f_2(x_2)}.$$

Σημείωση. *Χρησιμοποιώντας, για την διατύπωση της Πρότασης 5.3.2.1, τον συνήθη συμβολισμό για τις διαφορίσεις συναρτήσεων με πεδίο ορισμού στον $\mathbb{R}$, μπορούμε εναλλακτικά να γράψουμε*

$$Df_j(x_j) = \frac{df_j}{dx}(x_j) = f_j{}'(x_j), \text{ για } j \in \{1,2\}.$$

Έτσι, με βάση την Πρόταση 5.3.2.1, δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 5.3.2.1 (*μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση, $m=1$*). *Έστω προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Έστω, επιπλέον,*
   - *i. $t \in S$ &*
   - *ii. χάρτης (S_j, f_j) του δεδομένου προσανατολισμού της S, τ.ω.: $t \in f_j(S_j)$.*

Τότε ορίζουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της S στο t (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S), $\tau(t)$, ως

$$\tau(t) = \frac{Df_j(x_j)}{|Df_j(x_j)|} = \frac{Df_j(x_j)}{\mathfrak{J}f_j(x_j)}, \text{ όπου } x_j = f_j^{-1}(t),$$

δλδ

$$\tau(t) = \left(\frac{Df_j}{|Df_j|} \circ f_j^{-1}\right)(t) = \left(\frac{Df_j}{\mathfrak{J}f_j} \circ f_j^{-1}\right)(t).$$

2. *Η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση της S (που σχετίζεται με τον δεδομένο προσανατολισμό της S), τ, ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} \tau\colon S &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \tau(t). \end{aligned}$$

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια σχετικά με τον Ορισμό 5.3.2.1.*

1. *Ισχύει ότι $\tau \in C(S;\mathbb{R}^n)$.*
2. *Η γεωμετρική σημασία είναι εύκολα επαληθεύσιμη. Συγκεκριμένα, $\forall t \in S$, ο ομοπαραλληλικός χώρος (affine space)*

$$t + \operatorname{span}(\{\tau(t)\})$$

δεν είναι άλλος από την εφαπτόμενη ευθεία της S στο t.

Έτσι, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 5.3.2.2 (*εφαπτόμενος χώρος, $m = 1$*)**.** *Έστω*

1. *προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$,*
2. *τ η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση της S &*
3. *$t \in S$.*

Το σύνολο

$$t + \operatorname{span}(\{\tau(t)\})$$

ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος της S στο t (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S).

Το παρακάτω απλό αποτέλεσμα συνδέει τον αντίστροφο προσανατολισμό με την κατεύθυνση του $\tau(t)$.

Πρόταση 5.3.2.2. *Έστω προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ και τ η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση της S (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S). Τότε η $-\tau$ είναι η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση της $-S$ (που αντιστοιχεί στον προσανατολισμό της $-S$, δλδ στον αντίστροφο του δεδομένου προσανατολισμού της S).*

Η γενίκευση του Ορισμού 5.3.2.1 και του Ορισμού 5.3.2.2 σε πολλαπλότητες μεγαλύτερης διάστασης έρχεται φυσικά, με την αντίστοιχη, εύκολα εννοούμενη γεωμετρική σημασία.

Ορισμός 5.3.2.3 (*μοναδιαία εφαπτόμενη, ως προς διεύθυνση, διανυσματική συνάρτηση*)**.** *Έστω*

α΄. $m \leq n$,

β΄. προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ &

γ΄. $i \in \{1, \ldots, m\}$.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   i. $t \in S$ &

   ii. χάρτης (S_j, f_j) του δεδομένου προσανατολισμού της S, τ.ω.: $t \in f_j(S_j)$.

Τότε ορίζουμε το μοναδιαίο εφαπτόμενο, ως προς την διεύθυνση του $e_i \in \mathbb{R}^m$, διάνυσμα της S στο t (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S), $\tau_i(t)$, ως

$$\tau_i(t) = \left(\frac{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}{\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|} \circ {f_j}^{-1} \right)(t).$$

2. *Η μοναδιαία εφαπτόμενη, ως προς την διεύθυνση του $e_i \in \mathbb{R}^m$, διανυσματική συνάρτηση της S (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S), τ_i, ορίζεται ως*

$$\begin{aligned} \tau_i\colon S &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \tau_i(t). \end{aligned}$$

Το επόμενο είναι άμεσο.

Πρόταση 5.3.2.3. *Έστω*

1. *$m \leq n$,*
2. *προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,*
3. *η συλλογή $\{\tau_i\}_{i=1}^m$ των μοναδιαίων εφαπτόμενων, ως προς διεύθυνση $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$, αντίστοιχα, διανυσματικών συναρτήσεων της S (που αντιστοιχούν στον δεδομένο προσανατολισμό της S) &*
4. *$t \in S$.*

Τότε η συλλογή $\{\tau_i(t)\}_{i=1}^m \subsetneq \mathbb{R}^n$ είναι συλλογή γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων.

Ορισμός 5.3.2.4 (*εφαπτόμενος χώρος*). *Έστω*

1. *$m \leq n$,*
2. *προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,*
3. *η συλλογή $\{\tau_i\}_{i=1}^m$ των μοναδιαίων εφαπτόμενων, ως προς διεύθυνση $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$, αντίστοιχα, διανυσματικών συναρτήσεων της S (που αντιστοιχούν στον δεδομένο προσανατολισμό της S) &*
4. *$t \in S$.*

Το σύνολο

$$t + \operatorname{span}\big(\{\tau_i(t)\}_{i=1}^m\big)$$

ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος της S στο t (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S).

Κάθετος χώρος προσανατολισμένης πολλαπλότητας

Η αρτιότητα του επόμενου ορισμού έπεται από την αρτιότητα του Ορισμού 5.3.2.4. Η δε γεωμετρική ερμηνεία του είναι προφανής.

Ορισμός 5.3.2.5 (*κάθετος χώρος*). *Έστω*

1. *$m \leq n$,*
2. *προσανατολισμένη $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,*
3. *η συλλογή $\{\tau_i\}_{i=1}^m$ των μοναδιαίων εφαπτόμενων, ως προς διεύθυνση $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{R}^m$, αντίστοιχα, διανυσματικών συναρτήσεων της S (που αντιστοιχούν στον δεδομένο προσανατολισμό της S) &*
4. *$t \in S$.*

Το σύνολο

$$t + \big(\operatorname{span}\big(\{\tau_i(t)\}_{i=1}^m\big)\big)^{\perp}$$

ονομάζεται κάθετος χώρος της S στο t (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S).

Το επόμενο έπεται άμεσα με χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1.

Πρόταση 5.3.2.4. *Έστω*

1. $m < n$,
2. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n)$,
3. $t \in S$ *&*
4. (U_j, f_j) *όπως στην Πρόταση 5.1.2 τ.ω.:* $t \in f_j^{-1}(\{0_{n-m}\})$.

Τότε ο κάθετος χώρος της S στο t (που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της S) γράφεται ισοδύναμα και ως

$$t + \operatorname{span}\Big(\big\{Df_{j_i}(t)\big\}_{i=1}^{n-m}\Big).$$

Μάλιστα, στην περίπτωση προσανατολισμένης πολλαπλότητας διάστασης $n-1$ με $n \neq 1$, μπορούμε να έχουμε έναν τύπο για τον κάθετο χώρο της S. Πράγματι, θεωρούμε ότι $n \neq 1$ και δίνουμε πρώτα τον ορισμό της μοναδιαίας κάθετης διανυσματικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας διάστασης $n-1$ (unit normal vector function/field corresponding to the orientation of oriented manifold of dimension $n-1$). Υπό το πρίσμα της Πρότασης 2.3.3 και της Πρότασης 5.3.2.3, συμπεραίνουμε εύκολα το εξής.

Πρόταση 5.3.2.5. *Έστω*

i. $n \neq 1$,

ii. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

iii. *η συλλογή $\{\tau_i\}_{i=1}^{n-1}$ των μοναδιαίων εφαπτόμενων, ως προς διεύθυνση $e_1, \dots, e_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$, αντίστοιχα, διανυσματικών συναρτήσεων της S (που αντιστοιχούν στον δεδομένο προσανατολισμό της S),*

iv. $\tau = (\tau_i)_{i=1}^{n-1} \colon S \to \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ *&*

v. $\tau_0 = (\tau_{0i})_{i=1}^{n} \colon S \to \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:*

$$\tau_{0i} = (-1)^{i-1} \det\left(\tau(1, \dots, (i), \dots, n)\right), \ \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

όπου, $\forall\ i \in \{1, \dots, n\}$ & $t \in S$, ο $\tau(1, \dots, (i), \dots, n)(t) \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $\tau(t)$ παραλείποντας την i-οστή του γραμμή.

Τότε

1. $\tau_0 \neq 0_n$,
2. $\tau_0(t) \in \Big(\operatorname{span}\Big(\{\tau_i(t)\}_{i=1}^{n-1}\Big)\Big)^{\perp}$, $\forall t \in S$,
3. $\det(\tau_0 \,|\, \tau) > 0$, *δλδ η διατεταγμένη βάση $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$ είναι δεξιόστροφη &*
4. $|\tau_0| = \left(\det \tau^{\mathrm{T}} \cdot \tau\right)^{1/2}$.

Λόγω της Πρότασης 5.3.2.5, δίνουμε τον επόμενο ορισμό, η γεωμετρική σημασία του οποίου είναι η προφανής, και η αρτιότητα του οποίου έπεται από την αρτιότητα του ορισμού του εφαπτόμενου χώρου μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας.

Ορισμός 5.3.2.6 (*μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση*)**.** *Η συνάρτηση*

$$\nu = \frac{\tau_0}{|\tau_0|} \colon S \to \mathbb{R}^n, \ \text{ όπου } \tau_0 \text{ όπως στην Πρόταση 5.3.2.5}$$

καλείται μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση της S (που σχετίζεται με τον δεδομένο προσανατολισμό της S).

Παρατήρηση. *Ισχύει ότι $\nu \in C(S; \mathbb{R}^n)$, αφού $\tau_i \in C(S; \mathbb{R}^n)$ $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.*

Μπορούμε άμεσα να πάρουμε την εξής μορφή του ν.

Πρόταση 5.3.2.6. *Έστω*

i. $n \neq 1$,

ii. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$,

iii. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματικής συνάρτηση της* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*) &*

iv. *χάρτης* (S_j, f_j) *του δεδομένου προσανατολισμού της* S.

Τότε

$$\nu_i|_{f_j(S_j)} = \left(\frac{1}{\mathfrak{J}f_j}(-1)^{i-1}\det\frac{\partial\hat{\pi}_i^n \circ f_j}{\partial x}\right) \circ f_j^{-1}, \ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στο εξής.

Πρόταση 5.3.2.7. *Έστω*

1. $n \neq 1$,
2. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$,
3. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση της* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*) &*
4. $t \in S$.

Τότε ο κάθετος χώρος της S *στο* t *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*) γράφεται ισοδύναμα και ως*

$$t + \operatorname{span}(\{\nu(t)\}).$$

Το επόμενο είναι το αντίστοιχο της Πρότασης 5.3.2.2.

Πρόταση 5.3.2.8. *Έστω*

1. $n \neq 1$,
2. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *&*
3. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση της* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*).*

Τότε η $-\nu$ *είναι η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση της* $-S$ *(που αντιστοιχεί στον προσανατολισμό της* $-S$*, δλδ στον αντίστροφο του δεδομένου προσανατολισμού της* S*).*

Τώρα, με το ακόλουθο αποτέλεσμα δίνουμε γεωμετρική ερμηνεία στον επαγόμενο προσανατολισμό του συνόρου μιας n-διάστατης και φυσικά προσανατολισμένης πολλαπλότητας. Το ουσιαστικό εργαλείο για την απόδειξή του είναι το σημείο 3 της Πρότασης 5.3.2.5 (βλ. το [17, Lemma 38.7, σελ. 318]).

Πρόταση 5.3.2.9. *Έστω*

1. *φυσικά προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$,
2. *το* $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό &*
3. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$ *(που αντιστοιχεί στον επαγόμενο προσανατολισμό του* $\operatorname{bd} S$*).*

Τότε, $\forall t \in \operatorname{bd} S$*, το* $-\nu(t)$ *έχει κατεύθυνση προς το* $\operatorname{int} S$.

Ορισμός 5.3.2.7 (*εξωτερική/εσωτερική μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση*)**.** *Κάθε* ν *με την ιδιότητα της Πρότασης 5.3.2.9 καλείται εξωτερική, ενώ η αντίστοιχη* $-\nu$ *καλείται εσωτερική.*

Μάλιστα, αξιοποιώντας το Θεώρημα 4.1.2.1, έχουμε από την Πρόταση 5.3.2.4 και την Πρόταση 5.3.2.9, την ακόλουθη χρήσιμη μορφή της εξωτερικής/εσωτερικής μοναδιαίας κάθετης διανυσματικής συνάρτησης.

Πρόταση 5.3.2.10. *Έστω*

1. *φυσικά προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$,
2. *το* $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό,*
3. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$ *(που αντιστοιχεί στον επαγόμενο προσανατολισμό του* $\operatorname{bd} S$*),*
4. $t \in \operatorname{bd} S$ *&*
5. (U_j, f_j) *όπως στην Πρόταση 5.1.2 για την* $\operatorname{bd} S$ *τ.ω.:*
   i. $t \in f_j^{-1}(\{0\})$ *&*
   ii. $S^\circ \cap U_j = \{t \in U_j \,|\, f_j(t) < 0\}$.

Τότε

$$\nu(t) = \frac{Df_j}{|Df_j|}(t).$$

Τέλος, δίνουμε την γεωμετρική σχέση μεταξύ της κάθετης διανυσματικής συνάρτησης μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας στον $\mathbb{R}^3$ διάστασης 2 και της εφαπτόμενης διανυσματικής συνάρτησης του επαγόμενα προσανατολισμένου συνόρου της, για την απόδειξη της οποίας πάλι βασικό είναι το σημείο 3 της Πρότασης 5.3.2.5 (βλ. [17, Example 5, σελ. 289]).

Πρόταση 5.3.2.11. *Έστω*

i. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^3)$ *τ.ω.:* $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$,
ii. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*),*
iii. *το* $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό,*
iv. τ *η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$ *(που αντιστοιχεί στον επαγόμενο προσανατολισμό του* $\operatorname{bd} S$*) &*
v. $w\colon \operatorname{bd} S \to \mathbb{R}^3$ *τ.ω.:* $\forall t \in \operatorname{bd} S$,
   α΄. $|w(t)| = 1$,
   β΄. $w(t) \in (\operatorname{span}\{\nu(t), \tau(t)\})^\perp$ *&*
   γ΄. *η διατεταγμένη βάση* $\{\nu(t), \tau(t), w(t)\}$ *να είναι δεξιόστροφη.*

Τότε, $\forall t \in \operatorname{bd} S$, *το* $w(t)$

1. *είναι μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της* S *στο* t *&*
2. *έχει κατεύθυνση προς το* $\operatorname{int} S$.

Παρατήρηση. *Στην Πρόταση 5.3.2.11, η* w *δεν είναι άλλη από την*

$$w(t) = \nu(t) \times \tau(t), \;\; \forall t \in \operatorname{bd} S,$$

όπως μας εξασφαλίζει η Πρόταση 2.3.3.

Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωση επί πολλαπλότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο ξεκινάμε από εκεί που σταματά η θεωρία του Κεφαλαίου 4, δλδ από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών, πάνω στο οποίο πατάμε για να δώσουμε τους βασικούς ορισμούς, οι οποίοι είναι γενικεύσεις της Πρότασης 4.3.3.3 και του Ορισμού 4.3.4.1, αντίστοιχα.

6.1 Ολοκλήρωμα φραγμένης συνάρτησης επί συμπαγούς πολλαπλότητας

Κομβικό είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο έπεται άμεσα από τον ορισμό του τελεστή $\mathfrak{J}$, (βλ. τον Ορισμό 3.2.2.5) με χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1, των ιδιοτήτων των οριζουσών, καθώς επίσης της Πρότασης 4.5.1.1 και της Πρότασης 4.5.1.2.

Πρόταση 6.1.1 (*ανεξαρτησία από τις επαναπαραμετρήσεις*)**.** *Έστω*

1. $m \leq n$,
2. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,
3. *χάρτης* (S_j, f_j) *του μεγιστικού άτλαντα της* S,
4. $f \in C(S;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\operatorname{supp} f \subsetneq f_j(S_j)$ *&*
5. C^1 *αλλαγή μεταβλητών* $f_0 \in C^1(S_j;\mathbb{R}^m)$.

Περιορισμένη στο ${S_j}^\circ$, *η*

$$(f \circ f_j)\,\mathfrak{J} f_j$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη ανν, περιορισμένη στο $(f_0(S_j))^\circ$, *η*

$$\big(f \circ f_j \circ {f_0}^{-1}\big)\,\mathfrak{J}\big(f_j \circ {f_0}^{-1}\big)$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$\int_{{S_j}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} ((f \circ f_j)\,\mathfrak{J} f_j)(x)dx = \int_{(f_0(S_j))^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \Big(\big(f \circ f_j \circ {f_0}^{-1}\big)\,\mathfrak{J}\big(f_j \circ {f_0}^{-1}\big)\Big)(x)dx.$$

Το επόμενο έπεται με χρήση του Θεωρήματος 4.1.4.1, της Πρότασης 4.5.1.1, της Πρότασης 4.5.1.2, του Θεωρήματος 5.2.1.1, της Πρότασης 5.2.3.4 και της Πρότασης 6.1.1, καθώς και της αντιμεταθετικότητας των αυθαίρετων πεπερασμένων πολλαπλών αθροισμάτων.

Πρόταση 6.1.2. *Έστω*

i. $m \leq n$,

ii. *συμπαγής* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,

iii. *δύο άτλαντες* $\big\{\big(S_{1j}, f_{01j}\big)\big\}_{j \in \mathscr{I}_1}$ *και* $\big\{\big(S_{2j}, f_{02j}\big)\big\}_{j \in \mathscr{I}_2}$ *της* S, *iv.* *δύο ομαλές διαμερίσεις της μονάδας,* $\{f_{1j}\}_{j\in N_1} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *και* $\{f_{2j}\}_{j\in N_2} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *στο* S, *που κυριαρχούνται από την* $\{f_{01j}(S_{1j})\}_{j\in\mathscr{I}_1} \subseteq \mathcal{O}(S)$ *και την* $\{f_{02j}(S_{2j})\}_{j\in\mathscr{I}_2} \subseteq \mathcal{O}(S)$, *αντίστοιχα, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι* $N_l \subseteq \mathscr{I}_l \ \forall l \in \{1,2\}$ *&*

v. $f \in C(S;\mathbb{R})$.

Τότε

1. *περιορισμένη στο* ${S_{1j}}^\circ$, *η*
$$\big((f_{lj}f)\circ f_{0lj}\big)\mathfrak{J}f_{0lj}$$
είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη $\forall\ j \in N_l$ *&* $l \in \{1,2\}$ *&*

2. $$\sum_{j\in N_1}\ \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int\limits_{{S_{1j}}^\circ}} \Big(\big((f_{1j}f)\circ f_{01j}\big)\mathfrak{J}f_{01j}\Big)(x)dx = \sum_{j\in N_2}\ \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int\limits_{{S_{2j}}^\circ}} \Big(\big((f_{2j}f)\circ f_{02j}\big)\mathfrak{J}f_{02j}\Big)(x)dx.$$

Λόγω της Πρότασης 6.1.2, μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.1.1 (*ολοκλήρωμα επί συμπαγούς πολλαπλότητας*). *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. *συμπαγής* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$

iii. *ομαλή διαμέριση της μονάδας,* $\{f_j\}_{j\in N} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *στο* S, *που κυριαρχείται από την συλλογή* $\{f_{0j}(S_j)\}_{j\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$ *των εικόνων των χαρτών κάποιου άτλαντα της* S, *και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι* $N \subseteq \mathscr{I}$ *&*

iv. $f \in C(S;\mathbb{R})$.

