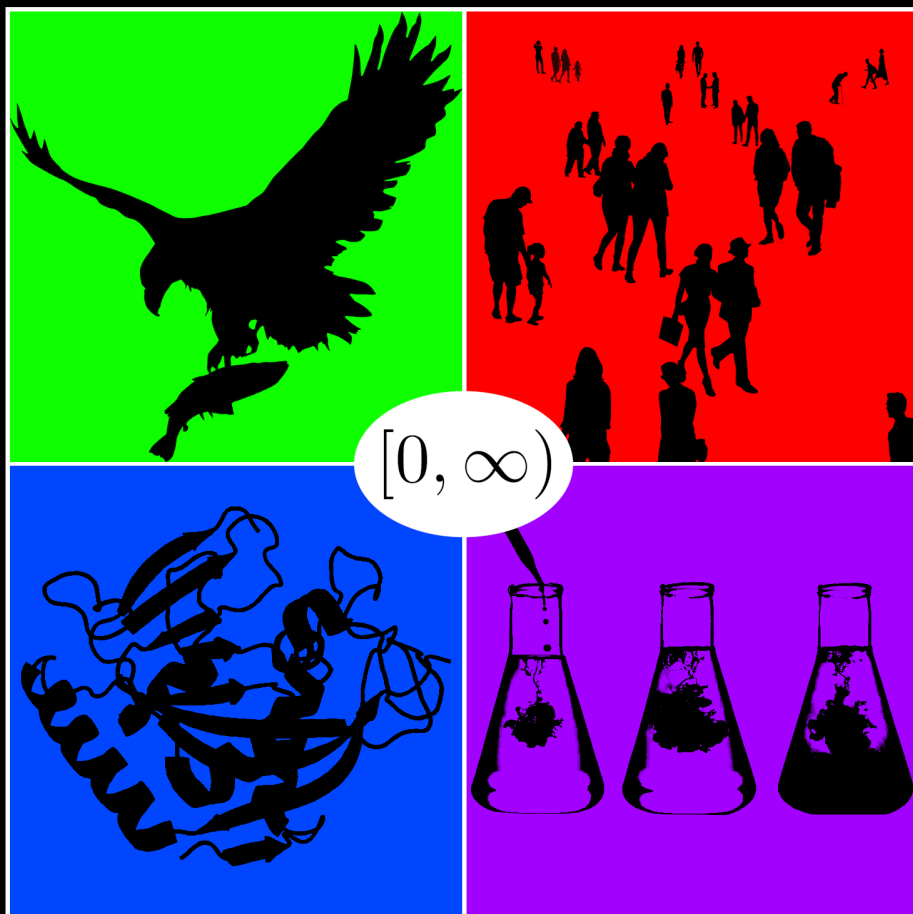


ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ

Νικόλαος Γιαλελής - Βασιλική Μπιτσούνη - Ιωάννης Γ. Στρατής

ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ

ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΑ



ΒΙΟΧΗΜΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ

ΔΙΑΧΥΣΗ

ΜΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ

Μια Εισαγωγή στη Μαθηματική Βιολογία

Νικόλαος Γιαλελής

Ακαδημαϊκός Υπότροφος

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Βασιλική Μπιτσούνη

Ακαδημαϊκή Υπότροφος

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

&

Επίκουρη Καθηγήτρια, υπό διορισμό

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ιωάννης Γ. Στρατής

Ομότιμος Καθηγητής

Τμήμα Μαθηματικών, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τίτλος πρωτοτύπου: «Μια Εισαγωγή στη Μαθηματική Βιολογία»

Copyright © 2023, ΣΕΑΒ/ ΕΛΚΕ ΕΜΠ - ΚΑΛΛΙΠΟΣ, ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ



Το παρόν έργο διατίθεται με τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού – Μη Εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 4.0. Για να δείτε τους όρους της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.el>

Αν τυχόν κάποιο τμήμα του έργου διατίθεται με διαφορετικό καθεστώς αδειοδότησης, αυτό αναφέρεται ρητά και ειδικώς στην οικεία θέση.

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική επιμέλεια:

Νικόλαος Γιαλελής, Βασιλική Μπιτσούνη και Ιωάννης Γ. Στρατής

Γραφιστική επιμέλεια:

Νικόλαος Γιαλελής, Βασιλική Μπιτσούνη και Ιωάννης Γ. Στρατής

Τεχνική επεξεργασία:

Νικόλαος Γιαλελής, Βασιλική Μπιτσούνη και Ιωάννης Γ. Στρατής

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9

15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Βιβλιογραφική αναφορά:

Ν. Γιαλελής Β. Μπιτσούνη Ι. Γ. Στρατής, 2023. *Μια Εισαγωγή στη Μαθηματική Βιολογία*. Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις

Διαθέσιμο στο:

<https://repository.kallipos.gr/handle/11419/9397>

ISBN:

978-618-5726-95-9

- Στους γονείς μου, Ιωάννη και Παρασκευή

N. Γ.

- Στη μητέρα μου, Αντωνία, και στη μνήμη του πατέρα μου, Χρήστου

B. Μπ.

- Στον γιο μου τον Γιώργο

I. Γ. Σ.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πίνακας συντομεύσεων - ακρωνυμίων	xiii
Πρόλογος	xv
Εισαγωγή	xix
Στόχος συγγράμματος.	xxi
Δομή συγγράμματος.	xxi
Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές.	xxii
1 Βασικά στοιχεία Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων	1
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	1
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	3
Ισοδύναμη μορφή των προβλημάτων αρχικών τιμών.	3
Αντιστροφή χρόνου.	4
Καλή τοποθέτηση προβλήματος κατά Hadamard.	4
Τοπική ύπαρξη.	5
Επεκτασιμότητα και ολικότητα λύσης.	5
Μοναδικότητα.	7
Συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα.	8
Ομαλότητα λύσης.	9
Ομαλή εξάρτηση από την εξίσωση.	9
2 ■ Οικολογία I	11
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	11
Συνεχές εκθετικό μοντέλο.	12
Διακριτό εκθετικό μοντέλο.	13
Συνεχές λογιστικό μοντέλο.	14
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	22
Διακριτοποίηση μέσω της μεθόδου Euler.	22
Αυτόνομο ΠΑΤ.	23
Ανάλυση αυτόνομου ΠΑΤ: Βασικές έννοιες.	23
3 ■ Οικολογία II	27
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	27

Γραμμικοποίηση του συνεχούς λογιστικού προβλήματος.	27
Λογιστικό μοντέλο με επίδραση Allee.	29
Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	30
Ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης του γενικού προβλήματος.	30
Αναλλοίωτα σύνολα, καλή τοποθέτηση του αρχικού προβλήματος και ομαλότητα της λύσης του.	30
Ποιοτική μελέτη.	31
Μοντέλα περισσότερων του ενός πληθυσμών.	33
Περί αλληλεπίδρασης μεταξύ πληθυσμών.	33
Πρόσημο.	33
Τύπος.	35
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	38
Ανάλυση ευστάθειας αυτόνομου ΠΑΤ (συνέχεια): Γραμμικοποίηση.	38
4 ■ Οικολογία III	43
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	43
Βασικό μοντέλο Lotka-Volterra.	43
Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	45
Ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχούς ως προς τα αρχικά δεδομένα λύσης του γενικού προβλήματος.	45
Αναλλοίωτα σύνολα, καλή τοποθέτηση του αρχικού προβλήματος και ομαλότητα της λύσης του.	45
Ολικότητα.	46
Γενική λύση σε κλειστή μορφή;	47
Ανάλυση ευστάθειας.	47
Η γεωμετρία των τροχιών στο επίπεδο φάσης.	48
Οι νόμοι Volterra.	50
Αριθμητική επίλυση.	51
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	52
Γραμμικό πρόβλημα στον \mathbb{R}^2	52
Συνάρτηση Lyapunov.	55
Κλειστότητα τροχιών και περιοδικότητα λύσεων αυτόνομου ΠΑΤ.	59
5 ■ Οικολογία IV	61
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	61
Πρώτη παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra.	61
Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	62
Ομαλή μεγιστική λύση, καλή τοποθέτηση του προβλήματος και αναλλοίωτα σύνολα.	62
Ολικότητα;	62
Σημεία ισορροπίας.	63
Ανάλυση ευστάθειας.	63
Ανάλυση διακλάδωσης.	65
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.	66
Αριθμητική επίλυση.	69
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	69
Εξάρτηση από παράμετρο.	69

	Διακλάδωση από σημείο ισορροπίας (ή αλλιώς, τοπική διακλάδωση). . . .	70
	Διακλάδωση σταθερής κατάστασης.	71
6	■ Οικολογία V	79
	<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	79
	Δεύτερη παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra.	79
	Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	80
	Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος.	80
	Πεδίο διευθύνσεων.	80
	Γραμμική ανάλυση ευστάθειας.	81
	Ανάλυση διακλάδωσης.	82
	Αριθμητική επίλυση.	84
	<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	84
	Οριακός κύκλος.	84
	Διακλάδωση Hopf.	89
7	■ Επιδημιολογία I	97
	<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	97
	Δυναμικά επιδημιολογικά μοντέλα κλάσεων.	97
	Βασικό μοντέλο SIR.	100
	Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	101
	Ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχούς ως προς τα αρχικά δεδομένα λύσης του γενικού προβλήματος.	102
	Αναλλοίωτα σύνολα, καλή τοποθέτηση ενός ενδιάμεσου προβλήματος και ομαλότητα της λύσης του.	102
	Ολικότητα της λύσης του ενδιάμεσου προβλήματος.	102
	Πεδίο διευθύνσεων θετική ομαλότητα των λύσεων του αρχικού προβλή- ματος.	103
	Γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή.	104
	Ανάλυση ευστάθειας.	104
	Επιδημιολογικά συμπεράσματα.	107
	Το αδιάστατο πρόβλημα.	107
	Εκτιμήσεις Kermack-McKendrick.	109
	Αριθμητική επίλυση.	111
	<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	111
	Σύμβολα τάξης μεγέθους.	111
	Αλγόριθμοι αδιαστατοποίησης.	115
8	■ Επιδημιολογία II	119
	<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	119
	Βασικό μοντέλο SIR με δημογραφικούς όρους.	119
	Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	120
	Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος.	121
	Σημεία ισορροπίας.	121
	Ανάλυση ευστάθειας.	121
	Ανάλυση διακλάδωσης.	122
	Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.	123
	Επιδημιολογικά συμπεράσματα.	124
	Το αδιάστατο πρόβλημα.	125

Αριθμητική επίλυση.	126
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	126
Θεωρία Poincaré-Bendixson.	126
Αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac.	131
9 ■ Βιοχημική Κινητική I	133
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	133
Γενικά περί χημικών αντιδράσεων.	133
Ταχύτητα μονόδρομης χημικής αντίδρασης.	135
Απλή χημική αντίδραση.	136
Πολύπλοκη χημική αντίδραση.	136
Αμφίδρομη χημική αντίδραση.	136
Εισροές και εκροές.	138
Μηχανισμός χημικής αντίδρασης.	138
Νόμος της ταχύτητας.	139
Δυναμική μοντελοποίηση μιας χημικής αντίδρασης με γνωστό μηχανισμό.	139
Υποβιβασμός του πλήθους των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος.	140
Βασικό μοντέλο ενζυμικής κατάλυσης.	141
Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	143
Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος.	145
Σημεία ισορροπίας.	145
Ανάλυση ευστάθειας.	145
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.	146
Τυπική υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης.	147
Αντίστροφη υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης.	152
Συμπεράσματα.	156
Αριθμητική επίλυση.	158
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	160
Η συνάρτηση Lambert.	160
Τοπικά προσεγγιστικές λύσεις.	162
Συναρμογή προσεγγιστικών λύσεων.	163
10 ■ Βιοχημική Κινητική II	167
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	167
Μοντέλα αυτοκατάλυσης.	167
Πρώτος μηχανισμός Lotka.	168
Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	168
Σημεία ισορροπίας.	168
Το αδιάστατο πρόβλημα.	168
Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος.	169
Ανάλυση ευστάθειας.	170
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια;	171
Αριθμητική επίλυση.	173
Μοντέλο Higgins-Sel'kov.	173
Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	173
Σημεία ισορροπίας.	174
Το αδιάστατο πρόβλημα.	175
Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος.	175
Ανάλυση ευστάθειας.	175

Ανάλυση διακλάδωσης.	176
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια;	177
Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια).	178
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια (συνέχεια);	179
Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια).	179
Αριθμητική επίλυση.	182
Μοντέλο Sel'kov.	182
Το αντίστοιχο ΠΑΤ.	183
Σημεία ισορροπίας.	183
Το αδιάστατο πρόβλημα.	185
Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος.	186
Ανάλυση ευστάθειας.	186
Ανάλυση διακλάδωσης.	187
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.	188
Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια).	189
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια (συνέχεια).	189
Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια).	190
Αριθμητική επίλυση.	193
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	196
Χωρία παγίδευσης.	196
11 Βασικά στοιχεία Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων	199
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	199
Εξίσωση διάχυσης μέσω τυχαίου περιπάτου.	200
Ένα γενικό πλαίσιο.	202
Ένα γενικό πρόβλημα.	203
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	206
Ταξινόμηση γραμμικών ομογενών ΜΔΕ δεύτερης τάξης δύο διαστάσεων.	206
Γραμμικοί, δεύτερης τάξης, πολλών διαστάσεων διαφορικοί τελεστές.	208
Τύποι συνοριακής συνθήκης.	210
Επέκταση στο ΠΑΣΤ των χαρακτηρισμών που αφορούν το ΠΑΤ.	211
Διακριτοποίηση του ΠΑΣΤ.	212
12 ■ Διάχυση I	215
<u>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</u>	215
Εκθετικό μοντέλο με όρο διάχυσης.	215
Το αντίστοιχο εκφυλισμένο ΠΑΣΤ.	216
Ένα ισοδύναμο εκφυλισμένο ΠΑΣΤ.	216
Καλή τοποθέτηση του προβλήματος, ολικότητα και ομαλότητα της λύσης.	216
Μια ειδική περίπτωση λύσης του εκφυλισμένου ΠΑΣΤ.	217
Σχηματισμός μοτίβου.	219
Δυνατότητα παρατήρησης.	220
Ασυμπτωτική μελέτη.	221
Αριθμητική επίλυση.	222
<u>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</u>	225
Γραμμικό εκφυλισμένο ΠΑΣΤ.	225
Δείκτης μοτίβου.	227
13 ■ Διάχυση II	229

<i>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</i>	229
Εκθετικό μοντέλο με όρο διάχυσης (συνέχεια).	229
Τα αντίστοιχα γνήσια ΠΑΣΤ.	230
Ισοδύναμα γνήσια ΠΑΣΤ.	230
Καλή τοποθέτηση του προβλήματος, ολικότητα και ομαλότητα της λύσης.	231
Ασυμπτωτική μελέτη.	233
Ποιοτική μελέτη.	237
Αριθμητική επίλυση.	239
<i>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</i>	241
Γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα.	241
Σειρές Fourier.	243
Πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm–Liouville.	249
Γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα (συνέχεια).	258
Αρχή μεγίστου/ελαχίστου.	260
14 ■ Διάχυση III	263
<i>Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:</i>	263
Λογιστικό μοντέλο με όρο διάχυσης.	263
Τα αντίστοιχα γνήσια ΠΑΣΤ.	264
Καλή τοποθέτηση του γενικού προβλήματος με μεγιστική και ομαλή λύση.	264
Αναλλοίωτο σύνολο του γενικού προβλήματος και ολικότητα της λύσης του.	265
Καλή τοποθέτηση του αρχικού προβλήματος με ομαλότητα της φραγμένης λύσης του.	268
Στάσιμες λύσεις.	269
Χαρακτηρισμός ευστάθειας στάσιμων λύσεων μέσω γραμμικοποίησης.	275
Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια.	276
Αριθμητική επίλυση.	278
<i>Μαθηματικό Υπόβαθρο:</i>	280
Μη γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα ($m = n = 1$).	280
Ποιοτική μελέτη αυτόνομου γνήσιου ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα ($m = n = 1$).	281
Στάσιμες λύσεις και εξάρτησή τους από τις παραμέτρους.	281
Γραμμικοποίηση.	284
Ολική συμπεριφορά της λύσης για μεγάλους χρόνους.	284
15 Κατευθύνσεις για περαιτέρω μελέτη	287
<i>Επιγραμματική παρουσίαση θεματικών ενοτήτων:</i>	287
Διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση.	287
Οδεύοντα και επίπεδα κύματα.	288
Συστήματα διάχυσης.	288
Αστάθεια Turing και σχηματισμός μοτίβων.	288
Μη τοπικά μοντέλα.	289
Ευρετήριο	293

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

2.1	Γραφική παράσταση της (2.2) ως προς t .	12
2.2	Γραφική κατασκευή -με την μέθοδο του ιστού της αράχνης (<i>cobwebbing method</i>)- της...	15
2.3	Γραφική παράσταση της N ως προς t για διάφορες τιμές του N_0 .	17
2.4	Γραφική παράσταση της $\frac{dN}{dt}$ ως προς N .	19
2.5	Λόγω της μοναδικότητας της λύσης, είναι αδύνατον μια λύση με $N_0 > k$...	21
2.6	Διάφοροι τύποι ευστάθειας/αστάθειας ενός σ.ι...	25
3.1	Γραφική παράσταση των λύσεων του (ℓ)...	29
3.2	Διαβαθμίσεις της επίδρασης Allee.	29
3.3	Γραφική παράσταση της $\frac{dN}{dt}$ ως προς N .	31
3.4	Γραφική παράσταση της N ως προς μη αρνητικά t για διάφορες τιμές του N_0 .	32
3.5	Τύποι Holling συναρτησιακών αποκρίσεων και οι γενικευμένοι ανάλογοι...	38
4.1	Διάγραμμα ρών του μοντέλου (4.1).	44
4.2	Για να αποκλείσουμε το σενάριο η (x^\diamond, y^\diamond) να τέμνει τους άξονες...	46
4.3	Γεωμετρία των f και των καμπυλών στάθμης.	49
4.4	Διάγραμμα φάσης του (PP).	49
4.5	Διάγραμμα ρών του μοντέλου (4.1) με συγκομιδή.	51
4.6	Γράφημα μιας καμπύλης στάθμης του μοντέλου (4.1)...	51
4.7	Αριθμητική επίλυση του (PP) για θετικούς χρόνους...	52
4.8	Χαρακτηρισμός του σ.ι. $0 \in \mathbb{R}^2$ για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda_1 \neq \lambda_2$.	53
4.9	Αστεροειδής κόμβος (<i>star node</i>).	54
4.10	Νόθος κόμβος (<i>degenerate node</i>).	55
4.11	Χαρακτηρισμός του σ.ι. $0 \in \mathbb{R}^2$ για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.	56
4.12	Εξάρτηση του διαγράμματος φάσης από την μεταβολή της $\det \mathcal{A}$ ως προς το $\text{tr} \mathcal{A}$.	57
5.1	Ποιοτική αναπαράσταση του χώρου φάσης του $(PP_{v2.1})$ για $k \neq \frac{\gamma}{\delta}$...	64
5.2	Διάγραμμα διακλάδωσης $y^* \left(y^* - \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k} \right) \right) = 0$.	65
5.3	Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(PP_{v2.1})$, όταν $k < \frac{\gamma}{\delta}$.	68
5.4	Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.1})$ για θετικούς χρόνους για διάφορες τιμές του k ...	69
5.5	Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu \pm y^* = 0$.	72
5.6	Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu \pm y^{*2} = 0$.	73
5.7	Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y^* \pm y^{*2} = 0$.	73

5.8	Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y^* \pm y^{*3} = 0$.	74
6.1	Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(PP_{v2.2})$.	80
6.2	Ποιοτική αναπαράσταση του χώρου φάσης του $(PP_{v2.2})$ για $\frac{\gamma}{\delta} \notin \left\{k_2, \frac{k_1+k_2}{2}\right\}$...	83
6.3	Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για θετικούς χρόνους...	85
6.4	(συνέχεια του Σχήματος 6.3) Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για μη θετικούς χρόνους...	86
6.5	Συμπλήρωση του Σχήματος 6.2γ.	86
6.6	(συνέχεια του Σχήματος 6.4α) Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για θετικούς χρόνους...	87
6.7	(συνέχεια του Σχήματος 6.4α) Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για θετικούς χρόνους...	88
6.8	Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y_1^* - y_2^* + y_1^* (y_1^{*2} + y_2^{*2}) = 0 = y_1^* + \mu y_2^* + y_2^* (y_1^{*2} + y_2^{*2})$.	91
6.9	Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y_1^* - y_2^* - y_1^* (y_1^{*2} + y_2^{*2}) = 0 = y_1^* + \mu y_2^* - y_2^* (y_1^{*2} + y_2^{*2})$.	92
7.1	Χρονοδιάγραμμα λοίμωξης που περιγράφει τη δυναμική του παθογόνου παράγοντα...	99
7.2	Διάγραμμα ροών του μοντέλου (7.3).	101
7.3	Το εφικτό σύνολο του (SIR) και του (SI) .	101
7.4	Αδρή απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(S^{\geq} I^{\geq})$ και του (SI) .	103
7.5	Γεωμετρία των f και των καμπυλών στάθμης.	105
7.6	Διαγράμματα φάσης του (SI) .	105
7.7	Σχηματική απεικόνιση των επιτρεπτών δ σε σχέση με τα ε για την ευστάθεια των σ.ι....	106
7.8	Δεδομένης της (**), το γράφημα της εκτίμησης $\frac{dR}{dt} \approx \frac{\alpha^2 \gamma^3}{2S_0 \beta^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \phi\right)$...	111
7.9	Γραφήματα των S, I και R για μη αρνητικούς χρόνους, για ίδια λοιμώδη...	112
7.10	Γραφήματα του I για μη αρνητικούς χρόνους, για ίδιες αρχικές συνθήκες...	113
7.11	Η τροχιά της λύσης για θετικούς χρόνους στο επίπεδο φάσης του (SI) ...	114
7.12	Αριθμητική και αναλυτική εκτίμηση του R και του $\frac{dR}{dt}$...	115
8.1	Διάγραμμα ροών του μοντέλου (8.1).	120
8.2	Διάγραμμα διακλάδωσης για την $I^* \left(I^* - \left(\frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta} \right) \right) = 0$.	123
8.3	Μπορούμε να διανθίσουμε το διάγραμμα διακλάδωσης...	125
8.4	Γραφήματα των S, I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς...	126
8.5	Γραφήματα των S, I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς...	127
8.6	Γραφήματα των S, I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς...	128
8.7	Γραφήματα των S, I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς...	129
8.8	Παραδείγματα ω -οριακών συνόλων...	130
8.9	Χονδρικά, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.7, κάθε ομοκλινής τροχιά...	131
8.10	Παραδείγματα m -συνεκτικών συνόλων στο επίπεδο, με $m \in \mathbb{N}_0$.	131
8.11	Χονδρικά, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.8, μεταξύ δύο διαδοχικών...	132
9.1	Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (SC) ...	146
9.2	Το εφικτό σύνολο Ω_ε του $(SC\alpha_s)$.	149
9.3	Το εφικτό σύνολο Ω του $(SC\alpha_r)$.	154
9.4	Προσέγγιση για την κινητική της χημικής αντίδρασης (9.1) υπό την ισχύ της $(sQSSA)$...	156
9.5	Προσέγγιση για την κινητική της χημικής αντίδρασης (9.1) υπό την ισχύ της $(rQSSA)$...	157
9.6	Σύγκριση του αποτελέσματος της αριθμητικής επίλυσης του (SC) ...	158
9.7	Σύγκριση του αποτελέσματος της αριθμητικής επίλυσης του (SC) ...	160
9.8	Γραφική παράσταση της ϕ .	161
9.9	Γραφική παράσταση των κλάδων W_{-1} (κόκκινο) και W_0 (μπλε).	162
9.10	Βασικές έννοιες κατά τη μελέτη τοπικά προσεγγιστικών λύσεων.	163

10.1	Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(L1\alpha)$.	170
10.2	Η απεικόνιση των βημάτων της συλλογιστικής του επιχειρήματος για τον αποκλεισμό...	172
10.3	Αριθμητική επίλυση του $(L1\alpha)$ για θετικούς χρόνους. Συγκεκριμένα, το αντίστοιχο...	174
10.4	Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(HS\alpha)$.	176
10.5	Περί μη φραγμένων θετικών ημιτροχιών στον χώρο φάσης του $(HS\alpha)$.	178
10.6	Η γεωμετρία των Ω_k^\pm , και συγκεκριμένα, αυτή της Ω_1 ...	179
10.7	Στην οριακή περίπτωση $k = 3$ υπάρχει μοναδικό σημείο...	180
10.8	Είναι αδύνατη η ύπαρξη κλειστής τροχιάς στον χώρο φάσης του $(HS\alpha)$ όταν $k \geq 3$.	181
10.9	Αριθμητική κατασκευή, για θετικούς χρόνους, του διαγράμματος φάσης του $(HS\alpha)$...	183
10.10	Αριθμητική κατασκευή, για θετικούς χρόνους, του διαγράμματος φάσης του $(HS\alpha)$...	184
10.11	Αριθμητική κατασκευή, για θετικούς χρόνους, του διαγράμματος φάσης του $(HS\alpha)$...	185
10.12	Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(S\alpha)$, για διάφορες τιμές του k_* .	186
10.13	Η γεωμετρία των χωρίων θετικής παγίδευσης για το $(S\alpha)$.	190
10.14	Υπάρχουν τουλάχιστον ένας εσωτερικά και ένας εξωτερικά θετικά ευσταθείς...	191
10.15	Αριθμητική επίλυση του $(S\alpha)$ για θετικούς χρόνους και για διάφορες τιμές του $k \leq \kappa(k_*)$...	193
10.16	Αριθμητική επίλυση του $(S\alpha)$ για θετικούς χρόνους και για διάφορες τιμές του $k > \kappa(k_*)$...	194
10.17	Αριθμητική επίλυση του $(S\alpha)$ για θετικούς χρόνους και για διάφορες τιμές του $k > 0$...	195
10.18	Παραδείγματα χωρίων θετικής παγίδευσης στο επίπεδο.	196
10.19	Σύμφωνα με το Θεώρημα 10.13, εντός κάθε 1-συνεκτικού χωρίου θετικής παγίδευσης...	197
11.1	Η διάχυση σωματιδίων σε δοχείο νερού αποτελεί φαινόμενο που εξελίσσεται χωροχρονικά.	200
11.2	Μοντέλο μονοδιάστατου τυχαίου περιπάτου.	200
11.3	Παράδειγμα της γεωμετρίας φραγμένου παραβολικού συνόλου...	206
11.4	Η μορφή της τετραγωνικής καμπύλης $ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2 + 2fx_1 + 2gx_2 + e = 0$...	207
12.1	Γραφική παράσταση της επιλεγμένης αρχικής συνθήκης, N_0 , όπως στην (12.6).	218
12.2	Γραφική παράσταση της προσέγγισης μιας λύσης, N , του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$...	220
12.3	Ο δείκτης μοτίβου της $N(\cdot, t)$ για διάφορα $t > 0$.	221
12.4	Γραφική παράσταση της προσέγγισης του εύρους του πληθυσμού...	222
12.5	Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	223
12.6	Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	224
12.7	Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	224
13.1	Η επιβίωση/εξαφάνιση του πληθυσμού στην περίπτωση αφιλόξενου συνόρου ($\gamma = 1$)...	235
13.2	Για δεδομένες παραμέτρους $D_0 > 0$ και $r_0 > 0$ υπάρχει μοναδικό κρίσιμο μήκος...	235
13.3	Εξάρτηση του κρίσιμου μήκους, l_{crit} , από τις άλλες δύο παραμέτρους.	236
13.4	Για $\gamma = 1$, η λύση (13.1) ομοιόμορφα θα εμφανίζει τελικά μοτίβο...	237
13.5	Για $\gamma = 0$, η λύση (13.1) ομοιόμορφα δεν θα εμφανίζει τελικά μοτίβο.	238
13.6	Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, l, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	239
13.7	Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, l, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	240
13.8	Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, l, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	241
13.9	Παράδειγμα της δράσης των τελεστών E και Π .	248
13.10	Παράδειγμα των συναρτήσεων $f_{j, even/odd}$, για $j \in \{1, 2\}$.	256
14.1	Γραφήματα των f και F .	269
14.2	Περίπτωση $\gamma = 1$. Γραφήματα των συναρτήσεων h και h^{-1} ...	274
14.3	Περίπτωση $\gamma = 1$. Διάγραμμα διακλάδωσης, τύπου σταθερής κατάστασης...	277
14.4	Αριθμητική επίλυση του (ℓ_Δ) με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	278
14.5	Αριθμητική επίλυση του (ℓ_Δ) με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)...	279

14.6 Αριθμητική επίλυση του (ℓ_Δ) με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6)... 279

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.1	Φάσεις μελέτης ενός ΠΑΤ.	2
2.1	Ποιοτική ανάλυση της συνάρτησης N	19
3.1	Ποιοτική ανάλυση της συνάρτησης N	31
3.2	Αλληλεπίδραση δύο πληθυσμών, N_1 και N_2 , με βάση την επίδραση που έχει στον καθένα.	35
7.1	Ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του (SI)	106
8.1	Ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του $(SI\mu)$	122
8.2	Ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του $(SI\mu)$	123
9.1	Επιλογή αριθμητικών τιμών των σταθερών και των αρχικών συνθηκών...	159
9.2	Επιλογή αριθμητικών τιμών των σταθερών και των αρχικών συνθηκών...	159
10.1	Σύγκριση του (10.6) με το (10.10).	188

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΟΜΕΥΣΕΩΝ - ΑΚΡΩΝΥΜΙΩΝ

αν	αν και μόνον αν
βλ.	βλέπε
δηλ.	δηλαδή
ΔΕΥ	Διαφορική Εξίσωση με Υστέρηση
κ.ά.	και άλλα
κ.λπ.	και λοιπά
κ.ο.κ.	και ούτω καθεξής
ΜΔΕ	Μερική Διαφορική Εξίσωση
όταν	όταν και μόνον όταν
π.χ.	παραδείγματος χάριν
ΠΑΣΤ	Πρόβλημα Αρχικών Συνοριακών Τιμών
ΠΑΤ	Πρόβλημα Αρχικών Τιμών
ΠΣΤ	Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών
σ.ι.	σημείο ισορροπίας
ΣΔΕ	Συνήθης Διαφορική Εξίσωση

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μερικοί σύγχρονοι μαθηματικοί απορρίπτουν τη Φυσική ως “Εφαρμοσμένα Μαθηματικά” και έτσι αγνοούν τον θεμελιώδη ρόλο που έπαιξε η Φυσική στην ανάπτυξη σημαντικών εννοιολογικών ιδεών στα Θεωρητικά Μαθηματικά. Ωστόσο, είναι ευρέως γνωστό ότι η μελέτη της τροχιάς των πλανητών οδήγησε στην ανάπτυξη του πεδίου των Δυναμικών Συστημάτων, ενώ η ενδεδειγμένη μελέτη των φαινομένων διάδοσης θερμότητας και κυμάτων σε διαφορετικά μέσα διάδοσης οδήγησαν στην ανάπτυξη του κλάδου των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων. Στη σύγχρονη εποχή, η Κρυσταλλογραφία ήταν εν μέρει υπεύθυνη για την ανάπτυξη της Θεωρίας Ομάδων, ενώ η Κβαντομηχανική αποτέλεσε σημαντικό ερέθισμα για την περαιτέρω ανάπτυξη του κλάδου της Συναρτησιακής Ανάλυσης μεταξύ άλλων.

Από τα μέσα του προηγούμενου αιώνα υπήρξε έκρηξη επιστημονικής γνώσης στο πεδίο της Βιολογίας. Συνεπώς η Βιολογία αποτέλεσε τη νέα Φυσική για τα Μαθηματικά, δηλαδή μια πηγή νέων μαθηματικών προκλήσεων και προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα μετά το πρώτο μισό του 20ου αιώνα υπήρξαν τρεις κύριες επιρροές της Βιολογίας στα Μαθηματικά. Η Θεωρία της Εξέλιξης και της Γενετικής τόνωσαν τα πεδία της Στατιστικής, των Πιθανοτήτων και των Στοχαστικών Διαδικασιών. Οι εξισώσεις Hodgkin-Huxley και η εργασία του Turing για τη μορφογένεση ενέπνευσαν την μαθηματική έρευνα στις εξισώσεις αντίδρασης-διάχυσης, στη Μαθηματική Προτυποποίηση και στα οδεύοντα κύματα. Η αλληλούχιση και η ανακατασκευή του ανθρώπινου γονιδιώματος δημιούργησαν νέα ερωτήματα στη Θεωρία των Πιθανοτήτων, τη Στατιστική και τη Συνδυαστική. Είναι αξιοσημείωτο ότι και οι τρεις αυτές σημαντικές επιρροές συνεχίζονται ακόμη και σήμερα.

Ήταν ξεκάθαρο για τους μαθηματικούς ότι η τεράστια ανάπτυξη των Θεωρητικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών τον εικοστό αιώνα θα έβρισκε γόνιμες και σημαντικές εφαρμογές στα βιολογικά συστήματα. Η ανάπτυξη αυτών των εφαρμογών ξεκίνησε αργά εν μέρει λόγω της αντίστασης των βιολόγων και εν μέρει επειδή η συλλογή αποκαλυπτικών/αναλυτικών δεδομένων, ιδίως σε μικροσκοπικό επίπεδο, ήταν δύσκολη. Ωστόσο, τα τελευταία δεκαπέντε χρόνια, η αντίσταση αυτή μειώθηκε και η ανάπτυξη νέων εργαλείων μέτρησης (συχνά από φυσικούς) οδήγησε σε μια έκρηξη εφαρμογών διαφόρων κλάδων των Μαθηματικών και της Στατιστικής σε βιολογικά προβλήματα. Δεν έχουν χρησιμοποιηθεί μόνο τα παραδοσιακά εργαλεία των Συνήθων και Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, αλλά και η Θεωρία Γραφημάτων έχει εφαρμοστεί στην Επιδημιολογία και τα Γονιδιακά Δίκτυα. Η Τοπολογία έχει αρχίσει να χρησιμοποιείται για την κατανόηση της καρδιακής μαρμαρυγής και η Αλγεβρική Τοπολογία για την κατανόηση των Νευροεπιστημών. Η Μορφολογική (Fractal) Γεωμετρία χρησιμοποιείται για την ανάλυση της δενδριτικής διακλάδωσης και οι γεωμετρικές έννοιες είναι θεμελιώδεις για την κατανόηση της αναδίπλωσης των πρωτεϊνών και του σχήματος των προσδεδεδμένων πρωτεϊνών. Τελευταίως, ομολογικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τον χαρακτηρισμό της συμπεριφοράς μεγάλων συνόλων δεδομένων και Δυναμικών Συστημάτων. Η Συνδυαστική χρησιμοποιείται για την κατανόηση της δευτερογενούς δομής του RNA. Η Θεωρία Πιθανοτήτων, οι Στοχαστικές Διαδικασίες και η Θεωρία Διακλαδώσεων αποκτούν κεντρικό ρόλο στις βιολογικές εφαρμογές και αλγεβρικά εργαλεία

έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται στις Νευροεπιστήμες και στην ανάλυση νευροδικτύων.

Από την άλλη πλευρά, είναι γεγονός ότι τις τελευταίες δεκαετίες οι μαθηματικοί δυσκολεύονται σε πολύ μεγάλο βαθμό να πείσουν το ευρύ κοινό για την “ομορφιά” και τη θεμελιώδη ισχύ των Μαθηματικών. Και, εδώ, η Μαθηματική Βιολογία συνεισφέρει και θα συνεχίσει να συνεισφέρει πραγματικά. Το ευρύ κοινό δεν μπορεί να κατανοήσει τα Μαθηματικά, αλλά σίγουρα μπορεί να κατανοήσει τις εφαρμογές τους. Οι παραδοσιακές σημαντικές εφαρμογές των Μαθηματικών αφορούν τη Φυσική, από τις κινήσεις των πλανητών μέχρι την Κβαντομηχανική, την πυρηνική σχάση και τη βόμβα, και τη ροή ρευστών πάνω από τα φτερά των αεροπλάνων. Δυστυχώς, οι περισσότεροι άνθρωποι απλώς δεν ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για τη Φυσική (ναι ο Βολταίρος είχε δίκιο), οπότε αναγνωρίζουν τη σημασία της, αλλά δε συγκινούνται και πολύ. Τι πιστεύει το ευρύ κοινό για τις εφαρμογές της Θεωρίας Αριθμών στην Κρυπτογραφία; Και πάλι, όλοι βλέπουν ότι είναι σημαντικό να έχουμε ασφαλείς επικοινωνίες, αλλά δεν ενδιαφέρονται ιδιαίτερα για το πώς γίνεται αυτό. Αλλά η Βιολογία είναι μια διαφορετική ιστορία. Όλοι ενδιαφέρονται για το σώμα τους και για το πώς λειτουργεί. Όλοι θέλουν να είναι απαλλαγμένοι από ασθένειες και να ζουν για πολύ καιρό. Όλοι (καλά, σχεδόν όλοι) γνωρίζουν ότι πρέπει να είμαστε καλοί διαχειριστές των οικοσυστημάτων μας, αλλιώς εμείς και τα παιδιά μας είμαστε καταδικασμένοι. Και αυτή η άρρηκτη σχέση της Μαθηματικής Βιολογίας με τέτοιου είδους εφαρμογές έχει τη δυνατότητα, μακροπρόθεσμα, να βελτιώσει σημαντικά την αντίληψη του κοινού για τα Μαθηματικά.

Από τη μέχρι τώρα διδακτική μου εμπειρία στο αντικείμενο, έχω καταλήξει στο συμπέρασμα ότι στους περισσότερους προπτυχιακούς φοιτητές Μαθηματικών αρέσει πραγματικά η Μαθηματική Βιολογία. Ο λόγος είναι ότι ενθουσιάζονται όταν βλέπουν τις τεχνικές που μαθαίνουν στα προπτυχιακά τους μαθήματα, είτε πρόκειται για Λογισμό, είτε για Θεωρία Γραφημάτων, είτε για Διαφορικές Εξισώσεις, είτε για Θεωρία Πιθανοτήτων, να εφαρμόζονται σε ζητήματα που τους ενδιαφέρουν. Δεν υπάρχει τίποτα κακό με τις παραδοσιακές εφαρμογές στη Φυσική και τη Μηχανική, αλλά οι περισσότερες από τις εφαρμογές τις οποίες μπορεί να μελετήσει κάποιος σπουδαστής με τα προπτυχιακά μαθηματικά είναι εφαρμογές του 19ου (ή ακόμη και του 18ου) αιώνα, κάτι το οποίο είναι εμφανές στους φοιτητές. Αφετέρου, στη Βιολογία μπορούν να δουν ότι τα Μαθηματικά χρησιμοποιούνται για την κατανόηση φαινομένων όπου η πλήρης επιστημονική εικόνα δεν είναι κατανοητή από κανέναν. Έτσι, παρόλο που είναι οπλισμένοι μόνο με μερικά προπτυχιακά μαθήματα, αισθάνονται ότι βρίσκονται στην αιχμή του δόρατος, και -κατά μία έννοια- είναι. Τα βιολογικά συστήματα είναι τόσο ποικίλα και διαφορετικά και η Μαθηματική Βιολογία είναι τόσο πρόσφατη, ώστε είναι σχετικά εύκολο να βρει κανείς ενδιαφέρουσες, συναρπαστικές “ερευνητικές” εργασίες στις οποίες τα Μαθηματικά των προπτυχιακών σπουδών μπορούν να συμβάλουν πραγματικά. Και δε χρειάζεται να είναι κανείς επιστήμονας της Μαθηματικής Βιολογίας (μαθηματικός βιολόγος) για να δημιουργήσει και να καθοδηγήσει τέτοια έργα. Αν επιλέξει κάποιος οποιοδήποτε θέμα Βιολογίας (όπως “καρκίνος του προστάτη”, “εξέλιξη της γρίπης”, “ανάπτυξη του εμβρύου”) και προσθέσει τις λέξεις “μαθηματικό πρότυπο (μοντέλο)”, μια απλή αναζήτηση στο διαδίκτυο θα δώσει πολλές δημοσιεύσεις που είναι προσβάσιμες σε προπτυχιακούς φοιτητές. Η ανάγνωση μιας ή δύο τέτοιων εργασιών, η εκμάθηση του βιολογικού υπόβαθρου και η επεξεργασία των απαιτούμενων Μαθηματικών θα αποτελέσουν συνήθως τον πυρήνα μιας αρκετά καλής προπτυχιακής διπλωματικής εργασίας.