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f *(επί της* S*) ως*

$$\int\limits_S f(t)d\sigma(t) = \sum_{j\in N}\ \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int\limits_{{S_j}^\circ}} \Big(\big((f_jf)\circ f_{0j}\big)\mathfrak{J}f_{0j}\Big)(x)dx.$$

Σημείωση. *Λίγα λόγια σχετικά με τον Ορισμό 6.1.1.*

1. *Συχνά στην βιβλιογραφία, το* $d\sigma$ *καλείται στοιχείο εμβαδού, όπως επίσης, όταν* $m = 1$, *καλείται στοιχείο μήκους και συμβολίζεται με* ds, *ενώ, όταν* $m = n$, *καλείται στοιχείο όγκου και συμβολίζεται με* dV. *Εμείς, επειδή θέλουμε να γενικεύσουμε την συνολοσυνάρτηση του όγκου,* v, *σε πολλαπλότητες, αποφεύγουμε αυτούς τους προσδιορισμούς.*

2. *Το ολοκλήρωμα που ορίσαμε είναι ένα ολοκλήρωμα ως προς ένα μέτρο Hausdorff.*

Για λόγους συντομίας αναφέρουμε ότι, με χρήση, όπου απαιτείται, της Πρότασης 4.5.1.1, της Πρότασης 4.5.1.2, του Θεωρήματος 5.2.1.1 και της Πρότασης 6.1.1, μπορούμε να δείξουμε ότι όλες οι βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος της Υποενότητας 4.3.2 μεταφέρονται, τροποποιημένες κατά τον προφανή τρόπο όπου χρειάζεται, και για το ολοκλήρωμα του Ορισμού 6.1.1. Ενδεικτικά, ισχύει το εξής εύχρηστο.

Πρόταση 6.1.3. *Έστω*

1. $m \le n$,

2. *συμπαγής* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,

3. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$,

4. *συλλογή* $\{(U_j, f_j)\}_{j\in N}$ *εσωτερικών χαρτών κάποιου άτλαντα της* S, *τ.ω.:*

   i. $f_i(U_i) \cap f_j(U_j) = \varnothing\ \forall\, i,j \in N$ *με* $i \neq j$ *&*

   ii. $\exists$ *μηδενοσύνολο της* S, $S_0 \subseteq S$, *τ.ω.:* $S_0 \cup \bigcup\limits_{j\in N} f_j(U_j) = S$ *&*

5. $f \in C(S;\mathbb{R})$.

Τότε

$$\int_S f(t)d\sigma(t) = \sum_{j\in N} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_j}} ((f\circ f_j)\Im f_j)(x)dx.$$

Μάλιστα, στην Ενότητα 6.4 θα δούμε το αντίστοιχο του θεωρήματος του Fubini.

6.2 Γενικευμένο ολοκλήρωμα

Με χρήση του σημείου 2 της Πρότασης 2.2.1, της Πρότασης 4.1.4.2, της Πρότασης 4.5.1.1, της Πρότασης 4.5.1.2, του Θεωρήματος 5.2.1.1, της Πρότασης 5.2.3.4 και της Πρότασης 6.1.1, παίρνουμε το αντίστοιχο της Πρότασης 6.1.2.

Πρόταση 6.2.1. *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $S \in \mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n)$,

iii. *δύο άτλαντες* $\{(U_{1j}, f_{01j})\}_{j\in\mathscr{I}_1}$ *και* $\{(U_{2j}, f_{02j})\}_{j\in\mathscr{I}_2}$ *της* S *τ.ω.:*

$$\overline{f_{0l_j}(U_{lj})} \subsetneq S,\ \forall\ j\in\mathscr{I}_l\ \&\ l\in\{1,2\},$$

iv. *δύο συλλογές συναρτήσεων,* $\{f_{1j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *και* $\{f_{2j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *όπως στην Πρόταση 4.1.4.2, που σχετίζονται με την* $\{f_{01j}(U_{1j})\}_{j\in\mathscr{I}_1} \subseteq \mathcal{O}(S)$ *και την* $\{f_{02j}(U_{2j})\}_{j\in\mathscr{I}_2} \subseteq \mathcal{O}(S)$, *αντίστοιχα, και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι* $N_l \subseteq \mathscr{I}_l\ \forall l\in\{1,2\}$ &

v. $f \in C(S;\mathbb{R})$.

1. *Τότε η*

$$\left(\left(f_{lj}|_{f_{0l_j}(U_{lj})}\, f|_{f_{0l_j}(U_{lj})}\right)\circ f_{0l_j}\right)\Im f_{0l_j}$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη $\forall\ j\in\mathbb{N}\ \&\ l\in\{1,2\}$.

2. *Αν*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_{1j}}} (((f_{lj}|f|)\circ f_{0l_j})\Im f_{0l_j})(x)dx < \infty,\ \text{για κάποιο } l\in\{1,2\},$$

τότε

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_{1j}}} (((f_{1j}|f|)\circ f_{01_j})\Im f_{01_j})(x)dx = \sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_{2j}}} (((f_{2j}|f|)\circ f_{02_j})\Im f_{02_j})(x)dx$$

και

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_{1j}}} (((f_{1j}f)\circ f_{01_j})\Im f_{01_j})(x)dx = \sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_{2j}}} (((f_{2j}f)\circ f_{02_j})\Im f_{02_j})(x)dx.$$

Λόγω της Πρότασης 6.2.1, μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 6.2.1 (*γενικευμένο ολοκλήρωμα επί πολλαπλότητας*)**.** *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $S \in \mathcal{M}_m^{\circ}(\mathbb{R}^n)$ &

iii. $f \in C(S;\mathbb{R})$.

Θα λέμε ότι η f *είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη (επί της* S*) ανν* $\exists$

1. *άτλαντας* $\{(U_j, f_{0j})\}_{j\in\mathscr{I}}$ *της* S *τ.ω.:*
$$\overline{f_{0j}(U_j)} \subsetneq S,\ \forall j \in \mathscr{I},$$
και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι $\mathbb{N} \subsetneq \mathscr{I}$ *&*

2. *συλλογή συναρτήσεων,* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$*, όπως στην Πρόταση 4.1.4.2, που σχετίζεται με την συλλογή* $\{f_{0j}(U_j)\}_{j\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$*,*

τ.ω.:
$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_j}} \big(((f_j|f|)\circ f_{0j})\,\mathfrak{J}f_{0j}\big)(x)dx < \infty,$$
και σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f *(επί της* S*) ως*
$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_S} f(t)d\sigma(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_j}} \big(((f_j f)\circ f_{0j})\,\mathfrak{J}f_{0j}\big)(x)dx.$$

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, έτσι και εδώ, ισχύει ότι οι βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος της Υποενότητας 4.3.4 μεταφέρονται, τροποποιημένες κατά τον προφανή τρόπο όπου χρειάζεται, και για το ολοκλήρωμα του Ορισμού 6.2.1. Ενδεικτικά, ισχύει το εξής.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω*

1. $m \leq n$,
2. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ *&*
3. $f \in B(S;\mathbb{R}) \cap C(S;\mathbb{R})$.

Τότε η $f|_{\operatorname{int} S}$ *είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη. Αν, επιπλέον, η* S *είναι συμπαγής τότε*
$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{\operatorname{int} S}} f(t)d\sigma(t) = \int_S f(t)d\sigma(t).$$

Στην Ενότητα 6.4 θα δούμε και το αντίστοιχο του θεωρήματος του Fubini.

6.3 Ογκομετρικά αποτελέσματα σε πολλαπλότητες

Καταρχάς, γενικεύουμε περαιτέρω την συνολοσυνάρτηση του όγκου, υ, δλδ γενικεύουμε τον Ορισμό 4.3.3.2. Έτσι, υπό το πρίσμα της Πρότασης 6.2.2, ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 6.3.1 (*μη τετριμμένος όγκος, γενικός ορισμός*)**.** *Έστω* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\}$*. Ορίζουμε τον (μη τετριμμένο) όγκο της* S*,* $\upsilon^\circ(S)$*, ως*
$$\upsilon^\circ(S) = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_S} 1d\sigma(t).$$

Παρατήρηση. *Η έννοια της ολοκλήρωσης επί πολλαπλότητας έχει οριστεί, είτε συμβατικά στις συμπαγείς πολλαπλότητες, είτε γενικευμένα στις πολλαπλότητες χωρίς σύνορο.*

Θα ήταν εύλογο να επιχειρήσουμε να επεκτείνουμε κατευθείαν το πεδίο ορισμού του όγκου υ *του Ορισμού 4.3.3.1, και όχι του περιορισμού τού* υ°*. Ωστόσο* $\exists$ *συμπαγές* $S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $\upsilon(S) \neq 0$ *αλλά* $S \notin \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ *αποκλειστικά λόγω της «κακής» γεωμετρίας του* ∂S*, π.χ.: συμπαγές* $S \subsetneq \mathbb{R}^n$ *με γωνίες, αιχμές, με το* S *εκατέρωθεν του* ∂S *κ.τ.λ.. Δλδ μια τέτοια επέκταση θα ήταν ανέφικτη.*

Από την άλλη, ισχύει ότι
$$S \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\} \Rightarrow S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_n^\circ(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\},$$
δλδ
$$\mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_n^\circ(\mathbb{R}^n) \setminus \{\varnothing\},$$
και έτσι μια τέτοια επέκταση έχει νόημα.

Θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την ανάγκη «διπλού» ορισμού για την περιγραφή της έννοιας του όγκου αν είχαμε ορίσει εξ αρχής (δλδ από τα διαστήματα) τον όγκο μόνο σε ανοικτά. Κάτι τέτοιο όμως δεν συνηθίζεται στην βιβλιογραφία.

Όπως αναμένεται, οι βασικές ιδιότητες της συνολοσυνάρτησης

$$\upsilon^\circ\colon \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)\smallsetminus\{\varnothing\}\to\mathbb{R}_+$$

της Υποενότητας 4.3.3 μεταφέρονται, τροποποιημένες κατά τον προφανή τρόπο όπου χρειάζεται, και για την

$$\upsilon^\circ\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{M}_n^\circ(\mathbb{R}^n)\smallsetminus\{\varnothing\}\to\mathbb{R}_+$$

του Ορισμού 6.3.1.

Μάλιστα, μπορούμε να γενικεύσουμε κάποια αποτελέσματα της Υποενότητας 4.5.2, με την χρήση του Θεωρήματος 4.1.2.1 και των ιδιοτήτων των οριζουσών.

Πρόταση 6.3.1. *Έστω*

α΄. $m\le n$,

β΄. *συμπαγής* $S\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ *&*

γ΄. $f\in C(S;\mathbb{R})$.

1. *Έστω, επιπλέον,* $f_0\in RM_n$. *Τότε*

   i. $f_0(S)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ *&*

   ii. *η* $f\circ f_0$ *είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι*

   $$\int_{f_0(S)} f(t)d\sigma(t)=\int_S (f\circ f_0)(t)d\sigma(t).$$

   Ειδικότερα,

   $$\upsilon^\circ(\operatorname{int} f_0(S))=\upsilon^\circ(\operatorname{int} S).$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $f\in Hth_{n,r}$. *Τότε*

   i. $f_0(S)\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ *&*

   ii. *η* $f\circ f_0$ *είναι ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι*

   $$\int_{f_0(S)} f(t)d\sigma(t)=|r|^m\int_S (f\circ f_0)(t)d\sigma(t).$$

   Ειδικότερα,

   $$\upsilon^\circ(\operatorname{int} f_0(S))=|r|^m\upsilon^\circ(\operatorname{int} S).$$

Πρόταση 6.3.2. *Έστω*

1. *μια συλλογή* $\{x_i\}_{i=1}^m\subsetneq\mathbb{R}^n$ *γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων,*

2. $x=(x_i)_{i=1}^m\in\mathbb{R}^{n\times m}$ *&*

3. $f\in Aff(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ *με* $[f]=x$.

Τότε $\Pi\big(\{x_i\}_{i=1}^m\big)\in\mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n)$, *και μάλιστα ισχύει ότι*

$$\left(\det x^{\mathrm{T}}\cdot x\right)^{1/2}=\left(\left(\sum_{\substack{i_1,\dots,i_m\in\{1,\dots,n\}\\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}}\left(\det\,(x_{i_k l})_{k,l=1}^m\right)^2\right)^{\frac12}=\right)\upsilon^\circ\big(\Pi\big(\{x_i\}_{i=1}^m\big)\big).$$

6.4 Τύπος συνεπιφάνειας και όγκος σφαίρας στον $\mathbb{R}^n$

Εδώ παραθέτουμε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα, γνωστό ως τύπος συν-εμβαδού/επιφάνειας (coarea formula), ή αλλιώς τύπος ολοκλήρωσης επί πολλαπλοτήτων στάθμης (integration over level manifolds). Ωστόσο, στα δικά μας πλαίσια, ορθότερο θα ήταν να τον καλούσαμε τύπο συνόγκου. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί ουσιαστικά γενίκευση του θεωρήματος του Fubini.

Αρκεί να το δείξουμε μόνο για το γενικευμένο ολοκλήρωμα. Έτσι, αποδεικνύουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 6.4.1 (*τύπος συνεπιφάνειας*). *Έστω*

i. $m < n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $f_0 \in C^\infty(U;\mathbb{R}^{n-m})$ *τ.ω.:* $\operatorname{rank} Df_0(t) = n-m$, $\forall t \in U$, *ή, ισοδύναμα,* $\mathfrak{J}f_0 > 0$ *&*

iv. $f \in C(U;\mathbb{R})$.

Θέτουμε

$$S_c = f_0^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{C}(U), \ \forall c \in f_0(U).$$

1. *Τότε* $\{S_c\}_{c \in f_0(U)} \subsetneq \mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n)$.

2. *Αν* $\exists$ *τα*

$$\int_U^{\gamma\epsilon\nu} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt \quad \& \quad \int_{S_c}^{\gamma\epsilon\nu} f(t)d\sigma(t) \ \forall c \in f_0(U),$$

τότε

$$\int_U^{\gamma\epsilon\nu} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt = \int_{f_0(U)}^{\gamma\epsilon\nu} \left(\int_{S_c}^{\gamma\epsilon\nu} f(t)d\sigma(t) \right) dc.$$

Απόδειξη. Το σημείο 1 έπεται απευθείας από την Πρόταση 5.1.2.

Για το σημείο 2, έχουμε τα παρακάτω.

- Από το Πόρισμα 4.1.8.4, έπεται ότι $f_0(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n-m})$, και άρα η διατύπωση με το γενικευμένο ολοκλήρωμα επί του $f_0(U)$ έχει νόημα.

- Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4.1, καταλήγουμε στο ότι αρκεί να δείξουμε το αποτέλεσμα για f τ.ω.: $\operatorname{supp} f \subset\subset U$, και μάλιστα ο φορέας μπορεί να επιλεγεί οσοδήποτε μικρός εντός του U. Έτσι, μπορούμε να επιλέξουμε $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, πράγμα το οποίο και κάνουμε (για να έχουμε ολοκληρώματα με την «συμβατική» έννοια και έτσι να απλοποιήσουμε το συμβολισμό).

- Έστω $t_0 \in U$. Επειδή $\mathfrak{J}f_0(t_0) > 0$, $\exists$ (τουλάχιστον ένας) περιορισμός $\pi^n_{i_1\ldots i_m}$ τ.ω.:

$$\det\left(\frac{\partial f_0}{\partial \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(t)}(t_0) \right) \neq 0.$$

Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 4.1.8.2, μπορούμε να βρούμε μια σταθμική δέσμη, και έτσι την αντίστοιχη σταθμική περιοχή

$$U_\dagger = \bigcup_{c \in f_0(U_\dagger)} \operatorname{gr}\left(f_{0c}; \pi^n_{i_1\ldots i_m}\right), \ \text{τ.ω.: } t_0 \in U_\dagger.$$

Γράφουμε

$$x = \pi^n_{i_1\ldots i_m}(t) \in U_1 \ \ \& \ \ y = \hat{\pi}^n_{i_1\ldots i_m}(t), \quad \forall t \in U_\dagger,$$

και απαιτούμε $\operatorname{supp} f \subset\subset U_\dagger$. Μπορούμε, επίσης, να θεωρήσουμε ότι $U = U_\dagger$, πράγμα και το οποίο κάνουμε.

– Έχουμε το εξής
$$\int_{U_\dagger} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt = \int_{{f_\dagger}^{-1}(f_\dagger(U_\dagger))} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt,$$
όπου $f_\dagger$ είναι όπως στην Πρόταση 4.1.9.1. Άρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.5.1.1, παίρνουμε
$$\int_{U_\dagger} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt = \int_{f_\dagger(U_\dagger)} \big((f\,\mathfrak{J}f_0)\circ {f_\dagger}^{-1}\big)(\widetilde{t})d\widetilde{t},$$
μιας και
$$J{f_\dagger}^{-1} = 1.$$

– Καθώς
$$f_\dagger(U_\dagger) = \varpi^n_{i_1\ldots i_m}(U_1) + \hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}(f_0(U_\dagger)),$$
από το Θεώρημα 4.3.2.2 συμπεραίνουμε ότι
$$\int_{U_\dagger} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt = \int_{f_0(U_\dagger)} \left(\int_{U_1} \big((f\,\mathfrak{J}f_0)\circ {f_\dagger}^{-1}\big)(\widetilde{x};\widetilde{y})d\widetilde{x}\right)d\widetilde{y}.$$
Επειδή $\widetilde{x} = x$ και $\widetilde{y} = c$, γράφουμε
$$\int_{U_\dagger} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt = \int_{f_0(U_\dagger)} \left(\int_{U_1} \big((f\,\mathfrak{J}f_0)\circ {f_\dagger}^{-1}\big)(x;c)dx\right)dc.$$

– Τώρα, από το σημείο 2 του Θεωρήματος 4.1.9.1 έχουμε ότι
$$\mathfrak{J}f_0(t) = \Big(\det\big(1_m + D{f_0}_c^{\mathrm{T}}(x)\cdot D{f_0}_c(x)\big)\Big)^{\frac{1}{2}},\ \forall t\in U_\dagger.$$

– Από την άλλη, $\forall c\in f_0(U_\dagger)$, ορίζουμε $f_{*c}\in C^\infty(U_1;\mathbb{R}^n)$ ως
$$f_{*c}(x) = \varpi^n_{i_1\ldots i_m}(x) + \big(\hat{\varpi}^n_{i_1\ldots i_m}\circ {f_0}_c\big)(x),\ \forall x\in U_1.$$
Είναι προφανές ότι, $\forall c\in f_0(U_\dagger)$, το μονοσύνολο $\{(U_1, f_{*c})\}$ είναι άτλαντας της $S_c\in\mathcal{M}^\circ_m(\mathbb{R}^n)$, και μάλιστα
$$\mathfrak{J}f_{*c}(x) = \Big(\det\big(1_m + D{f_0}_c^{\mathrm{T}}(x)\cdot D{f_0}_c(x)\big)\Big)^{\frac{1}{2}},\ \forall x\in U_1,$$
δλδ
$$\mathfrak{J}f_{*c}(x) = \mathfrak{J}f_0(t),\ \forall t\in U_\dagger.$$

– Εξ ορισμού έχουμε ότι
$$\int_{S_c} f(t)d\sigma(t) = \int_{U_1} ((f\circ f_{*c})\,\mathfrak{J}f_{*c})(x)dx,\ \forall c\in f_0(U_\dagger).$$
Αφού $\forall t\in U_\dagger$ έχουμε ότι

1. $\widetilde{x} = x$ και $\widetilde{y} = c$,
2. $f_{*c}(x) = t = {f_\dagger}^{-1}(\widetilde{t}) = {f_\dagger}^{-1}(\widetilde{x};\widetilde{y}) = {f_\dagger}^{-1}(x;c)$ &
3. $\mathfrak{J}f_{*c}(x) = \mathfrak{J}f_0(t) = ((\mathfrak{J}f_0)\circ f_{*c})(x) = \big((\mathfrak{J}f_0)\circ {f_\dagger}^{-1}\big)(\widetilde{x};\widetilde{y}) = \big((\mathfrak{J}f_0)\circ {f_\dagger}^{-1}\big)(x;c)$,

συμπεραίνουμε ότι
$$\int_{S_c} f(t)d\sigma(t) = \int_{U_1} \big((f\,\mathfrak{J}f_0)\circ {f_\dagger}^{-1}\big)(x;c)dx,\ \forall c\in f_0(U_\dagger).$$
Καταλήγουμε έτσι στο ζητούμενο
$$\int_{U_\dagger} (f\,\mathfrak{J}f_0)(t)dt = \int_{f_0(U_\dagger)} \left(\int_{S_c} f(t)d\sigma(t)\right)dc.$$

□

Σημείωση. *Το Θεώρημα 6.4.1, κατάλληλα διατυπωμένο, αποτέλεσε θεμέλιο λίθο της Γεωμετρικής Θεωρίας Μέτρου.*

Μπορούμε να δώσουμε τον αντίστοιχο του Ορισμού 4.1.9.1.

Ορισμός 6.4.1 (*πολλαπλότητα στάθμης*)**.** *Κάθε στοιχείο μιας συλλογής πολλαπλοτήτων*

$$\{S_c\}_{c\in f_0(U)}$$

όπως στο Θεώρημα 6.4.1, καλείται πολλαπλότητα στάθμης c.

Τώρα, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.4.1 είναι ο τύπος πολικών συντεταγμένων.

Θεώρημα 6.4.2 (*τύπος πολικών συντεταγμένων*)**.** *Έστω*

i. $t_0 \in \mathbb{R}^n$,

ii. $0 \le \rho_1 < \rho_2 \le \infty$, *για τα οποία θέτουμε* $I = (\rho_1, \rho_2)$,

iii. $U = \left\{t \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |t - t_0| \in I\right\}$ *&*

iv. $f \in C(U;\mathbb{R})$.

Θέτουμε

$$S_\rho = \operatorname{bd}\overline{B(t_0,\rho)}, \ \ \forall \rho \in I.$$

Αν ∃ τα

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(t)dt \ \ \& \ \int_{S_\rho} f(t)d\sigma(t) \ \forall \rho \in I,$$

τότε

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(t)dt = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_I}\left(\int_{S_\rho} f(t)d\sigma(t)\right)d\rho.$$

Σημείωση. *Κάνοντας, επιπλέον, χρήση της Πρότασης 6.3.1, το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 6.4.2 παίρνει την εξής μορφή*

$$\overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_U} f(t)dt = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_I}\left(\int_{S_1} f(\rho t)d\sigma(t)\right)\rho^{n-1}d\rho = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_I}\left(\int_{\operatorname{bd}\overline{B(0_n,1)}} f(t_0+\rho t)d\sigma(t)\right)\rho^{n-1}d\rho,$$

η οποία και εμφανίζεται συχνά στην βιβλιογραφία.

Έτσι, από το Πόρισμα 4.5.4.2, την Πρόταση 6.3.1 και το Θεώρημα 6.4.2 έπεται το εξής.

Πόρισμα 6.4.1 (*όγκος («εμβαδόν») σφαίρας*)**.** *Έστω*

1. $n \ne 1$,

2. $t_0 \in \mathbb{R}^n$ *&*

3. $\rho > 0$.

Τότε

$$\upsilon^\circ\left(\operatorname{bd}\overline{B(t_0,\rho)}\right) = \frac{n}{\rho}\upsilon^\circ(\operatorname{int}B(t_0,\rho)) = \frac{n}{\rho}\upsilon(B(t_0,\rho)) = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}\rho^{n-1}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\rho^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

6.5 Ολοκλήρωμα διανυσματικών συναρτήσεων

Σε αντιστοιχία με την Υποενότητα 4.3.5, αναφέρουμε, επίσης, ότι όλη η θεωρία ολοκλήρωσης επί πολλαπλοτήτων βαθμωτών (μονόμετρων) συναρτήσεων που αναπτύχθηκε ως τώρα, μπορεί με φυσικό τρόπο να γενικευτεί και για διανυσματικές, απλά κοιτώντας κάθε συνιστώσα συνάρτηση ξεχωριστά.

Κεφάλαιο 7

Διαφορική μορφή

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε τον ορισμό των διαφορικών μορφών (differential forms) και μελετάμε τις ιδιότητές τους. Οι διαφορικές μορφές αποτελούν το μέσο για την «κομψή» διατύπωση του κεντρικού Θεωρήματος 8.1.2.

Αν και υπάρχει ο αλγεβρικός (μέσω Πλειογραμμικής Άλγεβρας) τρόπος ορισμού τους (βλ., π.χ., το [17], το [26], κ.τ.λ.), δλδ αυτός που δεν εμπλέκει θεωρία ολοκλήρωσης, εντούτοις ο σκοπός τους είναι ένας: *να ολοκληρωθούν επί προσανατολισμένης πολλαπλότητας*. Έτσι, εδώ θα δώσουμε έναν άμεσο, αναλυτικό, ορισμό που σχετίζεται με το ολοκλήρωμα επί προσανατολισμένης πολλαπλότητας (για παρόμοιες προσεγγίσεις βλ., π.χ., [32], το [7], κ.τ.λ.). Θα μπορούσαμε, μάλιστα, να πούμε ότι οι διαφορικές μορφές εισάγουν έναν εναλλακτικό τρόπο ολοκλήρωσης διανυσματικών συναρτήσεων επί πολλαπλοτήτων, με τους περιορισμούς ότι η διανυσματική συνάρτηση πρέπει να είναι συγκεκριμένης διάστασης και ότι η πολλαπλότητα πρέπει να είναι προσανατολισμένη.

7.1 Ορισμός

Η απόδειξη του παρακάτω αποτελέσματος δεν διαφέρει από αυτή της Πρότασης 6.1.1.

Πρόταση 7.1.1 (*«σχεδόν» ανεξαρτησία από τις επαναπαραμετρήσεις*)**.** *Έστω*

1. $m \le n$,
2. $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,
3. *χάρτης* (S_j, f_j) *του μεγιστικού άτλαντα της* S,
4. $f \in C(S;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\mathrm{supp} f \subsetneq f_j(S_j)$,
5. C^1 *αλλαγή μεταβλητών* $f_0 \in C^1(S_j;\mathbb{R}^m)$ *τ.ω.: η* $\det Df_0$ *(ισοδύναμα, η* $\det D{f_0}^{-1}$*) να μην αλλάζει πρόσημο &*
6. $i_s \in \{1,\dots,n\}$, $\forall s \in \{1,\dots,m\}$.

Περιορισμένη στο ${S_j}^\circ$, *η*

$$(f \circ f_j) \det \frac{\partial\big(f_{j_{i_1}},\dots,f_{j_{i_m}}\big)}{\partial x}$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη ανν, περιορισμένη στο $(f_0(S_j))^\circ$, *η*

$$\big(f \circ f_j \circ {f_0}^{-1}\big) \det \frac{\partial\big(f_{j_{i_1}} \circ {f_0}^{-1},\dots,f_{j_{i_m}} \circ {f_0}^{-1}\big)}{\partial x}$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$c \int_{{S_j}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \left((f \circ f_j) \det \frac{\partial\big(f_{j_{i_1}},\dots,f_{j_{i_m}}\big)}{\partial x} \right)(x)dx =$$

$$= \int_{(f_0(S_j))^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \left(\big(f \circ f_j \circ {f_0}^{-1}\big) \det \frac{\partial\big(f_{j_{i_1}} \circ {f_0}^{-1},\dots,f_{j_{i_m}} \circ {f_0}^{-1}\big)}{\partial x} \right)(x)dx,$$

όπου το $c = \pm 1$ ισούται με το πρόσημο της $\det Df_0^{-1}$ (ισοδύναμα, της $\det Df_0$).

Παρατήρηση. *Σχετικά με την Πρόταση 7.1.1, αν το S_j (ισοδύναμα, το $f_0(S_j)$) είναι συνεκτικό, τότε η συνθήκη του σημείου 5 που αφορά το πρόσημο, ικανοποιείται.*

Με χρήση, τώρα, της Πρότασης 7.1.1 και της επιπρόσθετης πληροφορίας ότι

«οι επικαλυπτόμενοι χάρτες μιας προσανατολισμένης πολλαπλότητας είναι θετικά επικαλυπτόμενοι (δλδ οι συναρτήσεις μετάβασης διατηρούν τον προσανατολισμό)»,

παίρνουμε, με ανάλογο τρόπο, το αντίστοιχο της Πρότασης 6.1.2.

Πρόταση 7.1.2. *Έστω*

i. $m \leq n$,

ii. *συμπαγής προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,

iii. *δύο ομαλές διαμερίσεις της μονάδας,* $\{f_{1j}\}_{j \in N_1} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ *και* $\{f_{2j}\}_{j \in N_2} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *στο* S, *που και οι δύο κυριαρχούνται από την συλλογή* $\{f_{0j}(S_j)\}_{j \in \mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$ *των εικόνων των χαρτών του δεδομένου προσανατολισμού,* $\{(S_j, f_{0j})\}_{j \in \mathscr{I}}$, *της* S, *και υποθέτουμε (για απλούστευση του συμβολισμού) ότι* $N_l \subseteq \mathscr{I}_l$ $\forall l \in \{1,2\}$,

iv. $f \in C(S;\mathbb{R})$ *&*

v. $i_s \in \{1,\dots,n\}$, $\forall s \in \{1,\dots,m\}$.

Τότε

1. *περιορισμένη στο* $S_j{}^\circ$, *η*

$$\left(\left(f_{l_j} f\right) \circ f_{0_j}\right) \det \frac{\partial\left(f_{0_j\, i_1}, \dots, f_{0_j\, i_m}\right)}{\partial x}$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη $\forall\ j \in N_l$ *&* $l \in \{1,2\}$ *&*

2.

$$\sum_{j \in N_1} \int_{S_j{}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \left(\left(\left(f_{1_j} f\right) \circ f_{0_j}\right) \det \frac{\partial\left(f_{0_j\, i_1}, \dots, f_{0_j\, i_m}\right)}{\partial x}\right)(x)dx =$$
$$= \sum_{j \in N_2} \int_{S_j{}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \left(\left(\left(f_{2_j} f\right) \circ f_{0_j}\right) \det \frac{\partial\left(f_{0_j\, i_1}, \dots, f_{0_j\, i_m}\right)}{\partial x}\right)(x)dx.$$

Έτσι, λόγω της Πρότασης 7.1.2, μπορούμε να δώσουμε τον βασικό ορισμό του κεφαλαίου. Πρώτα όμως, για λόγους απλούστευσης του συμβολισμού (μιας και αργότερα θα απαιτηθεί η διαφορισιμότητα των συναρτήσεων) κάνουμε τον ακόλουθη σύμβαση.

Σύμβαση:
Περιορίζουμε την μελέτη μας για ομαλές συναρτήσεις.

Ορισμός 7.1.1 (διαφορική μορφή)**.** *Έστω* $m \in \{0,\dots,n\}$ *και* $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Έστω, επιπλέον,* $m \neq 0$ *και* $f \in C^\infty\left(U;\mathbb{R}^{n^m}\right)$ *με*

$$f\colon U \to \mathbb{R}^{n^m}$$
$$t \mapsto f(t) = \left(f_{i_1 \dots i_m}(t)\right)_{i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}}.$$

   i. *Έστω, επιπλέον,*

      α΄. *συμπαγής και προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ *&*

β΄. ομαλή διαμέριση της μονάδας, $\{f_j\}_{j\in N} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *στο* S, *που κυριαρχείται από την συλλογή* $\{f_{0j}(S_j)\}_{j\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$ *των εικόνων των χαρτών του δεδομένου προσανατολισμού,* $\{(S_j, f_{0j})\}_{j\in\mathscr{I}}$, *της* S, *και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι* $N \subseteq \mathscr{I}$.

Τότε ορίζουμε την διαφορική μορφή (τάξης m, *ή αλλιώς την* m*-μορφή) της* f *στην* S *ως*

$$\begin{aligned}&\omega_f(S) \overset{\text{συνήθως παραλείπεται } \underset{=}{\eta}\ f \text{ από τον συμβολισμό}}{} \\ &= \omega(S) \overset{\text{συμβολισμός}}{=} \int_S \omega \overset{\text{συμβολισμός}}{=} \int_S \sum_{i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,n\}} f_{i_1\ldots i_m} dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_m} = \\ &= \sum_{j\in N}\ \sum_{i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,n\}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{S_j^\circ}} \left(\left((f_j f_{i_1\ldots i_m})\circ f_{0j}\right) \det \frac{\partial\left(f_{0j\,i_1},\ldots,f_{0j\,i_m}\right)}{\partial x}\right)(x)dx.\end{aligned}$$

Κάθε $f_{i_1\ldots i_m} = 0$ *θα παραλείπεται από τον συμβολισμό*

$$\int_S \sum_{i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,n\}} f_{i_1\ldots i_m} dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_m},$$

δλδ ο παραπάνω συμβολισμός θα τροποποιείται κάθε φορά κατά τον προφανή τρόπο.

ii. Η διαφορική μορφή (τάξης m, *ή αλλιώς την* m*-μορφή) της* f *στο* U,

$$\omega \overset{\text{συμβολισμός}}{=} \sum_{i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,n\}} f_{i_1\ldots i_m} dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_m},$$

ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\omega\colon \left\{S\in\mathcal{C}(U)\cap\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)\,\middle|\, \eta\ S \text{ είναι συμπαγής και προσανατολισμένη}\right\} &\to \mathbb{R}\\ S &\mapsto \int_S \omega.\end{aligned}$$

Κάθε $f_{i_1\ldots i_m} = 0$ *θα παραλείπεται από τον συμβολισμό*

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,n\}} f_{i_1\ldots i_m} dt_{i_1}\wedge\cdots\wedge dt_{i_m},$$

δλδ ο παραπάνω συμβολισμός θα τροποποιείται κάθε φορά κατά τον προφανή τρόπο.

2. *Έστω, επιπλέον,* $f\in C^\infty(U;\mathbb{R})$.

   i. Έστω, επιπλέον, προσανατολισμένη $S\in\mathcal{C}(U)\cap\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $S = \bigcup_{j\in N} t_j$ *για* $N\in\mathcal{B}(\mathbb{N})\smallsetminus\{\varnothing\}$ *(δλδ* $S \subset\subset U$*) και* $f_0\colon S\to\{-1,1\}$ *ο προσανατολισμός της. Ορίζουμε την διαφορική μορφή (τάξης 0, ή αλλιώς την 0-μορφή) της* f *στην* S *ως*

$$\omega_f(S) \overset{\text{παραλείπεται η } f \text{ από τον συμβολισμό}}{=} \omega(S) \overset{\text{συμβολισμός}}{=} \int_S \omega = \sum_{j\in N}(f f_0)(t_j).$$

   ii. Η διαφορική μορφή (τάξης 0, ή αλλιώς η 0-μορφή) της f *στο* U,

$$\omega \overset{\text{συμβολισμός}}{=} f,$$

ορίζεται ως

$$\begin{aligned}\omega\colon \left\{S\in\mathcal{C}(U)\cap\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)\,\middle|\, \eta\ S \text{ είναι συμπαγής και προσανατολισμένη}\right\} &\to \mathbb{R}\\ S &\mapsto \int_S \omega.\end{aligned}$$

3. *Συμβολίζουμε*

$$D_m(U;\mathbb{R}) = \{\omega \text{ όπως στο σημείο 1.ii. ή στο σημείο 2.ii., αντίστοιχα}\}.$$

Σημείωση. *1. Θα χρησιμοποιούμε τα ω, η, θ κ.ο.κ., με ή χωρίς κάποιο δείκτη, για τον συμβολισμό αυθαίρετων διαφορικών μορφών.*

2. Στην επόμενη ενότητα, συγκεκριμένα στον Ορισμό 7.2.2, επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού των διαφορικών μορφών μέγιστης τάξης έτσι ώστε να καλύψουμε και φραγμένα ανοικτά σύνολα.

Ο επόμενος ορισμός είναι ο αναμενόμενος.

Ορισμός 7.1.2. *Έστω*

i. $m \in \{0, \ldots, n\}$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $\omega_1, \omega_2 \in D_m(U, \mathbb{R})$ *&*

iv. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1. *Λέμε ότι οι ω_1 και ω_2 είναι ίσες ανν*

$$\int_S \omega_1 = \int_S \omega_1, \ \forall \text{ συμπαγή και προσανατολισμένη } S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n),$$

και σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε

$$\omega_1 = \omega_2.$$

2. *Λέμε ότι η ω_1 είναι μηδενική ανν*

$$\int_S \omega_1 = 0, \ \forall \text{ συμπαγή και προσανατολισμένη } S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n),$$

και σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε

$$\omega_1 = 0.$$

3. *Ορίζουμε την $(c_1\,\omega_1 + c_2\,\omega_2) \in D_m(U, \mathbb{R})$ ως*

$$\int_S c_1\,\omega_1 + c_2\,\omega_2 = c_1 \int_S \omega_1 + c_2 \int_S \omega_2, \ \forall \text{ συμπαγή και προσανατολισμένη } S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n).$$

Κατά την συνήθη πρακτική, παραλείπουμε μια μηδενική διαφορική μορφή από ένα άθροισμα.

7.2 Κανονική έκφραση διαφορικής μορφής

Κάθε διαφορική μορφή τάξης ≥ 1 παίρνει μια χρήσιμη μορφή, η οποία καλείται κανονική έκφραση/συνήθης αναπαράσταση (standard presentation).

Αρχικά, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο έπεται άμεσα από γνωστή ιδιότητα των οριζουσών.

Πρόταση 7.2.1. *Έστω*

1. $m \leq n$,
2. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,
3. *χάρτης* (S_j, f_j) *του δεδομένου προσανατολισμού της* S,
4. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ *τ.ω.:* $(\mathrm{supp} f \cap S) \subsetneq f_j(S_j)$,
5. $i_s \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall s \in \{1, \ldots, m\}$ *&*
6. *μετάθεση* σ *του* $\{i_1, \ldots, i_m\}$.

Τότε, περιορισμένες στο ${S_j}^\circ$, *οι*

$$(f \circ f_j) \det \frac{\partial\big(f_{j\, i_1}, \ldots, f_{j\, i_m}\big)}{\partial x} \quad \&\quad (f \circ f_j) \det \frac{\partial\Big(f_{j\, \sigma(i_1)}, \ldots, f_{j\, \sigma(i_m)}\Big)}{\partial x}$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμες, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_{{S_j}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \left((f \circ f_j) \det \frac{\partial\big(f_{j\, i_1}, \ldots, f_{j\, i_m}\big)}{\partial x} \right)(x) dx = $$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma) \int_{{S_j}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \left((f \circ f_j) \det \frac{\partial\Big(f_{j\, \sigma(i_1)}, \ldots, f_{j\, \sigma(i_m)}\Big)}{\partial x} \right)(x) dx.$$

Πάλι από γνωστή ιδιότητα των οριζουσών, έχουμε το εξής.

Πρόταση 7.2.2. *Έστω*

1. $2 \leq m \leq n$,
2. *προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$,
3. *χάρτης* (S_j, f_j) *του δεδομένου προσανατολισμού της* S,
4. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ *τ.ω.:* $(\operatorname{supp} f \cap S) \subsetneq f_j(S_j)$ *&*
5. $i_s \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall s \in \{1, \ldots, m\}$, *τ.ω.:* $\exists\, s_1, s_2 \in \{1, \ldots, m\}$ *με* $i_{s_1} = i_{s_2}$.

Τότε, περιορισμένη στο ${S_j}^\circ$, *η*

$$(f \circ f_j) \det \frac{\partial\big(f_{j\, i_1}, \ldots, f_{j\, i_m}\big)}{\partial x}$$

είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, και μάλιστα ισχύει ότι

$$\int_{{S_j}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} \left((f \circ f_j) \det \frac{\partial\big(f_{j\, i_1}, \ldots, f_{j\, i_m}\big)}{\partial x} \right)(x) dx = 0.$$

Από την Πρόταση 7.2.1 και την Πρόταση 7.2.2, έπεται άμεσα το παρακάτω.

Πρόταση 7.2.3. *Έστω*

i. $m \leq n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $f \in C^\infty(U; \mathbb{R})$,

iv. $i_s \in \{1, \ldots, n\}$, $\forall s \in \{1, \ldots, m\}$ *&*

v. $\omega \in D_m(U; \mathbb{R})$ *τ.ω.:*

$$\omega = f\, dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_m}.$$

1. *Έστω, επιπλέον, μετάθεση* σ *του* $\{i_1, \ldots, i_m\}$. *Τότε*

$$\omega = \operatorname{sgn}(\sigma)\, f\, dt_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge dt_{\sigma(i_m)}.$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $2 \leq m \leq n$ *και* $s_1, s_2 \in \{1, \ldots, m\}$ *τ.ω.:* $i_{s_1} = i_{s_2}$. *Τότε*

$$\omega = 0.$$

Από την άλλη μεριά, απευθείας από τον Ορισμό 7.1.2 για την μία κατεύθυνση, και εύκολα με απαγωγή σε άτοπο για την άλλη, παίρνουμε τον εξής.