Εν κατακλείδι ο ενθουσιασμός των προπτυχιακών φοιτητών για τη Μαθηματική Βιολογία είναι μια πραγματική ευκαιρία για τα Τμήματα Μαθηματικών να εισαγάγουν νέες δευτερεύουσες ή/και κύριες κατευθύνσεις σπουδών που να σχετίζονται με το συγκεκριμένο γνωστικό αντικείμενο. Έτσι ίσως καταφέρουν να προσελκύσουν περισσότερους και καλύτερου επιπέδου σπουδαστές που διαφορετικά θα διάλεγαν να σπουδάσουν τις Επιστήμες του Μηχανικού. Ωστόσο, για να προσελκύσει κανείς νέους φοιτητές πρέπει να σχεδιάσει μαθήματα και συγγράμματα που να είναι ενδιαφέροντα για τους πρωτοετείς και δευτεροετείς φοιτητές, ακόμη και αν δεν έχουν ολοκληρώσει τα παραδοσιακά προαπαιτούμενα μαθήματα για τη μαθηματική ειδίκευση, όπως π.χ. τον Απειροστικό Λογισμό του πρώτου έτους, τον Λογισμό Πολλών Μεταβλητών και τη Γραμμική Άλγεβρα.

Τα παραπάνω νομίζω ότι αναδεικνύουν γλαφυρώς την αναγκαιότητα για τη εισαγωγή στην ελληνόγλωσση βιβλιογραφία, για τους σπουδαστές του ελληνικού πανεπιστημίου, ενός συγγράμματος στο γνωστικό αντικείμενο της Μαθηματικής Βιολογίας. Τον παρόν σύγγραμμα εξυπηρετεί με τον καλύτερο τρόπο αυτόν τον

σκοπό, κρατώντας επίσης την απαραίτητη ισορροπία μεταξύ του μαθηματικού και βιολογικού περιεχομένου. Επίσης, το γεγονός ότι το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο παρουσιάζεται στο τέλος κάθε κεφαλαίου, μετά τη μελέτη του βιολογικού προβλήματος, αναδεικνύει με τον καλύτερο τρόπο τη σημασία των απαραίτητων μαθηματικών εργαλείων. Διευκολύνει έτσι, από παιδαγωγικής απόψεως, τον αναγνώστη να συνδέσει με άμεσο τρόπο τη μελέτη του εκάστοτε βιολογικού προβλήματος με τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες. Μια ακόμη σημαντική αρετή του παρόντος συγγράμματος είναι η πλούσια βιβλιογραφία, που σκοπεύει να υποκινήσει τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη σε περαιτέρω μαθηματική μελέτη των υπό εξέταση βιολογικών προβλημάτων. Τέλος ένα άλλο σημαντικό χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου συγγράμματος είναι η αυτοτέλεια του όσον αφορά τη συμπερίληψη και παρουσίαση όλων των προαπαιτούμενων Μαθηματικών. Είμαι λοιπόν πεπεισμένος ότι το παρόν σύγγραμμα θα αποτελέσει ένα σημαντικό εγχειρίδιο όχι μόνο για φοιτητές των Τμημάτων Μαθηματικών, αλλά και για σπουδαστές άλλων θετικών επιστημών με ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά και τη Βιολογία.

Νίκος Ι. Καβαλλάρης
Πανεπιστήμιο Karlstad, Σουηδία
Κριτικός Αναγνώστης

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν και η Μαθηματική Βιολογία θεωρείται αρκετά σύγχρονη, ήδη από το 1202 ο Fibonacci είχε εισαγάγει την ομώνυμη ακολουθία για την επίλυση ενός προβλήματος στην Οικολογία (περιγραφή της αύξησης του πληθυσμού των κουνελιών). Έπειτα, ήταν το 1748 όταν ο Euler χρησιμοποίησε γεωμετρικές ακολουθίες (εκθετική αύξηση) για να μελετήσει τις ανθρώπινες κοινωνίες. Μάλιστα, ένα από τα εφαρμοσμένα προβλήματα που επιλύθηκε από τον Euler ήταν να επαληθεύσει ότι ο αριθμός των ανθρώπων που ζούσαν στη Γη στην εποχή του, μπορούσε να βρεθεί με έναν δεδομένο ρεαλιστικό αναπαραγωγικό ρυθμό από 6 μόνο άτομα (τους τρεις γιους του Νώε και τις συζύγους τους) μετά τον Κατακλυσμό του 2350 π.Χ. Ωστόσο, η Μαθηματική Βιολογία γνώρισε ιδιαίτερη άνθηση από τον 17ο αιώνα και μετά, κατόπιν των θεμελιωδών εργασιών των Newton και Leibniz στον Απειροστικό Λογισμό. Συγκεκριμένα, ήταν τον 18ο αιώνα όπου ο D. Bernoulli εισήγαγε το επιδημιολογικό του μοντέλο για την ευλογιά, ο Malthus την κεντρική ιδέα του εκθετικού μοντέλου αύξησης στην Οικολογία και ο Verhulst, τον 19ο αιώνα, το λογιστικό του μοντέλο. Εκτός από τους κλασικούς τομείς της Οικολογίας και της Επιδημιολογίας, η σύγχρονη Μαθηματική Βιολογία περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, τη μελέτη προβλημάτων από τη Βιοχημική Κινητική, τη Γενετική, την Κυτταρική Βιολογία, τη Μορφογένεση, τη Ογκολογία και τις Νευροεπιστήμες. Για την ιδιαίτερη βαρύτητα που ολοένα αποκτά η διασύνδεση Μαθηματικών και Βιολογίας χαρακτηριστικός είναι ο τίτλος *“Τα Μαθηματικά είναι το επόμενο μικροσκόπιο της Βιολογίας, αλλά καλύτερο. Η Βιολογία είναι η επόμενη Φυσική των Μαθηματικών, αλλά καλύτερη”* ενός άρθρου για το ευρύ κοινό του J. E. Cohen, [1].

Η εργασία *“Η παράλογη αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες”*, [2], του τιμηθέντα με Βραβείο Νομπέλ (1963) φυσικού E. Wigner, έχει προκαλέσει και εμπνεύσει εκτεταμένα, καρποφόρα και σημαντική επιστημολογική συζήτηση σ’ ένα ευρύ φάσμα επιστημονικών κλάδων (π.χ., στην Επιστήμη των Υπολογιστών από τον Hamming, [3], στη Μοριακή Βιολογία από τον Lesk, [4], στη Φυσική από τον Tegmark, [5], στα Μαθηματικά από τους Grattan-Guinness, [6], Klainerman, [7]). Ο Wigner παρατηρεί ότι η μαθηματική δομή μιας φυσικής θεωρίας συχνά δείχνει τον δρόμο για περαιτέρω πρόοδο σε αυτή τη θεωρία, αλλά ακόμα και για εμπειρικές προβλέψεις. Ξεκινά με την κοινή πεποίθηση ότι οι μαθηματικές έννοιες έχουν εφαρμογή πολύ πέρα από το πλαίσιο στο οποίο αναπτύχθηκαν αρχικά: γράφει *“είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι η μαθηματική διατύπωση της συχνά ακατέργαστης εμπειρίας του φυσικού οδηγεί σε έναν απίστευτο αριθμό περιπτώσεων σε μια εκπληκτικά ακριβή περιγραφή μιας μεγάλης κατηγορίας φαινομένων ... Το θαύμα της καταλληλότητας της γλώσσας των Μαθηματικών για τη διατύπωση των νόμων της Φυσικής είναι ένα υπέροχο δώρο, που ούτε καταλαβαίνουμε ούτε αξιζούμε. Θα πρέπει να είμαστε ευγνώμονες γι’ αυτό και να ελπίζουμε ότι θα παραμείνει έγκυρη σε μελλοντικές έρευνες και ότι θα επεκταθεί, καλώς ή κακώς, προς ευχαρίστησή μας, αν και ίσως και σε αμηχανία μας, σε μεγάλους κλάδους μάθησης.”* Σε αντίθεση με την *“παράλογη αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες”*, η χρησιμότητα των μαθηματικών μεθόδων σε άλλους τομείς εκτός της Φυσικής -ιδιαίτερα στη Βιολογία- έχουν συχνά αντιμετωπιστεί με σκεπτικισμό. Ένας από τους κύριους λόγους αυτής της παρανόησης είναι ένα λανθασμένο επιχείρημα σχετικά με

την πολυπλοκότητα των βιολογικών συστημάτων. Ο Wigner περιγράφει την κατάπληξη και τον θαυμασμό του σχετικά με τη δυνατότητα εφαρμογής των Μαθηματικών στη Φυσική. Ωστόσο, όταν πρόκειται για περίπλοκα φαινόμενα στη σφαίρα της Βιολογίας, είναι πιο προσεκτικός: “Μια πολύ πιο δύσκολη και προκαλούσα σύγχυση κατάσταση θα προέκυπτε αν μπορούσαμε, κάποια μέρα, να δημιουργήσουμε μια θεωρία για τα φαινόμενα της συνείδησης ή της βιολογίας, η οποία θα ήταν τόσο συνεκτική και πειστική όσο οι σημερινές μας θεωρίες για τον άψυχο κόσμο”. Με παρόμοιο τρόπο, ο κορυφαίος μαθηματικός (ο οποίος ήταν και διακεκριμένος επιστήμονας στη Φυσιολογία) I. M. Gelfand είχε αναφερθεί στην “παράλογη αναποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στη Βιολογία”, [4]. Γιατί όμως τα Μαθηματικά πρέπει να είναι λιγότερο αποτελεσματικά στη Βιολογία; Μια κοινή αντίληψη είναι ότι η πολυπλοκότητα της Βιολογίας είναι υπεύθυνη για αυτό. Τα Μαθηματικά επιδιώκουν την απλότητα και την κομψότητα, ενώ ο “ακατάστατος” κόσμος της Βιολογίας αφθονεί με περίπλοκες περιγραφές μοριακών λεπτομερειών. Αυτό δεν είναι ένδειξη ότι τα Μαθηματικά είναι αναποτελεσματικά στη Βιολογία, απλά μόνο τονίζει την πλούσια ποικιλομορφία των βιολογικών συστημάτων. Ενώ η Μοριακή Βιολογία έχει εντοπίσει και μελετήσει τα βασικά συστατικά στοιχεία στο παρελθόν, με περιορισμένη χρήση μαθηματικών τεχνικών, η Βιολογία Συστημάτων αντιμετωπίζει τώρα τις αλληλεπιδράσεις και τη δυναμική αυτών των στοιχείων (και) με αυστηρά μαθηματικά εργαλεία. Πρόσφατα έχει επικρατήσει η επιστημολογική άποψη κατά την οποία το επιχείρημα της πολυπλοκότητας συνιστά πλάνη, (βλ., π.χ., [8]). Τα Μαθηματικά παρέχουν τα κατάλληλα μέσα για την αντιμετώπιση πολύπλοκων βιολογικών συστημάτων σε διάφορα επίπεδα οργάνωσης, είναι λοιπόν “παράλογα αποτελεσματικά” και στη Βιολογία.

Μια σημαντική θέση στη Φιλοσοφία της Βιολογίας ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχουν βιολογικοί νόμοι, καθώς οποιαδήποτε φαινομενικά βιολογική γενίκευση είναι είτε πολύ τυχαία, ή απλά προσομοιάζει σε γεγονότα, για να ονομαστεί νόμος, είτε είναι απλώς αναγόμενη σε φυσικούς νόμους που ρυθμίζουν ηλεκτρικές και χημικές αλληλεπιδράσεις που λαμβάνουν χώρα μεταξύ φυσικών συστημάτων. Όμως υπάρχει μια κάπως παραμελημένη πτυχή του σχετικού διαλόγου, που αναδεικνύεται άμεσα από την ολοένα αυξανόμενη σημασία των μαθηματικών μοντέλων για τα βιολογικά φαινόμενα: η πεποίθηση ότι υπάρχουν όντως νόμοι και στη Βιολογία και ότι η διαφορά τους σε σχέση με τους φυσικούς νόμους έγκειται στη σταθερότητα, το ενδεχόμενο του απρόβλεπτου, ή την ανθεκτικότητα και αναφέρεται μόνο στον βαθμό ισχύος (π.χ. το διάστημα εμπιστοσύνης) και όχι στο είδος (βλ., π.χ., [9]). Η εκπληκτική αποτελεσματικότητα των μαθηματικών μοντέλων στην πρόβλεψη και την εξήγηση φυσικών φαινομένων, μπορεί να ληφθεί υπόψη μόνο αν υπάρχουν φυσικοί νόμοι στον φυσικό κόσμο, νόμοι στους οποίους αναφέρονται, ή τους οποίους αντιπροσωπεύουν εν μέρει, τα μοντέλα. Η θέση αυτή βασίζεται στην άποψη ότι η ύπαρξη μαθηματικών μοντέλων που μας επιτρέπουν να προβλέψουμε και να εξηγήσουμε φυσικά φαινόμενα αρκεί για την ύπαρξη φυσικών νόμων (βλ., π.χ., [10]). Η άποψη ότι στη Βιολογία δεν υπάρχουν νόμοι φαίνεται να οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι η Μαθηματική Βιολογία δεν έχει διεισδύσει αρκετά στην κοινότητα των φιλοσόφων της Βιολογίας. Τα αποτελέσματα της Μαθηματικής Βιολογίας, π.χ. στην Πληθυσμιακή Βιολογία και την Οικολογία (βλ., π.χ., [11]), συνιστούν απόλυτα πειστικά επιχειρήματα για την ύπαρξη βιολογικών νόμων.

Τα Μαθηματικά και η Οικολογία μοιράζονται μια μακρά συνύπαρξη και η Μαθηματική Οικολογία είναι ένας από τους πιο αναπτυσσόμενους τομείς της Μαθηματικής Βιολογίας. Στη δεκαετία του 1930, οι ιδέες του Lotka προωθήθηκαν από διάφορους επιστήμονες, αρχικά από τον Volterra, [12], και τον Kostitzin, [13], και έτσι ουσιαστικά εισήχθη η Μαθηματική Οικολογία. Η Γενετική είναι ένα άλλο παράδειγμα στενής σχέσης της Βιολογίας με τα Μαθηματικά: η ιστορία της ξεκινά (τουλάχιστον) από τη δεύτερη δεκαετία του περασμένου αιώνα, όταν ο Haldane, [14], δημοσίευσε τη σημαντική εργασία του για τη μαθηματική θεωρία της Φυσικής και Τεχνητής Επιλογής.

Η Φιλοσοφία μπορεί να φωτίσει τη μαθηματική μοντελοποίηση και την αντιπαράθεση της μοντελοποίησης και των εμπειρικών δεδομένων. Τρεις φιλοσοφικές παραδόσεις (Συντακτική, Σημασιολογική και Πραγματολογική) της δομής των επιστημονικών θεωριών έχουν μελετηθεί και έχει δειχθεί πώς η καθεμία επεξηγεί τη Μαθηματική Μοντελοποίηση στη Βιολογία, [15].

Τα Μαθηματικά συχνά θεωρείται ότι διαδραματίζουν έναν από τους εξής δύο ρόλους στις εμπειρικές επιστήμες: είτε αντιπροσωπεύουν εμπειρικά φαινόμενα, είτε ερμηνεύουν αυτά τα φαινόμενα επιβάλλοντας περιορισμούς σε αυτά. Πρόσφατα, [16], προτάθηκε ένας τρίτος διακριτός ρόλος που είναι διάχυτος στην επιστημο-

νική πρακτική. Ονομάζεται “γεφυρωτικός” ρόλος των Μαθηματικών και σύμφωνα μ’ αυτόν τα Μαθηματικά λειτουργούν ως συνδετικό σχήμα στους ερμηνευτικούς μας συλλογισμούς για το γιατί και για το πώς δύο διαφορετικές περιγραφές ενός εμπειρικού φαινομένου σχετίζονται μεταξύ τους. Ως παραδείγματα έχουν μελετηθεί δύο ρόλοι γεφύρωσης, που εμφανίζονται σε ερμηνείες αφενός στη Βιολογία και αφετέρου στη Φυσική.

Συνοπτικά, ο στόχος του επιστήμονα της Μαθηματικής Βιολογίας είναι η κατανόηση, η μοντελοποίηση και η μελέτη των μηχανισμών των βιολογικών φαινομένων και η αξιοποίηση της γνώσης αυτής για χρήσιμες προβλέψεις.

Στόχος συγγράμματος. Στόχος του παρόντος συγγράμματος αποτελεί η παρουσίαση βασικών και πιο προωθημένων μεθόδων των Διαφορικών Εξισώσεων, Δυναμικών Συστημάτων και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών μέσω εφαρμογών στη Βιολογία.

Δομή συγγράμματος. Θεματολογικά παρουσιάζονται οι ακόλουθες περιοχές της Μαθηματικής Βιολογίας, με τα κεφάλαια που ανήκουν σε κάθε μια να σημειώνονται με διαφορετικού χρώματος έγχρωμο τετράγωνο, ως εξής:

- Οικολογία ■
- Επιδημιολογία ■
- Βιοχημική Κινητική ■
- Διάχυση ■

Τα βασικά κεφάλαια αποτελούνται από δυο τμήματα, τα “Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας” και το “Μαθηματικό Υπόβαθρο”. Στο Μαθηματικό Υπόβαθρο περιλαμβάνονται όλες οι μαθηματικές έννοιες και τα αποτελέσματα που πρωτοεμφανίζονται στο εκάστοτε κεφάλαιο. Καθώς, σε κάθε κεφάλαιο, τα Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας προηγούνται, συμβαίνει να εμφανίζονται “πρωύτερα” ορισμένες έννοιες, των οποίων όμως οι ορισμοί βρίσκονται στο αντίστοιχο Μαθηματικό Υπόβαθρο.

Το παρόν σύγγραμμα είναι χωρισμένο σε τέσσερα κυρίως μέρη και σε δύο βοηθητικά κεφάλαια: Στο βοηθητικό **Κεφάλαιο 1** περιγράφεται η βασική θεωρία (τοπική ύπαρξη, μοναδικότητα, συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα, επεκτασιμότητα, ομαλότητα της λύσης) των Προβλημάτων Αρχικών Τιμών για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (βαθμωτές και διανυσματικές) πρώτης τάξης. Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί την ελάχιστη προαπαιτούμενη μαθηματική βάση για τα τρία πρώτα μέρη. Το πρώτο μέρος, **Οικολογία**, αποτελείται από τα **Κεφάλαια 2-6**. Στο **Κεφάλαιο 2** εισάγονται δύο βασικά χρονικά μοντέλα Οικολογίας (συνεχές και διακριτό εκθετικό, λογιστικό) και παρουσιάζονται βασικές έννοιες και εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση ενός Προβλήματος Αρχικών Τιμών, καθώς και αρχικές έννοιες περί της ανάλυσης ευστάθειας. Στο **Κεφάλαιο 3** εισάγεται το λογιστικό μοντέλο με επίδραση Allee, το αντίστοιχο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών, μοντέλα περισσοτέρων του ενός πληθυσμών και στοιχεία περί της αλληλεπίδρασης πληθυσμών, συνεχίζεται δε η μελέτη της ανάλυσης ευστάθειας με έμφαση στην έννοια της γραμμικοποίησης. Στο **Κεφάλαιο 4** παρουσιάζεται το βασικό μοντέλο Lotka-Volterra, ενώ εισάγονται οι έννοιες της συνάρτησης Lyapunov και της περιοδικότητας λύσεων αυτόνομων Προβλημάτων Αρχικών Τιμών. Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζεται η πρώτη παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra, δίνονται οι κύριες ιδιότητες του αντίστοιχου Προβλήματος Αρχικών Τιμών και εισάγεται η έννοια της διακλάδωσης, καθώς και τα σχετικά μαθηματικά αποτελέσματα. Στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζεται η δεύτερη παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra, δίνονται οι βασικές ιδιότητες του αντίστοιχου Προβλήματος Αρχικών Τιμών και εισάγονται οι έννοιες του οριακού κύκλου και της διακλάδωσης Hopf, καθώς και τα συναφή μαθηματικά αποτελέσματα. Το δεύτερο μέρος, **Επιδημιολογία**, αποτελείται από τα **Κεφάλαια 7 και 8**. Στο **Κεφάλαιο 7** εισάγονται τα δυναμικά επιδημιολογικά μοντέλα κλάσεων και μελετάται το βασικό μοντέλο SIR και το αντίστοιχο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών, ενώ γίνεται εισαγωγή στη -θεμελιώδη στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά- έννοια της αδιαστατοποίησης. Στο **Κεφάλαιο 8** εισάγεται το βασικό μοντέλο SIR με δημογραφικούς όρους και μελετάται το αντίστοιχο Πρόβλημα Αρχικών

Τιμών. Επιπλέον γίνεται εισαγωγή στη Θεωρία Poincaré-Bendixson. Έπεται το τρίτο μέρος *Βιοχημική Κινητική* που αποτελείται από τα **Κεφάλαια 9 και 10**. Στο **Κεφάλαιο 9** εισάγονται τα βασικά στοιχεία της θεωρίας χημικών αντιδράσεων, διατυπώνεται το βασικό μοντέλο ενζυμικής κατάλυσης και μελετάται το αντίστοιχο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών. Παρουσιάζονται και μελετώνται η τυπική και η αντίστροφη υπόθεση της σχεδόν σταθερής κατάστασης, ενώ επιπλέον εισάγεται η συνάρτηση Lambert, οι τοπικά προσεγγιστικές λύσεις και η συναρμογή τους. Στο **Κεφάλαιο 10** εισάγονται διάφορα μοντέλα αυτοκατάλυσης και μελετώνται τα αντίστοιχα Προβλήματα Αρχικών Τιμών, με το κεφάλαιο να ολοκληρώνεται με τη μαθηματική θεμελίωση της έννοιας του χωρίου παγίδευσης. Στη συνέχεια, στο βοηθητικό **Κεφάλαιο 11** περιγράφεται η ελάχιστη απαιτούμενη μαθηματική βάση (κυρίως Προβλήματα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών για βαθμωτές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις δεύτερης τάξης) για το τέταρτο και τελευταίο μέρος, *Διάχυση*, που αποτελείται από τα **Κεφάλαια 12-14**. Στο **Κεφάλαιο 12** εισάγεται το εκθετικό μοντέλο με όρο διάχυσης και το αντίστοιχο εκφυλισμένο Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών το οποίο και μελετάται. Εισάγεται, επίσης, η έννοια του δείκτη μοτίβου. Στο **Κεφάλαιο 13** συνεχίζεται η μελέτη του εκθετικού μοντέλου με όρο διάχυσης για το αντίστοιχο γνήσιο Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών. Εισάγονται οι σειρές Fourier, τα προβλήματα ιδιοτιμών Sturm-Liouville, συνεχίζεται η μελέτη των γνήσιων Προβλημάτων Αρχικών-Συνοριακών Τιμών σε φραγμένα σύνολα και εισάγεται η αρχή μεγίστου/ελαχίστου. Στο **Κεφάλαιο 14** εισάγεται το λογιστικό μοντέλο με όρο διάχυσης και μελετάται το αντίστοιχο γνήσιο Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών. Μελετάται επίσης η ευστάθεια στάσιμων λύσεων. Επιπλέον, για την περίπτωση της ημιγραμμικής εξίσωσης διάχυσης, εισάγεται και μελετάται το αυτόνομο γνήσιο Πρόβλημα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών σε φραγμένα ανοικτά χωρικά διαστήματα και η εξάρτηση των στάσιμων λύσεων από παραμέτρους. Το σύγγραμμα ολοκληρώνεται με το σύντομο, επιλογικό, **Κεφάλαιο 15** που συνιστά ένα *rot rouri* από περιληπτικά εισαγωγικά σχόλια σε σημαντικές και ενδιαφέρουσες ενότητες της Μαθηματικής Βιολογίας, με τις οποίες περιορισμοί έκτασης του ανά χείρας συγγράμματος δεν μας επιτρέπουν να ασχοληθούμε συστηματικά.

Όσον αφορά τις ασκήσεις που περιλαμβάνονται στο παρόν σύγγραμμα, συνίσταται ισχυρά η ενασχόληση μ' αυτές, καθώς αποτελούν αναπόσπαστο μέρος του.

Βασικές βιβλιογραφικές αναφορές. Η βιβλιογραφία για τη Μαθηματική Βιολογία στην Ελληνική γλώσσα είναι, εξ όσων γνωρίζουμε, ουσιαστικά ανύπαρκτη. Ορισμένα στοιχεία υπάρχουν μόνο στο [17].

Ενδεικτικά αναφέρουμε ορισμένα συγγράμματα Μαθηματικής Βιολογίας από τη διεθνή βιβλιογραφία: [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], τα οποία συνίστανται για περαιτέρω μελέτη.

Βασικά μαθηματικά βιβλία, διαφορετικών επιπέδων, που προτείνονται για μελέτη είναι τα ακόλουθα:

- Μαθηματική Ανάλυση
[42], [43], [44], [45], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67].
- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά
[68], [69], [70], [71], [72], [73], [74], [75], [76], [77], [78], [79], [80], [81], [82], [83].
- Θεωρία Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Διαδικασιών
[84], [85], [86], [87], [88], [89].
- Αριθμητική Ανάλυση
[90], [91], [92], [93].

Για την αριθμητική επίλυση των προβλημάτων που παρουσιάζονται και μελετώνται στο παρόν σύγγραμμα χρησιμοποιήθηκε το σύστημα λογισμικού Wolfram Mathematica (www.wolfram.com/mathematica). Όλες οι αριθμητικές προσομοιώσεις προέρχονται από το προσωπικό αρχείο των συγγραφέων.

Για τη δημιουργία των σχημάτων αξιοποιήθηκε η εφαρμογή GeoGebra (www.geogebra.org), ενώ γι' αυτή του εξώφυλλου έγινε χρήση του συστήματος λογισμικού GNU Image Manipulation Program (GIMP) (www.gimp.org). Όλα τα σχήματα και οι εικόνες προέρχονται από το προσωπικό αρχείο των συγγραφέων.

Βιβλιογραφία

- [1] J. E. Cohen. “Mathematics is biology’s next microscope, only better; biology is mathematics’ next physics, only better”. Στο: *PLOS Biology* 2 (2004), σσ. 2017–2023.
- [2] E. P. Wigner. “The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences”. Στο: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13 (1960), σσ. 1–14.
- [3] R. W. Hamming. “The unreasonable effectiveness of mathematics”. Στο: *The American Mathematical Monthly* 87 (1980), σσ. 81–90.
- [4] A. M. Lesk. “The unreasonable effectiveness of mathematics in molecular biology”. Στο: *The Mathematical Intelligencer* 22 (2000), σσ. 28–37.
- [5] M. Tegmark. “The mathematical universe”. Στο: *Foundations of Physics* 38 (2008), σσ. 101–150.
- [6] I. Grattan-Guinness. “Solving Wigner’s mystery: The reasonable (though perhaps limited) effectiveness of mathematics in the natural sciences”. Στο: *The Mathematical Intelligencer* 30 (2008), σσ. 7–17.
- [7] S. Klainerman. “Reflections on an essay by Wigner”. Στο: *Inference* 7 (2022), electronic publication.
- [8] G. P. Greslehner. “The “unreasonable effectiveness of mathematics” in biology and the fallacy from complexity”. Στο: *Contributions of the Austrian Ludwig Wittgenstein Society, vol. 26: Philosophy of Logic and Mathematics*. Επιμέλεια υπό G. M. Mras, P. Weingartner και B. Ritter. Austrian Ludwig Wittgenstein Society, 2018, σσ. 70–72.
- [9] M. Dorato. “Mathematical biology and the existence of biological laws”. Στο: *Probabilities, Laws and Structure*. Επιμέλεια υπό D. Dieks, W. Gonzales, S. Hartmann, T. Uebel και M. Weber. Springer, 2021, σσ. 109–121.
- [10] S. Psillos. *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*. Routledge, 2005.
- [11] M. Reed. “Mathematical Biology”. Στο: *The Princeton Companion to Mathematics*. Επιμέλεια υπό T. Gowers, J. Barrow-Green και I. Leader. Princeton University Press, 2008, σσ. 837–848.
- [12] V. Volterra. *Leçons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*. Gauthier Villars, 1931.
- [13] V. A. Kostitzin. “Biologie mathématique”. Στο: *Bulletin of the American Mathematical Society* 43 (1937), σσ. 606–607.
- [14] J. B. S. Haldane. “A mathematical theory of natural and artificial selection”. Στο: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 23 (1926), σσ. 363–372.
- [15] R. G. Winther. “Mathematical modeling in biology: philosophy and pragmatics”. Στο: *Frontiers in Plant Science* 3 (2012), article 102.
- [16] A. Kasirzadeh. “A new role for mathematics in empirical sciences”. Στο: *Philosophy of Science* 88 (2021), σσ. 686–706.
- [17] Σ. Κομνηνάς και Ε. Χαρμανδάρης. *Μαθηματική Μοντελοποίηση*. Αποθετήριο Ελληνικών Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Συγγραμμάτων και Βοηθημάτων Κάλλιπος, 2015.
- [18] N. Bacaër. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. Springer, 2011.
- [19] F. Brauer και C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer, 2001.
- [20] N. F. Britton. *Essential Mathematical Biology*. Springer, 2003.
- [21] R. S. Cantrell και C. Cosner. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley, 2004.

- [22] C.-S. Chou και A. Friedman. *Introduction to Mathematical Biology - Modeling, Analysis, and Simulations*. Springer, 2016.
- [23] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. SIAM, 2005.
- [24] A. Friedman. *Mathematical Biology - Modeling and Analysis*. SIAM, 2018.
- [25] A. Garfinkel, J. Shevtsov και Y. Guo. *Modeling Life: The Mathematics of Biological Systems*. Springer, 2017.
- [26] M. Iannelli και A. Pugliese. *An Introduction to Mathematical Population Dynamics: Along the Trail of Volterra and Lotka*. Springer, 2014.
- [27] B. P. Ingalls. *Mathematical Modeling in Systems Biology: An Introduction*. MIT Press, 2013.
- [28] D. S. Jones, M. J. Plank και B. D. Sleeman. *Differential Equations and Mathematical Biology*. CRC Press, 2nd edition, 2009.
- [29] J. P. Keener. *Biology in Time and Space: A Partial Differential Equation Modeling Approach*. AMS, 2021.
- [30] J. P. Keener και J. Sneyd. *Mathematical Physiology I: Cellular Physiology*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [31] J. P. Keener και J. Sneyd. *Mathematical Physiology II: Systems Physiology*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [32] M. Kot. *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press, 2001.
- [33] C. C. Lin και L. A. Segel. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. SIAM, 1988.
- [34] J. D. Logan και W. R. Wolesensky. *Mathematical Methods in Biology*. Wiley, 2009.
- [35] M. Martcheva. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer, 2015.
- [36] C. Morris. “Milestones in Ecology”. Στο: *The Princeton Guide to Ecology*. Επιμέλεια υπό S. A. Levin. Princeton University Press, 2009, σσ. 761–774.
- [37] J. D. Murray. *Mathematical Biology. I: An Introduction*. Springer, 3rd edition, 2011.
- [38] J. D. Murray. *Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer, 3rd edition, 2011.
- [39] S. P. Otto και T. Day. *A Biologist’s Guide to Mathematical Modeling in Ecology and Evolution*. Princeton University Press, 2011.
- [40] L. A. Segel. *Modeling Dynamic Phenomena in Molecular and Cellular Biology*. Cambridge University Press, 1984.
- [41] L. A. Segel και L. Edelstein-Keshet. *A Primer on Mathematical Models in Biology*. SIAM, 2013.
- [42] Μ. Ανούσης, Α. Τσολομύτης και Ε. Φελουζής. *Πραγματική Ανάλυση*. Συμμετρία, 2014.
- [43] Δ. Μπετσάκος. *Πραγματική Ανάλυση*. Εκδόσεις Κυριακίδη, 2016.
- [44] Ν. Γιαελής και Β. Μπιτσούνη. *Γεωμετρική Ανάλυση*. Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2021.
- [45] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλιας. *Απειροστικός Λογισμός, τόμος I*. Συμμετρία, 1999.
- [46] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλιας. *Απειροστικός Λογισμός, τόμος II-α*. Συμμετρία, 2000.
- [47] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος και Ε. Γιαννακούλιας. *Απειροστικός Λογισμός, τόμος II-β*. Συμμετρία, 1999.

- [48] Μ. Παπαδημητράκης. *Πραγματικές Συναρτήσεις και Μετρικοί Χώροι*. Αποθετήριο Ελληνικών Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Συγγραμμάτων και Βοηθημάτων Κάλλιπος, 2015.
- [49] Τ. Ε. Χατζηαφράτης. *Απειροστικός Λογισμός σε Πολλές Μεταβλητές*. Συμμετρία, 2009.
- [50] J. Bak και D. J. Newman. *Complex Analysis*. Springer, 3rd edition, 2010.
- [51] N. Carothers. *Real Analysis*. Cambridge University Press, 2000.
- [52] R. Courant και F. John. *Introduction to Calculus and Analysis I*. Springer, 1999.
- [53] R. Courant και F. John. *Introduction to Calculus and Analysis II/1*. Springer, 1999.
- [54] R. Courant και F. John. *Introduction to Calculus and Analysis II/2*. Springer, 1999.
- [55] G. B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*. Wiley, 1999.
- [56] A. Friedman. *Advanced Calculus*. Dover, 2007.
- [57] A. Friedman. *Foundations of Modern Analysis*. Dover, 2010.
- [58] D. H. Griffel. *Applied Functional Analysis*. Dover, reprint, 2002.
- [59] A. N. Kolmogorov και S. V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover, 1975.
- [60] P. D. Lax. *Functional Analysis*. Wiley, 2002.
- [61] J. Marsden και Tromba A. *Διανυσματικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2010.
- [62] H. L. Royden. *Real Analysis*. Macmillan, 1969.
- [63] W. Rudin. *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*. Leader Books, 2014.
- [64] Μ. Spivak. *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2η έκδοση, 2010.
- [65] E. M. Stein και R. Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2009.
- [66] E. M. Stein και R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2011.
- [67] K. R. Stromberg. *An Introduction to Classical Real Analysis*. AMS, 2015.
- [68] M. Abramowitz και I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, 1965.
- [69] G. I. Barenblatt. *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [70] C. M. Bender και S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, 1999.
- [71] M. D. Greenberg. *Foundations of Applied Mathematics*. Courier Corporation, 2013.
- [72] E. J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991.
- [73] M. H. Holmes. *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, 2012.
- [74] M. H. Holmes. *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2019.
- [75] J. Jost. *Mathematical Methods in Biology and Neurobiology*. Springer, 2014.
- [76] J. P. Keener. *Principles of Applied Mathematics: Transformation and Approximation*. Westview Press, 2nd edition, 2000.
- [77] P. A. Lagerstrom. *Matched Asymptotic Expansions*. Springer, 1988.
- [78] C.-C. Lin και L. A. Segel. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. SIAM, 1988.

- [79] J. D. Logan. *Applied Mathematics*. Wiley, 4th edition, 2013.
- [80] J. A. Murdock. *Perturbations: Theory and Methods*. SIAM, 1999.
- [81] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, 2011.
- [82] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert και Clark C. W. *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, 2010.
- [83] T. Szirtes. *Applied Dimensional Analysis and Modeling*. Elsevier, 2nd edition, 2007.
- [84] Γ. Κοντογιάννης και Σ. Τουμπής. *Στοιχεία Πιθανοτήτων με Εφαρμογές στη Στατιστική και την Πληροφορική*. Αποθετήριο Ελληνικών Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Συγγραμμάτων και Βοηθημάτων Κάλλιπος, 2015.
- [85] Μ. Λουλάκης. *Στοχαστικές Διαδικασίες*. Αποθετήριο Ελληνικών Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Συγγραμμάτων και Βοηθημάτων Κάλλιπος, 2016.
- [86] Δ. Χελιώτης. *Ένα Δεύτερο Μάθημα στις Πιθανότητες*. Αποθετήριο Ελληνικών Ακαδημαϊκών Ηλεκτρονικών Συγγραμμάτων και Βοηθημάτων Κάλλιπος, 2015.
- [87] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 1*. Wiley, 3rd edition, 1991.
- [88] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications, vol. 2*. Wiley, 2nd edition, 1991.
- [89] G. F. Lawler. *Introduction to Stochastic Processes*. Chapman & Hall/CRC, 2nd edition, 2006.
- [90] Γ. Ακρίβης και Β. Δουγαλής. *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2015.
- [91] Γ. Ακρίβης και Β. Δουγαλής. *Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
- [92] E. Süli και D. F. Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge University Press, 2003.
- [93] E. Süli. “Numerical solution of partial differential equations”. Στο: *The Princeton Companion to Applied Mathematics*. Επιμέλεια υπό N. J. Higham. Princeton University Press, 2015, σσ. 306–318.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

- Το γενικό αμιγώς εξελικτικό πρόβλημα
- Φάσεις μελέτης του προβλήματος

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

- Καλή τοποθέτηση του ΠΑΤ
- Επεκτασιμότητα της λύσης και μεγιστική λύση του ΠΑΤ
- Ομαλότητα λύσης του ΠΑΤ

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας: Για τους μαθητικούς, ο θεμέλιος λίθος για την αμιγώς δυναμική/εξελικτική μελέτη ενός φαινομένου (φυσικού, χημικού, βιολογικού, κ.λπ.) αποτελεί το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ, ή αλλιώς, πρόβλημα Cauchy). Ένα ΠΑΤ περιλαμβάνει δύο δεδομένα

- μία κατάλληλη συνθήκη διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ), η οποία αναφέρεται και ως το μοντέλο,
- μία αρχική συνθήκη

και αναζητούμε συνάρτηση $y = (y_i)_{i=1}^n$, ως προς τον χρόνο t , η οποία ταυτόχρονα θα ικανοποιεί τα παραπάνω. Έχει δε, φορμαλιστικά, την παρακάτω μορφή

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)), \forall t \in \mathcal{I} \setminus \{t_0\} & \text{(μοντέλο)} \\ y(t_0) = y_0, & \text{(αρχική συνθήκη)} \end{cases} \quad \text{(ΠΑΤ)}$$

όπου $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $t_0 \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, $f = (f_i)_{i=1}^n$ και $y_0 = (y_{0,i})_{i=1}^n$, κατάλληλο διάστημα, συνάρτηση και σημείο, αντίστοιχα. Κάθε διαφορετική επιλογή του ζεύγους f και y_0 γεννά και ένα διακεκριμένο ΠΑΤ. Σημειώνουμε, ότι η αρχική συνθήκη χαρακτηρίζεται ως τέτοια, καθώς τη χρονική στιγμή t_0 θεωρούμε ότι αρχίζουμε την καταγραφή του φαινομένου.