Πρόταση 7.2.4. *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $f = (f_{i_1\dots i_m})_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} \in C^\infty\Big(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\Big)$ *&*

iv. $\omega = \omega_f \in D_m(U;\mathbb{R})$, *δλδ*

$$\omega = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} f_{i_1\dots i_m}\, dt_{i_1}\wedge\dots\wedge dt_{i_m}.$$

Τότε

$$\omega = 0 \ \alpha\nu\nu\ f = 0_{\binom{n}{m}}.$$

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 7.2.3 και της Πρότασης 7.2.4, είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 7.2.1. *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $f = (f_{i_1\dots i_m})_{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\}} \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^{n^m}\big)$ *&*

iv. $\omega = \omega_f \in D_m(U;\mathbb{R})$, *δλδ*

$$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\}} f_{i_1\dots i_m}\, dt_{i_1}\wedge\dots\wedge dt_{i_m}.$$

Τότε $\exists! f_0 = \big(f_{0_{i_1\dots i_m}}\big)_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} \in C^\infty\Big(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\Big)$ *τ.ω.:*

$$\omega = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} f_{0_{i_1\dots i_m}}\, dt_{i_1}\wedge\dots\wedge dt_{i_m}.$$

Μάλιστα, ισχύει ότι

$$f_{0_{i_1\dots i_m}} = \sum_{\substack{\mu\epsilon\tau\acute{\alpha}\vartheta\epsilon\sigma\eta\ \sigma \\ \tau o\upsilon\ \{1,\dots,m\}}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, f_{\sigma(i_1)\dots\sigma(i_m)},\ \ \forall\, i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}\ \ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n.$$

Δίνουμε έτσι τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 7.2.1 (*κανονική έκφραση και συνιστώσες διαφορικής μορφής*). *Η*

$$\omega = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} f_{0_{i_1\dots i_m}}\, dt_{i_1}\wedge\dots\wedge dt_{i_m}\ \ \tau\eta\varsigma\ \textit{Πρότασης 7.2.1},$$

καλείται κανονική έκφραση (της ω*), και κάθε* $f_{0_{i_1\dots i_m}}$ *συνιστώσα της* ω*.*

Ο ορισμός επεκτείνεται κατά τον προφανή τρόπο για $m = 0$*.*

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια για τον Ορισμό 7.2.1.*

1. *Μέσω της κανονικής έκφρασης κάθε διαφορικής μορφής τάξης* $m \in \{0,\dots,n\}$*, μπορούμε να περιοριστούμε, για την μελέτη των ιδιοτήτων τους, αποκλειστικά στις* $\omega = \omega_f \in D_m(U;\mathbb{R})$ *με* $f \in C^\infty\Big(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\Big)$.

2. *Η Πρόταση 7.2.4 είναι ένας από τους βασικούς λόγους εισαγωγής της κανονικής έκφρασης μιας διαφορικής μορφής. Ο άλλος είναι ο ορισμός τόσο του γινομένου όσο και του τελεστή* d *διαφορικών μορφών (βλ. την Ενότητα 7.3 και την Ενότητα 7.4), οι οποίοι δίνονται μέσω των κανονικών εκφράσεων.*

Κάνουμε την εξής σύμβαση.

Σύμβαση:
Για $m \in \{0,\dots,n\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in C^\infty\Big(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\Big)$, η σχέση $\omega = \omega_f \in D_m(U;\mathbb{R})$ δηλώνει ότι οι συνιστώσες της f είναι οι συνιστώσες της ω, δλδ

$$\omega = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \text{με } 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} f_{i_1\dots i_m}\, dt_{i_1}\wedge\dots\wedge dt_{i_m}, \text{ αν } m \neq 0$$

και

$$\omega = f, \text{ αλλιώς.}$$

Έτσι, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε τον Ορισμό 7.1.1 ως ακολούθως.

Πόρισμα 7.2.2. *Έστω*

1. $m \le n$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
3. $f \in C^\infty\Big(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\Big)$,
4. $\omega = \omega_f \in D_m(U;\mathbb{R})$,
5. *συμπαγής και προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U)\cap\mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$ *&*
6. *ομαλή διαμέριση της μονάδας,* $\{f_j\}_{j\in N} \subsetneq C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, *στο* S, *που κυριαρχείται από την συλλογή* $\big\{f_{0j}(S_j)\big\}_{j\in\mathscr{I}} \subseteq \mathcal{O}(S)$ *των εικόνων των χαρτών του δεδομένου προσανατολισμού,* $\big\{(S_j, f_{0j})\big\}_{j\in\mathscr{I}}$, *της* S, *και υποθέτουμε (για απλοποίηση του συμβολισμού) ότι* $N \subseteq \mathscr{I}$.

Τότε

$$\int_S \omega = \sum_{j\in N}\ \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \text{με } 1\le i_1<\dots<i_m\le n}} \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{S_j{}^\circ}} \Bigg(\big((f_j\, f_{i_1\dots i_m})\circ f_{0j}\big)\det\frac{\partial\pi^n_{i_1\dots i_m}\circ f_{0j}}{\partial x}\Bigg)(x)dx.$$

Μπορούμε, επίσης, να αναδιατυπώσουμε τον Ορισμό 7.1.2.

Πόρισμα 7.2.3. *Έστω*

i. $m \in \{0,\dots,n\}$,
ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
iii. $f_1, f_2 \in C^\infty\Big(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\Big)$,
iv. $\omega_1,\omega_2 \in D_m(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\omega_l = \omega_{l\,f_l}$ $\forall l \in \{1,2\}$ *&*
v. $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Τότε

1. $\omega_1 = \omega_2$ *ανν* $f_1 = f_2$,
2. $\omega_1 = 0$ *ανν* $f_1 = 0_{\binom{n}{m}}$ *&*
3. *θέτωντας* $\omega = c_1\omega_1 + c_2\omega_2$, *ισχύει ότι* $\omega = \omega_{c_1 f_1 + c_2 f_2}$.

Επιπλέον, υπό το πρίσμα του Ορισμού 7.2.1, επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού συγκεκριμένα των διαφορικών μορφών μέγιστης τάξης, έτσι ώστε να καλύψουμε και φραγμένα ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 7.2.2 (*διαφορική μορφή, συνέχεια*)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$,

3. $\omega = \omega_f \in D_n(U;\mathbb{R})$ &

4. $U_0 \subseteq U$ τ.ω.: η $f|_{U_0}$ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη.

Τότε ορίζουμε

$$\int_{U_0} \omega = \overset{\gamma\epsilon\nu}{\int_{U_0}} f(t)dt.$$

Μάλιστα, επεκτείνουμε το Πόρισμα 7.2.3 έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε και την παραπάνω γενίκευση των στοιχείων του $D_n(U;\mathbb{R})$.

Ο παρακάτω ορισμός έρχεται «φυσικά».

Ορισμός 7.2.3 (*περιορισμός διαφορικής μορφής*)**.** *Έστω*

1. $m \in \{0,\dots,n\}$,
2. $U_0 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$,
3. $f \in C^\infty\left(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\right)$ &
4. $\omega = \omega_f \in D_m(U;\mathbb{R})$.

Τότε η $\omega_{f|_{U_0}} \in D_m(U_0;\mathbb{R})$ καλείται ο περιορισμός της ω στο U_0 και συμβολίζεται ως $\omega|_{U_0}$.

Το επόμενο είναι τετριμμένο.

Πρόταση 7.2.5. *Έστω*

1. $m \in \{0,\dots,n\}$,
2. $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ &
3. $\omega \in D_m(U;\mathbb{R})$.

Τότε $(\omega|_{U_2})|_{U_1} = \omega|_{U_1}$.

Επίσης, δίνουμε έναν χαρακτηρισμό που χρησιμοποιείται στην βιβλιογραφία.

Ορισμός 7.2.4 (*βασική διαφορική μορφή*)**.** *Οι διαφορικές μορφές*

$$dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_m} \in D_m(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}),\ \forall\ i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}\ \text{με}\ 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n\ \&\ \forall m \le n,$$

καλούνται βασικές/στοιχειώδεις (basic/elementary).

7.3 Γινόμενο διαφορικών μορφών

Έχοντας ήδη ορίσει τον γραμμικό συνδυασμό διαφορικών μορφών (βλ. το σημείο 3 του Ορισμού 7.1.2 και, ισοδύναμα, το σημείο 3 της Πρότασης 7.2.3), εδώ ορίζουμε το γινόμενο ($\wedge$) των διαφορικών μορφών και μελετάμε τις ιδιότητες του.

Ξεκινάμε με το εξής, το οποίο έπεται άμεσα με την χρήση της Πρότασης 7.2.3.

Πρόταση 7.3.1. *Έστω*

1. $m_1, m_2 \in \{1,\dots,n-1\}$ τ.ω.: $m_1 + m_2 \le n$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ &
3. $f_l \in C^\infty\left(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m_l}}\right)$, $\forall l \in \{1,2\}$.

Τότε

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m_1} \in \{1,\dots,n\} \\ \text{με}\ 1 \le i_1 < \cdots < i_{m_1} \le n}} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{m_2} \in \{1,\dots,n\} \\ \text{με}\ 1 \le j_1 < \cdots < j_{m_2} \le n}} f_{1 i_1 \dots i_{m_1}} f_{2 j_1 \dots j_{m_2}} dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_{m_1}} \wedge dt_{j_1} \wedge \cdots \wedge dt_{j_{m_2}} \in$$

$$\in D_{m_1+m_2}(U;\mathbb{R}).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 7.3.1, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.3.1. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   i. $m_1, m_2 \in \{1, \dots, n-1\}$ *τ.ω.:* $m_1 + m_2 \leq n$,

   ii. $f_l \in C^\infty\left(U; \mathbb{R}^{\binom{n}{m_l}}\right)$, $\forall l \in \{1,2\}$ *&*

   iii. $\omega_l \in D_{m_l}(U;\mathbb{R})$, $\forall l \in \{1,2\}$, *τ.ω.:* $\omega_l = \omega_{l f_l}$, $\forall l \in \{1,2\}$, *δλδ*

$$\omega_l = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m_l} \in \{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m_l} \leq n}} f_{l i_1 \dots i_{m_l}} dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_{m_l}}, \ \forall l \in \{1,2\}.$$

   Ορίζουμε το γινόμενο των παραπάνω διαφορικών μορφών, $\omega_1 \wedge \omega_2 \in D_{m_1+m_2}(U;\mathbb{R})$, *ως*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \\ = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{m_1} \in \{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m_1} \leq n}} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_{m_2} \in \{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1 \leq j_1 < \dots < j_{m_2} \leq n}} f_{1 i_1 \dots i_{m_1}} f_{2 j_1 \dots j_{m_2}} dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_{m_1}} \wedge dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_{m_2}}.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   i. $m \leq n$,

   ii. $f_1 \in C^\infty(U;\mathbb{R})$ *&* $f_2 \in C^\infty\left(U; \mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\right)$ *&*

   iii. $\omega_1 \in D_0(U;\mathbb{R})$ *&* $\omega_2 \in D_m(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\omega_l = \omega_{l f_l}$, $\forall l \in \{1,2\}$, *δλδ*

$$\omega_1 = f_1 \quad \& \quad \omega_2 = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n}} f_{2 i_1 \dots i_m} dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_m}.$$

   Ορίζουμε το γινόμενο των παραπάνω διαφορικών μορφών, $\omega_1 \wedge \omega_2 \in D_m(U;\mathbb{R})$, *ως*

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_1 = f_1 \omega_2 = \omega_2 f_1 = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n}} f_1 f_{2 i_1 \dots i_m} dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_m}.$$

Παραθέτουμε τις βασικές και άμεσες ιδιότητες του γινομένου.

Πρόταση 7.3.2. *Έστω*

i. $m_1, m_2, m_3 \in \{0, \dots, n\}$ *τ.ω.:* $m_1 + m_2 + m_3 \leq n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $\omega_1, \omega_2 \in D_{m_1}(U;\mathbb{R})$,

iv. $\eta_1, \eta_2 \in D_{m_2}(U;\mathbb{R})$ *&*

v. $\theta \in D_{m_3}(U;\mathbb{R})$.

Τότε

1. $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta_1 \in D_{m_1+m_2}(U;\mathbb{R})$ *&* $\omega_1 \wedge (\eta_1 + \eta_2) \in D_{m_1+m_2}(U;\mathbb{R})$, *και μάλιστα*

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta_1 = \omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_2 \wedge \eta_1 \quad \& \quad \omega_1 \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega_1 \wedge \eta_1 + \omega_1 \wedge \eta_2,$$

2. $(\omega_1 \wedge \eta_1) \wedge \theta \in D_{m_1+m_2+m_3}(U;\mathbb{R}) \ni \omega_1 \wedge (\eta_1 \wedge \theta)$, *και μάλιστα*

$$(\omega_1 \wedge \eta_1) \wedge \theta = \omega_1 \wedge (\eta_1 \wedge \theta) \quad \&$$

3. $\omega_1 \wedge \eta_1 = (-1)^{m_1 m_2} \eta_1 \wedge \omega_1$.

Με βάση την Πρόταση 7.3.2, παίρνουμε τις εξής λίγο πιο σύνθετες ιδιότητες.

Πρόταση 7.3.3. *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $\{\omega_l\}_{l=1}^m \subsetneq D_1(U;\mathbb{R})$,

iv. *μετάθεση* σ *του* $\{1,\ldots,m\}$,

v. $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^m \subsetneq C^\infty(U;\mathbb{R})$,

vi. $\{\eta_l\}_{l=1}^m \subsetneq D_1(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

$$\begin{aligned}\eta_1 &= f_{11}\omega_1 + \cdots + f_{1m}\omega_m,\\ &\vdots\\ \eta_m &= f_{m1}\omega_1 + \cdots + f_{mm}\omega_m.\end{aligned}$$

Τότε

1. *ισχύει ότι*

$$\omega_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \omega_{\sigma(m)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m \quad \&$$

2. $\forall k \le m$, *ισχύει ότι*

$$\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \{1,\ldots,m\}\\ \mu\epsilon\ 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m}} \det\left(f_{si_t}\right)_{s,t=1}^k \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}.$$

7.4 Διαφορικός τελεστής d

Σε αυτή την ενότητα, δίνουμε μια άλλη διάσταση στον τελεστή d του Ορισμού 4.1.1.2. Συγκεκριμένα, αν και δίνουμε έναν νέο ορισμό, κρατάμε ωστόσο τον συμβολισμό, καθώς υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 4.1.1.4 και δη της Σημείωσης που το ακολουθεί, κάτι τέτοιο δεν δημιουργεί σύγχυση.

Επιπλέον, εισάγουμε της ακριβείς και τις κλειστές διαφορικές μορφές, τις οποίες θα μελετήσουμε διεξοδικά στο τελευταίο κεφάλαιο.

7.4.1 Ορισμός και ιδιότητες

Πάλι με την χρήση της Πρότασης 7.2.3, έχουμε το εξής.

Πρόταση 7.4.1.1. *Έστω*

1. $m \le n$,

2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ &

3. $f \in C^\infty\left(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\right)$.

Τότε

$$\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_m \in \{1,\ldots,n\}\\ \mu\epsilon\ 1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{i_1\ldots i_m}}{\partial t_i} dt_i \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_m} \in D_{m+1}(U;\mathbb{R}).$$

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 7.4.1.1, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.4.1.1. *Έστω* $m \in \{0,\ldots,n-1\}$ *και* $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Έστω, επιπλέον,* $f \in C^\infty\left(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\right)$ *και* $\omega \in D_m(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\omega = \omega_f$.

   i. Αν $m = 0$, *τότε ορίζουμε το διαφορικό της* $\omega = f$, $d\omega \in D_1(U;\mathbb{R})$, *ως*

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t_i} dt_i.$$

ii. Αν $m \neq 0$, τότε ορίζουμε το διαφορικό της ω, $d\omega \in D_{m+1}(U;\mathbb{R})$, ως

$$d\omega = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\cdots<i_m\le n}} df_{i_1\dots i_m} \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_m} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\le i_1<\cdots<i_m\le n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_{i_1\dots i_m}}{\partial t_i} dt_i \wedge dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_m}.$$

2. *Ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή (ή αλλιώς, τελεστή διαφόρισης), d, των διαφορικών μορφών τάξης m στο U, ως εξής*

$$d\colon D_m(U;\mathbb{R}) \to D_{m+1}(U;\mathbb{R})$$
$$\omega \mapsto d\omega.$$

Απλή εφαρμογή του σημείου 2 της Πρότασης 7.3.3, αποτελεί το επόμενο.

Πόρισμα 7.4.1.1. *Έστω*

1. *$m \le n$,*
2. *$U \subseteq \mathbb{R}^n$ &*
3. *$f = (f_i)_{i=1}^m \in C^\infty(U;\mathbb{R}^m)$.*

Τότε

$$df_1 \wedge \cdots \wedge df_m = \sum_{\pi^n_{i_1\dots i_m}} \det \frac{\partial f}{\partial \pi^n_{i_1\dots i_m}(t)} dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_m}.$$

Οι επόμενες ιδιότητες του διαφορικού τελεστή d είναι βασικές και άμεσες.

Πρόταση 7.4.1.2. *Έστω*

i. $m_1, m_2 \in \{0,\dots,n-1\}$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ &

iii. $\omega_l \in D_{m_l}(U;\mathbb{R})$, $\forall l \in \{1,2\}$.

1. *Αν $m_1 = m_2$, τότε*
$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$
2. *Αν $m_1 + m_2 \le n-1$, τότε*
$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{m_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$
3. *Αν $m_1 \le n-2$, τότε*
$$d(d\omega_1) = 0.$$

7.4.2 Ο d με όρους Διανυσματικού Λογισμού

Η σχέση μεταξύ του τελεστή d και των τελεστών του Διανυσματικού Λογισμού δίνεται στα επόμενα άμεσα επαληθεύσιμα αποτελέσματα.

Τονίζουμε ότι η ομαλότητα των συναρτήσεων υποτίθεται στα πλαίσια σύμβασης (για ευκολία με τον συμβολισμό) και δεν είναι απαραίτητη για την απόδειξη των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου.

Θεώρημα 7.4.2.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε $\exists$ (γραμμικοί) ισομορφισμοί κ_0, κ_1, λ_{n-1} & λ_n όπως στο παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[r, "\kappa_0"] \arrow[d, "\mathrm{grad}"'] & D_0(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty(U;\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\kappa_1"'] & D_1(U;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C^\infty(U;\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\lambda_{n-1}"] \arrow[d, "\mathrm{div}"'] & D_{n-1}(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[r, "\lambda_n"'] & D_n(U;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

τ.ω.:

$$d \circ \kappa_0 = \kappa_1 \circ \mathrm{grad} \;\; \& \;\; d \circ \lambda_{n-1} = \lambda_n \circ \mathrm{div}.$$

Συγκεκριμένα, οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν ως εξής

1. $\kappa_0(f) = f,\ \forall f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$,
2. $\kappa_1(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\, dt_i,\ \forall f = (f_i)_{i=1}^n \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$,
3. $\lambda_{n-1}(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i\, dt_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{(i)}_{\text{λείπει το } dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_n,\ \forall f = (f_i)_{i=1}^n \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ &
4. $\lambda_n(f) = f\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n,\ \forall f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$.

Πόρισμα 7.4.2.1. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Τότε $\exists$ (γραμμικοί) ισομορφισμοί κ_0, κ_1, λ_1 & λ_2 όπως στο παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[r, "\kappa_0"] \arrow[d, "\mathrm{grad}"'] & D_0(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty\big(U;\mathbb{R}^2\big) \arrow[r, "\kappa_1"'] & D_1(U;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C^\infty\big(U;\mathbb{R}^2\big) \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\mathrm{div}"'] & D_1(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[r, "\lambda_2"'] & D_2(U;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

τ.ω.:

$$d \circ \kappa_0 = \kappa_1 \circ \mathrm{grad} \;\; \& \;\; d \circ \lambda_1 = \lambda_2 \circ \mathrm{div}.$$

Συγκεκριμένα, οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν ως εξής

1. $\kappa_0(f) = f,\ \forall f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$,
2. $\kappa_1(f) = f_1\, dt_1 + f_2\, dt_2,\ \forall f = (f_1, f_2) \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^2\big)$,
3. $\lambda_1(f) = f_1\, dt_2 - f_2\, dt_1,\ \forall f = (f_1, f_2) \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^2\big)$ &
4. $\lambda_2(f) = f\, dt_1 \wedge dt_2,\ \forall f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$.