Η αυστηρή μαθηματική μελέτη ενός (ΠΑΤ) απαιτεί τη θεώρησή του σε κατάλληλο συναρτησιακό χώρο. Μαθηματικά επιτρεπτός συναρτησιακός χώρος για την y είναι ο

$$\{y \in C(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n) \mid \mathcal{I} \text{ μη τετριμμένο διάστημα με } t_0 \in \mathcal{I} \text{ και } y \text{ διαφορίσιμη στο } \mathcal{I} \setminus \{t_0\}\},$$

άρα για το y_0 επιτρεπτός χώρος είναι ο \mathbb{R}^n και για την f ο

$$\{f: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \mathcal{I} \times y(\mathcal{I}) \subseteq S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}\}.$$

Ωστόσο, στο πλαίσιο της μοντελοποίησης ενός φαινομένου, ενδεχομένως να πρέπει να επιβάλουμε περιορισμούς στους παραπάνω επιτρεπτούς χώρους. Για παράδειγμα, ίσως να θέλαμε να κοιτάζουμε τον $[0, \infty)^n$ αντί του \mathbb{R}^n (μη αρνητική λύση), ίσως

$$\mathcal{I} = \begin{cases} (a, \infty) \text{ με } \mathbb{R} \ni a < t_0, \text{ ή } [a, \infty) \text{ με } \mathbb{R} \ni a \leq t_0, & (\text{θετικά ολική λύση}) \\ \mathbb{R} & (\text{ολική λύση}), \end{cases}$$

ή ακόμα $y \in C^k(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n)$ με $k \in \overline{\mathbb{N}}$ (μια συνάρτηση $y \in C^\infty$ καλείται ομαλή). Συνήθως, για τις λύσεις των αμιγώς δυναμικών προβλημάτων του φυσικού κόσμου απαιτούμε

$$y \in C(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathcal{I} \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n), \text{ όπου } \mathcal{I} \text{ μη τετριμμένο διάστημα με } t_0 \in \mathcal{I}$$

και άρα

$$f \in C(S_1 \times S_2; \mathbb{R}^n), \text{ όπου } \mathcal{I} \times y(\mathcal{I}) \subseteq S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Για πρακτικούς λόγους, γίνεται λόγος για λύση ενός μοντέλου/εξίσωσης και όχι ενός ΠΑΤ, με την εύκολα εννοούμενη έννοια. Ωστόσο, όπως είναι άμεσα επαληθεύσιμο, ποτέ μία λύση ενός μοντέλου δεν μπορεί να είναι μοναδική.

Κομβικό ρόλο στη μελέτη των ΠΑΤ έχουν τα απλούστερα δυνατά προβλήματα, δηλ. τα γραμμικά. Γραμμικό είναι ένα πρόβλημα (ή μοντέλο) όταν το αντίστοιχο μοντέλο ικανοποιεί την αρχή επαλληλίας, σύμφωνα με την οποία κάθε γραμμικός συνδυασμός οποιωνδήποτε, πεπερασμένου πλήθους, λύσεων του μοντέλου (δηλ. το άθροισμα των γινομένων κάθε λύσης επί έναν σταθερό πραγματικό αριθμό) είναι και αυτός λύση του μοντέλου. Ωστόσο, αυτά αποτελούν τη μειοψηφία, καθώς μοντέλα για την περιγραφή ενδιαφερόντων φαινομένων είναι συνήθως σύνθετα και μη γραμμικά.

Οι φάσεις μελέτης ενός ΠΑΤ συνοψίζονται στον Πίνακα 1.1.

Πίνακας 1.1: Φάσεις μελέτης ενός ΠΑΤ.

Φάση	Μελέτη
I	Καλή τοποθέτηση του προβλήματος κατά Hadamard (ύπαρξη, μοναδικότητα, συνεχής εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα της λύσης) και επεκτασιμότητα της λύσης (ολική ύπαρξη λύσης)
II	Εύρεση της λύσης σε κλειστή μορφή
III	Ανάλυση ευστάθειας και ολική ασυμπτωτική ανάλυση
IV	Εξάρτηση της λύσης από μια παράμετρο και ασυμπτωτική ανάλυση για “ακραίες” τιμές της παραμέτρου

Μαθηματικό Υπόβαθρο: Εδώ παρουσιάζουμε τα βασικά μαθηματικά εργαλεία για τη Φάση Ι της μελέτης ενός ΠΑΤ.

Ισοδύναμη μορφή των προβλημάτων αρχικών τιμών. Ενδεχομένως η μορφή του (ΠΑΤ) να φαντάζει εν πρώτοις κάπως περιοριστική. Ωστόσο, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, πρόκειται για τη μορφή στην οποία μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε όλα τα προβλήματα που εμπλέκουν διαφορίσεις μιας μόνο μεταβλητής.

Πρώτα όμως ας δούμε κάποιες βασικές έννοιες. Έστω $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Για δεδομένα $S_1 \subseteq \mathbb{R}^{1+(n+1)m}$ και $F: S_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, μια $y \in C^n(\mathcal{I}; \mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε

- i. το $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ να είναι ένα μη τετριμμένο διάστημα,
- ii. $\left\{ \left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \dots, \frac{d^n y}{dt^n}(t) \right) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{(n+1)m} \right\} \subseteq S_1$, και
- iii. $F\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \dots, \frac{d^n y}{dt^n}(t) \right) = 0$, για κάθε $t \in \mathcal{I}$,

ονομάζεται λύση της ΣΔΕ n -οστής τάξης γενικής μορφής του σημείου iii.. Επιπλέον, για δεδομένα $t_0 \in \mathcal{I}$ και $\{y_{0,j}\}_{j=0}^n \subseteq \mathbb{R}^m$, το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών αποτελείται από την παραπάνω ΣΔΕ (για κάθε $t \in \mathcal{I} \setminus \{t_0\}$) σε συνδυασμό με την αρχική συνθήκη $\frac{d^j y}{dt^j}(t_0) = y_{0,j}$, για κάθε $j \in \{0, \dots, n\}$.

2. Για δεδομένα $S_2 \subseteq \mathbb{R}^{1+nm}$ και $f: S_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, μια $y \in C^n(\mathcal{I}; \mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε

- i. το $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ να είναι ένα μη τετριμμένο διάστημα,
- ii. $\left\{ \left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) \right) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{nm} \right\} \subseteq S_2$, και
- iii. $\frac{d^n y}{dt^n}(t) = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) \right)$, για κάθε $t \in \mathcal{I}$,

ονομάζεται λύση της ΣΔΕ n -οστής τάξης λυμένης μορφής του σημείου iii.. Επιπλέον, για δεδομένα $t_0 \in \mathcal{I}$ και $\{y_{0,j}\}_{j=0}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^m$, το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών αποτελείται από την παραπάνω ΣΔΕ (για κάθε $t \in \mathcal{I} \setminus \{t_0\}$) σε συνδυασμό με την αρχική συνθήκη $\frac{d^j y}{dt^j}(t_0) = y_{0,j}$, για κάθε $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

Το ότι η πρώτη μορφή ενός προβλήματος αρχικών τιμών περιλαμβάνει τη δεύτερη είναι προφανές. Ισχύει όμως και το αντίστροφο όταν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης, κάτι που άλλωστε ισχύει τις περισσότερες φορές στις εφαρμογές.

Τώρα, κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών που περιλαμβάνει μία ΣΔΕ n -οστής τάξης γενικής (ή λυμένης) μορφής στον \mathbb{R}^m είναι ισοδύναμο με ένα αντίστοιχο που περιλαμβάνει μία ΣΔΕ πρώτης τάξης γενικής (ή λυμένης, αντίστοιχα) μορφής στον \mathbb{R}^{nm} . Πράγματι, περιοριζόμενοι για συντομία στην περίπτωση των ΣΔΕ λυμένης μορφής -οι οποίες άλλωστε μας ενδιαφέρουν στο παρόν σύγγραμμα- έχουμε ότι, αν $n \geq 2$, τότε τα προβλήματα

$$\begin{cases} \frac{d^n y}{dt^n}(t) = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}(t), \dots, \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) \right), & \forall t \in \mathcal{I} \setminus \{t_0\} \\ \frac{d^j y}{dt^j}(t_0) = y_{0,j}, & \forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \end{cases}$$

με $y \in C(\mathcal{I}; \mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathcal{I} \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^n)$ και

$$\begin{cases} \frac{dz_i}{dt}(t) = z_{i+1}(t), & \forall t \in \mathcal{I} \setminus \{t_0\}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \\ \frac{dz_n}{dt}(t) = f(t, z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)), & \forall t \in \mathcal{I} \setminus \{t_0\} \\ z(t_0) = (y_{0,i})_{i=0}^{n-1}, \end{cases}$$

με $z \in C(\mathcal{I}; \mathbb{R}^{nm}) \cap C^1(\mathcal{I} \setminus \{t_0\}; \mathbb{R}^{nm})$, είναι ισοδύναμα, καθώς

- αν y είναι λύση του πρώτου, τότε η $z = \left(\frac{d^j y}{dt^j}\right)_{i=0}^{n-1}$ είναι λύση του δεύτερου, και
- αν z είναι λύση του δεύτερου, τότε η $y = z_1$ είναι λύση του πρώτου.

Ως συνέπεια της ανωτέρω ισοδυναμίας, η γενική θεωρία διατυπώνεται σχεδόν αποκλειστικά για (διανυσματική) ΣΔΕ πρώτης τάξης.

Αντιστροφή χρόνου. Πολλά από τα βασικά αποτελέσματα αφορούν χρόνους στη δεξιά ημιευθεία (“μέλλον”). Παραθέτουμε το παρακάτω που μας επιτρέπει τη χρήση τους και για χρόνους στην αριστερή ημιευθεία (“παρελθόν”).

Θεώρημα 1.1 (αντιστροφή χρόνου). Η $y_1: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)),$$

όπου $f: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\mathcal{I} \times y(\mathcal{I}) \subseteq S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν η

$$\begin{aligned} y_2: -\mathcal{I} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ s &\mapsto y_2(s) := y_1(-s) \end{aligned}$$

ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt}(t) = g(t, y(t)),$$

όπου¹

$$\begin{aligned} g: \{(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid (-s, x) \in \text{Dom}(f)\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, x) &\mapsto g(s, x) := -f(-s, x). \end{aligned}$$

Καλή τοποθέτηση προβλήματος κατά Hadamard. Ένα ΠΑΤ ονομάζεται καλά τοποθετημένο όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

1. Ύπαρξη λύσης.
2. Μοναδικότητα λύσης.
3. Συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα αρχικά δεδομένα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τα θεμελιώδη θεωρήματα τοπικής ύπαρξης (Peano), επεκτασιμότητας, ολικότητας, μοναδικότητας (Picard-Lindelöf ή Cauchy-Lipschitz, Osgood, Nagumo, την ανισότητα Gronwall), καθώς και τα θεωρήματα συνεχούς και διαφορίσιμης εξάρτησης της λύσης του ΠΑΤ από τα αρχικά δεδομένα.

¹Με $\text{Dom}(f)$ συμβολίζεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f .

Τοπική ύπαρξη. Η αναζήτηση τοπικά μιας λύσης είναι ο ακρογωνιαίος λίθος της μελέτης ενός ΠΑΤ.

Θεώρημα 1.2 (Peano). Αν η f είναι συνεχής στο ανοικτό $U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, τότε $\forall (t_0, y_0) \in U_1 \times U_2$ \exists τοπικά τουλάχιστον μια λύση y του (ΠΑΤ). Συγκεκριμένα, $\text{Dom}(y) \supseteq \mathcal{I}$, όπου \mathcal{I} ανοικτό διάστημα με $t_0 \in \mathcal{I}$, και το οποίο προσδιορίζεται ως εξής: Έστω $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, τέτοια, ώστε να ισχύει

$$\{(t, x) \in U_1 \times U_2 \mid |t - t_0| \leq \alpha \text{ και } |x - y_0| \leq \beta\} =: B(\alpha, \beta) \subsetneq U_1 \times U_2.$$

Θέτοντας

$$M(\alpha, \beta) := \sup \{|f(t, x)| \mid (t, x) \in B(\alpha, \beta)\} \text{ και } \gamma := \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{M(\alpha, \beta)} \right\},$$

τελικά ορίζουμε

$$\mathcal{I} := \{t \in \mathbb{R} \mid |t - t_0| < \gamma\}.$$

Επεκτασιμότητα και ολικότητα λύσης. Έστω $y: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια λύση του (ΠΑΤ).

1. Μια συνάρτηση $\hat{y}: \text{Dom}(\hat{y}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται επέκταση της y αν
 - i. $\text{Dom}(\hat{y})$ διάστημα, τέτοιο ώστε $\text{Dom}(\hat{y}) \supseteq \mathcal{I}$,
 - ii. $\hat{y}|_{\mathcal{I}} = y$,
 - iii. η \hat{y} ικανοποιεί την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση στο $\hat{\mathcal{I}}$.
2. Η y λέγεται *μεγιστική* (ή *μη επεκτάσιμη*) αν το \mathcal{I} είναι το μέγιστο διάστημα ύπαρξής της.
3. Η y λέγεται *θετικά* (αρνητικά) *ολική* αν $\text{Dom}(y) \supseteq [t_0, \infty)$ ($\text{Dom}(y) \supseteq (-\infty, t_0]$). Η y λέγεται *ολική* αν είναι τόσο θετικά όσο και αρνητικά ολική.

Θεώρημα 1.3. Έστω f συνεχής στο ανοικτό $U_1 \times U_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

- i. Αν y είναι μια λύση του (ΠΑΤ), τότε πάντα υπάρχει η μεγιστική της επέκταση.
- ii. Έστω \mathcal{I} το διάστημα ύπαρξης μιας μεγιστικής λύσης του (ΠΑΤ). Τότε

$$\text{dist}((t, y(t)), \partial(U_1 \times U_2)) \rightarrow 0, \text{ καθώς } \text{dist}(t, \partial \mathcal{I}) \rightarrow 0.$$

Από το Θεώρημα 1.3 έπεται ότι μια λύση y είτε υπάρχει για κάθε $t \in [t_0, \infty)$, είτε ότι υπάρχει κάποιο $T < \infty$ έτσι, ώστε η λύση υπάρχει μόνο για $t \in [t_0, T)$. Σε αυτή την τελευταία περίπτωση, ισχύει ότι

$$\begin{cases} \text{είτε } \text{dist}((t, y(t)), \partial(U_1 \times U_2)) \rightarrow 0, \\ \text{είτε η λύση εκρήγνυται στο } t = T, \text{ δηλ. } |y(t)| \rightarrow \infty, \end{cases} \text{ καθώς } t \rightarrow T^-.$$

Μάλιστα, αν $n = 1$ και θέλουμε να δείξουμε ότι μια λύση y ορίζεται σ' ένα διάστημα $[t_0, \infty)$, μπορούμε -υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 1.3- να εργαστούμε ως εξής: Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $(\tau, \infty) \times (-b, b)$, με $\tau < t_0$. Το ζητούμενο έπεται αν καταφέρουμε να αποδείξουμε ότι ισχύει

$$|y(t)| \leq C < b, \forall t \geq t_0 \text{ για το οποίο ορίζεται η } y.$$

Ισχύουν και τα αντίστοιχα των παραπάνω για χρόνους μικρότερους του t_0 . Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα πολύτιμο εργαλείο για την εξαγωγή διαφόρων εκτιμήσεων όπως η παραπάνω, η οποία θα μας δώσει την ολικότητα της αντίστοιχης λύσης. Παίζει δε, μεταξύ άλλων, ουσιαστικό ρόλο και στην απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης του (ΠΑΤ) (βλ. Θεώρημα 1.7 παρακάτω).

Θεώρημα 1.4 (ανισότητα Gronwall). Έστω h, g και u συναρτήσεις $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, όπου \mathcal{I} διάστημα της μορφής $[a, \infty)$, ή $[a, b]$, ή $[a, b]$ του \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι η g και η u είναι συνεχείς και ότι το αρνητικό μέρος² της h είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του \mathcal{I} .

i. Αν η g είναι μη αρνητική και η u ικανοποιεί την ολοκληρωτική ανισότητα

$$u(t) \leq h(t) + \int_a^t g(s)u(s)ds, \quad \forall t \in \mathcal{I},$$

τότε

$$u(t) \leq h(t) + \int_a^t h(s)g(s) e^{\int_s^t g(\tau)d\tau} ds, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

ii. Αν, επιπλέον, η h είναι αύξουσα, τότε

$$u(t) \leq h(t) e^{\int_a^t g(s)ds}, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Έτσι, σε μια αντιπροσωπευτική εφαρμογή του **Θεωρήματος 1.4**, θεωρούμε το **(ΠΑΤ)** και υποθέτουμε ότι έχει μοναδική λύση. Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη γραμμικής ανάπτυξης

$$|f(t, x)| \leq \alpha + \beta |x|, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

όπου α, β θετικές σταθερές. Τότε η λύση του **(ΠΑΤ)** δεν εκρήγνυται σε (πεπερασμένο χρόνο). Για την ακρίβεια, μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 1.5 (συνθήκη γραμμικής ανάπτυξης). Έστω f συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό $U_1 \times U_2$, μη τετριμμένο διάστημα $\mathcal{I} \subseteq U_1$ και $\alpha, \beta : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)$ τέτοιες ώστε

$$|f(t, x)| \leq \alpha(t) + \beta(t) |x|, \quad \forall (t, x) \in \mathcal{I} \times U_2.$$

Τότε για κάθε μεγιστική λύση του **(ΠΑΤ)**, y , με $(t_0, y_0) \in \mathcal{I} \times U_2$, ισχύει ότι

$$\text{Dom}(y) \supseteq \mathcal{I}.$$

Όσον αφορά την απόδειξη του **Θεωρήματος 1.4**, στηρίζομαστε στο ακόλουθο, πολύ βασικό και εύχρηστο, αποτέλεσμα, για το οποίο όμως πρώτα χρειαζόμαστε μια θεμελιώδη έννοια, αυτή της συνθήκης Lipschitz (ή, αλλιώς, Lipschitz συνέχειας). Θυμίζουμε πως λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, αν υπάρχει θετική σταθερά $L = L(S)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|, \quad \forall x_1, x_2 \in S,$$

ενώ λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Lipschitz, αν για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S$ υπάρχει θετική σταθερά $L = L(\Sigma)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| \leq L |x_2 - x_1|, \quad \forall x_1, x_2 \in \Sigma.$$

²Υπενθυμίζεται ότι το αρνητικό μέρος, g^- , μιας συνάρτησης g ορίζεται ως

$$g^-(t) := \begin{cases} -g(t), & \text{αν } t < 0 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Γενικεύοντας, έστω $\phi: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση, όπου $S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$. Λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz ως προς $x_2 \in S_2$, αν υπάρχει θετική σταθερά $L = L(S_1 \times S_2)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_1, x_{2,1}) - \phi(x_1, x_{2,2})| \leq L |x_{2,1} - x_{2,2}|, \forall (x_1, x_{2,1}), (x_1, x_{2,2}) \in S_1 \times S_2,$$

ενώ λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Lipschitz ως προς $x_2 \in S_2$, αν για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S_1 \times S_2$ υπάρχει θετική σταθερά $L = L(\Sigma)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_1, x_{2,1}) - \phi(x_1, x_{2,2})| \leq L |x_{2,1} - x_{2,2}|, \forall (x_1, x_{2,1}), (x_1, x_{2,2}) \in \Sigma.$$

Για παράδειγμα, αν μια συνάρτηση έχει συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους ως προς κάποια πολυδιάστατη μεταβλητή, τότε ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Lipschitz ως προς αυτή τη μεταβλητή.

Θεώρημα 1.6 (μέθοδος σύγκρισης). Έστω f συνεχής συνάρτηση, στο ανοικτό $U_1 \times U_2$, που ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Lipschitz στο $U_1 \times U_2$ ως προς $x \in U_2$, μη τετριμμένο διάστημα $\mathcal{I} \subseteq U_1$ με $t_0 \in \mathcal{I}$ και $y_1: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ λύση του (PIAT). Αν $y_2: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ικανοποιεί τις ανισότητες

$$\begin{cases} \frac{dy_2}{dt}(t) \leq f(t, y_2(t)) \\ y_2(t_0) \leq y_0, \end{cases}$$

τότε

$$y_2(t) \leq y_1(t), \forall t \in \mathcal{I} \cap [t_0, \infty).$$

Μοναδικότητα. Το βασικό αποτέλεσμα ως προς τη μοναδικότητα λύσης του (PIAT) εμπλέκει την έννοια της τοπικής συνθήκης Lipschitz, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 1.7 (Picard-Lindelöf ή Cauchy-Lipschitz). Αν η f είναι συνεχής στο ανοικτό $U_1 \times U_2$ και, επιπλέον, ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Lipschitz στο $U_1 \times U_2$ ως προς $x \in U_2$, τότε $\forall (t_0, y_0) \in U_1 \times U_2, \exists!$ τοπικά λύση του (PIAT).

Υπάρχουν διάφορες γενικεύσεις, όσον αφορά την υπόθεση ότι η f ικανοποιεί τοπικά τη συνθήκη Lipschitz, οι οποίες εξασφαλίζουν τη μοναδικότητα των λύσεων του (PIAT). Οι πιο σημαντικές δίνονται στα ακόλουθα:

Θεώρημα 1.8. Αν η f είναι συνεχής στο ανοικτό $U_1 \times U_2$ και, επιπλέον, για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq U_1 \times U_2$ υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση L_Σ ως προς $t \in U_1$ τέτοια, ώστε να ισχύει

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L_\Sigma(t) |x_1 - x_2| \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \Sigma,$$

τότε, $\forall (t_0, y_0) \in \Sigma, \exists!$ λύση του (PIAT).

Θεώρημα 1.9 (Osgood). Έστω $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και f συνεχής στο ορθογώνιο

$$B(\alpha, \beta, t_0, y_0) := \{(t, x) \in U_1 \times U_2 \mid |t - t_0| \leq \alpha \text{ και } |x - y_0| \leq \beta\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Έστω, επιπλέον, ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \phi(|x_1 - x_2|) \forall (t, x_1), (t, x_2) \in B(\alpha, \beta, t_0, y_0),$$

όπου ϕ είναι μια συνεχής και αύξουσα συνάρτηση στο $(0, \delta]$, με $\delta > 0$, τέτοια ώστε

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \phi(s) = 0 \text{ και } \int_0^\delta \frac{1}{\phi(s)} ds = \infty.$$

Τότε, $\forall (t_0, y_0) \in B(\alpha, \beta, t_0, y_0), \exists!$ λύση του (PIAT).

Προφανώς, αν $\phi(s) = Ls$ στο **Θεώρημα 1.9**, τότε παίρνουμε τη συνθήκη Lipschitz. Μια άλλη χρήσιμη επιλογή είναι η $\phi(s) = Ls \ln |s|$.

Θεώρημα 1.10 (Nagumo). Έστω $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και f συνεχής στο ορθογώνιο

$$B(\alpha, \beta, t_0, y_0) := \{(t, x) \in U_1 \times U_2 \mid |t - t_0| \leq \alpha \text{ και } |x - y_0| \leq \beta\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Έστω, επιπλέον, ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{|s - t_0|}, \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in B(\alpha, \beta, t_0, y_0).$$

Τότε, $\forall (t_0, y_0) \in B(\alpha, \beta, t_0, y_0)$, $\exists!$ λύση του (**ΠΑΤ**).

Συνεχής εξάρτηση από τα δεδομένα. Θεωρούμε το (**ΠΑΤ**) και υποθέτουμε ότι

i. η $f: B(\alpha, \beta, t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένη στο ορθογώνιο

$$B(\alpha, \beta, t_0, y_0) := \{(t, x) \in U_1 \times U_2 \mid |t - t_0| \leq \alpha \text{ και } |x - y_0| \leq \beta\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

και ισχύει

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall (t, x) \in B(\alpha, \beta, t_0, y_0),$$

ii. η f ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Lipschitz στο $B(\alpha, \beta, t_0, y_0)$ ως προς $x \in U_2$, δηλ.

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|.$$

Υπό τις ανωτέρω υποθέσεις, γνωρίζουμε ότι το (**ΠΑΤ**) έχει μοναδική λύση $y(t, t_0, y_0)$.

Θεώρημα 1.11 (συνεχής εξάρτηση από το y_0). Έστω $y_{0,1}, y_{0,2} \in \mathbb{R}^n$, τέτοια, ώστε

$$|y_{0,1} - y_{0,2}| \leq \frac{\beta}{2}.$$

Αν ισχύει

$$|t - t_0| < \min \left\{ \alpha, \frac{\beta}{2M} \right\},$$

τότε έχουμε

$$|y(t, t_0, y_{0,1}) - y(t, t_0, y_{0,2})| \leq |y_{0,1} - y_{0,2}| e^{L|t-t_0|}.$$

Θεώρημα 1.12 (συνεχής εξάρτηση από το t_0). Έστω $t_{0,1}, t_{0,2} \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, τέτοια ώστε

$$0 < t_{0,2} - t_{0,1} < \frac{\beta}{M}.$$

Έστω, επιπλέον, $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha) \supseteq \mathcal{I}_j$ το πεδίο ορισμού της λύσης $y(t, t_{0,j}, y_0)$, για $j = 1, 2$, και $\mathcal{I} := \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$. Τότε ισχύει ότι $[t_{0,1}, t_{0,2}] \subseteq \mathcal{I}$ και επιπλέον

$$|y(t, t_{0,1}, y_0) - y(t, t_{0,2}, y_0)| \leq M(t_{0,2} - t_{0,1}) e^{L \min\{|t-t_{0,1}|, |t-t_{0,2}|\}}.$$

Θεώρημα 1.13 (συνεχής εξάρτηση από την f). Έστω f_1, f_2 συνεχείς συναρτήσεις $B(\alpha, \beta, t_0, y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι στο $B(\alpha, \beta, t_0, y_0)$ ισχύουν τα ακόλουθα

$$|f_1(t, x)| \leq M, \quad |f_1(t, x) - f_2(t, x)| < \varepsilon \text{ και } |f_2(t, x_1) - f_2(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

για $M, \varepsilon, L > 0$. Έστω y_{f_1} μια λύση του (**ΠΑΤ**) με f_1 στη θέση της f και y_{f_2} η μοναδική λύση του (**ΠΑΤ**) με f_2 στη θέση της f και $\mathcal{I} \subseteq (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ το κοινό πεδίο ορισμού των y_{f_1}, y_{f_2} , με $t_0 \in \mathcal{I}$. Τότε

$$|y_{f_1}(t) - y_{f_2}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1), \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Ομαλότητα λύσης. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του κανόνα αλυσίδας.

Θεώρημα 1.14 (διαφορισιμότητα των λύσεων). Έστω (ΠΑΤ) το οποίο έχει λύση $y: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $f \in C^k(\mathcal{I}, y(\cdot, \mathcal{I}))$, με $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Τότε $y \in C^{k+1}(\mathcal{I})$.

Ομαλή εξάρτηση από την εξίσωση. Υπό το πρίσμα του Θεωρήματος 1.14, μπορούμε να γενικεύσουμε το Θεώρημα 1.13 ως ακολούθως (παραλείπουμε τις λεπτομέρειες της διατύπωσής του).

Θεώρημα 1.15 (διαφορίσιμη εξάρτηση από την f). Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.14 σε συνδυασμό με μοναδικότητα της y , έπεται ότι η y εξαρτάται με C^{k-1} τρόπο από την f .

Με το Θεώρημα 1.15 μπορούμε να προσεγγίσουμε τη μοναδική λύση του προβλήματος γύρω από την αρχική τιμή, μέσω της μοναδικής λύσης ενός προβλήματος το οποίο έχει για συνάρτηση f του δεξιού μέλους του μοντέλου του, το τάξης k πολυώνυμο Taylor της f του αρχικού προβλήματος.

Τέλος, η παραπάνω έννοια εξειδικεύεται κατά τον προφανή τρόπο και για την ομαλή εξάρτηση της λύσης από την f .

Για συστηματική μελέτη, διαφορετικών απαιτήσεων ως προς το μαθηματικό υπόβαθρο, όσον αφορά τις ΣΔΕ και τα Δυναμικά Συστήματα, οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν στα συγγράμματα [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40].

Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Δ. Αλικάκος και Γ. Η. Καλογερόπουλος. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, 2η έκδοση, 2011.
- [2] Γ.-Σ. Σμυρλής. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κύπρου, 2013.
- [3] Ι. Γ. Στρατής. *Εισαγωγή στην Ποιοτική Θεωρία των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων*. Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 1992.
- [4] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer, 1992.
- [5] D. K. Arrowsmith και C. M. Place. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [6] G. Birkhoff και G.-C. Rota. *Ordinary Differential Equations*. Wiley, 4th edition, 1989.
- [7] N. P. Bhatia και G. P. Szegö. *Stability Theory of Dynamical Systems*. Springer, 1970.
- [8] W. E. Boyce, R. C. DiPrima και D. B. Meade. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Wiley, 11th edition, 2017.
- [9] M. Braun. *Differential Equations and their Applications: An Introduction to Applied Mathematics*. Springer, 4th edition, 1993.
- [10] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [11] R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer, 1997.
- [12] F. Dumortier, J. Llibre και J. C. Artés. *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer, 2006.
- [13] M. Ghergu και V. D. Rădulescu. *Nonlinear PDEs - Mathematical Models in Biology, Chemistry and Population Genetics*. Springer, 2012.
- [14] P. Glendinning. *Stability, Instability and Chaos*. Cambridge University Press, 1994.

- [15] R. Grimshaw. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Blackwell, 1990.
- [16] R. B. Guenther και J. W. Lee. *Sturm-Liouville Problems, Theory and Numerical Implementation*. CRC Press, 2018.
- [17] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger, 2nd edition, 1980.
- [18] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. SIAM, 2002.
- [19] B. Hasselblatt και A. Katok. *A First Course in Dynamics*. Cambridge University Press, 2003.
- [20] M. W. Hirsch και S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.
- [21] M. W. Hirsch, S. Smale και R. L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 3rd edition, 2012.
- [22] J. H. Hubbard και B. H. West. *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*. Springer, 1991.
- [23] D. Jordan και P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford University Press, 4th edition, 2007.
- [24] G. Kristensson. *Second Order Differential Equations; Special Functions and Their Classification*. Springer, 2010.
- [25] J. P. LaSalle. *The Stability of Dynamical Systems*. SIAM, 1976.
- [26] J. P. LaSalle και S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's Direct Method*. Academic Press, 1961.
- [27] J. D. Meiss. *Differential Dynamical Systems*. SIAM, 2017.
- [28] J. Palis και W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer, 1982.
- [29] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 3rd edition, 2001.
- [30] P. Philip. *Ordinary Differential Equations*. Online Lecture Notes, 2022, www.math.lmu.de/~philip/publications/lectureNotes/philipPeter_ODE.pdf.
- [31] L. S. Pontryagin. *Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley, 1962.
- [32] D. G. Schaeffer και J. W. Cain. *Ordinary Differential Equations - Basics and Beyond*. Springer, 2016.
- [33] H. L. Smith και H. R. Thieme. *Dynamical Systems and Population Persistence*. AMS, 2010.
- [34] I. Stakgold και M. J. Holst. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Wiley, 3rd edition, 2011.
- [35] S. Sternberg. *Dynamical Systems*. Dover, 2010.
- [36] S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. CRC Press, 2nd edition, 2018.
- [37] G. Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. AMS, 2012.
- [38] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2nd edition, 2003.
- [39] X.-Q. Zhao. *Dynamical Systems in Population Biology*. Springer, 2nd edition, 2017.
- [40] Z.-F. Zhang, T.-R. Ding, W.-Z. Huang και Z.-X. Dong. *Qualitative Theory of Differential Equations*. AMS, 1992.

■ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ Ι

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Δυναμικά μοντέλα ενός πληθυσμού:

- (α) Εκθετικό μοντέλο, ή μοντέλο Malthus
- (β) Λογιστικό μοντέλο, ή μοντέλο Verhulst

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

- (α) Διακριτοποίηση μέσω της μεθόδου Euler
- (β) Αυτόνομο ΠΑΤ
- (γ) Ανάλυση ευστάθειας αυτόνομου ΠΑΤ: Βασικές έννοιες

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής και Αριθμητικής Ανάλυσης, [Κεφάλαιο 1](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας: Για τη μελέτη της δυναμικής του πλήθους συνόλων άτμητων στοιχείων, π.χ., έμβιων οργανισμών, χημικών μορίων, ατόμων χημικών στοιχείων, κ.ά., θα ήταν ορθό να χρησιμοποιούμε συναρτήσεις της μορφής

$$N: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}_0 \\ t \mapsto N(t), \text{ για μη τετριμμένο διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R},$$

που αντιπροσωπεύουν το πλήθος ενός υπό μελέτη τέτοιου συνόλου μέσα στο χρόνο. Θα θέλαμε ωστόσο να είμαστε σε θέση να χρησιμοποιούμε τα πανίσχυρα εργαλεία του Απειροστικού Λογισμού για τη μελέτη των συναρτήσεων αυτών, πράγμα που καθίσταται απαγορευτικό λόγω του ότι¹ $\text{Ran}(N) \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν τώρα υποθέσουμε ότι οι πληθυσμοί είναι εξαρχής, ή ενδεχομένως γίνονται στην πορεία, πολύ μεγαλύτεροι σε

¹Με $\text{Ran}(f)$ συμβολίζεται το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f .

σχέση με τα χρονικά διαστήματα για τα οποία τους μελετάμε, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε εξ αρχής ότι $\text{Ran}(N) \subseteq [0, \infty)$, χωρίς να κάνουμε μεγάλο σφάλμα όταν προσεγγίζουμε κάθε στοιχείο του με τον εγγύτερο φυσικό αριθμό. Μία τέτοια υπόθεση θα γίνεται στο εξής για όλα τα μοντέλα διαφορικών εξισώσεων για τη δυναμική μελέτη του πλήθους τέτοιων συνόλων, ακόμα και χωρίς αυτό να αναφέρεται ρητά.

Συνεχές εκθετικό μοντέλο (Malthus, 1798). Έστω $N(t)$ ο πληθυσμός ενός είδους κατά τη χρονική στιγμή t . Σύμφωνα με τον νόμο Malthus, ο ρυθμός μεταβολής του N είναι ανάλογος του N , δηλ.

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad (2.1)$$

όπου $r \in \mathbb{R}$ είναι η σταθερά αναλογίας, που δίνεται από τη σχέση $r = \beta - \mu$ με $\beta, \mu \geq 0$ να παριστάνουν τη σταθερά γονιμότητας και θνησιμότητας, αντίστοιχα. Η ανεξαρτησία των σταθερών αυτών από τον χρόνο, μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: Ο πληθυσμός είναι απομονωμένος και το περιβάλλον στο οποίο ζει παραμένει αμετάβλητο. Μάλιστα, από αυτή την ανεξαρτησία, σε συνδυασμό με τον ορισμό των παραπάνω σταθερών, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

- εντός μιας μικρής χρονικής περιόδου, μήκους h , κάθε οργανισμός γεννά, κατά μέσο όρο, βh νέους οργανισμούς.
- εντός της ίδιας χρονική περίοδο h , κάθε οργανισμός πεθαίνει με πιθανότητα μh .

Το αντίστοιχο ΠΑΤ είναι το εξής:

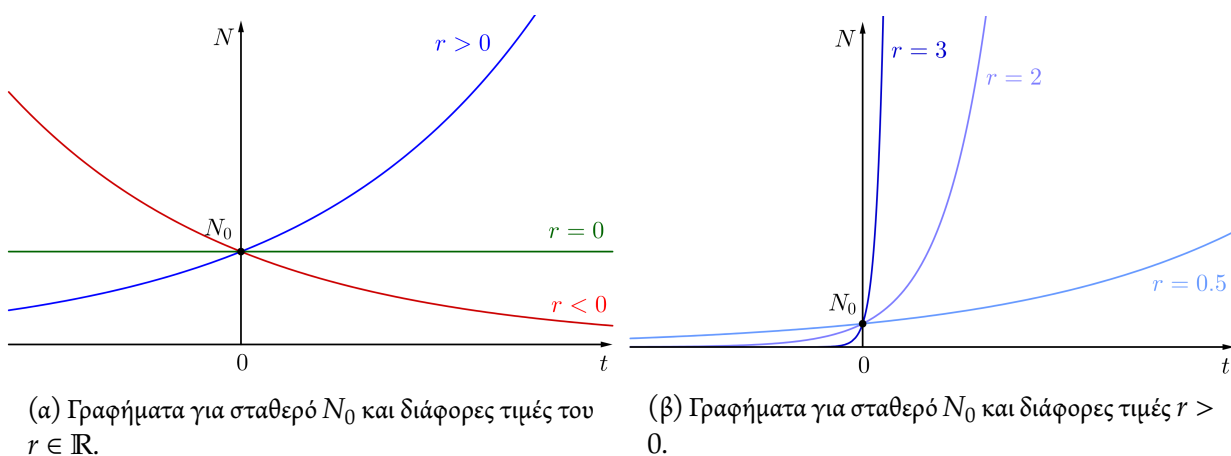
$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένο } N_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ N: \mathcal{I} & \rightarrow [0, \infty), \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την εξίσωση (2.1) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \\ & \text{όσο και την αρχική συνθήκη } N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (\text{exp})$$

Η μοναδική, ολική και ομαλή λύση του γραμμικού (exp) είναι η

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}, \quad \forall t \in \mathcal{I} = \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Όταν $r > 0$ αναφερόμαστε σε “εκθετική αύξηση” (π.χ. κρούσματα του COVID-19), όταν $r < 0$ λέμε ότι η λύση “φθίνει εκθετικά” (π.χ. ραδιενεργή διάσπαση), ενώ όταν $r = 0$ η λύση είναι σταθερή (ιση με N_0) (βλ. Σχήμα 2.1).

Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο πληθυσμός αυξάνεται, άρα ότι $r > 0$ (τα ευκόλως προκύπτοντα αντίστοιχα συμπεράσματα θα ισχύουν και για την περίπτωση $r < 0$).



Σχήμα 2.1: Γραφική παράσταση της (2.2) ως προς t .

Παρόλο που είναι ιδιαίτερα απλουστευτικό, καθώς θεωρείται ότι η πληθυσμιακή αύξηση γίνεται χωρίς κανέναν περιορισμό (προφανώς μια μη ρεαλιστική υπόθεση), το μοντέλο αυτό δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για περιορισμένες χρονικές περιόδους.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: με βάση δημογραφικά δεδομένα, το έτος 1961 ο παγκόσμιος ανθρώπινος πληθυσμός ήταν 3.060.000.000 άτομα, ενώ ο μέσος ετήσιος ρυθμός αύξησής του κατά τη δεκαετία του 1960 (δηλ. από το 1961 ως το 1970) ήταν 2%. Έτσι, σύμφωνα με την (2.2), έχουμε

$$N(t) = 306 \cdot 10^7 \cdot e^{0.02(t-1961)}. \quad (2.3)$$

Το εκθετικό μοντέλο δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για το διάστημα 1750 - 1961, όπως προκύπτει αν τα συγκρίνουμε με τα (πραγματικά) δημογραφικά δεδομένα του παρελθόντος. Το ίδιο συμβαίνει αν συγκρίνουμε το αποτέλεσμα της (2.3), π.χ. για το έτος 1983, με τα τότε πραγματικά δημογραφικά δεδομένα. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χονδρικά το μοντέλο εκθετικής αύξησης έχει αξιοπιστία ± 200 χρόνια περί το $t_0 = 1961$.

Ας δούμε τι γίνεται εκτός του διαστήματος αξιοπιστίας. Το εμβαδόν της επιφάνειας της Γης είναι $1728 \cdot 10^{11}$ τετραγωνικά μέτρα, ενώ το ποσοστό κάλυψης από νερό (ωκεανοί, θάλασσες, λίμνες, ποταμοί) είναι 80%. Αν κάνουμε πρόβλεψη με το μοντέλο εκθετικής αύξησης για το έτος 2222 προκύπτει ότι θα αντιστοιχούν 61 τετραγωνικά μέτρα στεριάς ανά άτομο, ενώ το έτος 2630 θα αντιστοιχεί 1 τετραγωνικό μέτρο στεριάς και υδάτων ανά άτομο!!! Ομοίως, σύμφωνα με το μοντέλο εκθετικής αύξησης, ο ανθρώπινος πληθυσμός στη Γη το έτος 1300 έπρεπε να ήταν 5550 άτομα, ενώ το 903 (μ.Χ.) έπρεπε να ήταν 2 άτομα - οπότε μάθαμε και πότε εμφανίστηκαν ο Αδάμ και η Εύα ☺.

Δίδαγμα: ακόμα και τα απλοϊκά μοντέλα μπορεί να είναι χρήσιμα, αρκεί να λαμβάνουμε υπόψη μας τα διαστήματα αξιοπιστίας τους!

Πριν κλείσουμε αυτή την παράγραφο, ας δούμε υπό ένα πιο φορμαλιστικό πρίσμα τα παραπάνω παραδείγματα. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι για αρχική συνθήκη $N_0 = 0$ η λύση του (exp) είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση $N \equiv 0$. Τώρα, αυτή η ειδική λύση έχει την εξής ιδιότητα: για μια οποιαδήποτε αρχική συνθήκη $N_0 \neq 0$, η αντίστοιχη λύση

- “πλησιάζει” τη μηδενική συνάρτηση, καθώς $t \rightarrow -\infty$.
- “απομακρύνεται” από τη μηδενική συνάρτηση, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Με αυτόν τον απλό τρόπο, έχουμε μια αδρή, αλλά περιεκτική, πληροφόρηση για τη συμπεριφορά των λύσεων του (exp). Παρακάτω (βλ. λογιστικό μοντέλο) θα δούμε πώς βρίσκουμε και πώς χαρακτηρίζουμε τέτοιες λύσεις, όπως η μηδενική για το (exp), οι οποίες παρέχουν σημαντική πληροφορία για το εκάστοτε ΠΑΤ, χωρίς ωστόσο να μπαίνουμε στη διαδικασία να το λύσουμε.

Άσκηση 2.1. *Επαληθεύστε το συμπέρασμα του μετασχηματισμού αντιστροφής χρόνου για το (exp). Πώς αναιρείται η αντιστροφή αυτή μέσω αλλαγής στο πρόσημο της σταθεράς r ;*

Διακριτό εκθετικό μοντέλο. Τα διακριτά δυναμικά προβλήματα είναι εύκολο να κατανοηθούν και να επεξεργαστούν. Ενδείκνυνται για προσομοιώσεις σε υπολογιστή και είναι συχνά κατάλληλα για τη μοντελοποίηση πειραματικών δεδομένων που είναι σχεδόν πάντα διακριτά. Επιπλέον, απλά τέτοια προβλήματα με λιγότερες μεταβλητές από τις αντίστοιχες συνεχούς χρόνου, μπορούν να αναπαριστούν απότομες αλλαγές στις καταστάσεις του συστήματος και ενδεχομένως χαοτική συμπεριφορά (ωστόσο αυτή η οπτική δεν θα μας ασχολήσει στο παρόν σύγγραμμα).

Το ανάλογο διακριτό μοντέλο του συνεχούς εκθετικού είναι το (βλ. Άσκηση 2.2)

$$N_{k+1} = (1 + rh) N_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \text{ για σταθερό } h \text{ με } 0 < |h| \ll 1. \quad (2.4)$$

Για να συσχετίσουμε την (2.4) με την (2.1), θέτουμε

$$m := 1 + rh,$$

καθώς επίσης ορίζουμε ως b τον μέσο όρο παραγωγής νέων οργανισμών του εκάστοτε οργανισμού σε κάθε επόμενο χρονικό βήμα² και ως s την πιθανότητα επιβίωσης του εκάστοτε οργανισμού σε κάθε επόμενο χρονικό βήμα. Τότε, αφού -όπως ήδη έχουμε δει για το συνεχές μοντέλο- ο αριθμός των γεννήσεων εντός μικρού χρονικού διαστήματος h είναι περίπου $\beta h N_k$, συμπεραίνουμε ότι

$$\beta = \frac{b}{h}.$$

Συμπληρωματικά, ο αριθμός των θανάτων $\mu h N_k$ πρέπει να ισούται με τον αριθμό των οργανισμών που δεν επιβιώνουν, δηλ. $(1 - s) N_k$, το οποίο μας δίνει ότι

$$\mu = \frac{1 - s}{h}.$$

Άρα

$$m = 1 + (\beta - \mu) h = b + s.$$

Έτσι, η περίπτωση $r > 0$, δηλ. $\beta > \mu$, αντιστοιχεί στην $b + s > 1$, δηλ. $m > 1$, η οποία είναι η συνθήκη για εκθετική αύξηση (αντίστοιχα για την περίπτωση όπου $r < 0$). Πράγματι, δεδομένης μιας αρχικής τιμής N_0 , μπορούμε επαγωγικά να συμπεράνουμε από την (2.4) ότι

$$N_k = m^k N_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

και έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} m < 1 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = 0, \\ m > 1 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \infty, \\ m = 1 &\Rightarrow N_k \equiv N_0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

συνεπώς καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με αυτά του συνεχούς μοντέλου.

Στο Σχήμα 2.2 δείχνουμε μια πολύ γνωστή γραφική διαδικασία, γνωστή ως μέθοδος του ιστού της αράχνης, για την κατασκευή των επαναλήψεων ενός διακριτού μοντέλου. Τόσο για $m > 1$ όσο και για $m < 1$, η διαδικασία ερμηνεύει τον μηχανισμό της εκθετικής αύξησης ή μείωσης, αντίστοιχα.

Άσκηση 2.2. Επαληθεύστε την (2.4) με βάση το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο *Μαθηματικό Υπόβαθρο*.

Συνεχές λογιστικό μοντέλο (Verhulst, 1838). Έχοντας παρατηρήσει ότι ο νόμος Malthus (2.1) παρουσιάζει τα προβλήματα που αναφέραμε, προχωράμε με το να αντικαταστήσουμε τη σταθερά r με μια συνάρτηση του N . Έτσι προκύπτει ένας πολύ γενικός νόμος πληθυσμιακής μεταβολής

$$\frac{dN}{dt} = r(N) N. \quad (2.6)$$

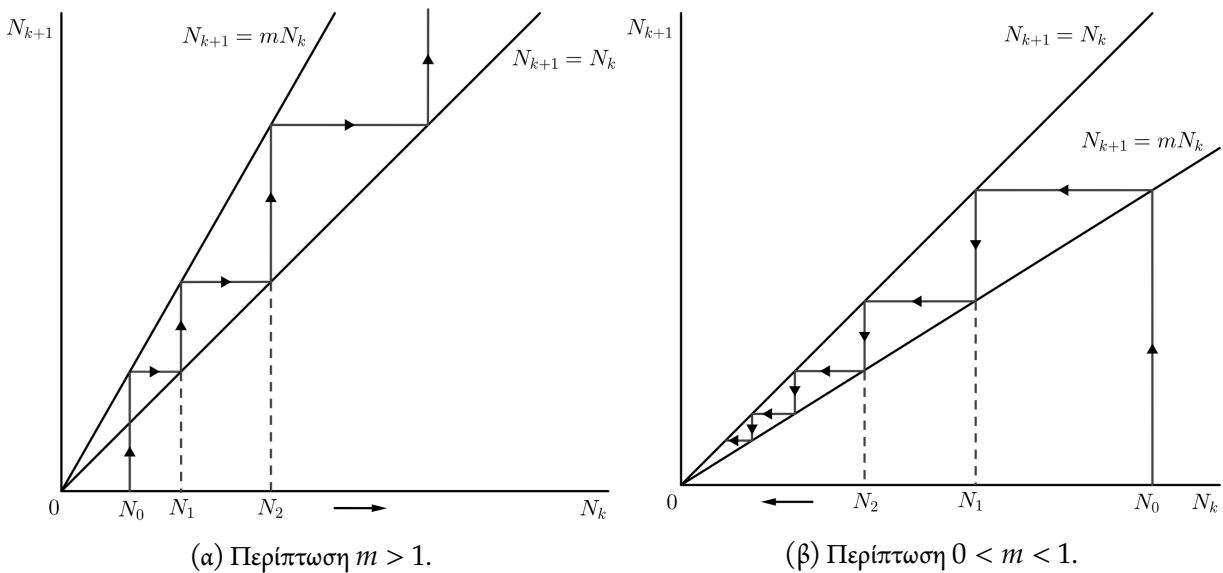
Εξειδικεύουμε τον νόμο αυτό με το να υποθέσουμε ότι η $r(N)$ συμπεριφέρεται ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{είναι περίπου ίση με μια θετική σταθερά } \boxed{r > 0}, & \text{για "μικρό" } N, \\ \text{φθίνει,} & \text{όταν το } N \text{ είναι "σχετικά μεγάλο",} \\ \text{είναι αρνητική,} & \text{για "αρκετά μεγάλο" } N. \end{array} \right.$$

Η απλούστερη συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες είναι η

$$r(N) = r - \rho N, \quad \text{όπου } \rho \text{ θετική σταθερά.}$$

²Μάλιστα $b = B \cdot \omega$, όπου B είναι ο μέσος αριθμός των απογόνων του εκάστοτε οργανισμού σε κάθε επόμενο χρονικό βήμα και ω η (σταθερή για όλους) πιθανότητα επιβίωσης των απογόνων στο επόμενο χρονικό βήμα/αναπαραγωγική περίοδο.



Σχήμα 2.2: Γραφική κατασκευή -με την μέθοδο του ιστού της αράχνης (cobwebbing method)- της ακολουθίας για το διακριτό μοντέλο του Malthus (2.4) με $m := 1 + rh$, που δείχνει τα αποτελέσματα (2.5). Η διαδικασία είναι η εξής: ξεκινώντας από το N_0 στον οριζόντιο άξονα, φέρουμε κάθετη στο σημείο (N_0, mN_0) , η τεταγμένη του οποίου είναι το N_1 . Βρίσκουμε το N_1 στον οριζόντιο άξονα σχεδιάζοντας ένα οριζόντιο τμήμα από το (N_0, mN_0) στη διχοτόμο γωνίας των αξόνων. Πήραμε έτσι το N_1 από το N_0 μέσω του κατακόρυφου τμήματος στο γραμμή $N_{k+1} = mN_k$ και το οριζόντιο τμήμα στην ευθεία $N_{k+1} = N_k$. Μπορούμε στη συνέχεια να πάρουμε το N_2 από το N_1 με την ίδια διαδικασία και συνεχίζοντας τις υπόλοιπες τιμές N_3, N_4, \dots .

Έτσι προκύπτει η λεγόμενη λογιστική εξίσωση (ή εξίσωση Verhulst)

$$\frac{dN}{dt} = (r - \rho N)N,$$

η οποία συνήθως γράφεται στη μορφή

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{1}{k}N\right), \tag{2.7}$$

όπου η θετική σταθερά $k := \frac{r}{\rho}$ λέγεται φέρουσα ικανότητα (ή επίπεδο κορεσμού, ή χωρητικότητα) του περιβάλλοντος και είναι το μέγιστο μέγεθος βιώσιμου πληθυσμού του υπό μελέτη είδους που το περιβάλλον μπορεί να υποστηρίξει³. Ο όρος rN μπορεί να χαρακτηριστεί ως “ρυθμός ανάπτυξης”, ενώ ο όρος $-\frac{r}{k}N^2$ ως “ρυθμός θανάτων”.

Η (2.7) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών (είναι επίσης και διαφορική εξίσωση Bernoulli). Το αντίστοιχο ΠΑΤ είναι το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένο } N_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ & N: \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty), \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (2.7) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \\ & \text{όσο και την αρχική συνθήκη } N(0) = N_0. \end{aligned} \tag{\ell}$$

³Σε απάντηση μιας ερώτησης μετά την ομιλία του (10 Νοεμβρίου 2022), με θέμα “Do biological species exist as mathematical solutions?”, στο πλαίσιο του Σεμιναρίου Ανάλυσης, Διαφορικών Εξισώσεων και Μαθηματικής Φυσικής του Southern Federal University (Rostov-on-Don, Ρωσία), ο διακεκριμένος μαθηματικός Vitaly Volpert σχολίασε ότι ενώ για όλα τα είδη η φέρουσα ικανότητα του πληθυσμού είναι σταθερή, το μόνο είδος για το οποίο αυτό δεν ισχύει είναι ο άνθρωπος, αφού η φέρουσα ικανότητα εξαρτάται από τους πόρους, οι οποίοι αλλάζουν πολύ γρήγορα με την πρόοδο της επιστήμης και τεχνολογίας και μπορούν να θεωρηθούν ακόμα και μη φραγμένοι.

Μπορούμε δε να βρούμε λύση του (ℓ) σε κλειστή μορφή ως εξής

$$N(t) = \frac{k N_0}{N_0 + (k - N_0) e^{-rt}}, \quad \forall t \in \mathcal{I} = \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Μάλιστα, η λύση (2.8) είναι μοναδική για το (ℓ) . Πράγματι, θεωρούμε το γενικότερο του (ℓ) βοηθητικό ΠΑΤ:

$$\begin{aligned} \text{Με δεδομένο } N_0 \in \mathbb{R}, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ N: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (2.7) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \\ \text{όσο και την αρχική συνθήκη } N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (\ell^\diamond)$$

Η διαφορά μεταξύ των δύο αυτών προβλημάτων έγκειται μόνο ως προς τη θεώρηση του επιτρεπτού συνόλου τιμών για τη λύση. Κάνοντας χρήση των βασικών αποτελεσμάτων, εξάγουμε ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης

$$N^\diamond: (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \infty,$$

για το (ℓ^\diamond) (βλ. Άσκηση 2.3), η οποία, προφανώς, δεν μπορεί να είναι άλλη από την (2.8). Άρα, όντως η (2.8) είναι μοναδική και για το (ℓ) .

Τώρα, είναι προφανές ότι

- αν $N_0 = 0$, τότε $N \equiv 0$.
- αν $N_0 = k$, τότε $N \equiv k$.
- αν $N_0 \in (0, \infty) \setminus \{k\}$, τότε

$$\lim_{t \rightarrow T} N(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } N_0 < k \\ \infty, & \text{όταν } N_0 > k \end{cases} \quad \text{όπου } T = \begin{cases} -\infty, & \text{όταν } N_0 < k \\ \left(\ln \left(1 - \frac{k}{N_0} \right)^{\frac{1}{r}} \right)^+, & \text{όταν } N_0 > k \end{cases}$$

και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k.$$

Δηλ. οι $N_1 \equiv 0$ και $N_2 \equiv k$ είναι σταθερές λύσεις του (ℓ) . Επίσης, για κάθε $N_0 \in (0, \infty) \setminus \{k\}$ η τιμή $N(t)$ της λύσης N του (ℓ) έχει συγκεκριμένα την εξής συμπεριφορά:

- καθώς $t \rightarrow T$,
 - αν $N_0 < k$, τότε τείνει ασυμπτωτικά (και μάλιστα εκθετικά) προς την τιμή 0 της αντίστοιχης σταθερής λύσης $N_1 \equiv 0$.
 - αν $N_0 > k$, τότε η λύση εκρήγνυται.
- καθώς $t \rightarrow \infty$, τείνει ασυμπτωτικά (και μάλιστα εκθετικά) προς την τιμή k της αντίστοιχης σταθερής λύσης $N_2 \equiv k$.

Αυτό σημαίνει ότι,

- στο παρελθόν,
 - πριν από αρκετό χρόνο, ο πληθυσμός ήταν κοντινός στο 0, αν $N_0 < k$,

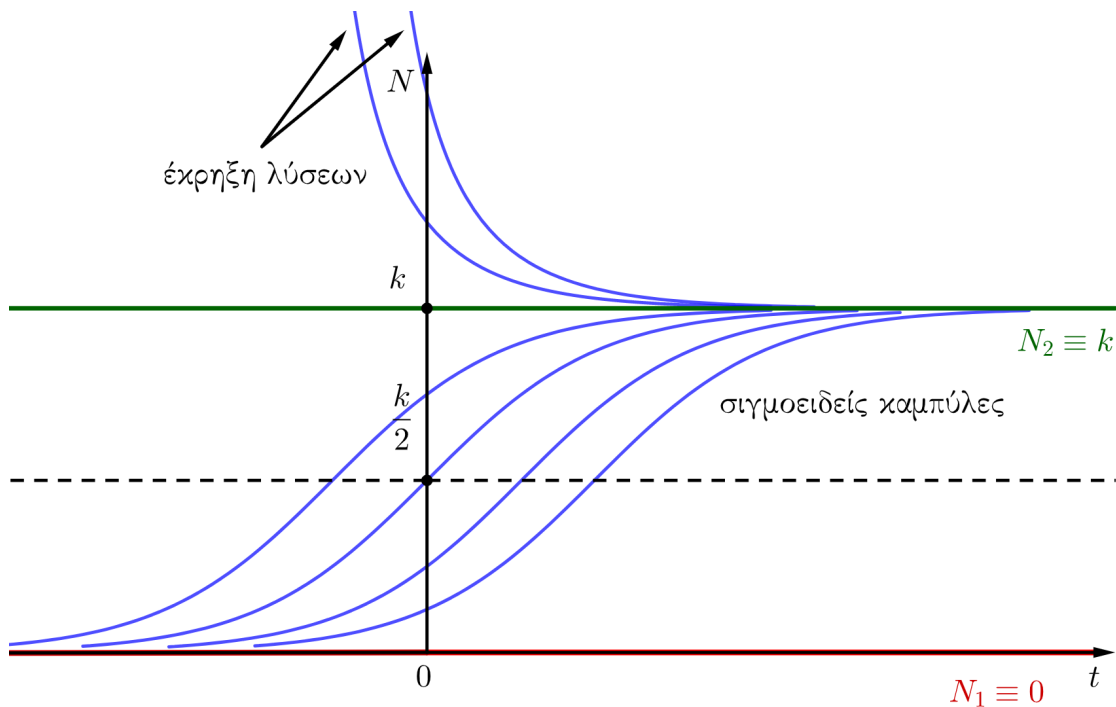
– πριν από λίγο χρόνο, ο πληθυσμός ήταν πολύ μεγάλος, και προφανώς μακριά από τη φέρουσα ικανότητα k , αν $N_0 > k$,

- στο μέλλον, μετά από αρκετό χρόνο, ο πληθυσμός θα είναι κοντινός στη φέρουσα ικανότητα k , και προφανώς μακριά από το 0,

ανεξάρτητα από το μέγεθος του αρχικού πληθυσμού N_0 , αρκεί $N_0 \in (0, \infty) \setminus \{k\}$. Λέμε ότι η σταθερή λύση

- $N_1 \equiv 0$ είναι αρνητικά ασυμπτωτικά ευσταθής και θετικά ασταθής.
- $N_2 \equiv k$ είναι αρνητικά ασταθής και θετικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

Για διάφορες τιμές του N_0 , η γραφική παράσταση της λύσης N του (ℓ) δίνεται στο Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Γραφική παράσταση της N ως προς t για διάφορες τιμές του N_0 .

Παρατηρούμε ότι αν δοθεί αρχική τιμή N_0 εντός κάποιου από τα σύνολα

$$\{0\}, (0, k), \{k\} \text{ και } (k, \infty),$$

τότε η αντίστοιχη λύση υφίσταται εξ ολοκλήρου εντός του συνόλου αυτού. Λέμε ότι τα παραπάνω σύνολα είναι *αναλλοίωτα* (στον χρόνο). Σημειώνουμε ότι, καθεμιά από τις καμπύλες που αναπαριστούν τις λύσεις με $N_0 \in (0, k)$ λέγεται “σιγμοειδής”⁴, και παρουσιάζει μεγάλο βιολογικό ενδιαφέρον. Αντιθέτως, μιας και οι λύσεις για $N_0 \in (k, \infty)$ εκρήγνυνται (προς τα πίσω στο βέλος του χρόνου) για κάποιο (πεπερασμένο) αρνητικό χρόνο, ενδεχομένως να αμφισβητείται η βιολογική αξία αυτού του αναλλοίωτου συνόλου.

Τα πληθυσμιακά μοντέλα εκθετικής και λογιστικής μεταβολής που μελετήσαμε (και όσα θα θεωρήσουμε παρακάτω) περιγράφονται από μία *αυτόνομη* βαθμωτή συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, δηλ. μια διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dN}{dt} = f(N), \tag{2.9}$$

⁴Διεθνής όρος, που οφείλεται στο ότι το σχήμα μιας τέτοιας καμπύλης μοιάζει με το ελληνικό τελικό σίγμα.

όπου $\text{Dom}(f), \text{Ran}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Η εύρεση λύσης της (2.9) σε κλειστή μορφή δεν είναι γενικώς δυνατή, εκτός και αν μπορεί να λυθεί ως προς N η εξίσωση

$$\int \frac{1}{f(N)} dN = \int dt,$$

πράγμα σπάνιο, που είναι εντούτοις εφικτό στην περίπτωση της λογιστικής εξίσωσης (2.7) λόγω του μη μηδενισμού και της απλής μορφής που έχει εν προκειμένω η f . Θα επικεντρωθούμε στη συνέχεια στην παρουσίαση μεθόδων που επιτρέπουν την ποιοτική κατανόηση της συμπεριφοράς μοντέλων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων χωρίς την ανάγκη να βρούμε τη λύση τους σε λυμένη μορφή. Γενικά, η ανάλυση της ασυμπτωτικής ευστάθειας μη γραμμικών μοντέλων που περιγράφονται με διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης γίνεται με τη χρήση του *διαγράμματος φάσης* (που ειδικότερα ονομάζεται *γραμμή φάσης* στη μία διάσταση και *επίπεδο φάσης* στις δύο διαστάσεις), ενώ στην περίπτωση εξάρτησης του προβλήματος από παράμετρο απαιτείται επιπλέον η χρήση του *διαγράμματος διακλάδωσης*.

Θεωρούμε λοιπόν τη λογιστική εξίσωση

$$\frac{dN}{dt} = f(N) := rN \left(1 - \frac{1}{k}N\right)$$

και θα τη μελετήσουμε **χωρίς** να τη λύσουμε.

Βρίσκουμε αρχικά τα σημεία μηδενισμού της f :

$$f(N^*) = 0 \iff N_1^* = 0 \text{ ή } N_2^* = k.$$

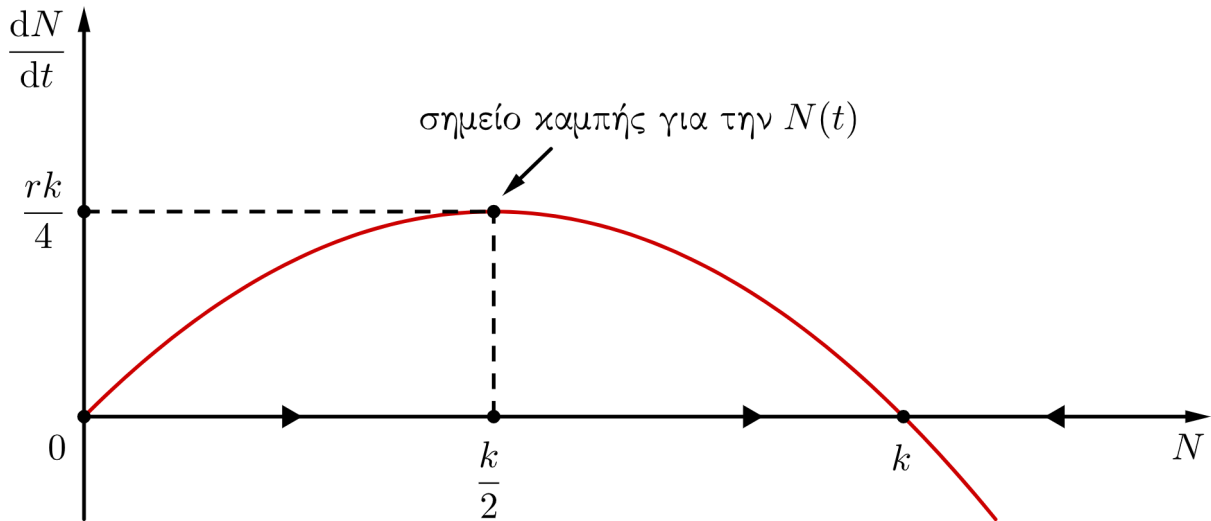
Η φορά “ \Leftarrow ” είναι προφανής, ενώ η “ \Rightarrow ” προκύπτει από την “ \Leftarrow ” και το γεγονός ότι η f είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Τα σημεία $N_1^* = 0$ και $N_2^* = k$ ονομάζονται *σημεία ισορροπίας* (σ.ι.) (*equilibrium point/fixed point/steady state*) καθώς, λόγω της σχέσης $\frac{dN}{dt} = f(N)$, αντιστοιχούν στις λύσεις ισορροπίας (σταθερές ως προς τον χρόνο t) $N_1 \equiv 0$ και $N_2 \equiv k$ της λογιστικής εξίσωσης.

Περιοριζόμενοι για συντομία στους θετικούς χρόνους (αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για αρνητικούς), ελέγχουμε το είδος ευστάθειας των σ.ι.:

- Το N_1^* είναι *θετικά ασταθές* (οποιαδήποτε μικρή διαταραχή από αυτό το σ.ι. θα υποχρεώσει τη λύση να βγει από μια περιοχή του $N_1^* = 0$ για μεγάλους χρόνους).
- Το N_2^* είναι *θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές*, δηλ.
 - είναι *θετικά ευσταθές* (οποιαδήποτε μικρή διαταραχή απ’ αυτό το σ.ι. θα υποχρεώσει τη λύση να παραμείνει στην περιοχή του N_2^* για μεγάλους χρόνους),
 - είναι *θετικά ελκυστικό* (οποιαδήποτε μικρή διαταραχή απ’ αυτό το σ.ι. θα υποχρεώσει τη λύση να επιστρέψει στο N_2^* για μεγάλους χρόνους).

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης (δηλ. για “μεγάλους χρόνους”) περιγράφεται μέσω των *ελκυστών* (που εν προκειμένω είναι τα ασυμπτωτικά ευσταθή σ.ι., μαζί ενδεχομένως με το $-\infty$ ή/και το ∞). Στην περίπτωση της λογιστικής εξίσωσης, ο μόνος ελκυστής για θετικούς χρόνους είναι το θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. N_2^* .

Τοποθετούμε τώρα όλα τα σ.ι. σε μια ευθεία γραμμή, βρίσκουμε τη διεύθυνση της ροής (δηλ. το πρόσημο της $\frac{dN}{dt}$) μεταξύ των σ.ι. και τη σημειώνουμε με τη φορά της αιχμής ενός βέλους (προς τα δεξιά η θετική κατεύθυνση) επί της γραμμής αυτής. Αυτή λέγεται *γραμμή φάσης* και καθορίζει το είδος της ευστάθειας των σ.ι.. Σχεδιάζουμε, τέλος, τη γραμμή φάσης επί του οριζόντιου άξονα στη γραφική παράσταση της $\frac{dN}{dt}$ (δηλ. της $f(N)$) ως προς N , όπως στο [Σχήμα 2.4](#).



Σχήμα 2.4: Γραφική παράσταση της $\frac{dN}{dt}$ ως προς N .

Είναι φανερό ότι για $0 < N < k$ έχουμε $\frac{dN}{dt} > 0$, οπότε η N είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του t , ενώ για $N > k$ έχουμε $\frac{dN}{dt} < 0$, οπότε η N είναι γνησίως φθίνουσα. Δεν έχει νόημα η περίπτωση $N < 0$, αφού το N εκφράζει πληθυσμό.

Υπενθυμίζουμε ότι η -δύο φορές διαφορίσιμη- συνάρτηση $N(t)$ είναι (γνησίως) κυρτή αν $\frac{d^2N}{dt^2} \geq 0$, ενώ (γνησίως) κοίλη αν $\frac{d^2N}{dt^2} \leq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d^2N}{dt^2} = \frac{df}{dN} \frac{dN}{dt} = \frac{df}{dN} f,$$

οπότε η $\frac{d^2N}{dt^2}$ είναι θετική (αρνητική) όταν οι $\frac{df}{dN}$ και $f(N)$ είναι ομόσημες (ετερόσημες). Παραγωγίζοντας τη λογιστική εξίσωση ως προς N , παίρνουμε

$$\frac{df}{dN} = r \left(1 - \frac{2}{k}N \right).$$

Από το Σχήμα 2.4 και τις παραπάνω παρατηρήσεις παίρνουμε άμεσα τον Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.1: Ποιοτική ανάλυση της συνάρτησης N .

N	$f(N)$	$\frac{df}{dN}$	N ως προς t
$\left(0, \frac{k}{2} \right)$	> 0	> 0	γνησίως αύξουσα και γνησίως κυρτή
$\left(\frac{k}{2}, k \right)$	> 0	< 0	γνησίως αύξουσα και γνησίως κοίλη
(k, ∞)	< 0	< 0	γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή

Έτσι οδηγούμαστε **ποιοτικά** (δηλ. χωρίς να λύσουμε τη λογιστική εξίσωση) στη γραφική παράσταση του Σχήματος 2.3 (της N ως προς t), όταν $N \in [0, k + \varepsilon)$, για μικρό $\varepsilon > 0$. Μάλιστα, συμπεραίνουμε ότι η λύση

του (ℓ) είναι

$$\begin{cases} \text{ολική (ως προς τον χρόνο),} & \text{όταν } N_0 \in [0, k] \\ \text{θετικά ολική,} & \text{όταν } N_0 \in (k, \infty). \end{cases}$$

Για τη συμπλήρωση της ποιοτικής αναπαράστασης της συνάρτησης, θα πρέπει να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της N πάνω και μακριά από το k (είδαμε προηγουμένως -που γνωρίζαμε τη λύση σε κλειστή μορφή- ότι θα εκρήγνυται (προς τα πίσω) για κάποιον αρνητικό χρόνο, ωστόσο εδώ υποτίθεται πως δεν το ξέρουμε). Για κάτι τέτοιο, θα χρειαστεί να βασιστούμε στην κλασική θεωρία των ΣΔΕ.

Πρώτον, δείχνουμε ότι το (k, ∞) είναι αναλλοίωτο στον χρόνο (το γνωρίζουμε από πριν, αλλά, όπως είπαμε, υποτίθεται πως δεν το ξέρουμε). Πράγματι, αυτό θα προκύψει με άτοπο από τη μοναδικότητα της λύσης μέσω ενός μετασχηματισμού μεταφοράς χρόνου: κοιτάμε το βοηθητικό γενικότερο πρόβλημα (ℓ^\diamond) , που ξέρουμε ότι είναι καλά τοποθετημένο και με ομαλή μεγιστική λύση

$$N^\diamond: (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \infty.$$

Από τη μία, αν $N_0 = k$, τότε εύκολα συμπεραίνουμε ότι η

$$N^\diamond(t) = N_2(t) \equiv k, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

είναι η μοναδική λύση. Από την άλλη, έστω $N_0 > k$ και ότι $\exists t_0 \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ τέτοιο ώστε είτε $N^\diamond(t_0) = k$, είτε $N^\diamond(t_0) < k$. Λόγω της συνέχειας της λύσης, μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $N^\diamond(t_0) = k$, όπως στο [Σχήμα 2.5](#). Τότε, ορίζοντας τις $\varphi: (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0) \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ και $n^\diamond: (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ως

$$n^\diamond := N^\diamond \circ \varphi, \text{ όπου } \varphi(t) := t + t_0, \text{ για κάθε } t \in (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0),$$

δείχνουμε εύκολα ότι η n^\diamond είναι η μοναδική μεγιστική λύση για το πρόβλημα:

Με δεδομένο $N_0 \in \mathbb{R}$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $N: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε η N να ικανοποιεί τόσο την (2.7) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$, όσο και την $N(0) = N^\diamond(t_0)$.

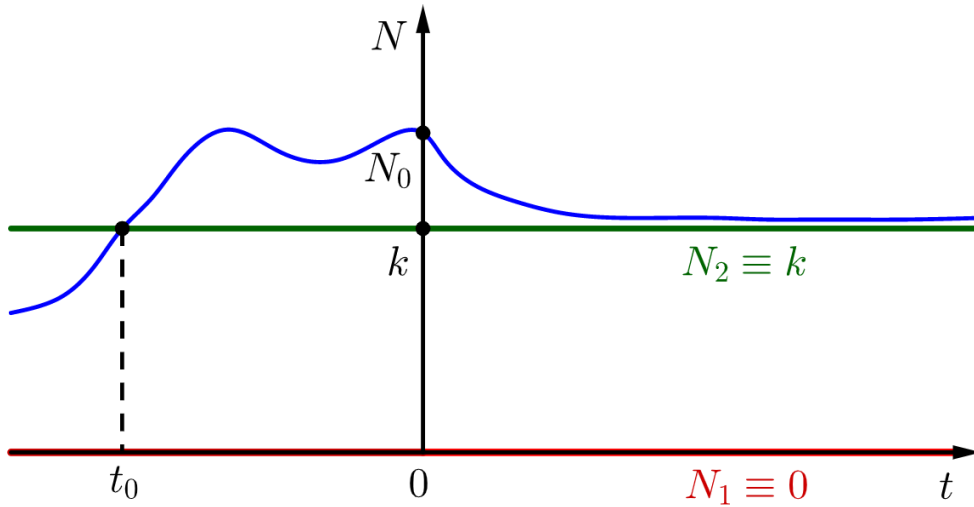
Ωστόσο, πάλι εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$n^\diamond(t) = k, \quad \forall t \in (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0),$$

δηλ.

$$N^\diamond(t) = k, \quad \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

και αρκεί να θέσουμε $t = 0$ για να καταλήξουμε σε άτοπο.



Σχήμα 2.5: Λόγω της μοναδικότητας της λύσης, είναι αδύνατον μια λύση με $N_0 > k$ (μπλε) να λάβει την τιμή k για κάποιο χρόνο t_0 , καθώς η $N_2 \equiv k$ (πράσινο) είναι επίσης λύση. Πράγματι, σε διαφορετική περίπτωση, θεωρώντας ένα νέο ΠΑΤ με αρχική τιμή την $N(t_0) = k$, μπορούμε πλέον να βρούμε (τουλάχιστον) δύο διακεκριμένες λύσεις του, άτοπο.

Δεύτερον, αν $N_0 > k$, τότε

$$N(t) > k, \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

και άρα

$$rN(t) \left(1 - \frac{1}{k}N(t)\right) < 0, \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Οπότε από την (2.7) θα έχουμε ότι η N είναι γνησίως φθίνουσα, δηλ.

$$N(t) > N_0, \forall t \in (-\varepsilon_1, 0).$$

Άρα

$$\int_t^0 ds = \int_{N_0}^{N(t)} \left| \frac{1}{rs \left(1 - \frac{1}{k}s\right)} \right| ds, \forall t \in (-\varepsilon_1, 0),$$

δηλ.

$$-t = \int_{N_0}^{N(t)} -\frac{1}{rs \left(1 - \frac{1}{k}s\right)} ds, \forall t \in (-\varepsilon_1, 0),$$

ή αλλιώς

$$-t = \int_{N_0}^{N(t)} \frac{k}{rs^2 \left(1 - \frac{k}{s}\right)} ds, \forall t \in (-\varepsilon_1, 0),$$

και κατά συνέπεια

$$\varepsilon_1 = \int_{N_0}^{N(-\varepsilon_1^+)} \frac{k}{rs^2 \left(1 - \frac{k}{s}\right)} ds, \text{ όπου } N(-\varepsilon_1^+) := \lim_{t \rightarrow -\varepsilon_1^+} N(t) \in (N_0, \infty].$$

Έτσι,

$$\varepsilon_1 < \frac{kN_0}{r(N_0 - k)} \int_{N_0}^{\infty} \frac{1}{s^2} ds = \frac{k}{r(N_0 - k)} < \infty.$$

Άρα η λύση εκρήγνυται (προς τα πίσω) για κάποιον αρνητικό χρόνο, και αυτή η πληροφορία συμπληρώνει το παζλ της αδρής κατασκευής του Σχήματος 2.3 στην ολότητά του.

Άσκηση 2.3. Χωρίς γνώση της λύσης του (ℓ^\diamond) σε κλειστή μορφή, αποδείξτε:

1. Ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης.

2. Τα σύνολα

$$(-\infty, 0), \{0\}, (0, k), \{k\} \text{ και } (k, \infty)$$

είναι αναλλοίωτα στον χρόνο.

3. Έκρηξη (προς τα εμπρός) της λύσης για κάποιον θετικό χρόνο, όταν $N_0 < 0$.

Άσκηση 2.4. Μελετήστε άμεσα το (ℓ) και όταν $r < 0$, μέσω του μετασχηματισμού αντιστροφής του χρόνου. Ποια η βιολογική ερμηνεία του αντίστοιχου μοντέλου;

Άσκηση 2.5. 1. Εξηγήστε γιατί

$$\varepsilon_1 = -\ln \left(1 - \frac{k}{N_0} \right)^{\frac{1}{r}},$$

και με χρήση αυτής της πληροφορίας αποδείξτε την ανισότητα

$$1 + x < e^x, \forall x > 0.$$

2. Βρείτε την αντίστοιχη ανισότητα για την περίπτωση της έκρηξης (προς τα εμπρός) της λύσης του (ℓ^\diamond) για κάποιον θετικό χρόνο, δηλ. όταν $N_0 < 0$.

Άσκηση 2.6. Εισάγετε και μελετήστε το διακριτό ανάλογο του συνεχούς λογιστικού ΠΑΤ. Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της ακολουθίας αξιοποιώντας τη μέθοδο του ιστού της αράχνης.

Μαθηματικό Υπόβαθρο: Εδώ παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες και εργαλεία που χρησιμοποιούνται για τη διακριτοποίηση ενός ΠΑΤ, καθώς επίσης και για τη Φάση III της μελέτης του.

Διακριτοποίηση μέσω της μεθόδου Euler. Θεωρούμε ένα καλά τοποθετημένο (ΠΑΤ) το οποίο είτε δεν μπορούμε, είτε δεν θέλουμε, να λύσουμε σε κλειστή μορφή. Για την εύρεση αριθμητικής λύσης προσφεύγουμε στο επόμενο σχήμα:

1. Διακριτοποίηση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης, κατά την οποία λαμβάνεται μια αναδρομική σχέση.
2. Αναδρομική εύρεση των τιμών της διακριτής ζητούμενης λύσης, με την αξιοποίηση της παραπάνω αναδρομικής σχέσης σε συνδυασμό με τη δεδομένη αρχική τιμή.

Για τη διακριτοποίηση της διαφορικής εξίσωσης, συμβολίζουμε

$$y_k := y(t_k), \text{ για } k \in \mathbb{N}_0,$$

όπου

$$t_k := kh, \text{ για } k \in \mathbb{N}_0, \text{ με } h \text{ σταθερό με } 0 < |h| \ll 1.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή y_0 είναι δεδομένη στο (ΠΑΤ). Τότε

$$\frac{dy}{dt}(t_k) \approx \frac{y(t_k + h) - y(t_k)}{h} = \frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{h} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$$

και από τη διαφορική εξίσωση του (ΠΑΤ) έχουμε

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(t_k, y(t_k)) = f(kh, y_k),$$

που δίνει την ακόλουθη αναδρομική σχέση (εξίσωση διαφορών)⁵

$$y_{k+1} = y_k + hf(kh, y_k), \text{ για } k \in \mathbb{N}_0.$$

Από την παραπάνω σχέση, σε συνδυασμό με τη δεδομένη τιμή y_0 , λαμβάνουμε τις τιμές y_k για $k \in \mathbb{N}_0$, οι οποίες θα μας δώσουν μια καλή προσέγγιση της λύσης y του (ΠΑΤ). Μάλιστα, το διακριτό ανάλογο του (ΠΑΤ) είναι το

$$\begin{cases} y(t_{k+1}) = y(t_k) + hf(kh, y(t_k)), \text{ για } k \in \mathbb{N}_0 & (\text{μοντέλο}) \\ y(t_0) = y_0 & (\text{αρχική τιμή}). \end{cases}$$

Αυτόνομο ΠΑΤ. Το (ΠΑΤ) λέγεται αυτόνομο αν

$$\exists g: S_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ τέτοιο ώστε } f(t, y(t)) = g(y(t)), \forall t \in \mathcal{I},$$

δηλ. το δεξιό μέλος του μοντέλου εξαρτάται από τον χρόνο t αποκλειστικά μόνο μέσω της λύσης y . Το S_2 ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) λέγεται *χώρος φάσης*.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) για το οποίο υπάρχει μοναδική λύση είναι ότι η “αρχή (μέτρησης) του χρόνου” t_0 είναι *αυθαίρετη*, δηλ. ότι ισχύει για μια τιμή t_0 θα ισχύει και για όλες τις άλλες, όπως προκύπτει μέσω ενός απλού μετασχηματισμού μεταφοράς χρόνου. Συνήθως (κάτι που θα κάνουμε και εμείς εδώ), προς απλοποίηση του συμβολισμού, επιλέγεται η τιμή $t_0 = 0$ κατά τη μελέτη ενός αυτόνομου συστήματος. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι “μηδενίζεται το κοντέρ” τη στιγμή που αρχίζει η καταγραφή του αντίστοιχου φαινομένου.

Σε ό,τι ακολουθεί, αντί για τη θεώρηση μιας νέας συνάρτησης g , θα γράφουμε απλουστευτικά (και καταχρηστικά)

$$f(t, y(t)) = f(y(t)), \forall t \in \mathcal{I}.$$

Ανάλυση αυτόνομου ΠΑΤ: Βασικές έννοιες.