Θεώρημα 7.4.2.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Τότε $\exists$ (γραμμικοί) ισομορφισμοί κ_0, κ_1, λ_2 & λ_3 όπως στο παρακάτω διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[r, "\kappa_0"] \arrow[d, "\mathrm{grad}"'] & D_0(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big) \arrow[r, "\kappa_1"'] \arrow[d, "\mathrm{curl}"'] & D_1(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big) \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\mathrm{div}"'] & D_2(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "d"] \\ C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[r, "\lambda_3"'] & D_3(U;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

τ.ω.:

$$d \circ \kappa_0 = \kappa_1 \circ \mathrm{grad}, \quad d \circ \kappa_1 = \lambda_2 \circ \mathrm{curl} \quad \& \quad d \circ \lambda_2 = \lambda_3 \circ \mathrm{div}.$$

Συγκεκριμένα, οι παραπάνω συναρτήσεις έχουν ως εξής

1. $\kappa_0(f) = f$, $\forall f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$,
2. $\kappa_1(f) = f_1\,dt_1 + f_2\,dt_2 + f_3\,dt_3$, $\forall f = (f_1, f_2, f_3) \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big)$,
3. $\lambda_2(f) = f_1\,dt_2 \wedge dt_3 - f_2\,dt_1 \wedge dt_3 + f_3\,dt_1 \wedge dt_2$, $\forall f = (f_1, f_2, f_3) \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big)$ *&*
4. $\lambda_3(f) = f\,dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3$, $\forall f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$.

Έτσι, υπό το πρίσμα του σημείου 3 της Πρότασης 7.4.1.2 έπεται το επόμενο.

Πόρισμα 7.4.2.2. *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$.*

1. *Έστω $n = 2$ και $f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$. Τότε*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_2 \partial t_1}.$$
2. *Έστω $n = 3$.*
   i. *Έστω $f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$. Τότε*
   $$\mathrm{curl}(\mathrm{grad} f) = 0_3|_U.$$
   ii. *Έστω $f \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big)$. Τότε*
   $$\mathrm{div}(\mathrm{curl} f) = 0|_U.$$

7.4.3 Ακριβής/κλειστή διαφορική μορφή

Αφορμώμενοι από το σημείο 3 της Πρότασης 7.4.1.2, δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.4.3.1 (*ακριβής/κλειστή διαφορική μορφή*)**.** *Έστω*

α΄. $m_1 \in \{0, \dots, n\}$,

β΄. $m_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ *&*

γ΄. $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

I. *Έστω, επιπλέον, $\omega_1 \in D_{m_1}(U;\mathbb{R})$ και $\omega_2 \in D_{m_2}(U;\mathbb{R})$. Καλούμε την*
   1. *ω_1 ακριβή (exact) ανν*
      i. *$\exists c \in \mathbb{R}$ τ.ω.: $\omega_1 = \omega_{1c|_U} = c|_U$, αν $m_1 = 0$ &*
      ii. *$\exists \eta \in D_{m_1-1}(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: $\omega_1 = d\eta$, αν $m_1 \neq 0$.*
   2. *ω_2 κλειστή (closed) ανν $d\omega_2 = 0$.*

   Μάλιστα, καλούμε παράγουσα (της ω_1) κάθε η όπως στο σημείο 1.ii..

II. *Συμβολίζουμε*
$$D^E_{m_1}(U;\mathbb{R}) = \big\{\omega \in D_{m_1}(U;\mathbb{R}) \,\big|\, \text{η } \omega \text{ είναι ακριβής}\big\}$$
   και
$$D^C_{m_2}(U;\mathbb{R}) = \big\{\omega \in D_{m_2}(U;\mathbb{R}) \,\big|\, \text{η } \omega \text{ είναι κλειστή}\big\}.$$

Έτσι, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το σημείο 3 της Πρότασης 7.4.1.2 ως εξής.

Πόρισμα 7.4.3.1. *Έστω $m \in \{0, \dots, n-1\}$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε*
$$D^E_m(U;\mathbb{R}) \subseteq D^C_m(U;\mathbb{R}).$$

Παρατήρηση. *Λίγα λόγια για το Πόρισμα 7.4.3.1.*

1. *$\exists$ m & U, τ.ω.: ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος, όπως θα δούμε στην Ενότητα 8.3.*
2. *Η ισχύς του αντίστροφου εγκλεισμού θα μελετηθεί στο Κεφάλαιο 9.*

7.4.4 Ακρίβεια/κλειστότητα διαφορικής μορφής με όρους Διανυσματικού Λογισμού

Εδώ δείχνουμε πως αποδίδεται η «ακρίβεια»/«κλειστότητα» μιας διαφορικής μορφής με όρους Διανυσματικού Λογισμού. Τα παρακάτω αποτελέσματα έπονται άμεσα από τα αντίστοιχα της Υποενότητας 7.4.2.

Τονίζουμε ότι η ομαλότητα των συναρτήσεων υποτίθεται στα πλαίσια σύμβασης (για ευκολία με τον συμβολισμό) και δεν είναι απαραίτητη για την απόδειξη των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου.

Θεώρημα 7.4.4.1. *Έστω $m \in \{0,\dots,n\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\big)$.*

1. *Για $m = 0$, η $f \in D_0(U;\mathbb{R})$ είναι κλειστή ανν $\mathrm{grad} f = 0$.*
2. *Για $m = 1$, η $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i\, dt_i \in D_1(U;\mathbb{R})$ είναι ακριβής ανν $\exists f_0 \in C^\infty(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: $f = \mathrm{grad} f_0$.*
3. *Για $m = n-1$, η $\sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i\, dt_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{(i)}_{\text{λείπει το } dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_n \in D_{n-1}(U;\mathbb{R})$ είναι κλειστή ανν $\mathrm{div} f = 0$.*
4. *Για $m = n$, η $f\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \in D_n(U;\mathbb{R})$ είναι ακριβής ανν $\exists f_0 \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ τ.ω.: $f = \mathrm{div} f_0$.*

Ορισμός 7.4.4.1 (*δυναμικό διανυσματικής συνάρτησης, συντηρητική/μη αποκλίνουσα διανυσματική συνάρτηση*)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$.*

1. *Η f καλείται συντηρητική (conservative) ανν $\exists f_0 \in C^\infty(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: $f = \mathrm{grad} f_0$, και σε αυτή την περίπτωση η f_0 καλείται δυναμικό (potential) (της f).*
2. *Η f καλείται μη αποκλίνουσα/σωληνοειδής (solenoidal) ανν $\mathrm{div} f = 0$.*

Σημείωση. *Στην βιβλιογραφία, το δυναμικό ορίζεται συχνά και ως η $-f_0$, όπου η f_0 είναι όπως στον Ορισμό 7.4.4.1.*

Πόρισμα 7.4.4.1. *Έστω $m \in \{0,1,2\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^{\binom{2}{m}}\big)$.*

1. *Για $m = 0$, η $f \in D_0(U;\mathbb{R})$ είναι κλειστή ανν $\mathrm{grad} f = 0$.*
2. *Για $m = 1$, η $(f_1\, dt_1 + f_2\, dt_2) \in D_1(U;\mathbb{R})$ είναι ακριβής ανν $\exists f_0 \in C^\infty(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: $f = \mathrm{grad} f_0$.*
3. *Για $m = 1$, η $(f_1\, dt_2 - f_2\, dt_1) \in D_2(U;\mathbb{R})$ είναι κλειστή ανν $\mathrm{div} f = 0$.*
4. *Για $m = 2$, η $f\, dt_1 \wedge dt_2 \in D_2(U;\mathbb{R})$ είναι ακριβής ανν $\exists f_0 \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^2\big)$ τ.ω.: $\mathrm{div} f_0 = f$.*

Θεώρημα 7.4.4.2. *Έστω $m \in \{0,1,2,3\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ και $f \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^{\binom{3}{m}}\big)$.*

1. *Για $m = 0$, η $f \in D_0(U;\mathbb{R})$ είναι κλειστή ανν $\mathrm{grad} f = 0$.*
2. *Για $m = 1$, η $(f_1\, dt_1 + f_2\, dt_2 + f_3\, dt_3) \in D_1(U;\mathbb{R})$ είναι*
   i. *ακριβής ανν $\exists f_0 \in C^\infty(U;\mathbb{R})$ τ.ω.: $f = \mathrm{grad} f_0$.*
   ii. *κλειστή ανν $\mathrm{curl} f = 0$.*
3. *Για $m = 2$, η $(f_1\, dt_2 \wedge dt_3 - f_2\, dt_1 \wedge dt_3 + f_3\, dt_1 \wedge dt_2) \in D_2(U;\mathbb{R})$ είναι*
   i. *ακριβής ανν $\exists f_0 \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big)$ τ.ω.: $f = \mathrm{curl} f_0$.*
   ii. *κλειστή ανν $\mathrm{div} f = 0$.*
4. *Για $m = 3$, η $f\, dt_1 \wedge dt_2 \wedge dt_3 \in D_3(U;\mathbb{R})$ είναι ακριβής ανν $\exists f_0 \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big)$ τ.ω.: $\mathrm{div} f_0 = f$.*

Ορισμός 7.4.4.2 (*αστρόβιλη διανυσματική συνάρτηση*)**.** *Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^3$ και $f \in C^\infty\big(U;\mathbb{R}^3\big)$. Η f καλείται αστρόβιλη ανν $\mathrm{curl} f = 0$.*

7.5 Ανάπλαση διαφορικής μορφής

Σε αυτή την ενότητα, μελετάμε την δράση μιας ομαλής συνάρτησης (action of a smooth function) σε διαφορικές μορφές. Συγκεκριμένα, θα δούμε πως μέσω μιας τέτοιας συνάρτησης, εισάγουμε την αντίστοιχη ανάπλαση διαφορικών μορφών (dual function/transformation of differential forms). Ο όρος «ανάπλαση» δεν είναι πιστή μετάφραση του όρου «dual function» (συζυγής συνάρτηση), ο οποίος είναι και μαθηματικά αποδεκτός (όρος της Συναρτησιακής Ανάλυσης). Ωστόσο, χρησιμοποιούμε τον «ανάπλαση», ο οποίος και χρησιμοποιείται, π.χ., στο [7], μιας και είναι πιο περιγραφικός.

Ορισμός 7.5.1 (*ανάπλαση διαφορικών μορφών*)**.** *Έστω*

α΄. $m \leq n$,

β΄. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,

γ΄. $f_0 = (f_{0i})_{i=1}^n \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f_0(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*

δ΄. $k \in \{0,\dots,m\}$.

1. *Έστω, επιπλέον,* $f \in C^\infty\Big(f_0(U);\mathbb{R}^{\binom{n}{m}}\Big)$ *και* $\omega \in D_k(f_0(U);\mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\omega = \omega_f$. *Η ανάπλαση (μέσω της* f_0*) της* ω, ${f_0}^*(\omega) \in D_k(U;\mathbb{R})$, *ορίζεται ως εξής*

   i. *αν* $k = 0$, *τότε*
   $$ {f_0}^*(\omega) = {f_0}^*(f) = f \circ f_0 \quad \& $$

   ii. *αν* $k \neq 0$, *τότε*
   $$ {f_0}^*(\omega) = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \in\{1,\dots,n\} \\ \mu\epsilon\ 1\leq i_1<\dots<i_k\leq n}} f_{i_1\dots i_k} \circ f_0\, df_{0_{i_1}} \wedge \dots \wedge df_{0_{i_k}}. $$

2. *Η ανάπλαση (μέσω της* f_0*) του* $D_k(f_0(U);\mathbb{R})$, ${f_0}^*$, *ορίζεται ως*
$$ \begin{aligned} {f_0}^*\colon D_k(f_0(U);\mathbb{R}) &\to D_k(U;\mathbb{R}) \\ \omega &\mapsto {f_0}^*(\omega). \end{aligned} $$

Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τον περιορισμό διαφορικής μορφής μέσω μιας ανάπλασης με τον εξής τετριμμένο τρόπο.

Πρόταση 7.5.1. *Έστω*

1. $U_0 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $\iota : U_0 \to \mathbb{R}^n$ *με* $\iota(U_0) = U$, *να είναι η συνάρτηση εγκλεισμού* $U_0 \subseteq U$,
3. $m \in \{0,\dots,n\}$ *&*
4. $\omega \in D_m(U;\mathbb{R})$.

Τότε
$$ \omega|_{U_0} = \iota^*(\omega). $$

Σχετικά με την ανάπλαση βασικής διαφορικής μορφής, το επόμενο είναι άμεσο από το Πόρισμα 7.4.1.1.

Πόρισμα 7.5.1. *Έστω*

1. $k \leq m \leq n$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,
3. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*
4. *περιορισμός* $\pi^n_{i_1\dots i_k}$.

Αν το $\widetilde{t}$ *διατρέχει το* U *και το* t *διατρέχει το* $f(U)$, *τότε*
$$ f^*(dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}) = \sum_{\pi^m_{j_1\dots j_k}} \det \frac{\partial \pi^n_{i_1\dots i_k} \circ f}{\partial \pi^m_{j_1\dots j_k}}\big(\widetilde{t}\big)\, d\widetilde{t}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\widetilde{t}_{j_k}. $$

Μάλιστα, εύκολα εξάγουμε το παρακάτω συμπέρασμα.

Πρόταση 7.5.2. *Έστω m, n, U, S, $\{(S_j, f_{0j})\}_{j\in\mathscr{I}}$, $\{f_j\}_{j\in N}$, $\{S_{0j}\}_{j\in N}$ και ω όπως στον Ορισμό 7.1.1. Τότε*

$$\int_S \omega = \sum_{j\in N} \int_{S_j{}^\circ}^{\gamma\epsilon\nu} {f_{0j}}^*(f_j\omega).$$

Παρατήρηση. *Υπό το πρίσμα του Ορισμού 7.2.2, το δεξί μέλος της ισότητας στην Πρόταση 7.5.2 είναι καλά ορισμένο.*

Οι βασικές και άμεσες ιδιότητες των αναπλάσεων είναι οι ακόλουθες.

Πρόταση 7.5.3. *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,

iii. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$,

iv. $k_1, k_2 \in \{0,\dots,m\}$ *τ.ω.:* $k_1 + k_2 \le m$ *&*

v. $\omega_l \in D_{k_l}(f(U);\mathbb{R})$, $\forall l \in \{1,2\}$.

1. *Αν* $k_1 = k_2$, *τότε*
$$f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2).$$
2. *Ισχύει ότι*
$$f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2).$$
3. *Αν* $k_1 \le m-1$, *τότε*
$$d(f^*(\omega_1)) = f^*(d\omega_1).$$

Με βάση την Πρόταση 7.5.3, παίρνουμε την εξής ιδιότητα.

Πρόταση 7.5.4. *Έστω*

1. $m_1 \le m_2 \le n$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$,
3. $f_1 \in C^\infty(U;\mathbb{R}^{m_2})$ *τ.ω.:* $f_1(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{m_2})$,
4. $f_2 \in C^\infty(f_1(U);\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f_2(f_1(U)) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$,
5. $k \in \{0,\dots,m_1\}$ *&*
6. $\omega \in D_k(f_2(f_1(U));\mathbb{R})$.

Τότε
$${f_1}^*({f_2}^*(\omega)) = (f_2 \circ f_1)^*(\omega).$$

Υπό το πρίσμα του Ορισμού 5.3.1.5, και με χρήση της Πρότασης 7.1.1, της Πρότασης 7.5.2 και του σημείου 6 της Πρότασης 7.5.4, συμπεραίνουμε εύκολα το εξής.

Πόρισμα 7.5.2. *Έστω*

1. $m \in \{0,\dots,n\}$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*
3. $\omega \in D_m(U;\mathbb{R})$.

Τότε
$$\int_{-S} \omega = -\int_S \omega,\ \forall \text{ συμπαγή και προσανατολισμένη } S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n),$$
όπως επίσης
$$\int_{-U_0} \omega = -\int_{U_0} \omega,\ \forall U_0 \subseteq U \text{ τ.ω.: η } f|_{U_0} \text{ είναι γενικευμένα ολοκληρώσιμη, αν } m = n.$$

Κεφάλαιο 8

Θεώρημα του Stokes

Στο παρόν κεφάλαιο, παραθέτουμε το αποτέλεσμα που είναι η κορύφωση της θεωρίας που αναπτύξαμε ως τώρα, και έχει καθιερωθεί στην βιβλιογραφία ως θεώρημα του Stokes. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί το πολυδιάστατο ανάλογο του Θεωρήματος 4.4.2.

8.1 Το θεώρημα

Ξεκινάμε με μια ειδική περίπτωση, για την οποία κάνουμε χρήση του Θεώρημα 4.3.2.2, του Θεωρήματος 4.4.2 και του Πορίσματος 7.5.1.

Θεώρημα 8.1.1. *Έστω*

1. $n \neq 1$,
2. $I_1 = (0,1)^n \subset\subset U \subseteq \mathbb{R}^n$,
3. $l \leq n$,
4. $I_2 = \hat{\pi}_l^n(I_1)$,
5. $S \subseteq \hat{\varpi}_l^n(I_2)$,
6. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f|_{(\partial I_1)\setminus S} = 0$ *&*
7. $\omega = \omega_f \in D_{n-1}(U;\mathbb{R})$.

Τότε

$$\int_{I_1} d\omega = (-1)^l \int_{I_2} \hat{\varpi}_l^{n*}(\omega).$$

Αξιοποιώντας το Θεώρημα 8.1.1, παίρνουμε το βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.1.2 (*Stokes*)**.** *Έστω*

i. $m \leq n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $\omega \in D_{m-1}(U;\mathbb{R})$ *&*

iv. *συμπαγής και προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^n)$.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   v. $S \in \mathcal{M}_m^\circ(\mathbb{R}^n)$.

   Τότε

   $$\int_S d\omega = 0.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

v. $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$ *&*

vi. το $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό.*

Τότε

$$\int_S d\omega = \int_{\operatorname{bd} S} \omega.$$

8.2 Διανυσματικός Λογισμός

Εδώ, θα εξάγουμε τα βασικά αποτελέσματα του Διανυσματικού Λογισμού, δλδ τον ακρογωνιαίο λίθο των εφαρμογών και δη της Θεωρητικής Φυσικής, ως συνέπεια του Θεωρήματος 8.1.2. Στην ουσία, θα «μεταφράσουμε» το Θεώρημα 8.1.2 από όρους διαφορικών μορφών σε όρους διανυσματικών συναρτήσεων. Για αυτόν τον σκοπό, απαραίτητες είναι οι έννοιες της Υποενότητας 5.3.2.

> Τονίζουμε ότι η ομαλότητα των συναρτήσεων υποτίθεται στα πλαίσια σύμβασης (για ευκολία με τον συμβολισμό) και δεν είναι απαραίτητη για την απόδειξη των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου.

8.2.1 Θεώρημα της κλίσης

Το επόμενο άμεσο αποτέλεσμα είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ της θεωρίας ολοκλήρωσης επί πολλαπλοτήτων και της θεωρίας των διαφορικών μορφών, όταν $m = 1$.

Πρόταση 8.2.1.1. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$,
3. $\omega = \omega_f \in D_1(U;\mathbb{R})$, δλδ $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dt_i$,
4. *συμπαγής και προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ *&*
5. τ *η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση της* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*).*

Τότε

$$\int_S \omega = \int_S (f \cdot \tau)(t) d\sigma(t).$$

Με χρήση του Θεωρήματος 8.1.2 και της Πρότασης 8.2.1.1 έπεται απευθείας το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.2.1.1 (*θεώρημα της κλίσης*). *Έστω*

α΄. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

β΄. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R})$,

γ΄. συμπαγής και προσανατολισμένη $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ *&*

δ΄. τ *η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση της* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*).*

1. *Έστω, επιπλέον,*

   ε΄. $S \in \mathcal{M}_1^\circ(\mathbb{R}^n)$.

   Τότε

   $$\int_S (\operatorname{grad} f \cdot \tau)(t) d\sigma(t) = 0.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

ε'. $\mathrm{bd}\, S = \{t_j\}_{j \in N}$ *για* $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$ *&*

ϛ'. $f_0 : \mathrm{bd}\, S \to \mathbb{R}$ *ο επαγόμενος προσανατολισμός του* $\mathrm{bd}\, S$.

Τότε

i. ο f_0 *έχει ως εξής*

$$f_0(t_j) = \begin{cases} -1, & \text{αν το } \tau(t_j) \text{ έχει κατεύθυνση προς το } \mathrm{int}\, S \\ 1, & \text{αλλιώς.} \end{cases}, \quad \forall j \in N \ \&$$

ii. ισχύει ότι

$$\int\limits_S (\mathrm{grad} f \cdot \tau)(t) d\sigma(t) = \sum_{j \in N} (f f_0)(t_j).$$

8.2.2 Θεώρημα της απόκλισης

Το επόμενο άμεσο αποτέλεσμα είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ της θεωρίας ολοκλήρωσης επί πολλαπλοτήτων και της θεωρίας των διαφορικών μορφών, όταν $m = n - 1$ με $n \neq 1$, και έπεται με την χρήση της Πρότασης 5.3.2.6.