1. Έστω αυτόνομο (ΠΑΤ), το οποίο, για κάθε $y_0 \in S_2$, όπου S_2 ο χώρος φάσης, έχει μοναδική μεγιστική λύση (π.χ. κάνοντας την υπόθεση ότι η f ικανοποιεί τοπικά μια συνθήκη Lipschitz), $y(\cdot, y_0)$, τέτοια ώστε $\text{Dom}(y(\cdot, y_0)) = (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, με $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, \infty)$. Τότε:

- i. Το σύνολο

$$\text{Ran}\left(y(\cdot, y_0)\Big|_{(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)}\right) \subseteq S_2$$

λέγεται *τροχιά* (της λύσης αυτής, η οποία διέρχεται από το y_0). Λόγω μοναδικότητας, του (ΠΑΤ) δύο διακεκριμένες τροχιές ενός τέτοιου (ΠΑΤ) δεν έχουν σημεία τομής.

⁵Για τη μελέτη των *Εξισώσεων Διαφορών (Difference Equations)*, δηλ. εξισώσεων που χονδρικά περιέχουν διαφορές μεταξύ διαδοχικών τιμών μιας συνάρτησης μιας διακριτής μεταβλητής, και των αντίστοιχων Διακριτών Δυναμικών Συστημάτων, οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται ενδεικτικά στα συγγράμματα [1], [2], [3], [4], [5].

ii. Το σύνολο

$$\text{Ran}\left(y(\cdot, y_0)\Big|_{(0, \varepsilon_2)}\right) \subseteq S_2 \left(\text{Ran}\left(y(\cdot, y_0)\Big|_{(-\varepsilon_1, 0)}\right) \subseteq S_2 \right)$$

λέγεται *θετική (αρνητική) ημιτροχιά*.

2. i. Το $\Sigma \subseteq S_2$ λέγεται *θετικά (αρνητικά) αναλλοίωτο σύνολο* αν

$$\text{Ran}\left(y(\cdot, y_0)\Big|_{(0, \varepsilon_2)}\right) \subseteq \Sigma \left(\text{Ran}\left(y(\cdot, y_0)\Big|_{(-\varepsilon_1, 0)}\right) \subseteq \Sigma \right), \forall y_0 \in \Sigma.$$

Περιγραφικά, κάθε τροχιά που διέρχεται για $t = 0$ από κάποιο σημείο του Σ παραμένει εντός αυτού για κάθε $t > 0$ ($t < 0$) στο οποίο ορίζεται η λύση. Το Σ λέγεται *αναλλοίωτο σύνολο* αν είναι τόσο θετικά όσο και αρνητικά αναλλοίωτο.

ii. Ένας αναλυτικός τρόπος επαλήθευσης του ότι ένα σύνολο $\Sigma \subseteq S_2$ με κατά τμήματα ομαλό σύνορο⁶, $\partial\Sigma$, είναι όντως θετικά (αρνητικά) αναλλοίωτο, αποτελεί η ανισότητα

$$v(x) \cdot f(x) > 0 \quad (v(x) \cdot f(x) < 0), \text{ για κάθε "ομαλό" σημείο } x \in \partial\Sigma,$$

δηλ. για κάθε σημείο $x \in \partial\Sigma$ τέτοιο ώστε να ορίζεται εσωτερικό κάθετο διάνυσμα του $\partial\Sigma$ στο x , $v(x)$ ⁷.

3. Το $y^* \in S_2$ λέγεται *σημείο ισορροπίας (σ.ι.) (equilibrium point)* ή *κρίσιμο σημείο* αν $g(y^*) = 0$.

4. Η λύση $y \equiv y^*$ λέγεται *λύση ισορροπίας* ή *λύση μόνιμης κατάστασης*.

5. Έστω y^* μεμονωμένο σ.ι. (δηλ. υπάρχει περιοχή του y^* που δεν περιέχει άλλο σ.ι.). Τότε (βλ. Σχήμα 2.6):

i. Το y^* λέγεται *θετικά (αρνητικά) ευσταθές* αν

(α) υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y_0 \in S_2$ με $|y_0 - y^*| < \rho$ να ισχύει ότι η $y(\cdot, y_0)$ είναι θετικά (αρνητικά) ολική, δηλ.

$$\text{Dom}(y(\cdot, y_0)) \supseteq [0, \infty) \quad (\text{Dom}(y(\cdot, y_0)) \supseteq (-\infty, 0]),$$

και

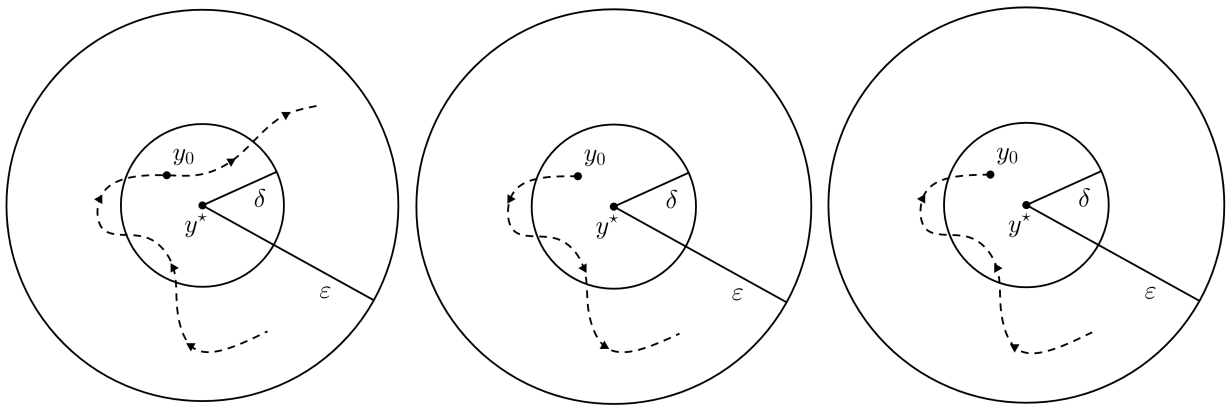
(β) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $y_0 \in S_2$ να ισχύει ότι

$$|y_0 - y^*| < \delta \Rightarrow |y(t, y_0) - y^*| < \varepsilon, \forall t \in [0, \infty) \quad (\forall t \in (-\infty, 0]).$$

Το y^* λέγεται *ευσταθές* αν είναι τόσο θετικά όσο και αρνητικά ευσταθές.

⁶Ένα κατά τμήματα ομαλό σύνολο μιας n -διάστατης πολλαπλότητας είναι μια $(n-1)$ -διάστατη πολλαπλότητα χωρίς σύνορο, η οποία διαμερίζεται μέσω ξένων ανά δύο σχετικά ανοικτών υποσυνόλων της (τμήματα), οι σχετικές κλειστότητες των οποίων εφάπτονται μεταξύ τους. Το χαρακτηριστικό εδώ είναι, πρώτον, ότι το σύνολο όλων των παραπάνω σημείων επαφής αποτελεί ένα σχετικά κλειστό μηδενικό σύνολο επί της $(n-1)$ -διάστατης πολλαπλότητας και, δεύτερον, ότι το κάθε (σχετικά ανοικτό) τμήμα μπορεί να εκφραστεί ως το γράφημα μιας ομαλής συνάρτησης (με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό σύνολο εντός του \mathbb{R}^{n-1}), η οποία μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε το γράφημά της να εκφράζει τελικά τη σχετική κλειστότητα του τμήματος. Κατά αυτόν τον τρόπο, αποκλείονται μορφοκλασματικές (fractal) γεωμετρίες και αιχμές, αλλά επιτρέπονται οι γωνίες και οι ακμές. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις ιδιότητες και τη χρήση αυτών των συνόρων οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στην εργασία [6].

⁷Σε ένα κατά τμήματα ομαλό σύνολο, εντός των σχετικά ανοικτών τμημάτων του ορίζεται (καλά, δηλ. μοναδικά) μοναδιαίο εσωτερικό και εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί της $(n-1)$ -πολλαπλότητας, ενώ στο σχετικά κλειστό μηδενικό σύνολο των σημείων επαφής των κλειστοτήτων τους κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο. Άρα, το εσωτερικό και εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί ενός κατά τμήματα ομαλού συνόρου ορίζεται παντού εκτός από ένα σχετικά κλειστό μηδενικό σύνολο.

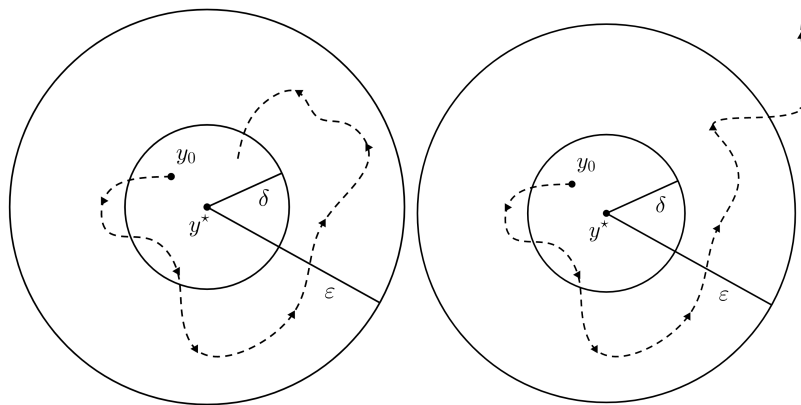


(α) Ευσταθές σ.ι..

(β) Θετικά ευσταθές σ.ι..

(γ) Αρνητικά ευσταθές σ.ι..

Ευστάθεια σ.ι..



(δ) Θετική ασυμπτωτική ευστάθεια σ.ι..

(ε) Θετική αστάθεια σ.ι..

Σχήμα 2.6: Διάφοροι τύποι ευστάθειας/αστάθειας ενός σ.ι..

ii. Το y^* λέγεται θετικά (αρνητικά) ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι θετικά (αρνητικά) ευσταθές και επιπλέον

(γ) υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $y_0 \in S_2$ με $|y_0 - y^*| < \rho$ να ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t, y_0) - y^*| = 0 \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} |y(t, y_0) - y^*| = 0 \right).$$

Το y^* λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι τόσο θετικά όσο και αρνητικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

iii. Το y^* λέγεται θετικά (αρνητικά) ασταθές αν δεν είναι θετικά (αρνητικά) ευσταθές. Το y^* λέγεται ασταθές αν είναι τόσο θετικά όσο και αρνητικά ασταθές.

Όσον αφορά τις έννοιες και τα αποτελέσματα από τις ΣΔΕ και τα Δυναμικά Συστήματα, οι βιβλιογραφικές αναφορές του [Κεφαλαίου 1](#) καλύπτουν και το παρόν κεφάλαιο.

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Η. Καλογερόπουλος. Διακριτά Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές. Συμμετρία, 2013.

- [2] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer, 3rd edition, 2005.
- [3] W. G. Kelley και A. C. Peterson. *Difference Equations*. Academic Press, 2nd edition, 2001.
- [4] U. Krause. *Positive Dynamical Systems in Discrete Time: Theory, Models, and Applications*. de Gruyter, 2015.
- [5] R. E. Mickens. *Difference Equations: Theory, Applications and Advanced Topics*. CRC Press, 3rd edition, 2015.
- [6] V. Bitsouni, N. Gialelis και I. G. Stratis. “A quantitative approach on the solvability of evolution problems in open sets of certain geometries”. Στο: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 506 (2022), article 125663.

■ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ II

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

- (α) Δυναμικά μοντέλα ενός πληθυσμού (συνέχεια):
 - i. Λογιστικό μοντέλο ή μοντέλο Verhulst (συνέχεια)
 - ii. Επίδραση Allee
- (β) Δυναμικά μοντέλα πολλών πληθυσμών: Αλληλεπίδραση μεταξύ πληθυσμών

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Ανάλυση ευστάθειας αυτόνομου ΠΑΤ (συνέχεια): Γραμμικοποίηση

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 1,2](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Γραμμικοποίηση του συνεχούς λογιστικού προβλήματος. Ένας ακόμα πιο τυποποιημένος τρόπος για να αποφανθούμε για την ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. $N_1^* = 0$ και $N_2^* = k$ του (ℓ) , είναι μέσω της γραμμικοποίησής του. Μάλιστα, ο τρόπος αυτός μας παρέχει τοπικά προσεγγίσεις των λύσεων, οι οποίες με τη σειρά τους είναι λύσεις γραμμικών προβλημάτων.

Πράγματι, το γραμμικό μοντέλο του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου προβλήματος σε κάθε ένα σ.ι. είναι το

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = \frac{df}{dN}(N_i^*)\tilde{N}, \text{ για } i \in \{1, 2\}, \quad (3.1)$$

όπου $f(N) = rN\left(1 - \frac{1}{k}N\right)$, δηλ.

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = r\left(1 - \frac{2}{k}N_i^*\right)\tilde{N}, \text{ για } i \in \{1, 2\}$$

και

$$\frac{d\tilde{N}}{dt} = \begin{cases} r\tilde{N}, & \text{στο } N_1^* \\ -r\tilde{N}, & \text{στο } N_2^*. \end{cases} \quad (3.2)$$

Εφόσον

$$\frac{df}{dN}(N_i^*) = \begin{cases} r, & \text{για } i = 1 \\ -r, & \text{για } i = 2, \end{cases}$$

έχουμε ότι τα N_1^* και N_2^* είναι υπερβολικά με

$$\frac{df}{dN}(N_1^*) \begin{cases} > 0, & \text{όταν } r > 0 \\ < 0, & \text{όταν } r < 0 \end{cases}$$

και

$$\frac{df}{dN}(N_2^*) \begin{cases} < 0, & \text{όταν } r > 0 \\ > 0, & \text{όταν } r < 0. \end{cases}$$

Άρα, όντως,

- το N_1^* είναι

$$\begin{cases} \text{αρνητικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{όταν } r > 0 \\ \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{όταν } r < 0, \end{cases}$$

και

- το N_2^* είναι

$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{όταν } r > 0 \\ \text{αρνητικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{όταν } r < 0, \end{cases}$$

όπως έχουμε ήδη διαπιστώσει.

Επιπλέον, από την (3.2) σε συνδυασμό με τον τοπικά προσεγγιστικό μετασχηματισμό

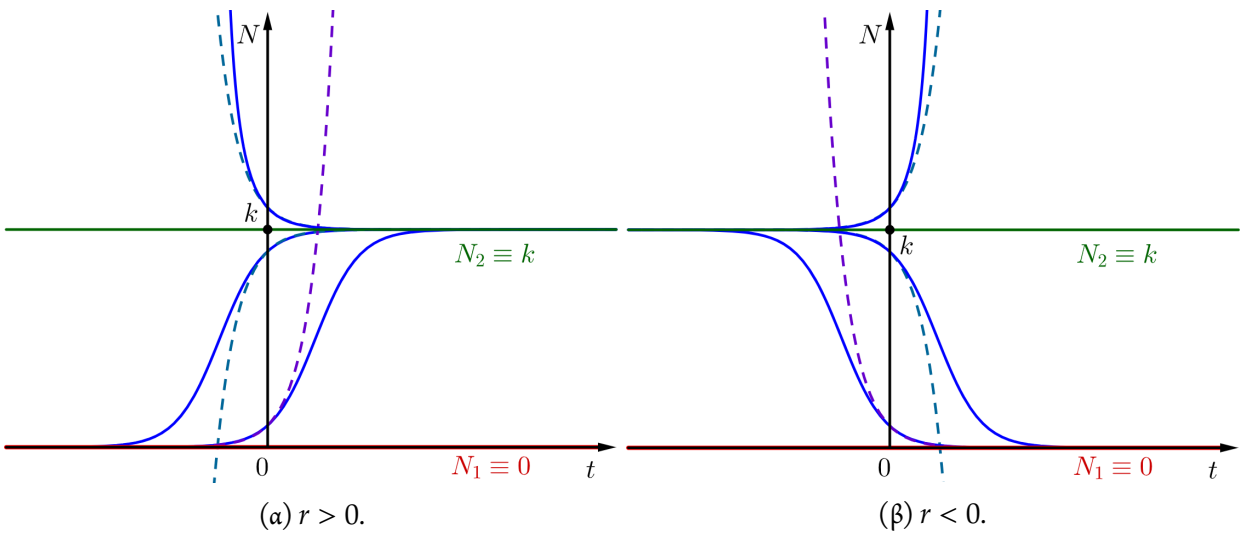
$$N(t, N_0) \approx N_i^* + \tilde{N}(t, N_0 - N_i^*), \quad \forall N_0 \approx N_i^* \text{ για } i \in \{1, 2\}, \text{ και } \forall t \in \begin{cases} \text{είτε } (-\infty, 0] \\ \text{είτε } [0, \infty), \end{cases}$$

παίρνουμε τοπικές προσεγγίσεις των λύσεων ως εξής

$$N(t) \approx \begin{cases} N_0 e^{rt}, & \forall N_0 \approx N_1^* \text{ και } \forall t \in \begin{cases} (-\infty, 0], & \text{όταν } r > 0 \\ [0, \infty), & \text{όταν } r < 0 \end{cases} \\ k + (N_0 - k)e^{-rt}, & \forall N_0 \approx N_2^* \text{ και } \forall t \in \begin{cases} [0, \infty), & \text{όταν } r > 0 \\ (-\infty, 0], & \text{όταν } r < 0, \end{cases} \end{cases}$$

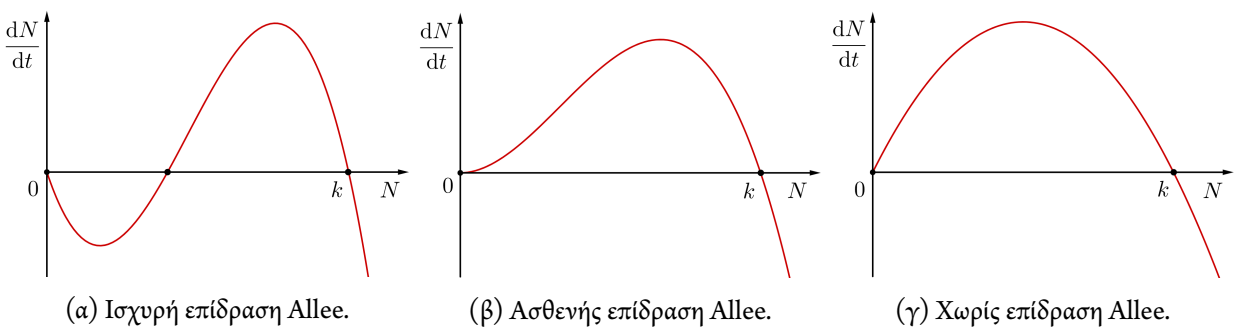
όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1.

Άσκηση 3.1. Επαληθεύστε την (3.1) με βάση το αντίστοιχο αποτέλεσμα στο *Μαθηματικό Υπόβαθρο*.



Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση των λύσεων του (ℓ) , $N(t) = \frac{k N_0}{N_0 + (k - N_0) e^{-rt}}$ (μπλε συνεχείς καμπύλες) για διάφορες τιμές N_0 “κοντά” στα σ.ι., καθώς και των αντίστοιχων λύσεων για τα γραμμικοποιημένα προβλήματα στα σ.ι. (διακεκομμένες καμπύλες). Με μωβ διακεκομμένες οι λύσεις του γραμμικοποιημένου για $N_0 \approx N_1^*$. Με πετρώλ διακεκομμένες οι λύσεις του γραμμικοποιημένου για $N_0 \approx N_2^*$.

Λογιστικό μοντέλο με επίδραση Allee (Allee και Bowen, 1932). Πειραματιζόμενοι με έναν πληθυσμό χρυσόψαρων (*carassius auratus*), οι Allee και Bowen, [1], διατύπωσαν και ανέλυσαν την ιδέα ότι ο μεγαλύτερος πληθυσμός έχει μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης από ότι έχει ο μικρότερος. Κάτι τέτοιο αντιβαίνει στην κλασική θεώρηση ότι ο ενδογενής ανταγωνισμός για πόρους ωθεί έναν μικρότερο πληθυσμό σε μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης. Ωστόσο, η παραπάνω παρατήρηση δικαιολογείται από το γεγονός ότι για κάποια είδη η ενδογενής συνεργασία είναι απαραίτητη παράμετρος επιβίωσης, όπως για παράδειγμα για θηρευτές που θηρεύουν ομαδικά ή για θηράματα που αμύνονται ομαδικά από τους θηρευτές. Η ιδέα αυτή περιγράφει ένα φαινόμενο το οποίο είναι πλέον γνωστό στη βιβλιογραφία ως επίδραση Allee (Allee effect), [2]. Η επίδραση Allee έχει διαβαθμίσεις, καθώς ενδεχομένως να είναι ασθενής (weak) ή ισχυρή (strong) (βλ. Σχήμα 3.2). Κατά την παρουσία ασθενούς επίδρασης, ο μικρός πληθυσμός συνεχίζει να αυξάνεται αλλά με μικρό ρυθμό. Με την παρουσία ισχυρής επίδρασης όμως, ο μικρός πληθυσμός, μικρότερος ενός ελάχιστου πλήθους ουδού¹, θα μειώνεται και θα οδεύει προς εξαφάνιση. Προφανώς ένας τέτοιος ουδός έχει μεγάλη σημασία για τον χαρακτηρισμό και τη μελέτη των πληθυσμών των απειλούμενων με εξαφάνιση ειδών.



Σχήμα 3.2: Διαβαθμίσεις της επίδρασης Allee.

Παράδειγμα ενός μοντέλου με ισχυρή επίδραση παρουσιάζεται παρακάτω, ενώ στην Άσκηση 3.5 μελετάται παράδειγμα μοντέλου ασθενούς επίδρασης. Το μοντέλο αυτό της ισχυρής επίδρασης Allee που θα πα-

¹Χρησιμοποιούμε τον όρο “ουδός”, ο οποίος είναι συνήθης στη Φυσιολογία, για να αποδώσουμε τον όρο “threshold”, αντί του επίσης χρησιμοποιούμενου όρου “κατώφλι”.

ρουσιάσουμε, αποτελεί μια απλή τροποποιημένη εκδοχή του λογιστικού μοντέλου, για το οποίο επιλέγεται η συνάρτηση $r(N)$ στην (2.6) τέτοια ώστε να είναι:

$$\begin{cases} \text{περίπου ίση με μια αρνητική σταθερά } \boxed{-r < 0}, & \text{για "μικρό" } N, \\ \text{αρνητική και φθίνουσα κατά απόλυτη τιμή,} & \text{για "σχετικά μικρό" } N, \\ \text{θετική και φθίνουσα,} & \text{για "σχετικά μεγάλο" } N, \\ \text{αρνητική,} & \text{για "αρκετά μεγάλο" } N. \end{cases}$$

Η απλούστερη τροποποίηση της αντίστοιχης συνάρτησης του λογιστικού μοντέλου, η οποία συμπεριφέρεται όπως παραπάνω, είναι η

$$r(N) = -r \left(1 - \frac{1}{k_1} N\right) \left(1 - \frac{1}{k_2} N\right), \text{ όπου } k_1 < k_2 \text{ θετικές σταθερές.}$$

Έτσι προκύπτει η λογιστική εξίσωση με επίδραση *Allee*

$$\frac{dN}{dt} = -rN \left(1 - \frac{1}{k_1} N\right) \left(1 - \frac{1}{k_2} N\right), \quad (3.3)$$

όπου η k_1 είναι ο ουδός που προαναφέραμε και η k_2 είναι η φέρουσα ικανότητα του περιβάλλοντος.

Η (3.3) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών. Ωστόσο, δεν είναι πάντα εύκολη/εφικτή η αποτύπωση της γενικής λύσης της σε κλειστή μορφή, άρα θα βασιστούμε στην **ποιοτική μελέτη** της. Πρώτα όμως θα χρειαστούμε κάποια βασικά αποτελέσματα.

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Το ΠΑΤ της λογιστικής δυναμικής με ουδό είναι το εξής:

$$\begin{aligned} &\text{Με δεδομένο } N_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ &N: \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty), \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (3.3) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \\ &\text{όσο και την αρχική συνθήκη } N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (\ell_{thr})$$

Ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης του γενικού προβλήματος. Ανεξάρτητα από το πρόσημο του N_0 , κάνουμε χρήση κλασικών θεωρημάτων (βλ. Άσκηση 3.2) για να εξαγάγουμε ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης

$$N^\diamond: (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \infty,$$

για το εξής βοηθητικό γενικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} &\text{Με δεδομένο } N_0 \in \mathbb{R}, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ &N: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (3.3) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \\ &\text{όσο και την αρχική συνθήκη } N(0) = N_0. \end{aligned} \quad (\ell_{thr}^\diamond)$$

Αναλλοίωτα σύνολα, καλή τοποθέτηση του αρχικού προβλήματος και ομαλότητα της λύσης του. Ακριβώς όπως και για το (ℓ^\diamond) , μπορούμε να δείξουμε ότι τα σύνολα

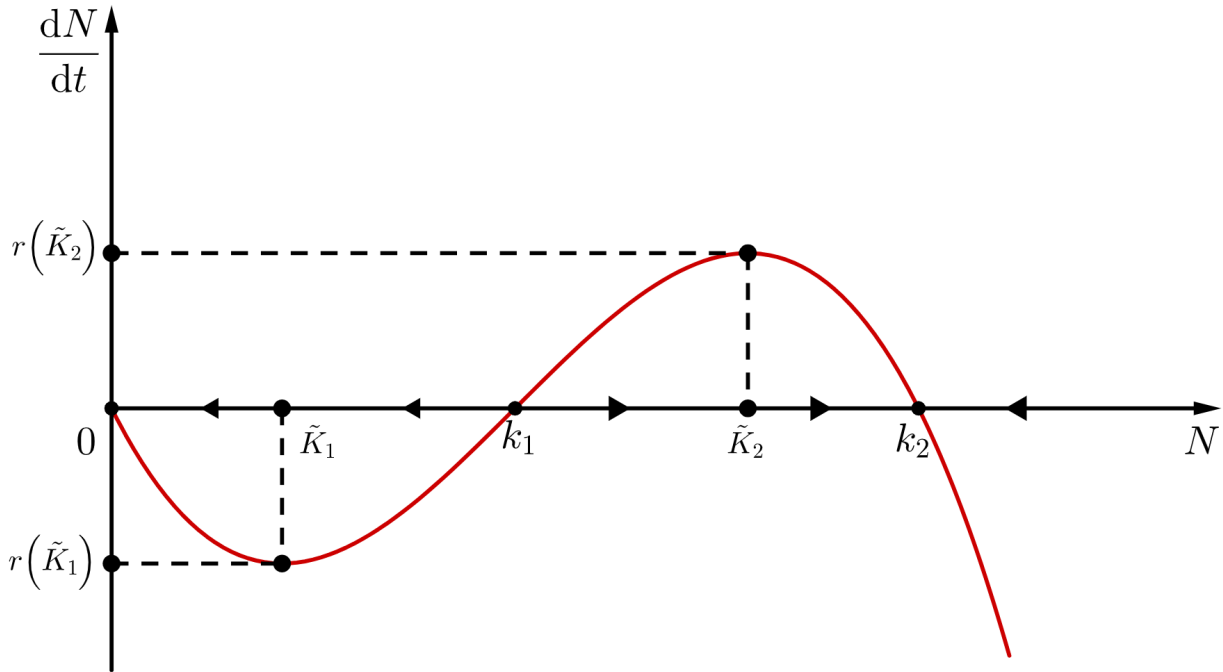
$$\{0\}, (0, k_1), \{k_1\}, (k_1, k_2), \{k_2\} \text{ και } (k_2, \infty)$$

είναι αναλλοίωτα για το (ℓ_{thr}^\diamond) (βλ. Άσκηση 3.2). Συνεπώς, η N^\diamond όταν $N_0 \geq 0$ λύνει επίσης το (ℓ_{thr}) , δηλ. υπάρχει μοναδική, ομαλή, συνεχής ως προς τα αρχικά δεδομένα και μεγιστική λύση του (ℓ_{thr}) , καθώς επίσης τα παραπάνω σύνολα είναι αναλλοίωτα και για το (ℓ_{thr}) .

Ποιοτική μελέτη. Εύκολα παρατηρούμε ότι τα σ.ι. του (ℓ_{thr}) είναι τα

$$N_1^* = 0, N_2^* = k_1 \text{ και } N_3^* = k_2.$$

Μελετώντας, όπως και για την (2.7), την αντίστοιχη συνάρτηση του δεξιού μέλους της (3.3), η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο Σχήμα 3.3, προκύπτει ο Πίνακας 3.1 (βλ. Άσκηση 3.2).



Σχήμα 3.3: Γραφική παράσταση της $\frac{dN}{dt}$ ως προς N . Τα σημεία καμπής για την $N(t)$ είναι τα $(\tilde{K}_{1,2}, r(\tilde{K}_{1,2})) = \left(\frac{1}{3}(k_1 + k_2 \mp \sqrt{K}), -\frac{r}{27k_1k_2} \left[(k_1 + k_2)(3k_1k_2 - 2K) \mp 2K^{\frac{3}{2}} \right] \right)$, όπου $K := k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2$.

Πίνακας 3.1: Ποιοτική ανάλυση της συνάρτησης N .

N	N ως προς t
$(0, \tilde{K}_1)$	γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή
(\tilde{K}_1, k_1)	γνησίως φθίνουσα και γνησίως κοίλη
(k_1, \tilde{K}_2)	γνησίως αύξουσα και γνησίως κυρτή
(\tilde{K}_2, k_2)	γνησίως αύξουσα και γνησίως κοίλη
(k_2, ∞)	γνησίως φθίνουσα και γνησίως κυρτή

Έτσι, έχουμε ότι

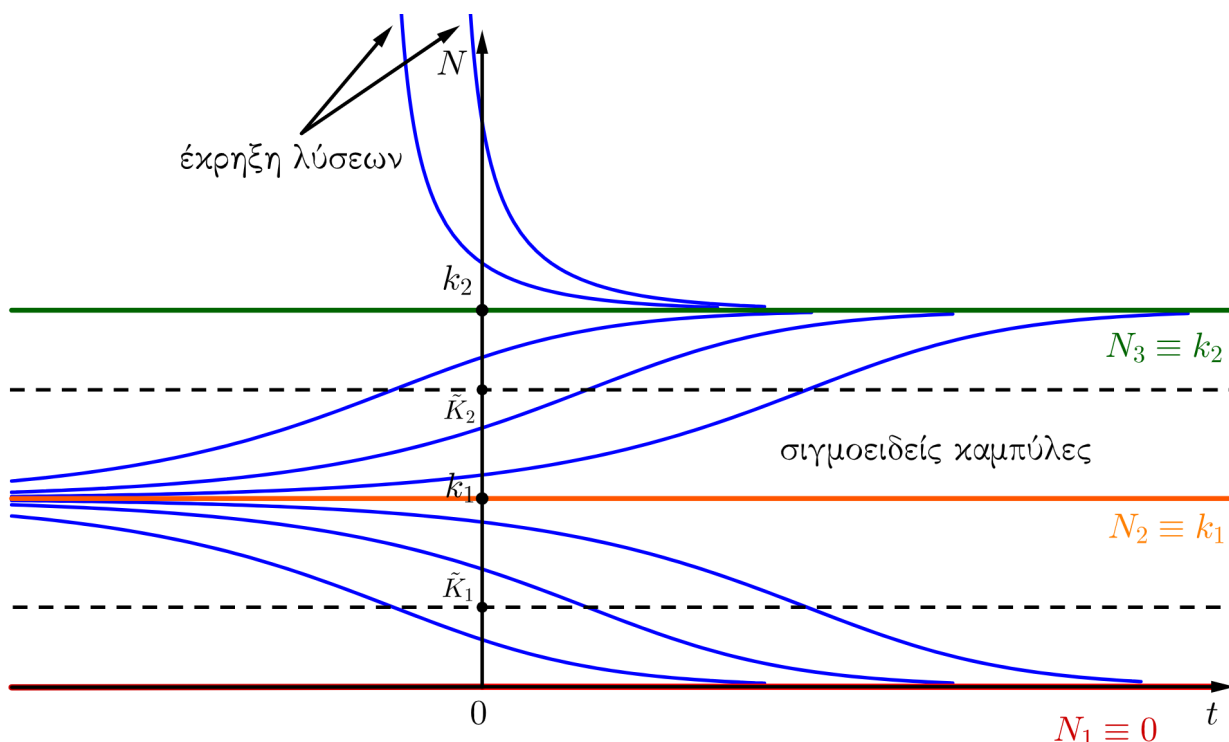
- το N_1^* είναι
 - αρνητικά ασταθές και
 - θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές,

- το N_2^* είναι
 - αρνητικά ασυμπτωτικά ευσταθές και
 - θετικά ασταθές,
- το N_3^* είναι
 - αρνητικά ασταθές και
 - θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Μάλιστα, τα παραπάνω συμπεράσματα που αφορούν την ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. μπορούν εξαχθούν και τυποποιημένα από τη μελέτη του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου προβλήματος (βλ. Άσκηση 3.3). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η λύση του (ℓ_{thr}) είναι

$$\begin{cases} \text{ολική,} & \text{όταν } N_0 \in [0, k_2] \\ \text{θετικά ολική,} & \text{όταν } N_0 \in (k_2, \infty). \end{cases}$$

Αντίθετα, κατ' αναλογία με το (ℓ) , μπορούμε να δείξουμε ότι η λύση του (ℓ_{thr}) εκρήγνυται προς τα πίσω για κάποιον αρνητικό χρόνο όταν $N_0 > k_2$ (βλ. Άσκηση 3.2). Συνοψίζοντας, οδηγούμαστε ποιοτικά στη γραφική παράσταση του Σχήματος 3.4.



Σχήμα 3.4: Γραφική παράσταση της N ως προς μη αρνητικά t για διάφορες τιμές του N_0 . Εδώ $\tilde{K}_{1,2} = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 \mp \sqrt{K})$, όπου $K := k_1^2 + k_2^2 - k_1k_2$.

Άσκηση 3.2. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της μελέτης Φάσης I του (ℓ_{thr}) .

Άσκηση 3.3. Μελετήστε το γραμμικοποιημένο ΠΑΤ του (ℓ_{thr}) στα σ.ι. του τελευταίου και αναδείξτε τις πληροφορίες που φέρει σχετικά με την ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. και τις προσεγγίσεις των λύσεων κοντά σε αυτά.

Άσκηση 3.4. Μελετήστε άμεσα το (ℓ_{thr}) όταν $r < 0$, μέσω του μετασχηματισμού αντιστροφής του χρόνου. Ποια η βιολογική ερμηνεία του αντίστοιχου μοντέλου;

Άσκηση 3.5. Μελετήστε το ΠΑΤ με μοντέλο ασθενούς επίδρασης Allee

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN^p \left(1 - \frac{1}{k}N\right), \text{ για } r > 0 \text{ και } p > 1 \\ N(t_0) = N_0, \end{cases}$$

ως προς την ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης, καθώς και ως προς τη συμπεριφορά αυτής σε ακραίους χρόνους.

Μοντέλα περισσότερων του ενός πληθυσμών. Περνάμε στη μελέτη της δυναμικής πολλών και αλληλεπιδρώντων πληθυσμών με τη χρήση κατάλληλων διαφορικών εξισώσεων αντίστοιχου πλήθους (εξαρτημένων) μεταβλητών.

Οι ευρέως χρησιμοποιούμενες εξισώσεις για τη δυναμική μελέτη του εκάστοτε πληθυσμού περιέχουν δύο όρους ως εξής:

1. έναν όρο περιγραφής της δυναμικής του πληθυσμού σε απουσία των υπόλοιπων πληθυσμών.
2. έναν όρο περιγραφής της αλληλεπίδρασης του πληθυσμού με τους υπόλοιπους πληθυσμούς.

Συγκεκριμένα, η γενική μορφή της διαφορικής εξίσωσης για τη δυναμική μελέτη του πληθυσμού N_i , με $i \in \{1, \dots, n\}$, μιας ομάδας πλήθους n πληθυσμών, $\{N_j\}_{j=1}^n$, έχει ως ακολούθως

$$\frac{dN_i}{dt} = \underbrace{f_1(N_i)}_{\text{σε απουσία βιοτικής αλληλεπίδρασης}} + \underbrace{f_2(N_1, \dots, N_n)}_{\text{βιοτική αλληλεπίδραση}}. \quad (3.4)$$

Ο πρώτος όρος έχει ήδη συζητηθεί. Ο δεύτερος όρος μελετάται παρακάτω.

Περί αλληλεπίδρασης μεταξύ πληθυσμών. Στη Φύση κανένας οργανισμός δεν ζει σε πλήρη απομόνωση, αλλά αλληλεπιδρά τόσο με τους αβιοτικούς όσο και με τους βιοτικούς παράγοντες του περιβάλλοντός του. Η αλληλεπίδραση (*interaction*) ενός οργανισμού με το περιβάλλον του είναι καθοριστικής σημασίας για την επιβίωσή του, αλλά και για τη λειτουργία του οικοσυστήματος (*ecosystem*) ως ολότητα. Τα φυσικά οικοσυστήματα διαθέτουν πεπερασμένο αριθμό πόρων. Στην προσπάθειά τους να αποκτήσουν πρόσβαση στους πόρους αυτούς, οι οργανισμοί αναπτύσσουν προσαρμογές, ικανές να τους παρέχουν πλεονεκτήματα έναντι των άλλων ατόμων. Όλοι οι γειτονικοί οργανισμοί συμμετέχουν σε βιοτικές αλληλεπιδράσεις, σχέσεις δηλ. που αναπτύσσονται μεταξύ διαφορετικών ειδών.

Όπως ήδη αναφέραμε, φορμαλιστικά οι βιοτικές αλληλεπιδράσεις καθορίζονται στην (3.4) από τη συνάρτηση f_2 του δεξιού μέρους. Κατηγοριοποιούμε τη συνάρτηση αυτή της βιοτικής αλληλεπίδρασης με βάση

- το πρόσημό της.
- τον τύπο της.

Πρόσημο. Θετικό πρόσημο για τη συνάρτηση f_2 στην (3.4) υποδηλώνει θετική συνεισφορά της αλληλεπίδρασης στον ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού, και αντίστοιχα για αρνητικό. Στην πρώτη περίπτωση λέμε ότι η αλληλεπίδραση έχει όφελος (*benefit*) για τον πληθυσμό, ενώ στην δεύτερη ζημία (*harm*). Επιπλέον, όταν η παραπάνω συνάρτηση αλληλεπίδρασης είναι απύσασ, δηλ. μηδενική, τότε οι υπόλοιποι πληθυσμοί δεν έχουν επίδραση (*no effect*) στον υπό μελέτη πληθυσμό.

Συγκεκριμένα, σε ένα οικοσύστημα συμβίωσης² (*symbiosis*) δύο πληθυσμών, αναλόγως του προσήμου της αλληλεπίδρασης για τον κάθε ένα, διακρίνουμε τα εξής:

²Οικολογική σχέση μεταξύ ατόμων τουλάχιστον δυο ειδών που ζουν σε άμεση επαφή μεταξύ τους.

- *Αμοιβαιότητα (Mutualism)*. Εμφανίζεται όταν όλα τα είδη που συμμετέχουν σε μία αλληλεπίδραση έχουν όφελος. Σε πολλές περιπτώσεις, τα είδη εξαρτώνται από αυτή τη σχέση και δεν μπορούν να υπάρξουν το ένα χωρίς το άλλο. Αντί του όρου αμοιβαιότητα συχνά χρησιμοποιείται ο όρος *συμβίωση*, ο οποίος, όμως, δηλώνει τη συνύπαρξη διαφορετικών ειδών χωρίς να είναι σαφές αν υπάρχει όφελος ή ζημία.
 - *Εκμετάλλευση (Exploitation)*. Αλληλεπίδραση κατά την οποία το ένα είδος αποκομίζει όφελος σε βάρος του άλλου που αποκομίζει ζημία. Διακρίνουμε τις παρακάτω υποκατηγορίες:
 - *Θήρευση (Predation)*. Περιγράφει την αλληλεπίδραση κατά την οποία ο θηρευτής (*predator*) τρέφεται από το θήραμά (*prey*) του.
 - *Φυτοφαγία (Herbivory)*. Κατανάλωση υλικού φυτών από ζώα.
 - *Παρασιτισμός (Parasitism)*. Όταν το ένα είδος, γνωστό ως παράσιτο (*parasite*), επωφελείται σε βάρος του άλλου, γνωστού ως ξενιστής (*host*). Τα παράσιτα μειώνουν την προσαρμοστικότητα των ξενιστών, είτε γιατί καταναλώνουν μέρος των πόρων (*βιοτροφικά*), είτε επειδή τους οδηγούν σε παθολογικές καταστάσεις (*παθογόνα*) και το θάνατο (*σαπρόφυτα*, ή *παρασιτοειδή*).
 - *Ανταγωνισμός (Competition, Antagonism)*. Η προσαρμοστικότητα ενός ατόμου μειώνεται από την παρουσία του άλλου, έτσι ώστε και τα δύο να έχουν ζημία. Τα είδη διεκδικούν έναν τουλάχιστον κοινό πόρο. Ο ανταγωνισμός μπορεί να εκφραστεί είτε άμεσα με επαφή (*contact competition*), είτε έμμεσα με τη δράση ουσιών (*chemical competition*). Μερικά είδη εφαρμόζουν στρατηγικές ταχείας ή/και μεγάλης ανάπτυξης ώστε να υπερκεράσουν τους ανταγωνιστές τους (*ανταγωνισμός υπεραύξησης*). Ειδικά, όσο αφορά τον ανταγωνισμό για το χώρο (*χωροκρατικός ανταγωνισμός (territorial competition)*), ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι στρατηγικές κάλυψης του κενού χώρου (*preemptive competition*). Ο ανταγωνισμός μπορεί να διακριθεί περιγραφικά σε δύο κατηγορίες:
 - Οι πόροι μοιράζονται στα άτομα και κανένα από αυτά δεν παίρνει ικανή ποσότητα για την ανάπτυξη και την αναπαραγωγή του (*scramble competition*).
 - Ικανές ποσότητες πόρων για την ανάπτυξη και την αναπαραγωγή διεκδικούνται και θα κερδηθούν από τα τελικώς επικρατούντα άτομα, ενώ τα πιο αδύναμα θα τις στερούνται (*contest competition*). Ένα βήμα παραπέρα, και έχουμε την έννοια του *ανταγωνιστικού αποκλεισμού (competitive exclusion)* (γνωστού και ως *νόμος Gause*, [3], [4]), όπου δυο είδη ανταγωνίζονται για πανομοιότυπη *οικοθέση*³ (*niche*), δεν μπορούν να συνυπάρξουν σε σταθερές τιμές των πληθυσμών τους, και τελικά το ένα είδος θα οδηγήσει το άλλο σε εξαφάνιση. Να σημειωθεί ότι κατά τον *διαχωρισμό οικοθέσης (niche partitioning, differentiation, segregation, separation)*, ανταγωνιζόμενα είδη χρησιμοποιούν διαφορετικά το περιβάλλον, έτσι ώστε να βοηθηθούν να συνυπάρξουν.
- Μπορούμε επίσης να διακρίνουμε τον ανταγωνισμό σε δύο άλλες κατηγορίες:
- *Ανταγωνισμός κατανάλωσης (consumptive competition)*, όταν η αλληλεπίδραση μεταξύ των ανταγωνιζόμενων ατόμων είναι έμμεση και αφορά απλά στη μείωση της διαθεσιμότητας ενός πόρου λόγω της χρήσης του από τα υπόλοιπα άτομα του πληθυσμού.
 - *Ανταγωνισμός παρεμβολής (interference competition)*, όπου υπάρχει άμεση αλληλεπίδραση των ατόμων, δηλ. ένα άτομο προλαβαίνει ένα άλλο στην κατάκτηση και την εκμετάλλευση των πόρων, με αποτέλεσμα να απαγορεύει στο άλλο την πρόσβαση στους αναζητούμενους πόρους, ή να παρεμβαίνει δυσμενώς στην ανάπτυξή του.

³Η αλλιώς *οικολογικός θώκος*, ή *βιοθέση*, ονομάζεται το σύνολο των αβιοτικών και βιοτικών παραμέτρων του περιβάλλοντος που αξιοποιεί ένα είδος, δηλ. το σύνολο των συνθηκών, πόρων και αλληλεπιδράσεων που χρειάζεται (ή που μπορεί να χρησιμοποιήσει).

Τονίζεται ότι ο ενδοειδικός και ο διαειδικός ανταγωνισμός παίζουν ουσιαστικό ρόλο στη φυσική επιλογή (*natural selection*) που προκαλεί την εξέλιξη (*evolution*) των ειδών. Τα είδη που είναι λιγότερο ικανά να ανταγωνίζονται είτε προσαρμόζονται -αναπτύσσοντας ανοχή- είτε εξαφανίζονται.

- **Συσσιτισμός (*Commensalism*)**. Η κατάσταση που ωφελεί έναν μόνο οργανισμό, ενώ ο άλλος δεν υφίσταται καμία επίπτωση.
- **Αλληλοπάθεια (*Amensalism*)**. Η μείωση της επιτυχίας του ενός είδους, χωρίς τα άλλα είδη να έχουν όφελος, ή να υφίστανται ζημία.
- **Ουδετερότητα (*Neutralism*)**. Η σχέση δύο ειδών που, ενώ αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, δεν επηρεάζουν το ένα το άλλο. Πλήρης ουδετερότητα δεν υφίσταται στη Φύση και ουσιαστικά ο όρος χρησιμοποιείται για καταστάσεις με αμελητέα αποτελέσματα αλληλεπιδράσεων.

Συνοψίζοντας, έχουμε τον Πίνακα 3.2 για τον χαρακτηρισμό της αλληλεπίδρασης δύο πληθυσμών, N_1 και N_2 , με βάση το πρόσημο της επίδρασης που έχει στον καθένα.

Πίνακας 3.2: Αλληλεπίδραση δύο πληθυσμών, N_1 και N_2 , με βάση την επίδραση που έχει στον καθένα.

$N_2 \backslash N_1$	+	0	-
+	Αμοιβαιότητα	Συσσιτισμός	Εκμετάλλευση
0	Συσσιτισμός	Ουδετερότητα	Αλληλοπάθεια
-	Εκμετάλλευση	Αλληλοπάθεια	Ανταγωνισμός

Τύπος. Έχουν προταθεί και μελετηθεί αρκετές μορφές της συνάρτησης f_2 στην (3.4), κάθε μία από τις οποίες έχει ξεχωριστές ιδιότητες. Εδώ θα δούμε τις ευρέως χρησιμοποιούμενες μη μηδενικές τέτοιες μορφές. Τη βάση για τον διαχωρισμό τους αποτελεί η *συναρτησιακή απόκριση* (*functional response*), r_i , του πληθυσμού N_i στη μεταβολή των πληθυσμών της ομάδας $\{N_j\}_{j=1}^n \setminus \{N_i\}$, που δεν είναι άλλος από τον ρυθμό αλληλεπίδρασης του πρώτου πληθυσμού ως προς τους λοιπούς υπό μελέτη πληθυσμούς, δηλ.

$$r_i = \frac{\partial^{n-1} f_2}{\partial N_1 \dots \partial \widehat{N}_i \dots \partial N_n}, \tag{3.5}$$

όπου το σύμβολο $\widehat{\partial N}_i$ υποδηλώνει παράλειψη διαφορίσης ως προς N_i . Και αυτό γιατί, κάνοντας τη συνήθη υπόθεση ότι η r_i της (3.5) εξαρτάται μόνο από το N_i , δηλ.

$$r_i = r_i(N_i),$$

τότε άμεσα προκύπτει ότι αυτή εν τέλει καθορίζει και τον τύπο της f_2 όταν (ως συνήθως) $n = 2$ ή πιο γενικά όταν από την ομάδα $\{N_j\}_{j=1}^n$ των πληθυσμών μόνο δύο είναι διακεκριμένοι.

Έτσι, σε ό,τι αφορά τη μορφή της βιοτικής αλληλεπίδρασης, f_2 , έχουμε τους εξής τύπους συναρτησιακής απόκρισης, η χρήση των οποίων στην Οικολογία οφείλεται στον, ή σχετίζεται με τον, Holling (βλ. Σχήμα 3.5). Σχετικά μπορεί κανείς να δει και την εργασία [5].

Τύπος I. Η απλούστερη συναρτησιακή απόκριση χαρακτηρίζεται από τη γραμμική σχέση

$$|r_i(N_i)| = \alpha N_i, \text{ όπου } \alpha > 0, \tag{3.6}$$

και ονομάζεται *συναρτησιακή απόκριση Holling τύπου I*. Αυτή είναι η συναρτησιακή απόκριση που θεωρήθηκε από τους Lotka και Volterra στο κλασικό θεωρητικό τους έργο επί των αλληλεπιδράσεων πληθυσμών θηρευτών και θηραμάτων, την οποία θα μελετήσουμε ενδελεχώς παρακάτω.

Ας δούμε πώς καταλήγουμε στον παραπάνω τύπο, όταν για παράδειγμα η βιοτική αλληλεπίδραση αφορά τη θήρευση ενός πληθυσμού θηραμάτων N_1 από ένα πληθυσμό θηρευτών N_2 :

Η κεντρική θεώρηση έχει ως εξής: τα θηράματα είναι ομογενώς κατανεμημένα στον χώρο, η ταχύτητα αναζήτησης είναι ανάλογη (με σταθερά $k > 0$) του πλήθους των θηραμάτων, και επίσης η θήρευση ολοκληρώνεται με τη σύλληψη του θηράματος. Έτσι, όταν ένας θηρευτής βρίσκεται στην περιοχή και σε αναζήτηση για χρονικό διάστημα T (οσοδήποτε μικρό), τότε θα έρθει σε επαφή με kTN_1 στο πλήθος θηράματα. Από τα θηράματα αυτά, μόνο ένα κλάσμα d θα συλλάβει και θα αξιοποιήσει. Τελικά, σε χρόνο T θα θηρεύσει θηράματα πλήθους $dkTN_1$, οπότε προκύπτει η (3.6) με $\alpha = dk$, και συγκεκριμένα $r_1(N_1) = -dkN_1$.

Παρόμοια είναι και η παρακάτω θεώρηση. Κάθε στοιχείο του υπό μελέτη οικοσυστήματος (είτε θηρευτής είτε θήραμα) έρχεται κατά μέσο όρο αντιμέτωπο $m(t)$ φορές ανά μονάδα χρόνου με ένα άλλο στοιχείο αυτού, κάθε χρονική στιγμή t . Κάνοντας την πρώτη υπόθεση ότι οι πληθυσμοί των θηραμάτων και των θηρευτών είναι ομογενώς αναμειγμένοι στο οικοσύστημα, τότε σε αυτές τις “συναντήσεις” η πιθανότητα να έρθει ένας θηρευτής αντιμέτωπος με ένα θήραμα είναι $\frac{N_1(t)}{N_1(t)+N_2(t)}$, για κάθε χρονική στιγμή t . Επίσης, σε αυτές τις συναντήσεις, η πιθανότητα αποκόμισης ζημίας για την αναπαραγωγή κάθε θηράματος κάθε χρονική στιγμή t είναι $\omega_{\text{ζημία/συνάντηση}}(t)$. Άρα η μείωση του ρυθμού μεταβολής του πλήθους των θηραμάτων λόγω ύπαρξης θηρευτών κάθε χρονική στιγμή t είναι

$$\frac{m(t)\omega_{\text{ζημία/συνάντηση}}(t)}{N_1(t) + N_2(t)} N_1(t)N_2(t).$$

Κάνοντας έτσι και τη δεύτερη υπόθεση ότι

$$\frac{m \omega_{\text{ζημία/συνάντηση}}}{N_1 + N_2} \equiv \alpha > 0,$$

οδηγούμαστε στο ότι ο ρυθμός μεταβολής του N_1 εξαρτάται με τον πλέον απλό τρόπο από το γινόμενο N_1N_2 , δηλ. γραμμικά, με γραμμικό συντελεστή $-\alpha$. Έπεται έτσι η (3.6).

Τονίζουμε ότι ο I τύπος Holling μεταφέρεται με αντίστοιχα επιχειρήματα τόσο στην Επιδημιολογία όσο και στη Χημική Κινητική. Μάλιστα, η συλλογιστική πορεία και ο παραπάνω τύπος στο οποίο οδηγούμαστε μέσω αυτής περιγράφονται στη βιβλιογραφία ως **νόμος δράσης της μάζας**⁴ (*law of mass action*), βλ., π.χ., [6].

Ωστόσο, όσο κι αν είναι απλή και όσο κι αν χρησιμοποιείται ευρύτατα, η (3.6) δέχεται κριτική λόγω της απεριόριστης αύξησης (της απόλυτης τιμής) του r καθώς αυξάνεται το N_i . Για παράδειγμα, κανένα ζώο δεν μπορεί να καταναλώνει όλο και ταχύτερα, όσο αυξάνεται η παροχή τροφής. Υπάρχει όριο στο πόσο μπορεί να καταναλώσει, αφού κάποια στιγμή θα επέλθει κορεσμός (*saturation*). Ο επόμενος τύπος λαμβάνει υπόψη αυτή την παράμετρο.

Τύπος II. Πιθανότατα, η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη καταστατική σχέση στην οικολογία πληθυσμών είναι η κυρτοειδής καμπύλη, δηλ. η αύξουσα και κορεσμένη (δηλ. με πεπερασμένο θετικό όριο καθώς $N \rightarrow \infty$) συναρτησιακή απόκριση

$$|r_i(N_i)| = \frac{\alpha N_i}{\beta + N_i}, \text{ όπου } \alpha, \beta > 0, \quad (3.7)$$

⁴Περιγραφικά, στη Χημεία, σύμφωνα με τον νόμο δράσης της μάζας, ο ρυθμός οποιασδήποτε αντίδρασης είναι ανάλογος με το γινόμενο της επιμέρους μάζας των ουσιών που αντιδρούν, με κάθε επιμέρους τμήμα υψωμένο σε μια δύναμη ίση με το συντελεστή που εμφανίζεται στη χημική εξίσωση. Ο νόμος αυτός “μεταφέρεται” τόσο στην Επιδημιολογία όσο και στην Οικολογία. Στην πρωτοποριακή δουλειά του Lotka, το 1925, γίνεται συχνά χρήση του ανάλογου αυτού του νόμου στην δυναμική πληθυσμών: οι ομογενείς πληθυσμοί οργανισμών υποτίθεται ότι αποτελούνται από ένα είδος και περιγράφονται από μια μεταβλητή, την πυκνότητα. Οι διαφορές στην ηλικία, το φύλο, τον γονότυπο, τον φαινότυπο κ.λπ. αγνοούνται. Σε τέτοια μοντέλα, υποτίθεται ότι οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ πληθυσμών συμβαίνουν με ρυθμούς ευθέως ανάλογους με το γινόμενο των πυκνοτήτων των πληθυσμών. Η μεταβλητή πυκνότητας για πληθυσμούς είναι ταυτόσημη με τη μεταβλητή συγκέντρωσης για χημικές ουσίες.

η οποία ονομάζεται *συναρτησιακή απόκριση Holling τύπου II*. Ιστορικά, οι Michaelis και Menten, [7] (μεταφρασμένο στα Αγγλικά: [8]), πρότειναν το 1913 μια παρόμοια σχέση μεταξύ του ρυθμού μιας ενζυμικής αντίδρασης και της συγκέντρωσης του υποστρώματος που προκαλεί μείωση του ρυθμού αυτού, ωστόσο οι Briggs και Haldane, [9], στα μέσα της δεκαετίας του 1920 εξέγαγαν το προηγούμενο αποτέλεσμα στη βάση της Χημικής Κινητικής. Στα τέλη της δεκαετίας του 1950, ο Monod, [10], προσάρμοσε την (3.7) για τη μοντελοποίηση της βακτηριακής αύξησης. Ο Holling, [11], το 1959, ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την (3.7) στην Οικολογία και τη δυναμική θηρευτή-θηράματος.

Ας δούμε πώς καταλήγουμε στον παραπάνω τύπο, πάλι υπό το πρίσμα του παραδείγματος ενός πληθυσμού θηραμάτων N_1 και ενός θηρευτών N_2 :

Η ουσιαστική διαφορά με την προηγούμενη περίπτωση είναι η υπόθεση ότι η θήρευση δεν ολοκληρώνεται με τη σύλληψη του θηράματος, αλλά ότι ο θηρευτής χρειάζεται και επιπλέον χρόνο για να μεταχειριστεί το συλληφθέν θήραμα (κατανάλωση και πέψη). Έτσι, ο χρόνος T κατά τον οποίο ένας θηρευτής θηρεύει γράφεται ως $T = T_\alpha + T_\mu$, όπου T_α ο χρόνος αναζήτησης και T_μ ο χρόνος μεταχείρισης των θηραμάτων. Υποθέτοντας ότι ο χρόνος μεταχείρισης κάθε θηράματος είναι σταθερός και ίσος με h , τότε έχουμε ότι $T_\mu = hR$, όπου R ο συνολικός αριθμός θηραμάτων που συλλαμβάνει ο θηρευτής, και έτσι $T_\alpha = T - hR$. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στον τύπο $R = dkT_\alpha N_1$, όπως αυτός προέκυψε κατά την εξαγωγή της (3.6), θα έχουμε ότι

$$r_1(N_1) = -\frac{R(N_1)}{T} = -\frac{dkN_1}{1 + dkhN_1},$$

δηλ. την (3.7).

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την εξαγωγή του II τύπου Holling είναι, αντί της θεώρησης του χρόνου μεταχείρισης σε αντιδιαστολή με τον χρόνο αναζήτησης, να επιμείνουμε στην υπόθεση ότι η θήρευση ολοκληρώνεται με τη σύλληψη του θηράματος, αλλά επιπλέον να θεωρούμε την ύπαρξη και άλλης πηγής τροφής για τους θηρευτές εκτός του υπό μελέτη πληθυσμού θηραμάτων. Συγκεκριμένα, αν κάθε χρονική στιγμή t ένας θηρευτής θηρεύει $n(t)$ θηράματα, τότε ο κίνδυνος για τα θηράματα υπολογίζεται ως $\frac{n(t)N_2(t)}{N_1(t)}$, κάθε χρονική στιγμή. Αν επιπλέον υποθέσουμε την ύπαρξη κι άλλου πληθυσμού θηραμάτων, $N_3(t)$, για τους θηρευτές, τότε ο παραπάνω κίνδυνος γίνεται $\frac{n(t)N_2(t)}{N_3(t)+N_1(t)}$. Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{N_1(t)}{N_2(t)}$ την πιθανότητα αυτή, τότε παίρνουμε την (3.7) αν θεωρήσουμε τα n και N_3 σταθερά ως προς το t .

Τύπος III. Η (3.7) έχει γενικευθεί σε πολλές κατευθύνσεις.

Η “κλασική” γενίκευση είναι η σιγμοειδής καμπύλη που δίνεται από τη σχέση

$$|r_i(N_i)| = \frac{\alpha N_i^2}{\gamma + N_i^2}, \text{ όπου } \alpha, \gamma > 0, \tag{3.8}$$

και συνήθως αποκαλείται *συναρτησιακή απόκριση Holling τύπου III*. Σημειώνουμε ότι οι περιπτώσεις με συναρτησιακές αποκρίσεις τις (3.6) και (3.7) εισήχθησαν από τον Holling, [12], το 1959, ενώ η (3.8) -αν και τρόπον τινά μελετήθηκε από τον Holling, [13], το 1965- ουσιαστικά εισήχθη από τον Real, [14], το 1977. Η εξαγωγή της (3.8) μπορεί να γίνει με αντίστοιχο τρόπο με αυτόν της (3.7). Ο παραπάνω τύπος ισχύει, π.χ., για θηρευτές που χρειάζεται να έχουν ιδεατά σχηματίσει την εικόνα του θηράματος πριν αποκτήσουν ενδιαφέρον προς αυτό. Έτσι, για μικρό πλήθος θηραμάτων υπάρχει μικρό ενδιαφέρον και άρα μικρή θήρευση, ενώ καθώς το πλήθος αυξάνεται ο θηρευτής ξεκινά και αντιλαμβάνεται την αφθονία τους.

Μια άλλη γενίκευση δίνεται από τη συναρτησιακή απόκριση

$$|r_i(N_i)| = \frac{\alpha N_i^p}{\gamma + N_i^p}, \text{ όπου } \alpha, \gamma > 0 \text{ και } p > 1.$$

Αυτή η μορφή χρησιμοποιείται από θεωρητικούς οικολόγους, που επιτρέπουν στο p να μεταβάλλεται και μελετούν το αποτέλεσμα αυτής της μεταβολής στην δυναμική πληθυσμών.

Μια επιπλέον γενίκευση δίνεται από τη λεγόμενη *γενικευμένη συναρτησιακή απόκριση Holling τύπου III*

$$|r_i(N_i)| = \frac{\alpha N_i^2}{\gamma N_i^2 + \beta N_i + 1}, \text{ όπου } \alpha, \gamma > 0 \text{ και } \beta > -2\gamma^{\frac{1}{2}}.$$

Τύπος IV. Η ακόλουθη, μη μονότονη, συναρτησιακή απόκριση

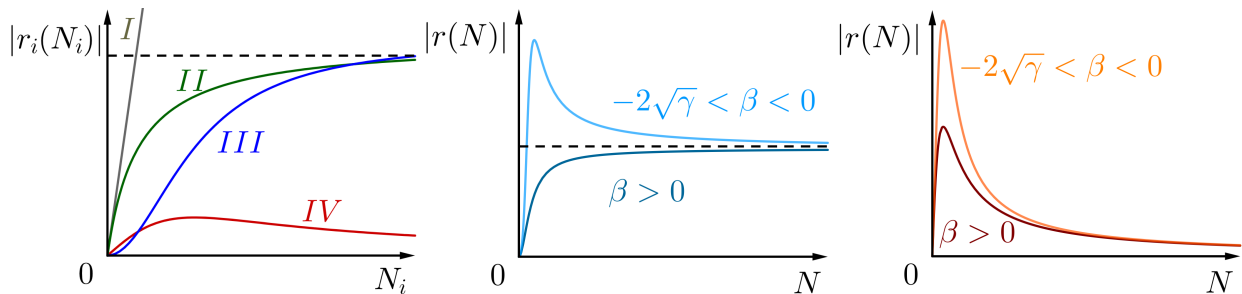
$$|r_i(N_i)| = \frac{\alpha N_i}{\gamma + N_i^2}, \text{ όπου } \alpha, \gamma > 0, \quad (3.9)$$

ουσιαστικά προτάθηκε από τον Andrews, [15], το 1968 και έχει έκτοτε βρει σημαντικές εφαρμογές στην δυναμική πληθυσμών. Ονομάζεται *συναρτησιακή απόκριση Holling τύπου IV*.

Μια γενίκευση της (3.9) δίνεται από τη συναρτησιακή απόκριση

$$|r_i(N_i)| = \frac{\alpha N_i}{\gamma N_i^2 + \beta N_i + 1}, \text{ όπου } \alpha, \gamma > 0 \text{ και } \beta > -2\gamma^{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Η (3.10) ονομάζεται *γενικευμένη συναρτησιακή απόκριση Holling τύπου IV*.



(α) I, II, III και IV τύποι Holling

(β) Γενικευμένος III τύπος Holling

(γ) Γενικευμένος IV τύπος Holling

Σχήμα 3.5: Τύποι Holling συναρτησιακών αποκρίσεων και οι γενικευμένοι ανάλογοι των III και IV τύπων.

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Ανάλυση ευστάθειας αυτόνομου ΠΑΤ (συνέχεια): Γραμμικοποίηση. Θεωρούμε ένα αυτόνομο (ΠΑΤ) και υποθέτουμε ότι το y^* είναι μεμονωμένο σ.ι. του μοντέλου και επίσης $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, όπου $U \subseteq S_2$ ανοικτή περιοχή του y^* εντός του χώρου φάσης S_2 . Το γραμμικοποιημένο πρόβλημα του αυτόνομου (ΠΑΤ) στο σημείο y^* είναι το

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = J(y^*)x(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

όπου $J(y^*) := Df(y^*)$ ο πίνακας Jacobi της f στο y^* , δηλ.

$$Df(y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(y^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}(y^*) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}(y^*) \end{pmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι για $n = 1$, προφανώς ο πίνακας Jacobi εκφυλίζεται στη συνήθη παράγωγο, δηλ.

$$J(y^*) \equiv \frac{df}{dy}(y^*), \text{ όταν } n = 1.$$

Το γραμμικό πρόβλημα αυτό προκύπτει μέσω ενός μετασχηματισμού μεταφοράς σε συνδυασμό με το ανάπτυγμα Taylor (ή, απλά, τον ορισμό του διαφορικού μιας διαφορίσιμης συνάρτησης). Πράγματι, θέτοντας

$$x(t) := y(t) - y^*, \forall t \in \mathcal{I}, \text{ και } x_0 := y_0 - y^*,$$

τότε το αυτόνομο (ΠΑΤ) γίνεται

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t) + y^*) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

και αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το $0 \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = J(y^*)x(t) + o(|x(t)|) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \text{ καθώς } x(t) \rightarrow 0,$$

ή αλλιώς

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = J(y^*)(y(t) - y^*) + o(|y(t) - y^*|) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \text{ καθώς } y(t) \rightarrow y^*.$$

Όπως θα δούμε αμέσως μετά, υπό προϋποθέσεις το παραπάνω γραμμικό πρόβλημα δίνει πληροφορίες για την ευστάθεια των λύσεων y του (γενικά) μη γραμμικού αυτόνομου (ΠΑΤ), για αρχικές τιμές “κοντά” στο y^* , κάτι που διευκολύνει ιδιαίτερα τη μελέτη μας. Πρώτα όμως, ένα σ.ι. y^* ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) λέγεται υπερβολικό αν κάθε ιδιοτιμή του $J(y^*)$ έχει μη μηδενικό πραγματικό μέρος, και εύκολα διαπιστώνουμε μέσω του θεωρήματος αντίστροφης απεικόνισης ότι ένα υπερβολικό σ.ι. είναι πάντα μεμονωμένο.

Θεώρημα 3.6 (Lyapunov-Poincaré, ή αλλιώς, γραμμικοποίηση). Έστω y^* μεμονωμένο σ.ι. ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) με $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, όπου $U \subseteq S_2$ ανοικτή περιοχή του y^* εντός του χώρου φάσης S_2 .

1. Έστω, επιπλέον, ότι το y^* είναι υπερβολικό. Αν όλες οι ιδιοτιμές του $J(y^*)$ έχουν αρνητικά (θετικά) πραγματικά μέρη, τότε το y^* είναι θετικά (αρνητικά) ασυμπτωτικά ευσταθές. Μάλιστα, ισχύει η τοπική προσέγγιση

$$y(t, y_0) \approx y^* + x(t, y_0 - y^*), \forall y_0 \approx y^*, \forall t \in \mathcal{I} \cap [t_0, \infty) (\forall t \in \mathcal{I} \cap (-\infty, t_0]),$$

όπου x η λύση του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου προβλήματος.

2. Αν μια ιδιοτιμή του $J(y^*)$ έχει θετικό (αρνητικό) πραγματικό μέρος, τότε το y^* (ασχέτως με το αν είναι υπερβολικό ή όχι) είναι θετικά (αρνητικά) ασταθές.
3. Αν όλες οι ιδιοτιμές του $J(y^*)$ έχουν μη θετικά (αρνητικά) πραγματικά μέρη και, επιπλέον, υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος, τότε αυτή η πληροφορία δεν αρκεί για να αποφανθούμε σχετικά με την θετική (αρνητική) ευστάθεια/αστάθεια του y^* .

Σημειώνουμε ότι για $n = 1$, η μοναδική ιδιοτιμή, λ , του πίνακα Jacobi είναι ο ίδιος ο πίνακας, δηλ.

$$\lambda \equiv J(y^*) \equiv \frac{df}{dy}(y^*), \text{ όταν } n = 1.$$

Και αυτό γιατί, εξ ορισμού, οι ιδιοτιμές λ του $J(y^*)$ είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης⁵ (χαρακτηριστικού πολυώνυμου, εδώ)

$$\det(J(y^*) - \lambda \mathbb{I}_n) = 0, \text{ όπου } \mathbb{I}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

η οποία εκφυλίζεται στην

$$\frac{df}{dy}(y^*) - \lambda = 0,$$

καθώς, για $n = 1$, η ορίζουσα ενός πίνακα εκφυλίζεται στην ταυτοτική συνάρτηση, δηλ.

$$\det \equiv \text{id}, \text{ όταν } n = 1,$$

και επίσης προφανώς $\mathbb{I}_1 = 1$.

Μάλιστα, στην περίπτωση της υπερβολικότητας του y^* ισχύει ένα ισχυρό τοπολογικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.7 (Hartman-Grobman, ή αλλιώς, γραμμικοποίηση). Έστω y^* υπερβολικό σ.ι. ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) με $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, όπου $U \subseteq S_2$ ανοικτή περιοχή του y^* εντός του χώρου φάσης S_2 . Τότε υπάρχουν $U_1 \subseteq U$ και $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτές περιοχές του y^* και 0, αντίστοιχα, καθώς και ομοιομορφισμός⁶ $H: U_1 \rightarrow U_2$, τέτοια ώστε για κάθε $y_0 \in U_1$ να υπάρχει $\mathcal{I} = \mathcal{I}(y_0) \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτή περιοχή του t_0 , έτσι ώστε να ισχύει

$$H(y(t, y_0)) = x(t, H(y_0)), \quad \forall y_0 \in U_1 \text{ και } \forall t \in \mathcal{I},$$

όπου x η λύση του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου προβλήματος.

Διαισθητικά, το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι η εικόνα των λύσεων ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) “κοντά” σε υπερβολικό σ.ι. y^* , μοιάζει με “παραμορφωμένη” -κατά συνεχή τρόπο- εικόνα των λύσεων του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου προβλήματος “κοντά” στο 0.

Όσον αφορά τις ΣΔΕ και τα Δυναμικά Συστήματα, η βιβλιογραφία του παρόντος κεφαλαίου συμπίπτει με εκείνη του [Κεφαλαίου 1](#), οπότε δεν παρατίθεται και πάλι εδώ.

Βιβλιογραφία

- [1] W. C. Allee και E. S. Bowen. “Studies in animal aggregations: Mass protection against colloidal silver among goldfishes”. Στο: *Journal of Experimental Zoology* 61 (1932), σσ. 185–207.
- [2] F. Courchamp, L. Berec και J. Gascoigne. *Allee Effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, 2008.
- [3] G. Hardin. “The competitive exclusion principle: an idea that took a century to be born has implications in ecology, economics, and genetics”. Στο: *Science* 131 (1960), σσ. 1292–1297.
- [4] J. M. Kneitel. “Gause’s competitive exclusion principle”. Στο: *Encyclopedia of Ecology, 2nd edition, vol. 3*. Επιμέλεια υπό B. D. Fath. Elsevier, 2018, σσ. 37–41.
- [5] J. H. P. Dawes και M. O. Souza. “A derivation of Holling’s type I, II and III functional responses in predator-prey systems”. Στο: *Journal of Theoretical Biology* 327 (2013), σσ. 11–22.

⁵Με $\det \mathcal{A}$ συμβολίζεται η ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα \mathcal{A} .

⁶Ομοιομορφισμός (ή τοπολογικός ισομορφισμός) είναι μια συνεχής συνάρτηση μεταξύ τοπολογικών χώρων, της οποίας και η αντίστροφη συνάρτηση είναι συνεχής.

- [6] E. O. Voit, H. A. Martens και S. W. Omholt. “150 years of the mass action law”. Στο: *PLoS Computational Biology* 11 (2015), e1004012.
- [7] L. Michaelis και M. L. Menten. “Die kinetik der invertinwirkung”. Στο: *Biochemische Zeitschrift* 49 (1913), σσ. 333–369.
- [8] K. A. Johnson και R. S. Goody. “The Original Michaelis Constant: Translation of the 1913 Michaelis-Menten Paper”. Στο: *Biochemistry* 50 (2011), σσ. 8264–8269.
- [9] G. E. Briggs και J. B. S. Haldane. “A note on the kinetics of enzyme action”. Στο: *Biochemical Journal* 19 (1925), σσ. 338–339.
- [10] J. Monod. “La technique de culture continue: theorie et applications”. Στο: *Selected Papers in Molecular Biology by Jacques Monod*. Επιμέλεια υπό A. Lwoff και A. Ullmann. Academic Press, 1978, σσ. 390–410.
- [11] C. S. Holling. “Some characteristics of simple types of predation and parasitism”. Στο: *The Canadian Entomologist* 91 (1959), σσ. 385–398.
- [12] C. S. Holling. “The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European Pine Sawfly”. Στο: *The Canadian Entomologist* 91 (1959), σσ. 293–320.
- [13] C. S. Holling. “The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation”. Στο: *The Memoirs of the Entomological Society of Canada* 97 (1965), σσ. 5–60.
- [14] L. A. Real. “The kinetics of functional response”. Στο: *The American Naturalist* 111 (1977), σσ. 289–300.
- [15] J. F. Andrews. “A mathematical model for the continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates”. Στο: *Biotechnology and Bioengineering* 10 (1968), σσ. 707–723.

■ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ ΙΙΙ

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Δυναμικά μοντέλα πολλών πληθυσμών (συνέχεια): Βασικό μοντέλο Lotka-Volterra

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

(α) Ανάλυση ευστάθειας αυτόνομου ΠΑΤ (συνέχεια):

- i. Γραμμικό πρόβλημα στον \mathbb{R}^2
- ii. Συνάρτηση Lyapunov

(β) Περιοδικές λύσεις αυτόνομου ΠΑΤ και κλειστές τροχιές στον χώρο φάσης

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 1-3](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Βασικό μοντέλο Lotka-Volterra (Lotka, 1920 και Volterra, 1926). Εδώ θα μελετήσουμε ένα θεμελιώδες μοντέλο αλληλεπίδρασης πληθυσμών, και συγκεκριμένα ένα μοντέλο θηρευτή-θηράματος, το σύστημα εξισώσεων Lotka-Volterra.

Στην αμιγώς μαθηματική κλασική βιβλιογραφία το βασικό μοντέλο θηρευτή-θηράματος αποδιδόταν μερικές φορές αποκλειστικά στον Volterra, ο οποίος το χρησιμοποίησε για να αναλύσει τις παρατηρήσεις ενός βιολόγου θαλάσσιας πανίδας και μελλοντικού γαμπρού του. Ωστόσο, κάποια από τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης δουλειάς του Volterra στη Μαθηματική Βιολογία που δημοσιεύθηκε το 1926, [1], είχαν προβλεφθεί από τον Lotka, ο οποίος ανέπτυξε και εξέτασε τις ίδιες εξισώσεις (οι οποίες μπορούν να θεωρηθούν ως μία πολυδιάστατη γενίκευση της λογιστικής εξίσωσης Verhulst) το 1920 σε εργασίες του, [2], [3], για την μελέτη ενός χημικού μοντέλου αυτοκαταλυόμενων χημικών αντιδράσεων σχετικά με τις χημικές αντιδράσεις και την κατάλυσή τους, καθώς επίσης το 1925 σε βιβλίο του, [4], ως ένα πληθυσμιακό μοντέλο θηρευτή-θηράματος. Αυτό το χημικό μοντέλο του 1920 (που ουσιαστικά αποτελεί το το βασικό μοντέλο θηρευτή-θηράματος που

θα εξετάσουμε και εδώ) αναφέρεται στη χημική βιβλιογραφία και ως δεύτερος χημικός μηχανισμός Lotka (βλ., αργότερα, [Άσκηση 10.4](#)), σε αντιδιαστολή με τον πρώτο χημικό μηχανισμό Lotka (βλ., αργότερα, [\(L1\)](#)) που αποτελεί μια αρχική μορφή του παραπάνω μοντέλου και είχε ήδη αξιοποιηθεί το 1910, [\[5\]](#), από τον ίδιο, επίσης για την μελέτη αυτοκαταλυόμενων χημικών αντιδράσεων.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα απλό οικοσύστημα όπου x είναι το πλήθος των θηραμάτων (πρόβατα, λαγοί κ.ά.) και y το πλήθος των θηρευτών (λύκοι, αλεπούδες, κυνηγοί κ.ά.), συναρτήσει του χρόνου t (οι συναρτήσεις αυτές υποθέτουμε ότι είναι τουλάχιστον διαφορίσιμες). Κατά την κατασκευή του μοντέλου, κάνουμε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Κατά την απουσία θηρευτών, το πλήθος των θηραμάτων αυξάνεται με ρυθμό ανάλογο του πλήθους τους, δηλ.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \text{ όπου } \alpha > 0, \text{ όταν } y \equiv 0.$$

2. Αντίστοιχα, κατά την απουσία θηραμάτων (τροφής) το πλήθος των θηρευτών μειώνεται με ρυθμό ανάλογο του πλήθους τους, δηλ.

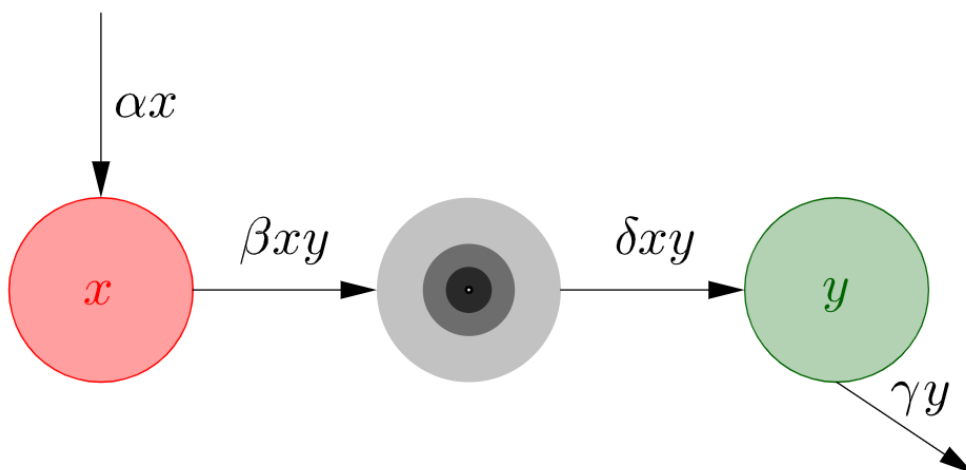
$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y, \text{ όπου } \gamma > 0, \text{ όταν } x \equiv 0.$$

3. Υπάρχει αλληλεπίδραση Holling τύπου I μεταξύ των δύο πληθυσμών, με αντίστοιχη επίδραση στον καθένα, και έτσι οι ρυθμοί μεταβολής εξαρτώνται με τον πλέον απλό τρόπο από το γινόμενο xy , δηλ. γραμμικά, με γραμμικό συντελεστή $\delta > 0$ για το ρυθμό μεταβολής του y και $-\beta < 0$ για τον αντίστοιχο του x .

Συνοψίζοντας, οδηγούμαστε στις εξισώσεις, το διάγραμμα ροών των οποίων φαίνεται στο [Σχήμα 4.1](#).

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \tag{4.1\alpha}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy. \tag{4.1\beta}$$



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα ροών του μοντέλου [\(4.1\)](#). Μας είναι αδιάφορη η σχέση μεταξύ του β και του δ της αλληλεπίδρασης.

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Συνεπώς, το ΠΑΤ της δυναμικής των πληθυσμών των θηρευτών και θηραμάτων είναι το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } x_0, y_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ & (x, y) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ τέτοια ώστε } \eta(x, y) \text{ να ικανοποιεί τόσο το σύστημα εξισώσεων} \quad (PP) \\ & (4.1) \text{ στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \text{ όσο και την αρχική συνθήκη } (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχούς ως προς τα αρχικά δεδομένα λύσης του γενικού προβλήματος. Ανεξάρτητα από το πρόσημο των x_0 και y_0 , κάνουμε χρήση κλασικών θεωρημάτων για να εξαγάγουμε ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα¹ λύσης

$$(x^\diamond, y^\diamond) : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \infty,$$

για το εξής βοηθητικό γενικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ & (x, y) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ τέτοια ώστε } \eta(x, y) \text{ να ικανοποιεί τόσο το (4.1) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \text{ όσο} \quad (PP^\diamond) \\ & \text{και την αρχική συνθήκη } (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Αναλλοίωτα σύνολα, καλή τοποθέτηση του αρχικού προβλήματος και ομαλότητα της λύσης του.