Πρόταση 8.2.2.1. *Έστω*

1. $n \neq 1$,
2. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
3. $f \in C^\infty(U; \mathbb{R}^n)$,
4. $\omega \in D_{n-1}(U; \mathbb{R})$ *τ.ω.:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i \, dt_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{(i)}_{\text{λείπει το } dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_n,$$

5. *συμπαγής και προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *&*
6. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση της* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της* S*).*

Τότε

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S (f \cdot \nu)(t) d\sigma(t).$$

Εύκολο είναι και το επόμενο, για το οποίο παραπέμπουμε στον Ορισμό 5.3.1.6.

Πρόταση 8.2.2.2. *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,
2. $f \in C^\infty(U; \mathbb{R})$,
3. $\omega = \omega_f \in D_n(U; \mathbb{R})$, *δλδ* $\omega = f dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$ *&*
4. *συμπαγής και φυσικά προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$.

Τότε

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S f(t) d\sigma(t) = \int\limits_S f(t) dt.$$

Σημείωση. *Για την δεύτερη ισότητα της Πρόταση 8.2.2.2 χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο χάρτης* $(S^\circ, \mathrm{id}_n|_{S^\circ})$ *ανήκει στον φυσικό προσανατολισμό της* S.

Υπό το πρίσμα της Πρότασης 5.3.2.9 (και του Ορισμού 5.3.2.7), και με χρήση του Θεωρήματος 8.1.2, της Πρότασης 8.2.2.1 και της Πρότασης 8.2.2.2, παίρνουμε εύκολα το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.2.2.1 (*θεώρημα της απόκλισης*)**.** *Έστω* *i.* $n \neq 1$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$,

iv. *συμπαγής και φυσικά προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$,

v. *το* $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό &*

vi. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$ *(που αντιστοιχεί στον επαγόμενο προσανατολισμό του* $\operatorname{bd} S$*).*

Τότε

1. *η* ν *είναι εξωτερική &*

2. *ισχύει ότι*
$$\int_S \operatorname{div} f(t)dt = \int_{\operatorname{bd} S} (f \cdot \nu)(t) d\sigma(t).$$

Σημείωση. *Το Θεώρημα 8.2.2.1 για* $n = 3$*, αναφέρεται συχνά στην βιβλιογραφία ως θεώρημα του Gauss.*

Άμεσα από το Θεώρημα 4.1.1.3 και το Θεώρημα 8.2.2.1, παίρνουμε τους χρήσιμους τύπους του Green, οι οποίοι δεν είναι τίποτα άλλο από το πολυδιάστατο ανάλογο της γνωστής παραγοντικής ολοκλήρωσης.

Θεώρημα 8.2.2.2 (*τύποι του Green*)**.** *Έστω*

i. $n \neq 1$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$,

iii. $f_1, f_2 \in C^\infty(U;\mathbb{R})$,

iv. *συμπαγής και φυσικά προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$,

v. *το* $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό &*

vi. ν *η εξωτερική μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$.

Τότε
$$\int_S (f_1 \Delta f_2 + \operatorname{grad} f_1 \cdot \operatorname{grad} f_2)(t)dt = \int_{\operatorname{bd} S} (f_1 D_\nu f_2)(t) d\sigma(t).$$

Ειδικότερα,
$$\int_S (f_1 \Delta f_2 - f_2 \Delta f_1)(t)dt = \int_{\operatorname{bd} S} (f_1 D_\nu f_2 - f_2 D_\nu f_1)(t) d\sigma(t).$$

Σημείωση. *Συχνά στην βιβλιογραφία, η διαφόριση κατά διεύθυνση* $D_\nu f_i = \operatorname{grad} f_i \cdot \nu$*, με* $i \in \{1, 2\}$*, του Θεωρήματος 8.2.2.2, συμβολίζεται ως* $\partial_\nu f_i$ *και* $\frac{\partial f_i}{\partial \nu}$.

8.2.3 Θεώρημα του στροβιλισμού

Με βάση το Θεώρημα 8.1.2, η Πρόταση 5.3.2.11 (και η Παρατήρηση που την ακολουθεί), η Πρόταση 8.2.1.1 και η Πρόταση 8.2.2.1 αποτελούν ό,τι χρειαζόμαστε για να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 8.2.3.1 (*θεώρημα του στροβιλισμού*)**.** *Έστω*

α΄. $U \subseteq \mathbb{R}^3$,

β΄. $f \in C^\infty\left(U;\mathbb{R}^3\right)$,

γ΄. *συμπαγής και προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}^3\right)$ *&*

δ΄. ν *η μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση της* S *(που αντιστοιχεί στον δεδομένο προσανατολισμό της).*

1. *Έστω, επιπλέον,*

   ϵ'. $S \in \mathcal{M}_2^{\circ}(\mathbb{R}^3)$.

   Τότε
$$\int_S (\operatorname{curl} f \cdot \nu)(t) d\sigma(t) = 0.$$

2. *Έστω, επιπλέον,*

   ϵ'. $\operatorname{bd} S \neq \varnothing$,

   ς'. *το* $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό &*

   ζ'. τ *η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$ *(που αντιστοιχεί στον επαγόμενο προσανατολισμό του* $\operatorname{bd} S$*).*

   Τότε

   i. $\forall t \in \operatorname{bd} S$, *η κατεύθυνση του* $\tau(t)$ *είναι τ.ω.: το* $\nu(t) \times \tau(t)$ *να έχει κατεύθυνση προς το* $\operatorname{int} S$ *&*

   ii. *ισχύει ότι*
$$\int_S (\operatorname{curl} f \cdot \nu)(t) d\sigma(t) = \int_{\operatorname{bd} S} (f \cdot \tau)(t) d\sigma(t).$$

Σημείωση. *Το Θεώρημα 8.2.3.1 αναφέρεται συχνά στην βιβλιογραφία ως θεώρημα/τύπος των Kelvin-Stokes ή απλά ως θεώρημα/τύπος του Stokes.*

Μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 8.2.3.1 είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα, γνωστό ως θεώρημα του Green, για την απόδειξη του οποίου χρησιμοποιούμε, επίσης, την Πρόταση 5.3.2.9 (και τον Ορισμό 5.3.2.7) και την δεύτερη ισότητα της Πρότασης 8.2.2.2.

Θεώρημα 8.2.3.2 (*Green*). *Έστω*

i. $U \subseteq \mathbb{R}^2$,

ii. $f = (f_1, f_2) \in C^\infty(U; \mathbb{R}^2)$,

iii. *συμπαγής και φυσικά προσανατολισμένη* $S \in \mathcal{C}(U) \cap \mathcal{M}_2(\mathbb{R}^2)$,

iv. *το* $\operatorname{bd} S$ *να είναι εφοδιασμένο με τον επαγόμενο προσανατολισμό,*

v. τ *η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$ *(που αντιστοιχεί στον επαγόμενο προσανατολισμό του* $\operatorname{bd} S$*) &*

vi. ν *η εξωτερική μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd} S$.

Τότε

1. $\forall t \in \operatorname{bd} S$, *η κατεύθυνση του* $\tau(t)$ *είναι τ.ω.: το* $\nu(t)$ *να βρίσκεται από τα δεξιά του* $\tau(t)$ *&*

2. *ισχύει ότι*
$$\int_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial t_1} - \frac{\partial f_1}{\partial t_2}\right)(t) dt = \int_{\operatorname{bd} S} (f \cdot \tau)(t) d\sigma(t).$$

Σημείωση. *Το σημείο 1 της Πρότασης 8.2.3.2 δεν είναι παρά μια γεωμετρική περιγραφή του ότι,* $\forall t \in \operatorname{bd} S$, *η διατεταγμένη βάση* $\{\nu(t), \tau(t)\}$ *είναι δεξιόστροφη.*

8.3 Μια κλειστή αλλά μη ακριβής διαφορική μορφή

Σε αυτήν την ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 8.1.2, για να δείξουμε «κομψά» ότι $\exists$ $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ & $U \subseteq \mathbb{R}^n$ τ.ω.:

$$D_m^E(U;\mathbb{R}) \subsetneq D_m^C(U;\mathbb{R}).$$

Παραπέμπουμε στον Ορισμό 7.4.3.1 για τα παραπάνω σύνολα.

Καταρχήν, χρειαζόμαστε το παρακάτω άμεσο αποτέλεσμα, το οποίο έπεται εύκολα με χρήση του σημείου 3 του Θεωρήματος 7.4.4.1, καθώς με απλό υπολογισμό συμπεραίνουμε ότι $\operatorname{div} f = 0$.

Πρόταση 8.3.1. *Έστω*

1. $t_0 \in \mathbb{R}^n$,
2. $f = (f_i)_{i=1}^n \in C^\infty(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\};\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $\forall t \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\}$,
$$f(t) = \frac{t - t_0}{|t - t_0|^n}, \text{ δλδ } f_i(t) = \frac{t_i - t_{0i}}{|t - t_0|^n} \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \&$$
3. $\omega \in D_{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\};\mathbb{R})$ *τ.ω.:*
$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f_i \, dt_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{(i)}_{\text{λείπει το } dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_n.$$

Τότε $\omega \in D_{n-1}^C(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\};\mathbb{R})$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 8.2.2.1 και βρίσκοντας εύκολα την ν στην προκειμένη περίπτωση (με αυτόν τον τρόπο γλιτώνουμε τον απευθείας και πιο κοπιαστικό υπολογισμό της διαφορικής μορφής, είτε όπως γίνεται, π.χ., στο [17, § 35, Exercise 3, σελ. 296], είτε μέσω της παραμέτρησης που προκύπτει από την τροποποίηση της C^∞ αλλαγής μεταβλητών του Παραδείγματος της Υποενότητας 4.1.7), παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 8.3.2. *Για την ω της Πρότασης 8.3.1, ισχύει ότι*

$$\int_{\operatorname{bd}\overline{B(t_0,\rho)}} \omega = \begin{cases} 2, & \text{αν } n = 1 \\ \frac{\upsilon^\circ\left(\operatorname{bd}\overline{B(t_0,\rho)}\right)}{\rho^{n-1}}, & \text{αλλιώς} \end{cases} = \begin{cases} 2, & \text{αν } n = 1 \\ \upsilon^\circ\left(\operatorname{bd}\overline{B(t_0,1)}\right), & \text{αλλιώς} \end{cases} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \forall \rho > 0,$$

αν προσανατολίσουμε την $\operatorname{bd}\overline{B(t_0,\rho)} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *με τον επαγόμενο προσανατολισμό του φυσικού προσανατολισμού της* $\overline{B(t_0,\rho)} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$.

Θεωρώντας μία αρκετά μικρή $B(t_0, \rho)$, και αξιοποιώντας την Πρόταση 5.3.2.8, το Πόρισμα 7.5.2, το Θεώρημα 8.1.2, την Πρόταση 8.2.2.1 και την Πρόταση 8.3.2, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, το οποίο αναφέρεται στην βιβλιογραφία και ως αρχή της ομοτοπίας (homotopy principle).

Θεώρημα 8.3.1 (*αρχή της ομοτοπίας*)**.** *Για την ω της Πρότασης 8.3.1, ισχύει ότι*

$$\int_{\operatorname{bd}\overline{U}} \omega = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & \text{αν } t_0 \in U \\ 0, & \text{αν } t_0 \in \overline{U}^c, \end{cases} \quad \forall U \subset\subset \mathbb{R}^n \text{ τ.ω.: } \overline{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n),$$

αν προσανατολίσουμε την $\operatorname{bd}\overline{U} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *με τον επαγόμενο προσανατολισμό του φυσικού προσανατολισμού της* $\overline{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$.

Σημείωση. *Στο επόμενο κεφάλαιο θα εισάγουμε την έννοια της ομοτοπίας.*

Έτσι, αξιοποιώντας πάλι το Θεώρημα 8.1.2, καταλήγουμε εύκολα στο ζητούμενο, με απαγωγή σε άτοπο.

Πόρισμα 8.3.1. *Για την ω της Πρότασης 8.3.1, ισχύει ότι* $\omega \notin D_{n-1}^E(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_0\};\mathbb{R})$.

Συνοψίζοντας και γενικεύοντας κατά τον προφανή τρόπο, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 8.3.2. *Έστω*

i. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$,

ii. $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^n$,

iii. $(f_j)_{j\in N} \in \prod_{j\in N} C^\infty(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_j\};\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

$$f_j(t) = \frac{t-t_j}{|t-t_j|^n},\ \forall t \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_j\},\ \forall j \in N \ \&$$

iv. $(\omega_j)_{j\in N} \in \prod_{j\in N} D_{n-1}(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_j\};\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_{j_i}\, dt_1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{(i)}_{\lambda\epsilon\acute{\iota}\pi\epsilon\iota\ \tau o\ dt_i} \wedge \cdots \wedge dt_n,\ \forall j \in N.$$

Τότε

1. $\sum_{j\in N} \omega_j \in D^C_{n-1}\Big(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big)$,

2. $\sum_{j\in N} \omega_j \notin D^E_{n-1}\Big(\mathbb{R}^n \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big)$ &

3. $\forall U \subset\subset \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $\overline{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$, *ισχύει ότι*

$$\int_{\mathrm{bd}\,\overline{U}} \sum_{j\in N} \omega_j = \begin{cases} \operatorname{card} N_0 \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}, & \alpha\nu\ \exists N_0 \in \mathcal{B}(N) \smallsetminus \{\varnothing\}\ \tau.\omega.:\ \{t_j\}_{j\in N_0} \subsetneq U \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma, \end{cases}$$

αν προσανατολίσουμε την $\mathrm{bd}\,\overline{U} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ *με τον επαγόμενο προσανατολισμό του φυσικού προσανατολισμού της* $\overline{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$.

Στο επόμενο κεφάλαιο δείχνουμε πότε μπορούμε να συμπεράνουμε την ακρίβεια μιας διαφορικής μορφής από την κλειστότητά της.

Κεφάλαιο 9

Πρόβλημα της παράγουσας

Στο παρόν κεφάλαιο μας απασχολεί το ερώτημα αν μια δεδομένη διαφορική μορφή είναι ακριβής. Το ερώτημα λέγεται και πρόβλημα της παράγουσας (βλ. τον Ορισμό 7.4.3.1) ή αλλιώς το πρόβλημα της d-εξίσωσης. Η αντίστοιχη απόδοση του ερωτήματος με όρους Διανυσματικού Λογισμού, την οποία και θα δούμε, κατέχει σημαντική θέση στις εφαρμογές και δη την Θεωρητική Φυσική.

Όπως έχουμε ήδη δει (βλ. το Πόρισμα 7.4.3.1), μια ακριβής διαφορική μορφή (τάξης το πολύ $n-1$) είναι απαραίτητα κλειστή. Επίσης, ξέρουμε (βλ. την Ενότητα 8.3) ότι μια κλειστή διαφορική μορφή δεν είναι απαραίτητα ακριβής.

Οπότε, το ερώτημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Πρόβλημα της παράγουσας:
Δεδομένων $m \in \{0,\dots,n-1\}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\omega \in D_m^C(U;\mathbb{R})$, ισχύει ότι $\omega \in D_m^E(U;\mathbb{R})$;

Παρατήρηση. *Για $m \neq 0$, μια λύση στο πρόβλημα παράγουσας δεν μπορεί να είναι ποτέ μοναδική. Πράγματι, αν σε μια λύση $\eta \in D_{m-1}(U;\mathbb{R})$ (δλδ $\omega = d\eta$) προσθέσουμε μια διαφορική μορφή της μορφής*

$$\begin{cases} c|_U, & \text{αν } m = 1, \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \\ d\theta \in D_{m-1}(U;\mathbb{R}), & \text{αν } m \neq 1, \text{ όπου } \theta \in D_{m-2}(U;\mathbb{R}), \end{cases}$$

τότε παίρνουμε εκ νέου λύση στο πρόβλημα.

Είναι εύλογο να αναμένουμε ότι το πρόβλημα εξαρτάται από τα δεδομένα. Συγκεκριμένα, η εξάρτηση από το U είναι και η κεντρική, μέσω της οποίας θα γίνει και ο βασικός διαχωρισμός των περιπτώσεων κατά την μελέτη του προβλήματος. Υπό αυτή την σκοπιά, δίνουμε έναν ορισμό ο οποίος θα μας δώσει την δυνατότητα να διατυπώσουμε μια εκδοχή του προβλήματος, η οποία όμως, όπως θα φανεί στο τέλος, δεν είναι καθόλου περιοριστική.

Ορισμός 9.1 (*ομολογικά τετριμμένο σύνολο*)**.** *Έστω $m \in \{0,\dots,n-1\}$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Το U καλείται ομολογικά τετριμμένο στην τάξη m (homologically trivial in order/dimension m) ανν*

$$D_m^C(U;\mathbb{R}) = D_m^E(U;\mathbb{R}).$$

Με βάση τον Ορισμό 9.1, δίνουμε μια εκδοχή του προβλήματος της παράγουσας, η οποία εξετάζει το θέμα ολικά σε ό,τι αφορά την τάξη των διαφορικών μορφών, δλδ μια εκδοχή που είναι ανεξάρτητη από την εκάστοτε διαφορική μορφή συγκεκριμένης τάξης.

Πρόβλημα της παράγουσας, νέα εκδοχή:
Δεδομένων $m \in \{0,\dots,n-1\}$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$, είναι το U ομολογικά τετριμμένο στην τάξη m;

Ο διαχωρισμός των περιπτώσεων που θα γίνει με βάση το U, αφορά τα συσταλτά (contractible) και τα διάτρητα (punctured) U (με πεπερασμένες στο πλήθος «τρύπες» μονοσυνόλων). Στην πρώτη περίπτωση, η ύπαρξη λύσης του προβλήματος δίνεται από το Θεώρημα 9.1.3.1, ενώ στην δεύτερη από το Θεώρημα 9.2.3.2. Η μελέτη της δεύτερης περίπτωσης προϋποθέτει την μελέτη της πρώτης.

Σημειώνουμε ότι αν και υπάρχουν και άλλες γεωμετρίες οι οποίες επηρεάζουν ουσιαστικά (δλδ με διαφορετικό τρόπο η κάθε μία) το πρόβλημα της παράγουσας, δεν θα μας απασχολήσει εδώ αυτή η θεματολογία. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα απλά συνεκτικά (simply connected) U για τα οποία ισχύει ότι κάθε συμπαγής $S \in \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{M}_1^{\circ}(\mathbb{R}^n)$ μπορεί να «συρρικνωθεί» κατά ομαλό τρόπο σε ένα σημείο του U (τα σύνολα αυτά έχουν άμεση σχέση με τα συσταλτά σύνολα μόνο όταν $n = 2$), τα σύνολα U για τα οποία ισχύει ότι κάθε συμπαγής $S \in \mathcal{P}(U) \cap \mathcal{M}^{\circ}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ μπορεί να «συρρικνωθεί» κατά ομαλό τρόπο σε ένα σημείο του U (τα σύνολα που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα έχουν άμεση σχέση με τα διάτρητα σύνολα), κ.τ.λ.. Αναφέρουμε επίσης, ότι οι έννοιες του συσταλτού, διάτρητου, απλά συνεκτικού κ.ο.κ. συνόλου U, μπορούν να επεκταθούν και σε πολλαπλότητες.

Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου μπορούν να βρεθούν αυτούσιες ή ελαφρώς τροποποιημένες για παρόμοια αποτελέσματα στο [17].

9.1 Το πρόβλημα σε συσταλτά ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

Εδώ καταδεικνύουμε ότι αν ένα $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί μια συγκεκριμένη συνθήκη, η οποία καλείται συσταλτικότητα (contractibility), τότε το U είναι ομολογικά τετριμμένο σε οποιαδήποτε τάξη.

9.1.1 Προκαταρκτικές έννοιες

Αρχικά, εισάγουμε την έννοια της ομοτοπίας (homotopy).

Ορισμός 9.1.1.1 (*ομαλή ομοτοπία μεταξύ ομαλών συναρτήσεων*). *Έστω*

i. $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m$,

ii. $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

iii. $f_1, f_2 \in C^\infty(U_1; \mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f_1(U_1) \subseteq U_2 \supseteq f_2(U_1)$.

Οι f_1 *και* f_2 *καλούνται ομαλά ομοτοπικές ανν* $\exists f \in C^\infty(U_1 \times [0,1]; \mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

1. $f(U_1 \times [0,1]) = U_2$ *&*
2. $f(\star, 0) = f_1$ *&* $f(\star, 1) = f_2$.