- i. Αν η αρχική τιμή βρίσκεται πάνω σ' έναν από τους δυο άξονες, δηλ. αν $x_0 = 0$ ή $y_0 = 0$, τότε μία λύση του (PP^\diamond) είναι η

$$(x(t), y(t)) = (0, y_0 e^{-\gamma t}), \quad \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

ή, η

$$(x(t), y(t)) = (x_0 e^{at}, 0), \quad \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

αντίστοιχα. Από την μοναδικότητα έχουμε ότι αυτή θα είναι η (μοναδική) λύση.

- ii. Αν $x_0, y_0 > 0$, τότε $x^\diamond(t), y^\diamond(t) > 0$ για κάθε $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Πράγματι, έστω ότι ισχύει το αντίθετο, δηλ. υπάρχει $t_0 \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ τέτοιο ώστε είτε $x^\diamond(t_0) = 0$ ή $y^\diamond(t_0) = 0$, είτε $x^\diamond(t_0) < 0$ ή $y^\diamond(t_0) < 0$. Λόγω της συνέχειας της λύσης, μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $x^\diamond(t_0) = 0$ ή $y^\diamond(t_0) = 0$. Τότε, ορίζοντας τις $\varphi : (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0) \rightarrow (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ και $(X^\diamond, Y^\diamond) : (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ως

$$\begin{aligned} \varphi(t) & := t + t_0, \text{ για κάθε } t \in (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0) \text{ και} \\ (X^\diamond, Y^\diamond) & := (x^\diamond \circ \varphi, y^\diamond \circ \varphi), \end{aligned}$$

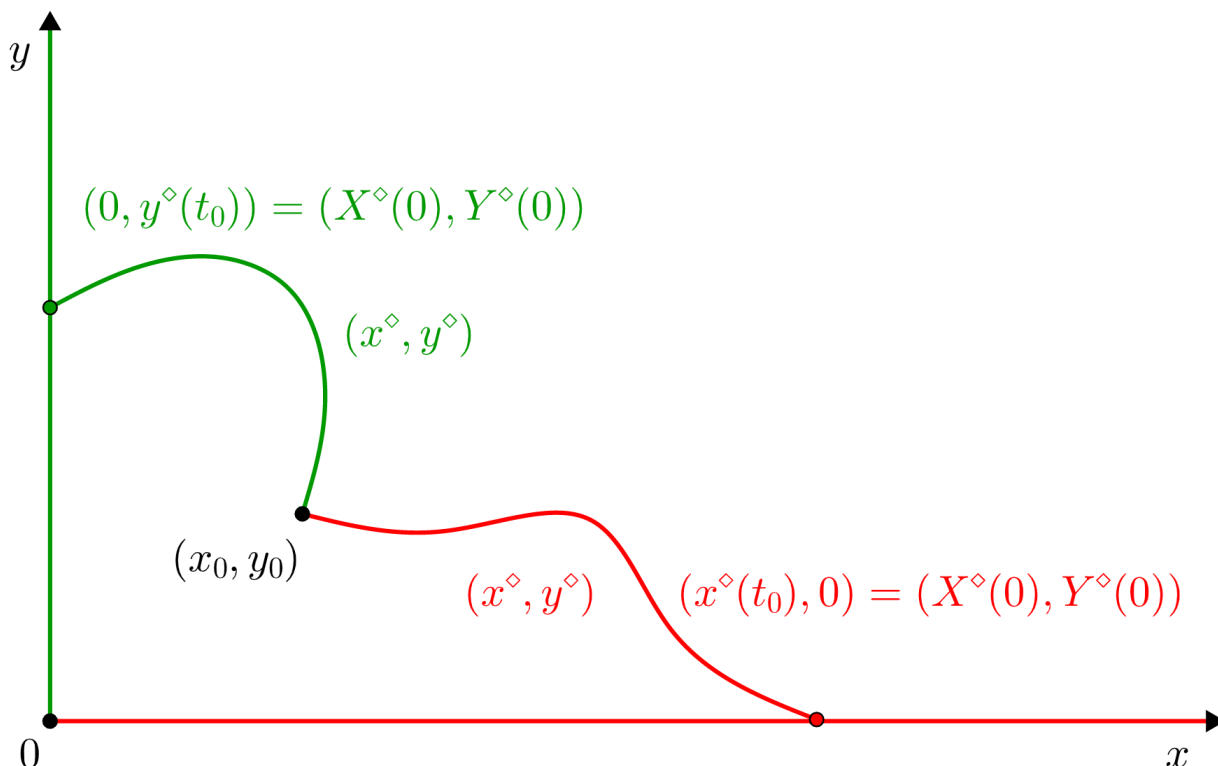
δείχνουμε εύκολα ότι η (X^\diamond, Y^\diamond) είναι η μοναδική μεγιστική λύση για το πρόβλημα

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } x_0, y_0 \in \mathbb{R}, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ & (x, y) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ τέτοια ώστε } \eta(x, y) \text{ να ικανοποιεί τόσο το (4.1) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \text{ όσο} \\ & \text{και την αρχική συνθήκη } (x(0), y(0)) = (x^\diamond(t_0), y^\diamond(t_0)). \end{aligned}$$

Ωστόσο, επιχειρηματολογώντας όπως στην περίπτωση i., έχουμε ότι

$$(X^\diamond(t), Y^\diamond(t)) = (0, y^\diamond(t_0) e^{-\gamma t}), \quad \forall t \in (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0),$$

¹Για την ακρίβεια, η εξάρτηση αυτή είναι ομαλή.



Σχήμα 4.2: Για να αποκλείσουμε το σενάριο $\eta(x^\diamond, y^\diamond)$ να τέμνει τους άξονες, θεωρούμε νέα προβλήματα με αρχή τα υποτιθέμενα σημεία αυτής της τομής και καταλήγουμε σε άτοπο λόγω μοναδικότητας. Με το ίδιο χρώμα απεικονίζονται δύο τεμνόμενες τροχιές, κάθε μία από τις οποίες αντιστοιχεί σε μία λύση.

ή,

$$(X^\diamond(t), Y^\diamond(t)) = (x^\diamond(t_0)e^{at}, 0), \quad \forall t \in (-\varepsilon_1 - t_0, \varepsilon_2 - t_0),$$

αντίστοιχα, δηλ.

$$(x^\diamond(t), y^\diamond(t)) = (0, y^\diamond(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}), \quad \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

ή,

$$(x^\diamond(t), y^\diamond(t)) = (x^\diamond(t_0)e^{\alpha(t-t_0)}, 0), \quad \forall t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2),$$

αντίστοιχα. Αρκεί τώρα να θέσουμε $t = 0$ για να καταλήξουμε σε άτοπο. Η παραπάνω διαδικασία περιγράφεται στο [Σχήμα 4.2](#).

Δηλ. τα σύνολα

$$(0, 0), \{0\} \times (0, \infty), (0, \infty) \times \{0\} \text{ και } (0, \infty)^2$$

είναι αναλλοίωτα ως προς τον χρόνο για το (PP^\diamond) . Συνεπώς, $\eta(x^\diamond, y^\diamond)$, όταν $x_0, y_0 \geq 0$, λύνει επίσης το (PP) , δηλ. υπάρχει μοναδική, ομαλή, συνεχής ως προς τα αρχικά δεδομένα και μεγιστική λύση του (PP) , καθώς επίσης τα παραπάνω σύνολα είναι αναλλοίωτα και για το (PP) .

Ολικότητα. Τα παραπάνω συμπεράσματα θα αξιοποιηθούν για να εξαγάγουμε ότι η λύση του (PP) είναι και ολική (*global*), δηλ. $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \infty$. Πράγματι, αν

- i. $x_0 = 0$ και $y_0 \geq 0$ ή $x_0 \geq 0$ και $y_0 = 0$, τότε από το δεδομένο ότι η λύση του (PP) είναι μεγιστική σε συνδυασμό με το γεγονός ότι ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε άμεσα ότι είναι και ολική.

ii. $x_0, y_0 > 0$, τότε ορίζουμε την $f: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ως

$$f(w, z) := \alpha \ln z - \beta z + \gamma \ln w - \delta w, \quad \forall (w, z) \in (0, \infty)^2,$$

καθώς επίσης και την $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως $F := f \circ (x, y)$, όπου (x, y) λύση του (PP), αφού $x(t), y(t) > 0$ για κάθε $t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Χρησιμοποιώντας το (4.1), άμεσα παίρνουμε το νέο σύστημα

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xy \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= -xy \frac{\partial f}{\partial w}(x, y). \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια του κανόνα αλυσίδας και του παραπάνω συστήματος, καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

δηλ.

$$\alpha \ln y - \beta y + \gamma \ln x - \delta x = c, \quad \text{για κάποιο σταθερό } c \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

(προφανώς, $c = \alpha \ln y_0 - \beta y_0 + \gamma \ln x_0 - \delta x_0$). Τώρα, παρατηρούμε ότι $f(w, z) \rightarrow -\infty$, καθώς $|(w, z)| \rightarrow \infty$, άρα η λύση του (PP) είναι φραγμένη εντός του $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, και έτσι, από τη θεωρία συμπεραίνουμε ότι $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \infty$ (βλ. Άσκηση 4.1).

Γενική λύση σε κλειστή μορφή; Μιας και δεν υπάρχει γνωστή παραμέτρηση της (4.2), που να μας δίνει τη λύση σε πεπλεγμένη μορφή, όταν $x_0, y_0 > 0$, η γενική λύση δεν μπορεί να γραφεί σε κλειστή μορφή με βάση γνωστές συναρτήσεις.

Ανάλυση ευστάθειας. Επιχειρώντας την τυποποιημένη ανάλυση ευστάθειας μέσω γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας, δηλ. μέσω γραμμικοποίησης, θα οδηγηθούμε εν μέρει σε **αδιέξοδο**. Πράγματι, ο πίνακας Jacobi του συστήματός μας είναι ο

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} \alpha - \beta z & -\beta w \\ \delta z & -\gamma + \delta w \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα στα σ.ι. $(x^*, y^*) = (0, 0)$ και $(x^*, y^*) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, δηλ. οι ιδιοτιμές του $J(0, 0)$ και του $J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, είναι οι $\lambda_1 = \alpha > 0$, $\lambda_2 = -\gamma < 0$ και οι $\lambda_{1,2} = \pm i \left(\alpha\gamma\right)^{\frac{1}{2}}$, αντίστοιχα. Και έτσι, σύμφωνα με τη θεωρία,

- το $(0, 0)$ είναι σάγμα για το γραμμικοποιημένο πρόβλημα, δηλ. ασταθές, άρα ασταθές και για το (PP), ενώ
- το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ είναι κέντρο για το γραμμικοποιημένο και δεν υπάρχει θεωρητικό αποτέλεσμα που να μας εξασφαλίζει ευστάθειά/αστάθειά του για το μη γραμμικό.

Ένας τρόπος για να ξεπεράσουμε αυτό το εμπόδιο είναι μέσω της άμεσης μεθόδου Lyapunov. Πράγματι, αρκεί να επιλέξουμε την

$$\begin{aligned} V: (0, \infty)^2 &\rightarrow [0, \infty) \\ (w, z) &\mapsto V(w, z) := f\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) - f(w, z), \end{aligned}$$

για την οποία ισχύει ότι $V\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$, καθώς επίσης ότι $V(w, z) > 0$ για κάθε $(w, z) \in (0, \infty)^2 \setminus \left\{\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)\right\}$, αφού το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ μεγιστοποιεί την f (βλ. Άσκηση 4.1). Επιπλέον,

$$\dot{V} \equiv 0,$$

καθώς

$$\dot{V} \circ (x, y) = \frac{d(V \circ (x, y))}{dt} = -\frac{dF}{dt} \equiv 0,$$

άρα το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ είναι ευσταθές για το (PP). Παρακάτω χρησιμοποιούμε γεωμετρικά επιχειρήματα για να χαρακτηρίσουμε την ευστάθεια αυτή.

Άσκηση 4.1. Σχετικά με τη συνάρτηση f .

1. Δείξτε ότι $f(w, z) \rightarrow -\infty$, καθώς $|(w, z)| \rightarrow \infty$, και συμπεράνετε ότι η μεγιστική λύση του (PP) είναι φραγμένη.
2. Δείξτε ότι το σημείο $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ είναι ολικό μέγιστο της f .

Η γεωμετρία των τροχιών στο επίπεδο φάσης. Αρχικά θα δείξουμε ότι οι καμπύλες στάθμης

$$\{(w, z) \in (0, \infty)^2 \mid f(w, z) = c\}, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

αν δεν είναι κενά σύνολα, τότε είναι κυρτές και κλειστές καμπύλες που εσωκλείουν το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$. Πράγματι, ορίζοντας

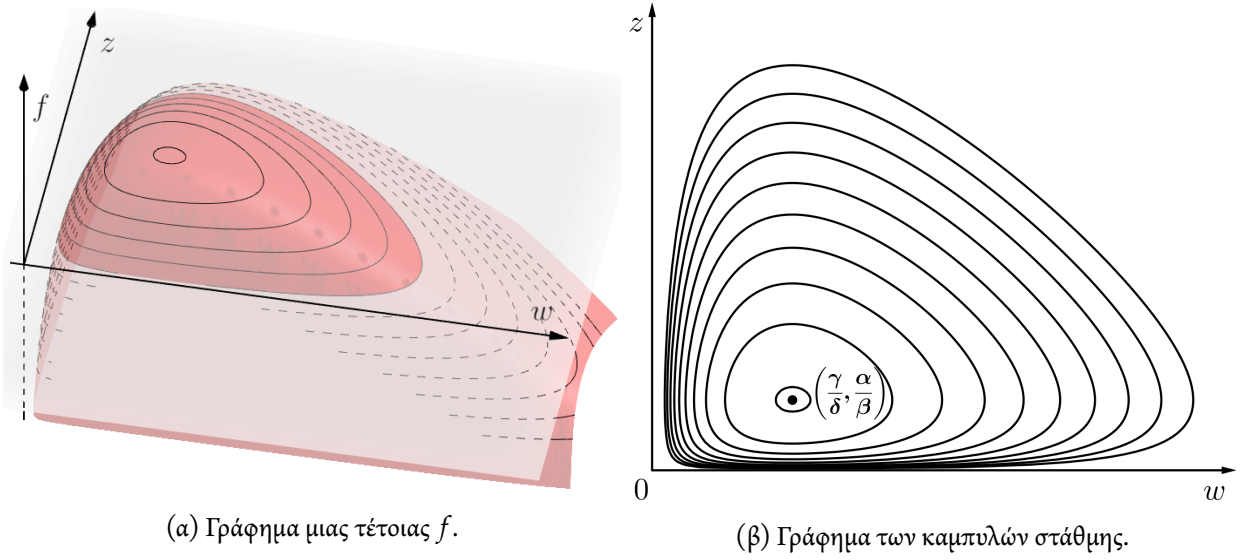
$$D_c := \{(w, z) \in (0, \infty)^2 \mid f(w, z) > c\}, \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

θα έχουμε ότι κάθε σύνορο ∂D_c είναι και μία καμπύλη στάθμης. Παρατηρώντας ότι οι συναρτήσεις της μορφής $g(s) = a \ln s - bs$ με $a, b > 0$ είναι κοίλες, παίρνουμε εύκολα με απλή χρήση των ορισμών ότι κάθε D_c είναι κυρτό (βλ. Άσκηση 4.2). Έχουμε ήδη δει, κατά τη μελέτη της ολικότητας προηγουμένως, ότι $f(w, z) \rightarrow -\infty$ καθώς $|(w, z)| \rightarrow \infty$, άρα κάθε D_c είναι και φραγμένο (βλ. Άσκηση 4.2). Επιπλέον, με άτοπο δείχνουμε άμεσα ότι κάθε D_c βρίσκεται μακριά από τους άξονες, δηλ. ότι κανένα σημείο των αξόνων δεν ανήκει στο σύνορό του. Άρα τελικά κάθε καμπύλη στάθμης είναι κυρτή και κλειστή. Το ότι κάθε D_c περιέχει το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ προκύπτει άμεσα από τον ορισμό των συνόλων αυτών και το γεγονός ότι το σημείο αυτό είναι ολικό μέγιστο της F , το οποίο με τη σειρά του προκύπτει από το ότι το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ είναι ολικό μέγιστο της f (βλ. Άσκηση 4.1). Έτσι, είμαστε σε θέση να κατασκευάζουμε αδρά μεν, ορθά και χωρίς να χάνουμε πληροφορία δε, μία προσεγγιστική μορφή του γραφήματος των καμπυλών στάθμης, η πραγματική μορφή του οποίου δίνεται στο Σχήμα 4.3β.

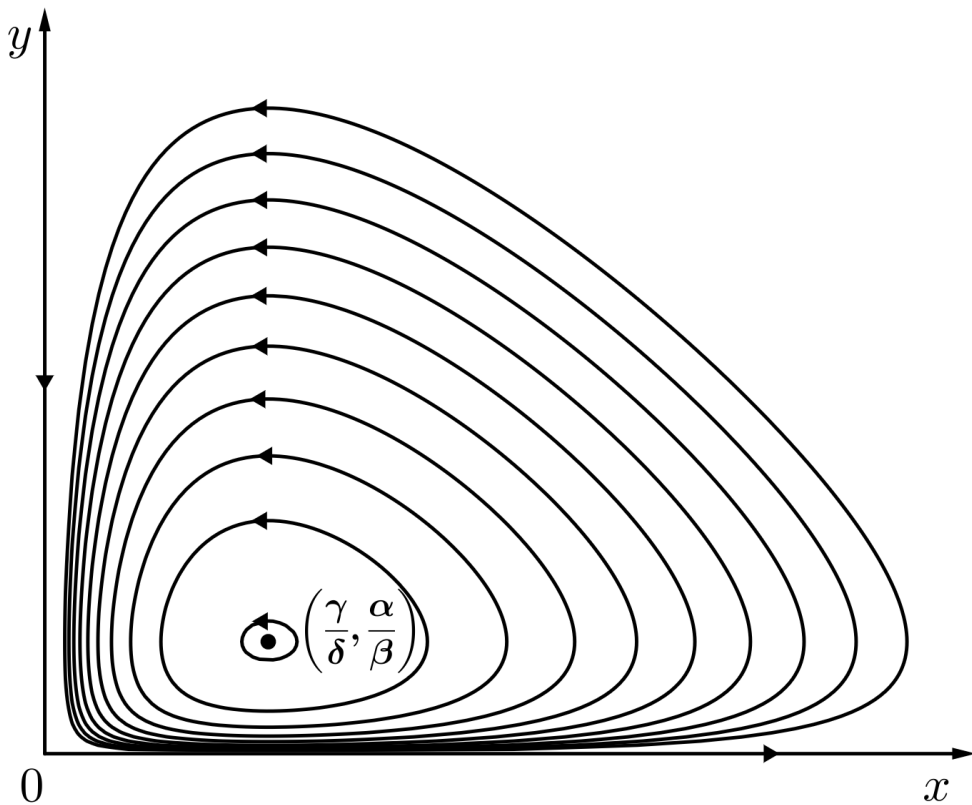
Επιπλέον, μπορούμε εύκολα παρατηρώντας το (4.1) να βρούμε τον προσανατολισμό των τροχιών (κατεύθυνση του πεδίου διευθύνσεων, βλ. Άσκηση 4.3). Συνθέτοντας τις παραπάνω πληροφορίες, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αξιόπιστη εκδοχή του διαγράμματος φάσης του προβλήματός μας, η πραγματική μορφή του οποίου φαίνεται στο Σχήμα 4.4.

Τονίζεται ότι από τον χαρακτήρα των καμπυλών στάθμης που μελετήθηκαν παραπάνω, έπεται η κλειστότητα των τροχιών που αυτές εκπροσωπούν, οι οποίες δεν διέρχονται από κάποιο σ.ι.. Λόγω του γεγονότος αυτού σε συνδυασμό με την ολικότητα των λύσεων, έπεται από τη θεωρία ότι οι τροχιές αυτές αντιστοιχούν σε περιοδικές λύσεις.

Από το διάγραμμα φάσης τώρα και με τη χρήση των ορισμών της ευστάθειας και της ασυμπτωτικής ευστάθειας έχουμε τα εξής:



Σχήμα 4.3: Γεωμετρία των f και των καμπυλών στάθμης.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα φάσης του (PP) .

- Το $(0, 0)$ είναι ασταθές (κάτι που πήραμε και κατά την ανάλυση ευστάθειας μέσω γραμμικοποίησης), καθώς μία τροχιά εισέρχεται σε αυτό, μία εξέρχεται, ενώ οι υπόλοιπες αέναα το πλησιάζουν αλλά και απομακρύνονται από αυτό.
- Το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ είναι ευσταθές (κάτι που πήραμε και κατά την ανάλυση ευστάθειας μέσω της άμεσης μεθόδου Lyapunov) αλλά όχι ασυμπτωτικά (κάτι που δεν μπορούσαμε να πάρουμε κατά την ανάλυση ευστάθειας), καθώς το περιβάλλουν κλειστές τροχιές, δηλ. μπορούμε να βρούμε περιοδικές λύσεις που παίρνουν μεν διαφορετικές τιμές από αυτό, οσοδήποτε κοντά του δε.

Άσκηση 4.2. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες σχετικά με τη γεωμετρία του κάθε D_c .

Άσκηση 4.3. Επαληθεύστε τον προσανατολισμό των τροχιών που απεικονίζεται στο [Σχήμα 4.4](#).

Οι νόμοι Volterra. Η συμπεριφορά των λύσεων του (PP) συνοψίζεται στους παρακάτω τρεις βασικούς νόμους, που είναι γνωστοί ως νόμοι Volterra:

1. Η περιοδικότητα των λύσεων αποτελεί τον πρώτο νόμο.
2. Η μέση τιμή της λύσης ανά περίοδο T ,

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t), y(t)) dt,$$

είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών, και μάλιστα ισχύει ότι

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Πράγματι, υπό το πρίσμα του (4.1), από την μία θα έχουμε

$$0 = \ln(x(T)) - \ln(x(0)) = \int_0^T \frac{d \ln x}{dt}(t) dt = \int_0^T \frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt}(t) dt = \int_0^T (\alpha - \beta y(t)) dt = \alpha T - \beta T \bar{y},$$

και από την άλλη

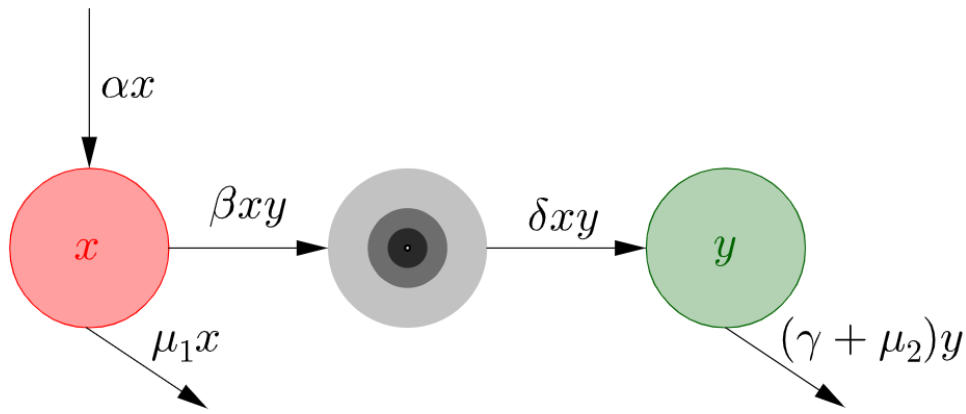
$$0 = \dots = -\gamma T + \delta T \bar{x}.$$

Η ανεξαρτησία αυτή της μέσης τιμής αποτελεί τον δεύτερο νόμο.

3. Εάν γίνεται συγκομιδή και των δύο πληθυσμών, ανάλογη του αριθμού του εκάστοτε πληθυσμού, τότε ο μέσος αριθμός των θηρευτών μειώνεται ενώ ο μέσος αριθμός των θηραμάτων αυξάνεται. Πράγματι, αν υποθέσουμε έναν τρίτο πληθυσμό, N_3 , ο οποίος είναι ανεξάρτητος του χρόνου και ο οποίος είναι υπεύθυνος για τη συγκομιδή (π.χ., ο ανθρώπινος πληθυσμός), και ο οποίος αλληλεπιδρά και με τους δύο πληθυσμούς με αλληλεπίδραση Holling τύπου I, τότε το (4.1) θα γίνει

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha - \mu_1)x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -(\gamma + \mu_2)y + \delta xy, \end{aligned} \quad \text{όπου } \mu_{1,2} > 0 \text{ και } \alpha > \mu_1.$$

Η συνθήκη $\alpha > \mu_1$ σημαίνει ότι η συγκομιδή των θηραμάτων είναι τέτοια ώστε να μην οδηγήσει σε εξαφάνισή τους. Το αντίστοιχο διάγραμμα ροών φαίνεται στο [Σχήμα 4.5](#). Παρατηρούμε ότι οι νέες

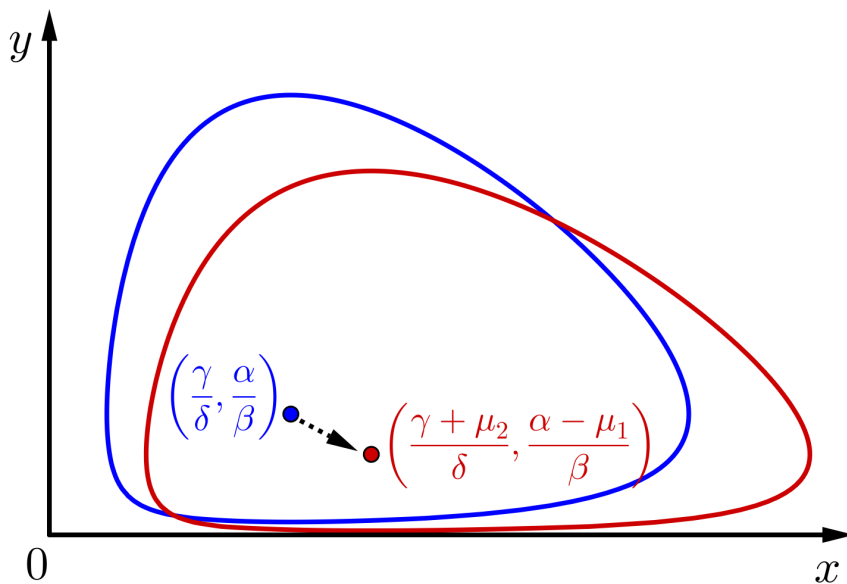


Σχήμα 4.5: Διάγραμμα ροών του μοντέλου (4.1) με συγκομιδή.

παράμετροι δεν θα αλλάξουν τη δομή της δυναμικής του αντίστοιχου προβλήματος. Η διαφορά ωστόσο έγκειται στο ότι τώρα η μέση τιμή ανά περίοδο της αντίστοιχης λύσης θα είναι

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\gamma + \mu_2}{\delta}, \frac{\alpha - \mu_1}{\beta} \right),$$

που επιβεβαιώνει τον αρχικό ισχυρισμό, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.6. Η συγκεκριμένη μεταβολή της μέσης τιμής (δηλ. η ανάλογη μετατόπιση του κέντρου) κατά την παρουσία συγκομιδής αποτελεί τον τρίτο νόμο, ή αλλιώς, την αρχή Volterra (Volterra's principle).

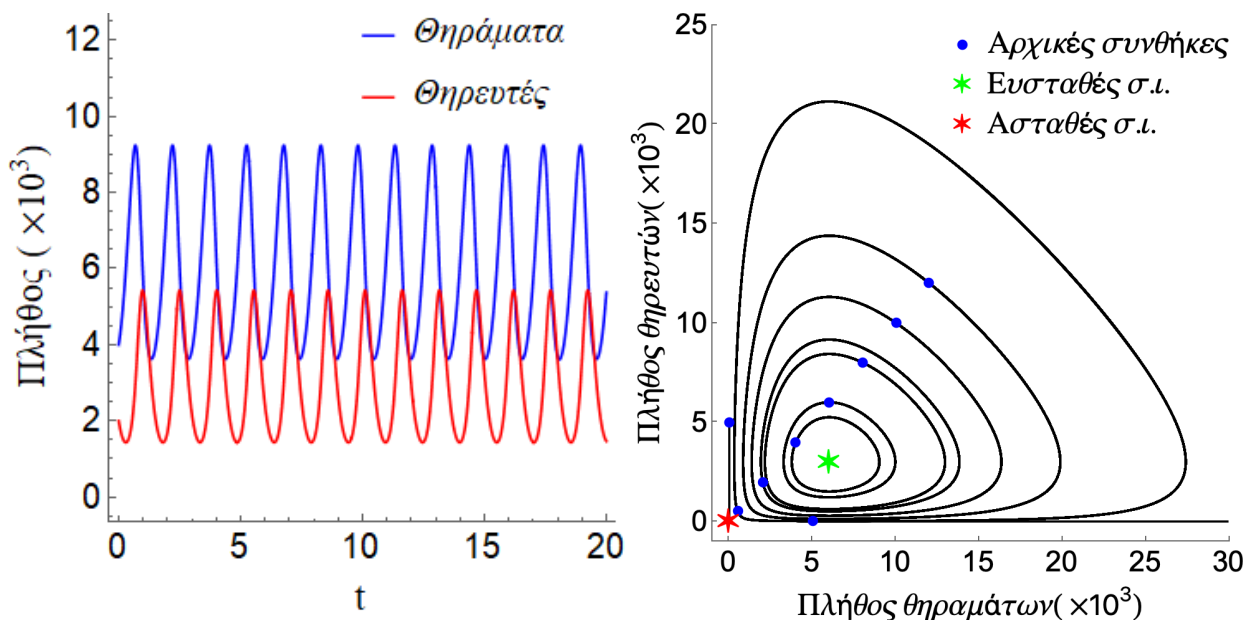


Σχήμα 4.6: Γράφημα μιας καμπύλης στάθμης του μοντέλου (4.1), με (κόκκινο) και χωρίς (μπλε) συγκομιδή.

Οι νόμοι αυτοί έχουν πράγματι επαληθευτεί για ορισμένα οικοσυστήματα θηρευτών-θηραμάτων, με χαρακτηριστικό το παράδειγμα του τρίτου νόμου. Συγκεκριμένα, υπό το πρίσμα του ο Volterra εξήγησε την αύξηση του ποσοστού καρχαριών και σαλαχιών στα αλιεύματα της Μεσογείου κατά την διάρκεια του Α΄ Παγκόσμιου Πόλεμου, ως αποτέλεσμα της μείωσης της ίδιας της αλιείας.

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7, προς επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας.

Μάλιστα, από το Σχήμα 4.7α συμπεραίνουμε ότι οι x και y είναι εκτός φάσης, με την x να προηγείται. Μία αληθοφανής εξήγηση αυτού είναι ότι ξεκινώντας από την κατάσταση όπου και οι δύο πληθυσμοί είναι σχετικά μικροί, τα θηράματα αρχικά αυξάνονται λόγω της μειωμένης θήρας. Στη συνέχεια, οι θηρευτές, με αφθονία πλέον τροφής, αυξάνονται επίσης. Αυτό με τη σειρά του οδηγεί σε μεγαλύτερη θήρα και τα θηράματα μειώνονται. Τέλος, σε έλλειψη πλέον τροφής, οι θηρευτές μειώνονται και αυτοί και το σύστημα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση.



(α) Η λύση για $x_0 = 4 \cdot 10^3$ άτομα, $y_0 = 2 \cdot 10^3$ άτομα. (β) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες.

Σχήμα 4.7: Αριθμητική επίλυση του (PP) για θετικούς χρόνους, με $\alpha = 3 [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\beta = 1 (10^3 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\gamma = 6 [\text{χρόνος}]^{-1}$ και $\delta = 1 (10^3 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$.

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Γραμμικό πρόβλημα στον \mathbb{R}^2 . Θεωρούμε το διδιάστατο αυτόνομο γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = \mathcal{A}y(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

όπου $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Λέμε ότι το παραπάνω πρόβλημα είναι απλό αν ο πίνακας \mathcal{A} είναι μη ιδιάζων ($\det \mathcal{A} \neq 0$), οπότε οι ιδιοτιμές του είναι μη μηδενικές. Σε αυτή την περίπτωση το μοναδικό σ.ι. του προβλήματος είναι το $0 \in \mathbb{R}^2$.

Οι ιδιοτιμές λ του \mathcal{A} είναι οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (χαρακτηριστικού πολυώνυμου, εδώ)²

$$\det(\mathcal{A} - \lambda \mathbb{I}_2) = \lambda^2 - (\text{tr} \mathcal{A}) \lambda + \det \mathcal{A} = 0.$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του \mathcal{A} δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \mathcal{A} \pm (\Delta_{\mathcal{A}})^{\frac{1}{2}} \right),$$

²Με $\text{tr} \mathcal{A}$ συμβολίζεται το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα \mathcal{A} .

όπου $\Delta_{\mathcal{A}} := (\text{tr } \mathcal{A})^2 - 4\det \mathcal{A}$ και εμπίπτουν σε μια από τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

I. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda_1 \neq \lambda_2$

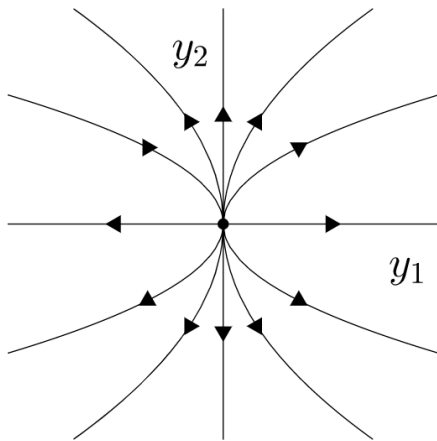
Έστω $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις λ_1, λ_2 . Τότε η λύση του παραπάνω προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2,$$

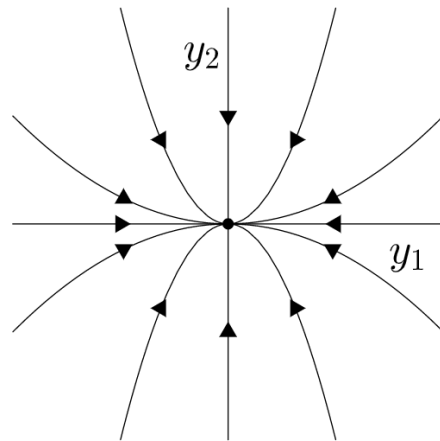
όπου c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Έχουμε, τότε, την ακόλουθη ταξινόμηση/ονοματολογία για το σ.ι. του προβλήματος:

- i. $0 < \lambda_2 < \lambda_1$: θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής κόμβος (node) (βλ. Σχήμα 4.8α).
- ii. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$: θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής κόμβος (βλ. Σχήμα 4.8β).
- iii. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: σάγμα (saddle) (βλ. Σχήμα 4.8γ).

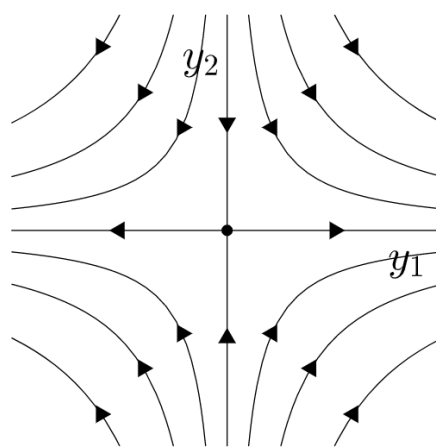


(α) Θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής κόμβος.



(β) Θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής κόμβος.

Κόμβος (node).



(γ) Σάγμα (saddle).

Σχήμα 4.8: Χαρακτηρισμός του σ.ι. $0 \in \mathbb{R}^2$ για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

II. $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$ και \mathcal{A} διαγώνιος πίνακας

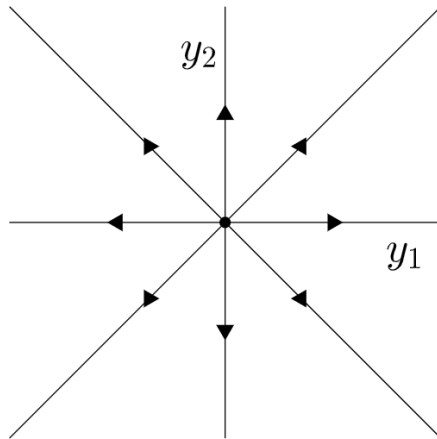
Αν υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $u, v \in \mathbb{R}^2$ για την λ , τότε η λύση του παραπάνω προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = (c_1 u + c_2 v) e^{\lambda t},$$

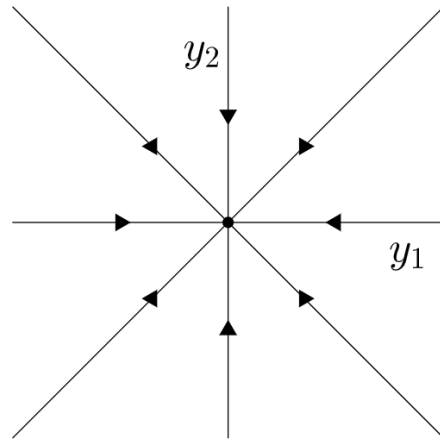
όπου c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Έχουμε, τότε, την ακόλουθη ταξινόμηση/ονοματολογία για το σ.ι. του προβλήματος:

- i. $\lambda > 0$: θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής αστεροειδής κόμβος (*star node*) (βλ. Σχήμα 4.9α).
- ii. $\lambda < 0$: θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής αστεροειδής κόμβος (βλ. Σχήμα 4.9β).



(α) Θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής αστεροειδής κόμβος.



(β) Θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής αστεροειδής κόμβος.

Σχήμα 4.9: Αστεροειδής κόμβος (*star node*).

III. $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda \in \mathbb{R}$ και \mathcal{A} μη διαγώνιος πίνακας

Αν υπάρχει μόνο ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα $u \in \mathbb{R}^2$ για την λ , τότε η λύση του παραπάνω προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} u + c_2 e^{\lambda t} v,$$

όπου $v \in \mathbb{R}^2$ αυθαίρετο, γραμμικά ανεξάρτητο στο u διάνυσμα, και c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Έχουμε, τότε, την ακόλουθη ταξινόμηση/ονοματολογία για το σ.ι. του προβλήματος:

- i. $\lambda > 0$: θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής νόθος (ή εκφυλισμένος) κόμβος (*degenerate node*) (βλ. Σχήμα 4.10α).
- ii. $\lambda < 0$: θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής νόθος (ή εκφυλισμένος) κόμβος (βλ. Σχήμα 4.10β).

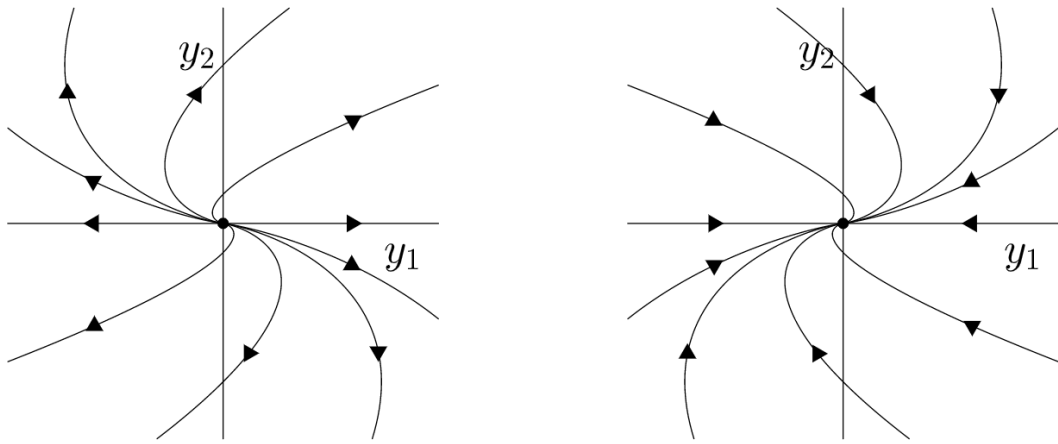
IV. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\alpha := \operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathcal{A}$ και $\beta := \operatorname{Im} \lambda_1 = -\operatorname{Im} \lambda_2$

Η λύση του παραπάνω προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} (u \cos(\beta t + c_2) - v \sin(\beta t + c_2)),$$

όπου $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ και $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ οι ιδιοτιμές του προβλήματος με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $u_1 = u + iv$ και $u_2 = u - iv$ με $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Έχουμε, τότε, την ακόλουθη ταξινόμηση/ονοματολογία για το σ.ι. του προβλήματος:



(α) Θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής νόθος κόμβος.