Η f *καλείται ομαλή ομοτοπία μεταξύ των* f_1 *και* f_2.

Σημείωση. *Λίγα λόγια σχετικά με τον Ορισμό 9.1.1.1.*

1. *Εύκολα επαληθεύουμε ότι* $U_1 \times [0,1] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{m+1})$, *και έτσι έχει νόημα το να ζητάμε* $f \in C^\infty(U_1 \times [0,1]; \mathbb{R}^n)$.
2. *Η σχέση «ομοτοπίας» είναι σχέση ισοδυναμίας.*
3. *Μπορούμε να θεωρήσουμε την ομοτοπία* f *ως τον (ομαλό) τρόπο που η* f_1 *«μετατρέπεται» στην* f_2, *και αντίστροφα.*

Παράδειγμα. *Η πιο απλή, αλλά συγχρόνως η πιο χρήσιμη, ομαλή ομοτοπία είναι η ομοτοπία ευθύγραμμου τμήματος (straight-line homotopy), δλδ η*

$$f(t,s) = s f_2(t) + (1-s) f_1(t).$$

Με βάση τον Ορισμό 9.1.1.1, δίνουμε τον επόμενο.

Ορισμός 9.1.1.2 (*συσταλτό σύνολο*). *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^n$. *Το* U *καλείται συσταλτό ανν* $\exists t_0 \in U$ *τ.ω.: οι συναρτήσεις* $t_0|_U$ *και* $\mathrm{id}_n|_U$ *είναι ομαλά ομοτοπικές.*

Σημείωση. *Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ένα συσταλτό* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *έχει την δυνατότητα να «συρρικνωθεί», κατά ομαλό τρόπο, σε ένα σημείο του.*

Παράδειγμα. *Τετριμμένα παραδείγματα συσταλτών* $U \subseteq \mathbb{R}^n$, *είναι τα κυρτά* U, *και γενικότερα τα αστρόμορφα* U. *Μάλιστα, στα αστρόμορφα* U, *η ομαλή ομοτοπία μεταξύ των* $t_0|_U$ *και* $\mathrm{id}_n|_U$ *είναι η ομοτοπία ευθύγραμμου τμήματος.*

9.1.2 Βασικό αποτέλεσμα

Το βασικό αποτέλεσμα της ενότητας αυτής, πάνω στο οποίο θα πατήσουμε για να πάρουμε το ζητούμενο στην επόμενη υποενότητα, δίνεται παρακάτω. Για την απόδειξή του γίνεται χρήση της Πρότασης 4.3.2.9.

Θεώρημα 9.1.2.1. *Έστω*

i. $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m$,

ii. $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

iii. ομαλά ομοτοπικές $f_1, f_2 \in C^\infty(U_1; \mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f_1(U_1) \subseteq U_2 \supseteq f_2(U_1)$.

Τότε, $\forall k \in \{0, \dots, \min\{m, n-1\}\}$, $\exists$ *γραμμικός τελεστής* λ_k: $D_{k+1}(U_2; \mathbb{R}) \to D_k(U_1; \mathbb{R})$ *τ.ω.:*

1. $\lambda_0(df) = f \circ f_1 - f \circ f_2$, $\forall f \in C^\infty(U_2; \mathbb{R})$ *&*
2. $d(\lambda_k(\omega)) + \lambda_k(d\omega) = {f_1}^*(\omega) - {f_2}^*(\omega)$, $\forall \omega \in D_{k+1}(U_2; \mathbb{R})$, *αν* $k \neq 0$.

Σημείωση. *Το Θεώρημα 9.1.2.1 μας εξασφαλίζει ότι αν* $\omega \in D^C_{k+1}(U_2; \mathbb{R})$, *τότε οι* ${f_1}^*(\omega)$ *και* ${f_2}^*(\omega)$ *διαφέρουν κατά μια ακριβή διαφορική μορφή. Αντίστοιχα, αν* $f \in D^C_0(U_2; \mathbb{R})$ *τότε* $f \circ f_1 = f \circ f_2$.

9.1.3 Ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα - λήμμα του Poincaré

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.1.2.1, παίρνουμε την ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα παράγουσας.

Θεώρημα 9.1.3.1 (*λήμμα του Poincaré*)**.** *Έστω συσταλτό* $U \subseteq \mathbb{R}^n$. *Τότε το* U *είναι ομολογικά τετριμμένο στην τάξη* m, $\forall m \in \{0, \dots, n-1\}$.

Απευθείας από το Θεώρημα 9.1.3.1 έπεται το ακόλουθο, το οποίο είναι ουσιαστικά το αντίστροφο της Παρατήρησης πριν τον Ορισμό 9.1, και μια γενίκευση της Πρότασης 4.4.2 σε n διαστάσεις.

Πόρισμα 9.1.3.1. *Έστω*

α΄. $m \leq n$,

β΄. συσταλτό $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *&*

γ΄. $\omega \in D^C_m(U; \mathbb{R})$.

1. *Έστω, επιπλέον,*

   i. $m = 1$ *&*

   ii. $f_1, f_2 \in C^\infty(U; \mathbb{R})$ *τ.ω.:* $df_1 = \omega = df_2$.

   Τότε $\exists c \in \mathbb{R}$ *τ.ω.:* $f_1 = f_2 + c$.

2. *Έστω, επιπλέον,*

   i. $m \neq 1$ *&*

   ii. $\eta_1, \eta_2 \in D_{m-1}(U; \mathbb{R})$ *τ.ω.:* $d\eta_1 = \omega = d\eta_2$.

   Τότε $\exists \theta \in D_{m-2}(U; \mathbb{R})$ *τ.ω.:* $\eta_1 = \eta_2 + d\theta$.

9.2 Το πρόβλημα σε διάτρητα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

Εδώ, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 9.1.2.1 και το Θεώρημα 9.1.3.1 για να αποφανθούμε για την ύπαρξη λύσης στο πρόβλημα, όταν

$$U \smallsetminus \{t_j\}_{j \in N} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), \text{ όπου } N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\} \ \& \ \{t_j\}_{j \in N} \subsetneq U.$$

Καταρχάς, ένα τέτοιο διάτρητο ανοικτό σύνολο δεν είναι συσταλτό, μιας και στην αντίθετη περίπτωση, το παράδειγμα της Ενότητας 8.3 έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα 9.1.3.1.

Άρα το πρώτο ερώτημα που τίθεται έχει ως εξής:

– Πώς θα είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε την θεωρία σε συσταλτά ανοικτά σύνολα;

Απάντηση: Κατά την συνήθη πρακτική στα Μαθηματικά, θα μελετήσουμε το πρόβλημα σε ένα νέο συσταλτό ανοικτό σύνολο, το οποίο όμως θα μας δώσει πληροφορία για το πρόβλημα στο ζητούμενο αρχικό σύνολο.

Έτσι, γεννιούνται δύο νέες απορίες:

– Ποιό θα είναι το νέο σύνολο;

– Ποιός θα είναι ο συνδετικός κρίκος μεταξύ του αρχικού και του νέου προβλήματος;

Απάντηση στο πρώτο: Το νέο ανοικτό σύνολο θα είναι το

$$(U \times \mathbb{R}) \smallsetminus \{\{t_j\} \times \{0\}\}_{j \in N} = U_+ \cup U_-,$$

όπου $U_+, U_- \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^{n+1})$ με $U \subsetneq U_\pm$,

$$U_+ \cap U_- = (U \times \mathbb{R}) \smallsetminus \{\{t_j\} \times \mathbb{R}\}_{j \in N}$$

και

$$U_\pm = (U \times \mathbb{R}) \smallsetminus \left\{\{t_j\} \times \overline{\mathbb{R}_\pm}\right\}_{j \in N}.$$

Το $U_\pm$ γράφεται σαν ένωση $\operatorname{card} N$ το πλήθος (μη ξένων ανά δύο) συσταλτών, και συγκεκριμένα αστρόμορφων, ανοικτών υποσυνόλων, $U_{\pm j}$ με $j \in N$, όπου

$$U_{\pm j} = (U \times \mathbb{R}) \smallsetminus \left(\{t_j\} \times \overline{\mathbb{R}_\pm}\right), \ \forall j \in N.$$

Κάνοντας χρήση του βασικού Θεωρήματος 9.2.2.2, και ειδικότερα του Πορίσματος 9.2.2.2, το οποίο αξιοποιεί την Πρόταση 4.1.4.2 (μέσω της χρήσης της Πρότασης 9.2.2.1) παίρνουμε ότι το $U_\pm$ είναι ομολογικά τετριμμένο σε οποιαδήποτε τάξη.

Απάντηση στο δεύτερο: Μέσω του συνδυασμού του Πορίσματος 9.2.2.2 και του Θεωρήματος 9.2.2.1, και ειδικότερα του Πορίσματος 9.2.2.1, μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορία για το αρχικό πρόβλημα από το νέο.

Για την ακρίβεια, μόλις σκιαγραφήσαμε την απόδειξη του επαγωγικού βήματος του Θεωρήματος 9.2.3.1, και ειδικότερα του Θεωρήματος 9.2.3.2.

Για να διατυπωθούν «κομψά» τα προαναφερόμενα αποτελέσματα, χρειάζεται να εισάγουμε ορισμένες έννοιες και να αναδιατυπώσουμε το πρόβλημα.

9.2.1 Προκαταρκτικές έννοιες

Ένας βολικός τρόπος για να διατυπωθούν τα αποτελέσματα που αφορούν ένα $U \subseteq \mathbb{R}^n$, είναι μέσω συγκεκριμένων διανυσματικών χώρων,

$$H_m(U;\mathbb{R}) \ \forall m \in \{0, \dots, n-1\},$$

γνωστοί ως συνομολογίες/ομάδες του de Rham για το U (de Rham cohomologies/groups of U). Ορίζονται δε, έτσι ώστε η συνθήκη «το U είναι ομολογικά τετριμμένο στην τάξη m» να είναι ισοδύναμη με την «η $H_m(U;\mathbb{R})$ είναι ο τετριμμένος διανυσματικός χώρος», όπως θα δούμε και παρακάτω.

Πρώτα, αναδιατυπώνουμε ορισμένες ιδιότητες των διαφορικών μορφών που ήδη έχουμε συμπεράνει στο Κεφάλαιο 7.

Πόρισμα 9.2.1.1. *Έστω*

i. $m_1 \in \{0, \dots, n\}$,

ii. $m_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ *&*

iii. $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

1. *Το σύνολο $D_{m_1}(U;\mathbb{R})$ είναι διανυσματικός χώρος.*
2. *Το σύνολο $D^E_{m_1}(U;\mathbb{R})$ είναι διανυσματικός υποχώρος του $D_{m_1}(U;\mathbb{R})$. Μάλιστα, αν $m_1 \neq 0$, τότε*

$$D^E_{m_1}(U;\mathbb{R}) = \operatorname{Im}\{d\colon D_{m_1-1}(U;\mathbb{R}) \to D_{m_1}(U;\mathbb{R})\}.$$

3. *Το σύνολο* $D^C_{m_2}(U;\mathbb{R})$ *είναι διανυσματικός υποχώρος του* $D_{m_2}(U;\mathbb{R})$. *Μάλιστα,*
$$D^C_{m_2}(U;\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}\{d\colon D_{m_2}(U;\mathbb{R}) \to D_{m_2+1}(U;\mathbb{R})\}.$$
4. *Ο* $D^E_{m_2}(U;\mathbb{R})$ *είναι διανυσματικός υποχώρος του* $D^C_{m_2}(U;\mathbb{R})$.

Υπό το πρίσμα του Πορίσματος 9.2.1.1, ο επόμενος ορισμός έχει νόημα.

Ορισμός 9.2.1.1 (*συνομολογία του de Rham*)**.** *Έστω* $m \in \{0,\dots,n-1\}$ *και* $U \subseteq \mathbb{R}^n$. *Ο διανυσματικός χώρος πηλίκο*
$$H_m(U;\mathbb{R}) = D^C_m(U;\mathbb{R})/D^E_m(U;\mathbb{R})$$
καλείται συνομολογία του de Rham στην τάξη m *για το* U.

Σημείωση. *Οι χώροι πηλίκο χρησιμοποιούνται ευρέως στις θεωρίες που εμπλέκουν διανυσματικούς χώρους. Για παράδειγμα, χαρακτηριστικοί χώροι πηλίκο της Θεωρίας Μέτρου, είναι οι χώροι* L^p *με* $p \in [1,\infty)$.

Παρατήρηση. *Παραθέτουμε τις ιδιότητες των συνομολογιών του de Rham, και ταυτόχρονα υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες ενός διανυσματικού χώρου πηλίκο (βλ., π.χ., [1], τελευταίο μέρος της §4.2]).*

1. *Τα στοιχεία της* $H_m(U;\mathbb{R})$ *είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης ισοδυναμίας*
$$(\omega_1 - \omega_2) \in D^E_m(U;\mathbb{R}), \text{ για } \omega_1,\omega_2 \in D^C_m(U;\mathbb{R}).$$
Έτσι, η $H_m(U;\mathbb{R})$ *είναι μια συλλογή από ξένα ανά δύο υποσύνολα του* $D^C_m(U;\mathbb{R})$, *των οποίων η ένωση είναι η ο* $D^C_m(U;\mathbb{R})$. *Είναι, δλδ, μια διαμέριση του* $D^C_m(U;\mathbb{R})$.
2. $\forall \omega \in D^C_m(U;\mathbb{R})$, *συμβολίζουμε (κατά τα γνωστά) με* $[\omega] \in H_m(U;\mathbb{R})$ *την κλάση ισοδυναμίας του* ω *ως προς την παραπάνω σχέση. Έτσι,*
$$[\omega] = \left\{\eta \in D^C_m(U;\mathbb{R}) \,\middle|\, \eta = \omega + \theta, \text{ όπου } \theta \in D^E_m(U;\mathbb{R})\right\} = \omega + D^E_m(U;\mathbb{R}).$$
Η $[\omega]$ *καλείται σύμπλοκο (coset) της* ω *ως προς τον* $D^E_m(U;\mathbb{R})$.
3. *Ισχύει ότι* $[\omega_1] = [\omega_2]$ *ανν* $(\omega_1 - \omega_2) \in D^E_m(U;\mathbb{R})$. *Ισχύει, επίσης, ότι* $[\omega_1] \neq [\omega_2]$ *ανν* $(\omega_1 - \omega_2) \notin D^E_m(U;\mathbb{R})$, *και σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι* $[\omega_1] \cap [\omega_2] = \varnothing$.
4. *Οι πράξεις στην* $H_m(U;\mathbb{R})$ *(μιας και αυτή είναι διανυσματικός χώρος) ορίζονται «φυσικά» ως*
$$[\omega_1] + [\omega_2] = [\omega_1 + \omega_2], \ \omega_1,\omega_2 \in D^C_m(U;\mathbb{R})$$
και
$$c[\omega] = [c\omega], \ \forall\ c \in \mathbb{R} \ \&\ \omega \in D^C_m(U;\mathbb{R}).$$
5. *Το μηδενικό στοιχείο της* $H_m(U;\mathbb{R})$ *(μιας και αυτή είναι διανυσματικός χώρος) είναι η*
$$[0] = D^E_m(U;\mathbb{R}).$$
Δλδ, η $H_m(U;\mathbb{R})$ *είναι ο τετριμμένος διανυσματικός χώρος ανν το* U *είναι ομολογικά τετριμμένο στην τάξη* m.
6. *Θα μπορούσαμε επίσης να πούμε ότι η* $\dim H_m(U;\mathbb{R})$ *αριθμεί τα «εμπόδια» επιλυσιμότητας του προβλήματος παραγουσών τάξης* m *στο* U.

Σε αυτό το σημείο, θα χρειαστούμε το επόμενο, το οποίο έπεται απευθείας από το σημείο 3 της Πρότασης 7.5.3.

Πόρισμα 9.2.1.2. *Έστω*

i. $m \le n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,

iii. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ &

iv. $k \in \{0, \dots, m-1\}$.

Τότε

$$f^*\big(D_k^E(f(U);\mathbb{R})\big) \subseteq D_k^E(U;\mathbb{R}) \;\; \& \;\; f^*\big(D_k^C(f(U);\mathbb{R})\big) \subseteq D_k^C(U;\mathbb{R}).$$

Υπό το πρίσμα του Πορίσματος 9.2.1.2 και σε συνδυασμό με το 1ο θεώρημα των ισομορφισμών (βλ., π.χ., [1, Θεώρημα 5.3.11, σελ. 184]), συμπεραίνουμε το παρακάτω.

Πρόταση 9.2.1.1. *Έστω*

i. $m \leq n$,

ii. $U \subseteq \mathbb{R}^m$,

iii. $f \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*

iv. $k \in \{0, \dots, m-1\}$.

Τότε $\exists$ *γραμμική* $f_0\colon H_k(f(U);\mathbb{R}) \to H_k(U;\mathbb{R})$ *τ.ω.:*

$$f_0([\omega]) = [f^*(\omega)] \Leftrightarrow f_0\big(\omega + B_k^E(f(U);\mathbb{R})\big) = f^*(\omega) + B_k^E(U;\mathbb{R}), \;\; \forall \omega \in D_k^C(f(U);\mathbb{R}).$$

Δίνουμε, έτσι, τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 9.2.1.2. *Κάθε f_0 όπως στην Πρόταση 9.2.1.1 θα λέμε ότι επάγεται από την f^* και θα την συμβολίζουμε ως $\widetilde{f^*}$.*

Τέλος, θα χρειαστούμε και τον εξής.

Ορισμός 9.2.1.3 (*ομαλές ισοδυναμίες ομοτοπίας*)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *&*

2. *i.* $f_1 \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $f_1(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *&*

   ii. $f_2 \in C^\infty(f_1(U);\mathbb{R}^m)$ *τ.ω.:* $f_2(f_1(U)) = U$,

   τ.ω.: κάθε ζεύγος

   i. $f_1 \circ f_2$ *και* $\mathrm{id}_n|_{f_1(U)}$ *&*

   ii. $f_2 \circ f_1$ *και* $\mathrm{id}_m|_U$

   είναι ομαλά ομοτοπικό.

Οι f_1 και f_2 καλούνται ομαλές ισοδυναμίες ομοτοπίας.

Ένα απλό αλλά βασικό παράδειγμα ζεύγους ομαλών ισοδυναμιών ομοτοπίας είναι το παρακάτω.

Παράδειγμα. *Έστω $m \leq n$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε οι $\pi^n_{i_1\dots i_m}|_U$ και $\varpi^n_{i_1\dots i_m}|_{\pi^n_{i_1\dots i_m}(U)}$ είναι ομαλές ισοδυναμίες ομοτοπίας. Πράγματι, μιας και*

$$\pi^n_{i_1\dots i_m}|_U \circ \varpi^n_{i_1\dots i_m}|_{\pi^n_{i_1\dots i_m}(U)} = \mathrm{id}_m|_{\pi^n_{i_1\dots i_m}(U)},$$

οι δυο τους είναι ομαλά ομοτοπικές μέσω της ομαλής ομοτοπίας $f_1 \in C^\infty\big(\pi^n_{i_1\dots i_m}(U) \times [0,1];\mathbb{R}\big)$ όπου

$$f_1(t,s) = t, \;\; \forall\, (t,s) \in \pi^n_{i_1\dots i_m}(U) \times [0,1].$$

Επίσης, οι

$$\varpi^n_{i_1\dots i_m}|_{\pi^n_{i_1\dots i_m}(U)} \circ \pi^n_{i_1\dots i_m}|_U \;\; \& \;\; \mathrm{id}_n|_U$$

είναι ομαλά ομοτοπικές μέσω της ομοτοπίας ευθύγραμμου τμήματος, δλδ της $f_2 \in C^\infty(U \times [0,1];\mathbb{R})$ τ.ω.:

$$f_2(t,s) = s\,\mathrm{id}_n(t) + (1-s)\left(\pi^n_{i_1\dots i_m} \circ \varpi^n_{i_1\dots i_m}\right)(t), \;\; \forall\, (t,s) \in U \times [0,1],$$

δλδ, θέτοντας $x = \pi^n_{i_1\dots i_m}(t)$ και $y = \hat{\pi}^n_{i_1\dots i_m}(t)$ $\forall t \in U$, αν $m \notin \{1,n\}$,

$$f_2(t,s) = \begin{cases} t, & \text{αν } m \in \{1,n\} \\ \varpi^n_{i_1\dots i_m}(x) + s\,\hat{\varpi}^n_{i_1\dots i_m}(y), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

9.2.2 Βασικά αποτελέσματα

Δύο είναι τα βασικά αποτελέσματα στα οποία θα πατήσουμε για να πάρουμε το ζητούμενο στην επόμενη υποενότητα.

Το πρώτο έπεται εύκολα από το Θεώρημα 9.1.2.1 και έχει ως εξής.

Θεώρημα 9.2.2.1 (*Θεώρημα ισοδυναμιών ομοτοπίας*)**.** *Έστω*

1. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *&*
2. *ομαλές ισοδυναμίες ομοτοπίας* $f_1 \in C^\infty(U;\mathbb{R}^n)$ *και* $f_2 \in C^\infty(f_1(U);\mathbb{R}^m)$.

Τότε οι $\widetilde{f_1}^*$ *και* $\widetilde{f_2}^*$ *είναι γραμμικές,* $1-1$ *και επί, είναι, δλδ, ισομορφισμοί.*

Υπό το πρίσμα του Παραδείγματος μετά τον Ορισμό 9.2.1.3, με χρήση του Θεωρήματος 9.2.2.1, παίρνουμε άμεσα το παρακάτω χρήσιμο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 9.2.2.1. *Έστω* $U \subseteq \mathbb{R}^n$. *Τότε*

$$\dim H_m(U) = \dim H_m(U \times \mathbb{R}),\ \forall m \in \{0,\dots,n-1\}\,.$$

Τώρα, για το δεύτερο χρειαζόμαστε το ακόλουθο, το οποίο με την σειρά του έπεται με χρήση της Πρότασης 4.1.4.2.

Πρόταση 9.2.2.1. *Έστω* $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:* $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. *Τότε* $\exists$

i. $f\colon U_1 \cup U_2 \to \mathbb{R}$,

ii. $U_{01} \in \mathcal{O}(U_1 \cup U_2)$ *τ.ω.:* $U_{01} \subseteq U_1 \setminus (U_1 \cap U_2)$ *&*

iii. $U_{02} \in \mathcal{O}(U_1 \cup U_2)$ *τ.ω.:* $U_{02} \subseteq U_2 \setminus (U_1 \cap U_2)$,

τ.ω.:

$$f|_{U_{01}} = 0 \quad \& \quad f|_{U_{02}} = 1.$$

Αξιοποιώντας την Πρόταση 9.2.2.1, παίρνουμε την παρακάτω ειδική εκδοχή του θεωρήματος των Mayer-Vietoris.

Θεώρημα 9.2.2.2 (*Mayer-Vietoris, ειδική περίπτωση*)**.** *Έστω* $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

i. $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ *&*

ii. *τα* U_1 *και* U_2 *να είναι ομολογικά τετριμμένα τάξης* m, $\forall m \in \{0,\dots,n-1\}$.

Τότε

1. *η* $H_0(U_1 \cup U_2;\mathbb{R})$ *είναι ο τετριμμένος διανυσματικός χώρος &*
2. *η* $H_{m+1}(U_1 \cup U_2;\mathbb{R})$ *είναι (γραμμικά) ισομορφική με την* $H_m(U_1 \cap U_2;\mathbb{R})$.

Μάλιστα, μπορούμε να δείξουμε εύκολα με επαγωγή την προφανή γενίκευση του Θεωρήματος 9.2.2.2.

Πόρισμα 9.2.2.2. *Έστω*

i. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N})$ *τ.ω.:* $\operatorname{card} N \geq 2$ *&*

ii. $\{U_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ *τ.ω.:*

   i. $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $\forall\, i,j \in N$ *τ.ω.:* $i \neq j$ *&*

   ii. *το* U_j *να είναι ομολογικά τετριμμένο τάξης* m, $\forall\ m \in \{0,\dots,n-1\}$ *&* $i \in N$.

Τότε

1. *η* $H_0\left(\bigcup_{j\in N} U_j;\mathbb{R}\right)$ *είναι ο τετριμμένος διανυσματικός χώρος &*
2. *η* $H_{m+1}\left(\bigcup_{j\in N} U_j;\mathbb{R}\right)$ *είναι (γραμμικά) ισομορφική με την* $H_m\left(\bigcap_{j\in N} U_j;\mathbb{R}\right)$.

9.2.3 Ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα

Με επαγωγή ως προς την διάσταση n, όπου κατά το επαγωγικό βήμα χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 9.2.2.1 και το Πόρισμα 9.2.2.2, παίρνουμε την ύπαρξη λύσης για το πρόβλημα, και συγκεκριμένα το ζητούμενο αποτέλεσμα αποδοσμένο με όρους συνομολογιών του de Rham.

Θεώρημα 9.2.3.1. *Έστω*

1. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$,
2. $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^n$,
3. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq U$ *&*
4. $m \in \{0,\dots,n-1\}$.

Τότε

$$\dim H_m\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big) = \begin{cases} 0, & \text{αν } m \neq n-1 \\ \operatorname{card} N, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Απλά αποδίδοντας το Θεώρημα 9.2.3.1 με όρους διαφορικών μορφών, έχουμε το εξής.

Θεώρημα 9.2.3.2. *Έστω*

α΄. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$,

β΄. $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^n$,

γ΄. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq U$ *&*

δ΄. $m \in \{0,\dots,n-1\}$.

I. Έστω, επιπλέον, $m \neq n-1$. *Τότε*

$$D_m^C\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big) = D_m^E\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big).$$

II. 1. *Τότε* $\exists \{\omega_j\}_{j\in N} \subsetneq D_{n-1}^C\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big)$ *τ.ω.:*

i. να ισχύει ότι

$$\omega_j \notin D_{n-1}^E\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big),\ \forall j \in N \ \&$$

ii. να ισχύει, επίσης, ότι

$$(\omega_i - \omega_j) \notin D_{n-1}^E\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big),\ \forall i,j \in N \text{ τ.ω.: } i \neq j.$$

2. *Έστω, επιπλέον,* $\omega \in D_{n-1}^C\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big)$. *Τότε* $\exists! \{c_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}$ *τ.ω.:*

$$\left(\omega - \sum_{j\in N} c_j\omega_j\right) \in D_{n-1}^E\Big(U \smallsetminus \{t_j\}_{j\in N};\mathbb{R}\Big),$$

όπου κάθε ω_j *είναι όπως στο σημείο 1..*

Το Θεώρημα 9.2.3.2 μας παρέχει την ύπαρξη τέτοιων ω_j, αλλά δεν μας δίνει τον τύπο τους. Στην Ενότητα 8.3, ωστόσο, έχουμε βρει έναν τέτοιο τύπο. Έτσι, υπο το πρίσμα των παραπάνω και με την χρήση του Θεωρήματος 8.1.2, συμπεραίνουμε εύκολα το εξής κριτήριο «ακρίβειας» μιας διαφορικής μορφής τάξης $n-1$, με $n \neq 1$ (άλλωστε, η περίπτωση $n = 1$ μας είναι ήδη γνωστή από την Ενότητα 4.4), σε ανοικτό διάτρητο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 9.2.3.3. *Έστω*

i. $n \neq 1$,

ii. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \smallsetminus \{\varnothing\}$, *iii.* $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^n$,

iv. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *τ.ω.:* $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq U$ *&*

v. $\omega \in D^C_{n-1}\Big(U \setminus \{t_j\}_{j\in N}; \mathbb{R}\Big)$.

Τότε $\omega \in D^E_{n-1}\Big(U \setminus \{t_j\}_{j\in N}; \mathbb{R}\Big)$ *ανν* $\forall j \in N$, $\exists U_{0j} \subset\subset U$ *τ.ω.:*

1. $t_j \in U_{0j}$,
2. $t_i \notin U_{0j}$, $\forall i \in N$ *με* $i \neq j$,
3. $\overline{U_{0j}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ *&*
4. *να ισχύει ότι*

$$\int\limits_{\operatorname{bd}\overline{U_{0j}}} \omega = 0,$$

και μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι, $\forall j \in N$,

$$\int\limits_{\operatorname{bd}\overline{U_j}} \omega = 0,\ \ \forall U_j \subset\subset U \ \text{ τ.ω.: } \begin{cases} t_j \in U_j, \\ t_i \notin U_j,\ \ \forall i \in N \text{ με } i \neq j \ \& \\ \overline{U_j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Κλείνουμε αυτόν το κύκλο μελέτης, με την απόδοση των αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου με όρους διανυσματικών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$.

9.3 Διανυσματικός Λογισμός, συνέχεια

Υπό το πρίσμα του Πορίσματος 7.4.4.1 και του Θεωρήματος 7.4.4.2, αναδιατυπώνουμε εύκολα τα αποτελέσματα του παρόντος κεφαλαίου για διανυσματικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^2$ και στον $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα.

Σημείωση. *Ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα του Διανυσματικού Λογισμού, αυτό του θεωρήματος του Helmholtz (που μας εξασφαλίζει ότι κάθε διανυσματική συνάρτηση στον* $\mathbb{R}^3$ *(αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και στον* $\mathbb{R}^2$*) γράφεται σαν άθροισμα του* grad *μιας βαθμωτής συνάρτησης συν το* curl *μιας διανυσματικής συνάρτησης, δλδ αναλύεται, λόγω του Πορίσματος 7.4.2.2, ως άθροισμα μιας αστρόβιλης συν μιας μη αποκλίνουσας διανυσματικής συνάρτησης) αποτελεί συνέχεια των αποτελεσμάτων της παρούσας ενότητας, ωστόσο δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν κείμενο μιας και απαιτεί εισαγωγή στην Θεωρία Δυναμικού, η οποία και άπτεται της Θεωρίας Κατανομών και των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.*

Τονίζουμε ότι η ομαλότητα των συναρτήσεων υποτίθεται στα πλαίσια σύμβασης (για ευκολία με τον συμβολισμό) και δεν είναι απαραίτητη για την απόδειξη των αποτελεσμάτων του παρόντος κεφαλαίου.

9.3.1 Συσταλτά ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$

Θεώρημα 9.3.1.1. *Έστω συσταλτό* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *και* $f \in C^\infty\big(U; \mathbb{R}^2\big)$. *Τότε η* f *είναι συντηρητική ανν*

$$\frac{\partial f_2}{\partial t_1} = \frac{\partial f_1}{\partial t_2}.$$

Θεώρημα 9.3.1.2. *Έστω συσταλτό* $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *και* $f \in C^\infty\big(U; \mathbb{R}^3\big)$. *Τότε*

1. *η* f *είναι συντηρητική ανν η* f *είναι αστρόβιλη &*
2. *η* f *ισούται με τον στροβιλισμό κάποιας ομαλής διανυσματικής συνάρτησης ανν η* f *είναι μη αποκλίνουσα.*

9.3.2 Διάτρητα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και του $\mathbb{R}^3$

Θεώρημα 9.3.2.1. *Έστω*

α'. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$,

β'. $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^2$,

γ'. $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *τ.ω.:* $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq U$ *&*

δ'. $f \in C^\infty\Big(U \setminus \{t_j\}_{j\in N}; \mathbb{R}^2\Big)$.

Τότε η f είναι συντηρητική ανν

I. *ισχύει ότι*
$$\frac{\partial f_2}{\partial t_1} = \frac{\partial f_1}{\partial t_2} \ \&$$

II. $\forall j \in N$, $\exists U_{0j} \subset\subset U$ *τ.ω.:*

1. $t_j \in U_{0j}$,
2. $t_i \notin U_{0j}$, $\forall i \in N$ *με* $i \neq j$,
3. $\overline{U_{0j}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ *&*
4. *να ισχύει ότι*
$$\int\limits_{\mathrm{bd}\,\overline{U_{0j}}} \big(f \cdot \tau_{0j}\big)(t)d\sigma(t) = 0,$$

όταν

i. *η* $\overline{U_{0j}}$ *είναι φυσικά προσανατολισμένη,*

ii. *η* $\mathrm{bd}\,\overline{U_{0j}}$ *είναι εφοδιασμένη με τον επαγόμενο προσανατολισμό &*

iii. $\forall t \in \mathrm{bd}\,\overline{U_{0j}}$, *το* $\tau_{0j}(t)$, *δλδ η μοναδιαία εφαπτόμενη διανυσματική συνάρτηση του* $\mathrm{bd}\,\overline{U_{0j}}$ *στο* t, *έχει κατεύθυνση τ.ω.: το* $\nu(t)$, *δλδ η εξωτερική μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* $\mathrm{bd}\,\overline{U_{0j}}$ *στο* t, *να βρίσκεται από τα δεξιά του* $\tau(t)$,

και μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι, $\forall j \in N$,

$$\int\limits_{\mathrm{bd}\,\overline{U_j}} (f \cdot \tau_j)(t)d\sigma(t) = 0,\ \forall U_j \subset\subset U \text{ τ.ω.: } \begin{cases} t_j \in U_j, \\ t_i \notin U_j,\ \forall i \in N \text{ με } i \neq j \ \& \\ \overline{U_j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

με τις ανάλογες υποθέσεις σχετικά με τους προσανατολισμούς και τις κατευθύνσεις.

Θεώρημα 9.3.2.2. *Έστω*

α'. $N \in \mathcal{B}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$,

β'. $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq \mathbb{R}^3$,

γ'. $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *τ.ω.:* $\{t_j\}_{j\in N} \subsetneq U$ *&*

δ'. $f \in C^\infty\Big(U \setminus \{t_j\}_{j\in N}; \mathbb{R}^3\Big)$.

Τότε

I. *η* f *είναι συντηρητική ανν η* f *είναι αστρόβιλη &*

II. *η* f *ισούται με τον στροβιλισμό κάποιας ομαλής διανυσματικής συνάρτησης ανν*

A'. *η* f *είναι μη αποκλίνουσα &*

B'. $\forall j \in N$, $\exists U_{0j} \subset\subset U$ *τ.ω.:*

1. $t_j \in U_{0j}$,
2. $t_i \notin U_{0j}$, $\forall i \in N$ *με* $i \neq j$,

3. $\overline{U_{0j}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ &
4. *να ισχύει ότι*

$$\int\limits_{\operatorname{bd}\overline{U_{0j}}} \big(f \cdot \nu_{0j}\big)(t)d\sigma(t) = 0,$$

όταν

i. *η* $\overline{U_{0j}}$ *είναι φυσικά προσανατολισμένη,*

ii. *η* $\operatorname{bd}\overline{U_{0j}}$ *είναι εφοδιασμένη με τον επαγόμενο προσανατολισμό* &

iii. *η* ν *είναι η εξωτερική μοναδιαία κάθετη διανυσματική συνάρτηση του* $\operatorname{bd}\overline{U_{0j}}$,

και μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι, $\forall j \in N$,

$$\int\limits_{\operatorname{bd}\overline{U_j}} (f \cdot \nu_j)(t)d\sigma(t) = 0, \ \forall U_j \subset\subset U \ \text{τ.ω.:} \begin{cases} t_j \in U_j, \\ t_i \notin U_j, \ \forall i \in N \ \text{με} \ i \neq j \ \& \\ \overline{U_j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n), \end{cases}$$

με τις ανάλογες υποθέσεις σχετικά με τους προσανατολισμούς και τις κατευθύνσεις.

Μέρος **II**

Γεωμετρική Θεωρία Μέτρου

- μέτρο, μέτρο του Jordan, μέτρο του Lebesgue
- μετρήσιμη συνάρτηση
- ολοκλήρωμα, ολοκλήρωμα κατά Lebesgue και σύγκριση με το αντίστοιχο κατά Riemann
- διαφόριση, φραγμένη κύμανση, απόλυτη συνέχεια
- ανάλυση κατά Lipschitz, θεώρημα Lipschitz αλλαγής μεταβλητών, θεώρημα του Rademacker, θεώρημα του Alexandrov
- Lipschitz πολλαπλότητα
- ολοκλήρωση επί Lipschitz πολλαπλότητας, μέτρο του Hausdorff
- διαφορική μορφή σε Lipschitz πολλαπλότητες
- θεώρημα του Stokes σε Lipschitz πολλαπλότητες
- πρόβλημα της παράγουσας διαφορικής μορφής σε Lipschitz πολλαπλότητες
- Διανυσματική Ανάλυση κατά Lipschitz

Προσεχώς…

Βιβλιογραφία

[1] Δημήτριος Α. Βάρσος, Δημήτριος Ι. Δεριζιώτης, Ιωάννης Π. Εμμανουήλ, Μιχαήλ Π. Μαλιάκας, Αντώνιος Δ. Μελάς και Ολυμπία Π. Ταλέλλη. *Μια Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα, ενοποιημένη εκδοχή.* Εκδόσεις Σοφία, 2012.

[2] Δημήτριος Α. Βάρσος, Δημήτριος Ι. Δεριζιώτης, Ιωάννης Π. Εμμανουήλ, Μιχαήλ Π. Μαλιάκας και Ολυμπία Π. Ταλέλλη. *Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα, γ έκδοση.* Εκδόσεις Σοφία, 2012.

[3] Γεώργιος Κουμουλλής και Στυλιανός Νεγρεπόντης. *Θεωρία Μέτρου, νέα βελτιωμένη έκδοση.* Εκδόσεις Συμμετρία, 2005.

[4] *https://terrytao.files.wordpress.com/2011/08/matrix-book.pdf*.

[5] *https://terrytao.wordpress.com/2011/09/12/the-inverse-function-theorem-for-everywhere-differentiable-maps/*.

[6] Τηλέμαχος Ε. Χατζηαφράτης. *Γεωμετρική Ανάλυση, μέρος Ι.* Εκδόσεις Συμμετρία, 2002.

[7] Τηλέμαχος Ε. Χατζηαφράτης. *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές.* Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.

[8] Θανάσης Χρυσάκης. *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία.* Ιδιωτική έκδοση, 2013.

[9] David J. H. Garling. *Inequalities: A Journey into Linear Analysis.* Cambridge University Press, 2007.

[10] Dennis S. Bernstein. *Scalar, Vector, and Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas, revised and expanded edition.* Princeton University Press, 2018.

[11] Eissa D. Habil. Double sequences and double series, https://journal.iugaza.edu.ps/index.php/IUGNS/article/view/1594/1525. *IUG Journal of Natural Studies*, 14(1), 2016.

[12] Gilbert Strang. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2018.

[13] Giovanni Leoni. *A First Course in Sobolev Spaces, 2nd edition.* American Mathematical Society, 2017.

[14] Gregory M. Constantine και Thomas H. Savits. A multivariate Faà di Bruno formula with applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(2):503–520, 1996.

[15] Hans Sagan. *Space-Filling Curves.* Springer Science & Business Media, 1994.

[16] Hassler Whitney. Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 36(1):63–89, 1934.

[17] James R. Munkres. *Analysis on Manifolds.* CRC Press, 2018.

[18] James R. Munkres. *Topology, 2nd edition.* Pearson, 2018.

[19] Jean Saint Raymond. Local inversion for differentiable functions and the Darboux property. *Mathematika*, 49(1-2):141–158, 2002.

[20] Johannes J. Duistermaat και Johan A.C. Kolk. *Multidimensional Real Analysis I: Differentiation.* Cambridge University Press, 2004.

[21] Johannes J. Duistermaat και Johan A.C. Kolk. *Multidimensional Real Analysis II: Integration.* Cambridge University Press, 2004.

[22] Lawrence C. Evans και Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions, revised edition.* CRC Press, 2015.

[23] Luis Hernández Encinas και Jaime Muñoz Masqué. A short proof of the generalized Faà di Bruno's formula. *Applied Mathematics Letters*, 16(6):975–979, 2003.

[24] Magnus R. Hestenes. Extension of the range of a differentiable function. *Duke Mathematical Journal*, 8(1):183–192, 1941.

[25] Manfredo P. do Carmo. *Διαφορικές Μορφές, Θεωρία και Εφαρμογές.* Εκδόσεις Leader Books, 2010.

[26] Michael Spivak. *Λογισμός σε Πολλαπλότητες.* Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2010.

[27] Peter Lancaster και Miron Tismenetsky. *The Theory of Matrices, second edition, with applications.* Elsevier, 1985.

[28] Ralph Abraham και Joel Robbin. *Transversal Mappings and Flows.* W.A. Benjamin, Inc., 1967.

[29] Robert A. Adams και John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces, 2nd edition.* Academic Press, 2003.

[30] Robert T. Seeley. Extension of C^∞ functions defined in a half space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 15(4):625–626, 1964.

[31] Shlomo Sternberg. *Lectures on Differential Geometry, second edition.* American Mathematical Society, 2016.

[32] Walter Rudin. *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως.* Εκδόσεις Leader Books, 2000.