(β) Θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής νόθος κόμβος.

Σχήμα 4.10: Νόθος κόμβος (*degenerate node*).

- i. $\alpha > 0$: θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής εστία (*focus*) (βλ. Σχήματα 4.11α και 4.11β).
- ii. $\alpha < 0$: θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής εστία (βλ. Σχήματα 4.11γ και 4.11δ).
- iii. $\alpha = 0$: κέντρο (*center*) (βλ. Σχήμα 4.11ε και Σχήμα 4.11στ).

Όταν το σ.ι. είναι κέντρο, το τοπικό διάγραμμα φάσης του προβλήματος αποτελείται από ένα συνεχές ομόκεντρων κύκλων. Αυτή είναι η μόνη μη τετριμμένη περίπτωση στην οποία εμφανίζεται *περιοδική* συμπεριφορά (περιόδου $\frac{2\pi}{\beta}$) στις λύσεις γραμμικών συστημάτων³.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τον τρόπο με τον οποίο το διάγραμμα φάσης του διδιάστατου γραμμικού προβλήματος εξαρτάται από την μεταβολή της ορίζουσας ως προς το ίχνος του πίνακα \mathcal{A} όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.12.

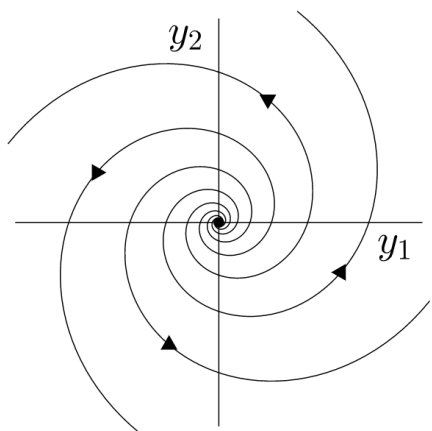
Συνάρτηση Lyapunov. Είναι διαισθητικά φανερό ότι αν η ολική ενέργεια ενός φυσικού προβλήματος έχει τοπικό ελάχιστο σε κάποιο σ.ι., τότε το σημείο αυτό είναι ευσταθές. Αυτή η ιδέα γενικεύθηκε από τον Lyapunov και αποτέλεσε μια απλή, αλλά ισχυρή, μέθοδο επίλυσης προβλημάτων ευστάθειας, που ονομάζεται (*άμεση, ή αλλιώς, δεύτερη*) *μέθοδος Lyapunov*. Μάλιστα, μια συνάρτηση όπως η ολική ενέργεια ενός φυσικού προβλήματος λέγεται *συνάρτηση Lyapunov*, όπως θα αναφέρουμε και παρακάτω. Η μελέτη μιας ενδεχόμενης συνάρτησης Lyapunov για κάποιο αυτόνομο ΠΑΤ έχει τρία σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι της γραμμικοποίησης (η οποία λέγεται και πρώτη μέθοδος Lyapunov):

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί *ευστάθεια ενός σ.ι. στο οποίο ο υπολογισμός των ιδιοτιμών του αντίστοιχου πίνακα Jacobi είναι δυσχερής*.
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδειχθεί *ευστάθεια ενός μη υπερβολικού σ.ι. στο οποίο η γραμμικοποίηση καταρρέει*.
- Μπορεί να μας δώσει *ολικά αποτελέσματα σχετικά με ενδεχόμενη ασυμπτωτική ευστάθεια ενός σ.ι., δηλ. αποτελέσματα που εμπλέκουν ολόκληρο τον χώρο φάσης, και όχι μόνο τοπικά*.

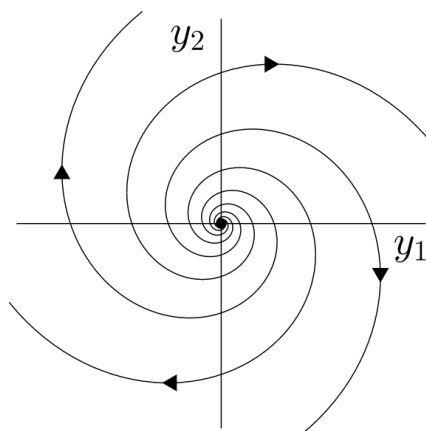
Το μειονέκτημα έναντι της γραμμικοποίησης, η οποία είναι τυποποιημένη, είναι ότι δεν υπάρχει καθολικός τρόπος εύρεσης μιας συνάρτησης Lyapunov για ένα αυθαίρετο αυτόνομο ΠΑΤ.

Θεωρούμε αυτόνομο (ΠΑΤ) και υποθέτουμε ότι y^* είναι μεμονωμένο σ.ι. του μοντέλου και επίσης $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, όπου $U \subseteq S_2$ ανοικτή περιοχή του y^* εντός του χώρου φάσης S_2 .

³Η τετριμμένη περιοδική συμπεριφορά λύσεων απλών γραμμικών συστημάτων αντιστοιχεί στις σταθερές λύσεις, δηλ. στα σ.ι., και η περίοδος είναι 0.

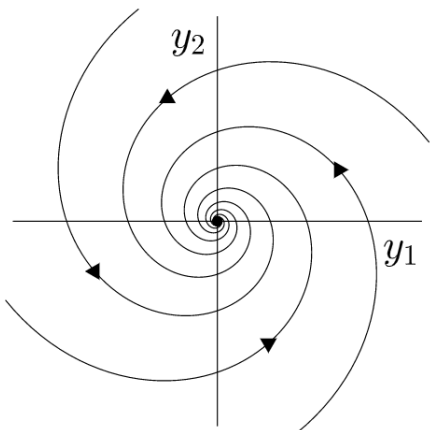


(α) Αριστερόστροφη θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής εστία ($a > 0, \beta > 0$).

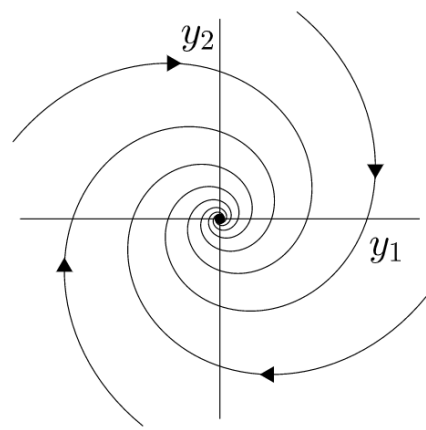


(β) Δεξιόστροφη θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής εστία ($a > 0, \beta < 0$).

Θετικά ασταθής και αρνητικά ευσταθής εστία (*focus*).

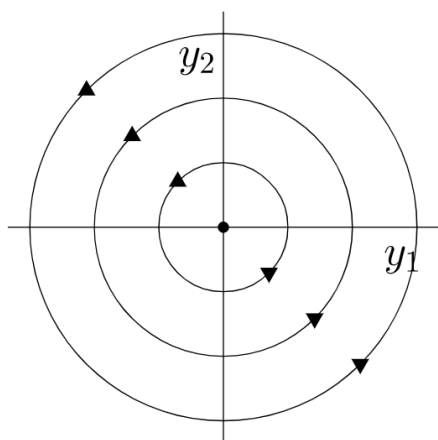


(γ) Αριστερόστροφη θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής εστία ($a < 0, \beta > 0$).

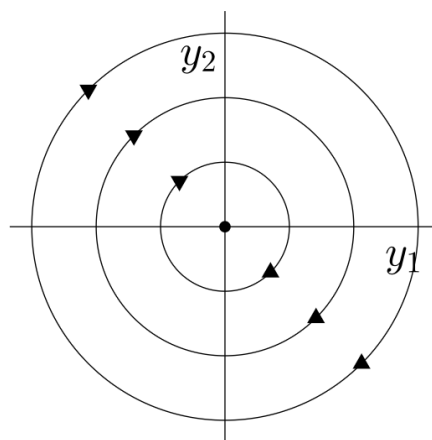


(δ) Δεξιόστροφη θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής εστία ($a < 0, \beta < 0$).

Θετικά ευσταθής και αρνητικά ασταθής εστία (*focus*).



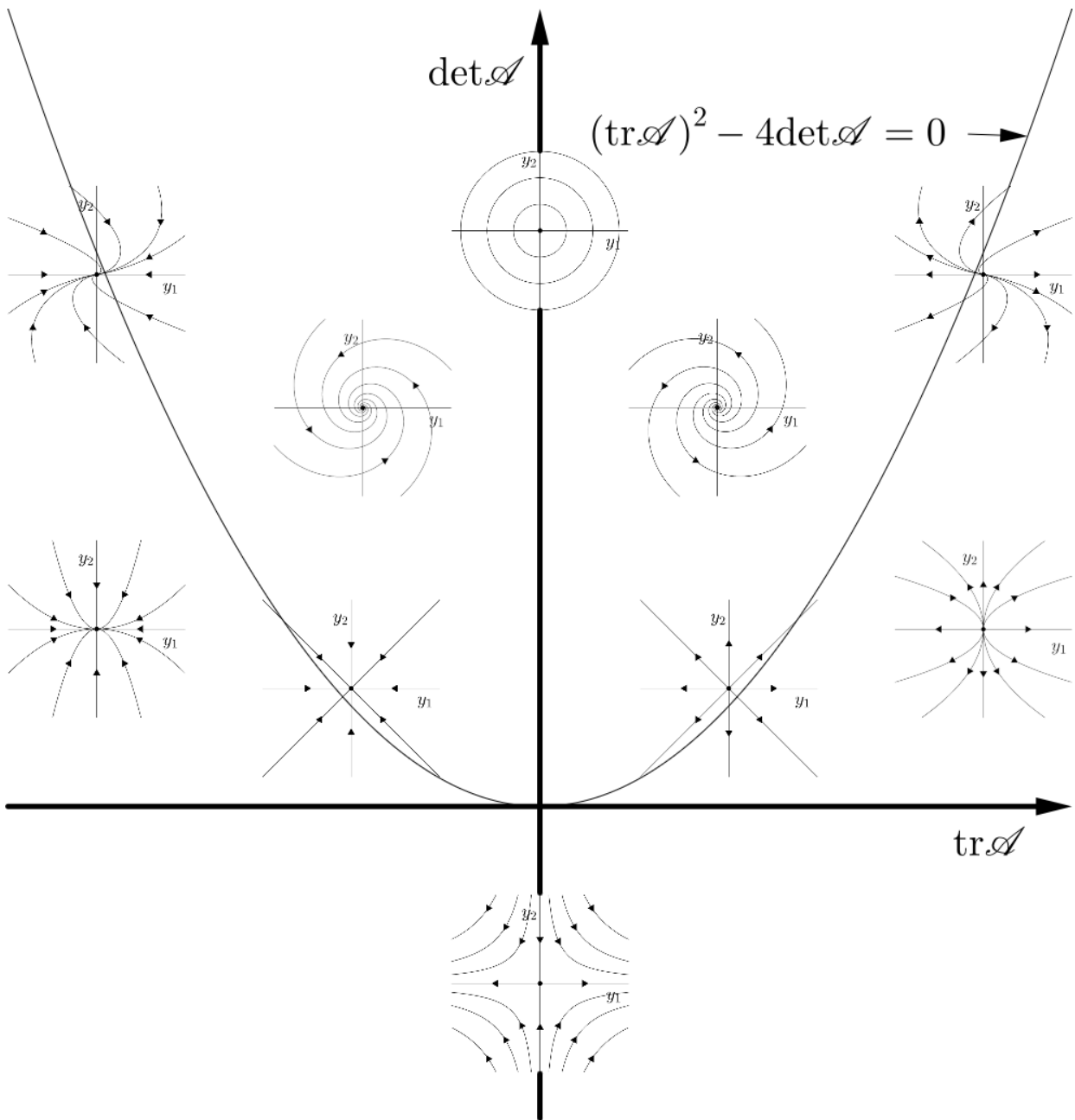
(ε) Αριστερόστροφο κέντρο ($a = 0, \beta > 0$).



(στ) Δεξιόστροφο κέντρο ($a = 0, \beta < 0$).

Κέντρο (*center*).

Σχήμα 4.11: Χαρακτηρισμός του σ.ι. $0 \in \mathbb{R}^2$ για $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$.



Σχήμα 4.12: Εξάρτηση του διαγράμματος φάσης από την μεταβολή της $\det \mathcal{A}$ ως προς το $\text{tr} \mathcal{A}$.

1. Μια συνάρτηση $g \in C(U; \mathbb{R})$ λέγεται θετικά ορισμένη (ημιορισμένη) στο y^* ανν

- i. $g(y^*) = 0$, και
- ii. $g(x) \underset{(\geq)}{>} 0, \forall x \in U \setminus \{y^*\}$.

Η g λέγεται αρνητικά ορισμένη (ημιορισμένη) αν η $-g$ είναι θετικά ορισμένη (ημιορισμένη).

2. Μια συνάρτηση $V \in C^1(U; \mathbb{R})$ λέγεται ασθενώς μελλοντική (παρελθοντική) συνάρτηση Lyapunov για το y^* του παραπάνω αυτόνομου (ΠΑΤ) ανν

- i. η V είναι θετικά ορισμένη στο y^* , και
- ii. η $\dot{V} := \nabla V \cdot f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i$ είναι αρνητικά (θετικά) ημιορισμένη στο y^* .

Η V λέγεται ισχυρή μελλοντική (παρελθοντική) συνάρτηση Lyapunov για το y^* του παραπάνω αυτόνομου (ΠΑΤ) αν αντί του ii. ισχύει το

ii'. η \dot{V} είναι αρνητικά (θετικά) ορισμένη στο y^* .

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση \dot{V} λέγεται παράγωγος Lie, (ή αλλιώς, τροχιακή, ή υλική, παράγωγος) της V , και ουσιαστικά -μέσω του κανόνα αλυσίδας- οι ii. και ii'. μας λένε ότι κατά μήκος των τροχιών των λύσεων του (ΠΑΤ) η V είναι φθίνουσα και γνησίως φθίνουσα, αντίστοιχα, καθώς

$$\frac{d(V \circ y)}{dt} = \dot{V} \circ y.$$

Θεώρημα 4.4 (Lyapunov). Αν στην ανοικτή περιοχή $U \subseteq S_2$ του y^* εντός του χώρου φάσης S_2 του παραπάνω αυτόνομου (ΠΑΤ) υπάρχει

1. μια ασθενής μελλοντική (παρελθοντική) συνάρτηση Lyapunov στο y^* , τότε το y^* είναι θετικά (αρνητικά) ευσταθές,
2. μια ισχυρή μελλοντική (παρελθοντική) συνάρτηση Lyapunov στο y^* , τότε το y^* είναι ασυμπτωτικά θετικά (αρνητικά) ευσταθές. Μάλιστα, ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \begin{matrix} \infty \\ (-\infty) \end{matrix}} y(t, y_0) = y^*, \quad \forall y_0 \in U.$$

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορούμε να πάρουμε ασυμπτωτική ευστάθεια ακόμα και από μία ασθενή μόνο συνάρτηση Lyapunov, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 4.5 (LaSalle/Barbashin-Krasovskii-LaSalle, ή αλλιώς, αρχή αναλλοιώτου). Αν

1. στην ανοικτή περιοχή $U \subseteq S_2$ του y^* εντός του χώρου φάσης S_2 υπάρχει μια ασθενής μελλοντική (παρελθοντική) συνάρτηση Lyapunov V στο y^* , και
2. η \dot{V} δεν μηδενίζεται ταυτοτικά πάνω σε καμία τροχιά, με εξαίρεση την τετριμμένη τροχιά της σταθερής λύσης $y \equiv y^*$,

τότε το y^* είναι ασυμπτωτικά θετικά (αρνητικά) ευσταθές. Μάλιστα, ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \begin{matrix} \infty \\ (-\infty) \end{matrix}} y(t, y_0) = y^*, \quad \forall y_0 \in U.$$

Λόγω των παραπάνω δύο αποτελεσμάτων (θεωρήματα Lyapunov και Barbashin-Krasovskii-LaSalle), μπορούμε να εισαγάγουμε τις παρακάτω έννοιες:

1. Στην περίπτωση της θετικής (αρνητικής) ασυμπτωτικής ευστάθειας των δύο προηγούμενων θεωρημάτων, το U λέγεται θετικό (αρνητικό) πεδίο έλξης του y^* . Αν το U είναι τόσο θετικό όσο και αρνητικό πεδίο έλξης του y^* , τότε λέγεται πεδίο έλξης του y^* .
2. Αν το θετικό (αρνητικό) πεδίο έλξης του y^* είναι όλος ο χώρος φάσης εκτός ίσως ενός μηδενιστικού, τότε το y^* λέγεται ολικά θετικά (αρνητικά) ασυμπτωτικά ευσταθές. Αν το y^* είναι ολικά τόσο θετικά όσο και αρνητικά ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε λέγεται ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η μέθοδος Lyapunov μπορεί να τροποποιηθεί έτσι ώστε να ελέγχει την αστάθεια του σ.ι.. Σχετικά έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.6 (Četaev). Αν για την ανοικτή περιοχή $U \subseteq S_2$ του y^* εντός του χώρου φάσης S_2 υπάρχουν $V \in C^1(U; \mathbb{R})$ και ανοικτό $U_0 \subseteq U$ τέτοια ώστε

1. $y^* \in \partial U_0$,
2. $V(x) > 0$ και $\dot{V}(x) \underset{(<)}{>} 0, \forall x \in U_0$, και
3. $V(x) = 0, \forall x \in U \cap \partial U_0$,

τότε το y^* είναι θετικά (αρνητικά) ασταθές.

Κλειστότητα τροχιών και περιοδικότητα λύσεων αυτόνομου ΠΑΤ. Γενικά, μία μη σταθερή και ολική λύση, $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) λέγεται περιοδική αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T \neq 0$, τέτοιος ώστε $y(t + T) = y(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Κάθε τέτοιος T λέγεται περίοδος της y . Σε κάποιες περιπτώσεις, όπου και θα αναφέρεται ρητά, επεκτείνουμε τον ορισμό της περιοδικής λύσης έτσι ώστε να περιλαμβάνει και τη σταθερή λύση.

Θεώρημα 4.7. Έστω αυτόνομο (ΠΑΤ) με $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$, όπου $U \subseteq S_2$ ανοικτό εντός του χώρου φάσης S_2 .

1. Αν η τροχιά μιας ολικής λύσης, y , του (ΠΑΤ) περιέχεται σε μια κλειστή C^1 καμπύλη, η οποία καμπύλη δεν περιέχει κάποιο σ.ι. του (ΠΑΤ), τότε η y είναι περιοδική.
2. Αν μια λύση, y , του (ΠΑΤ) είναι περιοδική, τότε
 - i. δεν υπάρχουν σ.ι. επί της τροχιάς της y , και
 - ii. υπάρχει η ελάχιστη θετική περίοδος της y .

Η ελάχιστη θετική περίοδος μιας περιοδικής λύσης λέγεται και απλά περίοδος. Αν T είναι η ελάχιστη θετική περίοδος μιας (C^k) λύσης, y , ενός αυτόνομου (ΠΑΤ), τότε η συνάρτηση $y: [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ορίζει μια συνεχή (C^k) κλειστή καμπύλη η οποία δεν τέμνει τον εαυτό της. Στη Μιγαδική Ανάλυση ($n = 2$) μια τέτοια καμπύλη λέγεται (C^k) απλή κλειστή καμπύλη ή (C^k) καμπύλη Jordan, στη Διαφορική Γεωμετρία λέγεται κλειστή τοπολογική (ή αλλιώς, C^k) 1-πολλαπλότητα, ενώ στη Γεωμετρική Ανάλυση λέγεται συμπαγής τοπολογική (ή αλλιώς, C^k) 1-πολλαπλότητα χωρίς σύνορο.

Όσον αφορά τις ΣΔΕ και τα Δυναμικά Συστήματα, η βιβλιογραφία του παρόντος κεφαλαίου συμπίπτει με εκείνη του [Κεφαλαίου 1](#), οπότε δεν παρατίθεται και πάλι εδώ.

Βιβλιογραφία

- [1] V. Volterra. “Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie animali conviventi”. Στο: *Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei* 2 (1926), σσ. 31–113.
- [2] A. J. Lotka. “Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems”. Στο: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 6 (1920), σσ. 410–415.
- [3] A. J. Lotka. “Undamped oscillations derived from the law of mass action”. Στο: *Journal of the American Chemical Society* 42 (1920), σσ. 1595–1599.
- [4] A. J. Lotka. *Elements of Physical Biology*. Williams και Wilkins, 1925.
- [5] A. J. Lotka. “Zur theorie der periodischen reaktionen”. Στο: *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 72 (1910), σσ. 508–511.

■ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ IV

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Δυναμικά μοντέλα πολλών πληθυσμών (συνέχεια): Λογιστική παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

- (α) Εξάρτηση της λύσης του ΠΑΤ από παράμετρο
- (β) Διακλάδωση από σημείο ισορροπίας: Διακλάδωση σταθερής κατάστασης

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 1-4](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Πρώτη παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra. Αν αντί του συστήματος (4.1) -και συγκεκριμένα της (4.1α)- θεωρήσουμε ότι σε απουσία θηρευτών η δυναμική του πληθυσμού των θηραμάτων περιγράφεται από τη λογιστική εξίσωση, τότε παίρνουμε το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{1}{k}x \right) - \beta xy \quad (5.1\alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy, \quad (5.1\beta)$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές.

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Το ΠΑΤ για το παραπάνω μοντέλο είναι το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } x_0, y_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ & (x, y) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ τέτοια ώστε η } (x, y) \text{ να ικανοποιεί τόσο το (5.1) στο } \mathcal{I} \setminus \{0\}, \quad (PP_{v2.1}) \\ & \text{όσο και την αρχική συνθήκη } (x(0), y(0)) = (x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ομαλή μεγιστική λύση, καλή τοποθέτηση του προβλήματος και αναλλοίωτα σύνολα. Ακριβώς με την ίδια τεχνική (μελέτη αρχικά ενός κατάλληλου γενικότερου προβλήματος) και τα ίδια επιχειρήματα όπως και για το (PP), παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα και μεγιστικής λύσης του (PP_{v2.1}),

$$(x, y) : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \infty,$$

καθώς επίσης ότι τουλάχιστον (βλ. Άσκηση 5.1) τα σύνολα

$$(0, 0), \{0\} \times (0, \infty), (0, \infty) \times \{0\} \text{ και } (0, \infty)^2$$

είναι αναλλοίωτα ως προς τον χρόνο για το πρόβλημα.

Ολικότητα; Λόγω της αδυναμίας εύρεσης της λύσης του (PP_{v2.1}) έστω και σε πεπλεγμένη μορφή, για την ολικότητά της μπορούμε να εργαστούμε με διαφορετικό τρόπο και συγκεκριμένα με τη μέθοδο σύγκρισης.

Υποθέτουμε ότι η μεγιστική λύση που βρήκαμε παραπάνω δεν είναι θετικά ολική (δηλ. ότι $\varepsilon_2 < \infty$) και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αρκεί να δείξουμε ότι δεν εκρήγνυται, καθώς κάθε λύση με αρχική τιμή στο εσωτερικό του χώρου φάσης, δηλ. στο $(0, \infty)^2$, είναι αδύνατο να τείνει προς το σύνορό του σε πεπερασμένο χρόνο λόγω μοναδικότητας. Έστω, λοιπόν, $T \in (0, \varepsilon_2)$. Παρατηρώντας την (5.1α), έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} \leq \alpha x \left(1 - \frac{1}{k}x\right),$$

άρα από σύγκριση έχουμε ότι

$$\max \{x(t) \mid t \in [0, T]\} \leq \max \{\hat{x}(t) \mid t \in [0, T]\} =: A,$$

όπου \hat{x} είναι η (τουλάχιστον) θετικά ολική λύση του (ℓ) με $r = \alpha$ και αρχική συνθήκη $\hat{x}(0) = x_0$. Επιπλέον, από την (5.1β) έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dt} \leq \delta xy,$$

άρα ξανά από σύγκριση έχουμε ότι

$$\max \{y(t) \mid t \in [0, T]\} \leq y_0 e^{\delta AT}.$$

Δηλ. η λύση είναι φραγμένη στο $[0, T]$ από μια σταθερά που εξαρτάται συνεχώς (και κατά αύξοντα τρόπο) από το T . Αφού το T είναι αυθαίρετο, παίρνουμε το όριο για $T \rightarrow \varepsilon_2^-$ για να καταλήξουμε σε άτοπο. Άρα η λύση είναι θετικά ολική, δηλ. $\varepsilon_2 = \infty$.

Όσον αφορά το ε_1 και την αρνητική ολικότητα της μεγιστικής λύσης, πάλι θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο σύγκρισης, αφού όμως πρώτα αντιστρέψουμε τον χρόνο. Πράγματι αν

$$(x, y) : (-\varepsilon_1, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2$$

είναι η θετικά ολική μεγιστική λύση του (PP_{v2.1}) που βρήκαμε παραπάνω, τότε για τη

$$\begin{aligned} & (\chi, \psi) : (-\infty, \varepsilon_1) \rightarrow [0, \infty)^2 \\ & s \mapsto (\chi(s), \psi(s)) := (x(-s), y(-s)), \end{aligned}$$

ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\frac{d\chi}{ds} &= -\alpha\chi\left(1 - \frac{1}{k}\chi\right) + \beta\chi\psi \\ \frac{d\psi}{ds} &= \gamma\psi - \delta\chi\psi,\end{aligned}$$

καθώς επίσης ότι $(\chi(0), \psi(0)) = (x_0, y_0)$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{d\psi}{ds} \leq \gamma\psi,$$

συνεπώς μπορούμε να πάρουμε από σύγκριση ότι η ψ ορίζεται για όλους τους θετικούς χρόνους, ωστόσο έχουμε ότι

$$\frac{d\chi}{dt} \geq -\alpha\chi\left(1 - \frac{1}{k}\chi\right),$$

άρα, συγκρίνοντας με την αρνητικά εκφυγνυόμενη λύση του (ℓ) , παίρνουμε ότι η χ εκρήγνυται για κάποιο πεπερασμένο θετικό χρόνο. Άρα η λύση εκρήγνυται για κάποιο πεπερασμένο αρνητικό χρόνο, συνεπώς $\varepsilon_1 < \infty$.

Σημεία ισορροπίας. Από το σύστημα (5.1) εύκολα προκύπτει ότι υπάρχουν τρία σ.ι., τα

$$(x^*, y^*) = \begin{cases} (0, 0), \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right), & \text{αν } k \geq \frac{\gamma}{\delta} \\ (k, 0). \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι απορρίψαμε την περίπτωση του δεύτερου σ.ι. όταν $k < \frac{\gamma}{\delta}$, καθώς ενδιαφερόμαστε για μη αρνητικές λύσεις. Παρατηρούμε ότι το δεύτερο σ.ι. συμπίπτει με το τρίτο όταν $k = \frac{\gamma}{\delta}$.

Άσκηση 5.1. Διασπάστε περαιτέρω τα αναλλοίωτα σύνολα που βρήκαμε παραπάνω σε αναλλοίωτα υποσύνολα.

Ανάλυση ευστάθειας. Υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi για το σύστημά μας και έχουμε

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} \alpha\left(1 - \frac{2}{k}w\right) - \beta z & -\beta w \\ \delta z & -\gamma + \delta w \end{pmatrix},$$

οπότε

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha\gamma}{\delta k} & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta}\left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right) & 0 \end{pmatrix}, J(k, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta k \\ 0 & -\gamma + \delta k \end{pmatrix}.$$

Άμεσα, από γραμμικοποίηση, έχουμε τα εξής:

- Το $(0, 0)$ είναι θετικά ασταθές, αφού οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Jacobi είναι οι $\lambda_1 = \alpha > 0$ και $\lambda_2 = -\gamma < 0$.
- Για το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right)$, οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Jacobi δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm \left(\text{tr}^2 - 4\text{det} \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

όπου

$$\text{tr} = -\frac{\alpha\gamma}{\delta k} < 0, \text{ καθώς επίσης } \det = \alpha\gamma \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right) > 0 \text{ όταν } k > \frac{\gamma}{\delta}.$$

Αφού σε αυτή την περίπτωση η οριζούσα είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του πίνακα Jacobi καθορίζεται από το αντίστοιχο πρόσημο του ίχνους. Άρα, το παραπάνω σ.ι. είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές όταν $k > \frac{\gamma}{\delta}$.

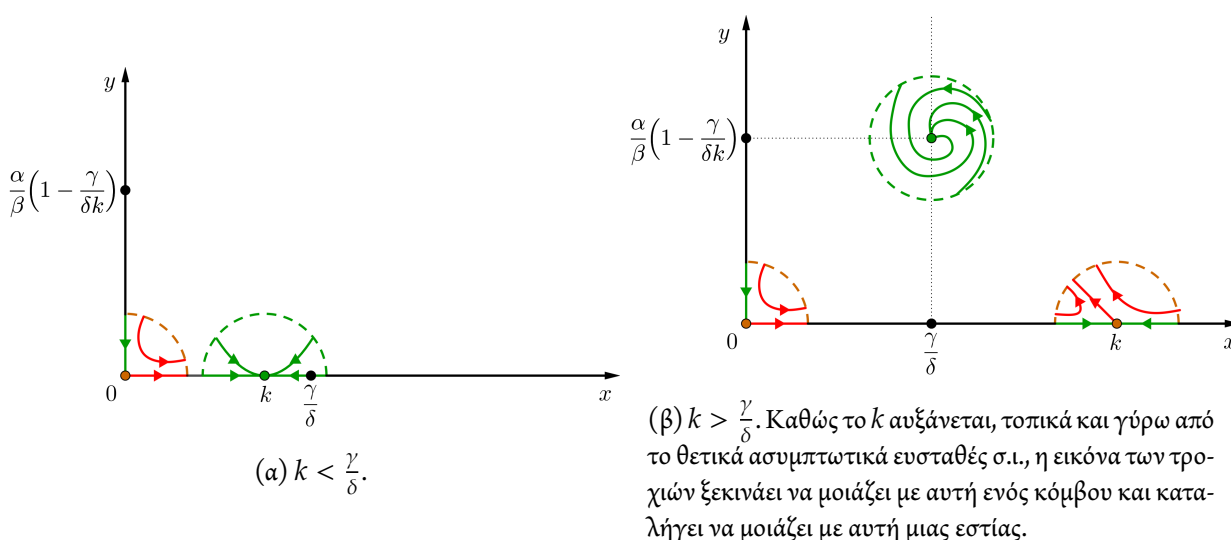
- Για το $(k, 0)$, έχουμε ότι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -\gamma + \delta k$ και $\lambda_2 = -\alpha < 0$, δηλ.

$$\lambda_1 \begin{cases} < 0, & \text{όταν } k < \frac{\gamma}{\delta} \\ = 0, & \text{όταν } k = \frac{\gamma}{\delta} \\ > 0 & \text{όταν } k > \frac{\gamma}{\delta}, \end{cases} \text{ και επίσης } \lambda_2 < 0.$$

Άρα το εν λόγω σ.ι. είναι

$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{όταν } k < \frac{\gamma}{\delta}, \\ \text{θετικά ασταθές,} & \text{όταν } k > \frac{\gamma}{\delta}. \end{cases}$$

Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με την ευστάθεια/αστάθεια του $(\frac{\gamma}{\delta}, 0)$ όταν $\frac{\gamma}{\delta} = k$ μέσω γραμμικοποίησης, λόγω του ότι είναι μη υπερβολικό. Παρατηρώντας όμως το **Σχήμα 5.1** (βλ. **Άσκηση 5.2**), σε συνδυασμό με την (τουλάχιστον) συνεχή εξάρτηση της λύσης από την παράμετρο k , διαισθητικά αναμένουμε τη θετική ασυμπτωτική ευστάθειά του.



Σχήμα 5.1: Ποιοτική αναπαράσταση του χώρου φάσης του $(PP_{v2.1})$ για $k \neq \frac{\gamma}{\delta}$, όπως προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Αναμένουμε τη θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του $(\frac{\gamma}{\delta}, 0)$ όταν $k = \frac{\gamma}{\delta}$, όπως φαίνεται καθώς $k \rightarrow (\frac{\gamma}{\delta})^-$ ή $k \rightarrow (\frac{\gamma}{\delta})^+$.

Η αυστηρή απόδειξη αυτού του συμπεράσματος βασίζεται στη θεωρία διακλάδωσης σταθερής κατάστασης.

Άσκηση 5.2. Δώστε τις λεπτομέρειες κατασκευής του **Σχήματος 5.1**.

Ανάλυση διακλάδωσης. Καταρχάς, το Σχήμα 5.1 επιβεβαιώνει την ύπαρξη διακλάδωσης σταθερής κατάστασης από το $(k, 0)$ όταν $k = \frac{\gamma}{\delta}$, κάτι άλλωστε που προκύπτει και από τη θεωρία, αφού, κοιτώντας την $\lambda_1 = -\gamma + \delta k$ ως συνάρτηση του k , έχουμε ότι

$$\lambda_1\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) = 0, \quad \frac{d\lambda_1}{dk}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \neq 0 \text{ και } \lambda_2 < 0.$$

Άρα θα χαρακτηρίσουμε τον τύπο της διακλάδωσης αυτής, με απώτερο σκοπό να βγάλουμε συμπέρασμα για την ευστάθεια του $\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right)$ όταν $k = \frac{\gamma}{\delta}$. Μιας και γνωρίζουμε όλα τα σ.ι. $(x^*, y^*) = (x^*(k), y^*(k))$ γύρω από το $k = \frac{\gamma}{\delta}$, θα το κάνουμε κατασκευάζοντας το διάγραμμα της διακλάδωσης (στον αντίποδα, βλ. Άσκηση 5.3).

Επιλέγουμε τον κατάλληλο συνδυασμό των x^* και y^* , οι τιμές του οποίου θα απεικονίζονται στον κατακόρυφο άξονα του διαγράμματος. Ο συνδυασμός αυτός προκύπτει από την απλοποίηση Lyapunov-Schmidt, ως εξής: Πρώτα διαγωνιοποιούμε τον $J\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right)$

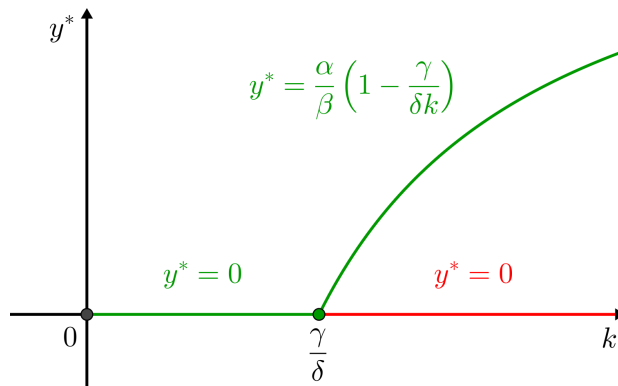
$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = -\alpha \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} \end{pmatrix},$$

όπου τα $\left(-\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}, 1\right)$ και $(1, 0)$, τα οποία έχουν επιλεγεί για την πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα, στήλη του P , είναι τα ιδιοδιανύσματα της $\lambda_1 = 0$ και της $\lambda_2 = -\alpha$, αντίστοιχα. Έπειτα επιλέγουμε το συνδυασμό

$$(0, 1) \cdot (x^* - k, y^*) = y^*,$$

όπου το $(0, 1)$ είναι η πρώτη γραμμή του P^{-1} .

Άρα το διάγραμμα της διακλάδωσης δίνεται στο Σχήμα 5.2, και παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια διακρίσιμη διακλάδωση (ο ασταθής κλάδος $y^* = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right) < 0$ για $k < \frac{\gamma}{\delta}$ απορρίπτεται) από το θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. $\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right)$.



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα διακλάδωσης $y^* \left(y^* - \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right) = 0$. Με πράσινο απεικονίζεται η θετική ασυμπτωτικά ευστάθεια, ενώ με κόκκινο η θετική αστάθεια.

Άσκηση 5.3 (Ο Παράδεισος απέχει μόνο μερικές σελίδες πράξεις ☺). Αποφανθείτε σχετικά με την ύπαρξη διακλάδωσης σταθερής κατάστασης και τον τύπο της για το $(PP_{v2.1})$, στην περίπτωση που δεν γνωρίζετε τα υπόλοιπα σ.ι., παρά μόνο το $(k, 0)$.

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια. Άραγε, θα τείνει ασυμπτωτικά κάθε λύση του $(PP_{\gamma,2.1})$, με αυθαίρετη αρχική συνθήκη, στα θετικά ευσταθή σ.ι.; Είναι, δηλ., τα θετικά ασυμπτωτικά ευσταθή σ.ι. και ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθή;

1. Περίπτωση $k > \frac{\gamma}{\delta}$. Εδώ θα ψάξουμε για κατάλληλη συνάρτηση Lyapunov, V . Αφού έχουμε βρει μια τέτοια συνάρτηση για το (PP) , ελπίζουμε να προχωρήσουμε τροποποιώντας την.

Συγκεκριμένα, θα αναζητήσουμε κατάλληλη

$$f(w, z) := A \ln z - Bz + C \ln w - Dw, \quad \forall (w, z) \in (0, \infty)^2,$$

με σταθερές A, B, C, D που μένει να καθορίσουμε, τέτοια ώστε

$$V: (0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$(w, z) \mapsto f\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right) - f(w, z),$$

για την οποία θα ισχύει ότι $V\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right) = 0$, ότι $V(w, z) > 0$ για κάθε $(w, z) \in (0, \infty)^2 \setminus \left\{\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right)\right\}$, καθώς επίσης ότι $\dot{V}(w, z) \leq 0$ για κάθε $(w, z) \in (0, \infty)^2$. Αφού ουσιαστικά θέλουμε η f να έχει (ολικό) μέγιστο για $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right)$, τότε αναγκαστικά θα πρέπει

$$\nabla f\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{\gamma}{\delta} D \\ A = \frac{\delta}{\beta} \alpha \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right) B. \end{cases}$$

Επιπλέον, αφού θέλουμε για κάθε $(x_0, y_0) \in (0, \infty)^2$ να ισχύει ότι

$$0 \geq \dot{V} \circ (x, y) = \frac{d(V \circ (x, y))}{dt} = \nabla V \circ (x, y) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right),$$

τότε, σύμφωνα με την (5.1), αναγκαστικά θα πρέπει

$$0 \geq \dot{V} \circ (x, y) = -D \left(\frac{\gamma}{\delta} - x\right) \left(\alpha \left(1 - \frac{1}{k}x\right) - \beta y\right) - B \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right) - y\right) (-\gamma + \delta x).$$

Κάτι τέτοιο θα ισχύει αν επιλέξουμε

$$B = \beta \text{ και } D = \delta,$$

καθώς τότε θα έχουμε ότι

$$\dot{V} \circ (x, y) = -\frac{\alpha(-\gamma + \delta x)^2}{\delta k} \leq 0.$$

Δηλ. η V είναι μια ασθενής μελλοντική συνάρτηση Lyapunov. Ωστόσο, παρατηρούμε ότι η \dot{V} δεν μηδενίζεται ταυτοτικά σε καμιά τροχιά, με εξαίρεση την τετριμμένη τροχιά της σταθερής λύσης $(x, y) \equiv \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k}\right)\right)$. Άρα, από την αρχή αναλλοιώτου του LaSalle έπεται ότι το σ.ι. είναι ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

2. Περίπτωση $k \leq \frac{\gamma}{\delta}$. Εδώ, η εύρεση μιας συνάρτησης Lyapunov για την εξαγωγή συμπεράσματος σχετικά με την ολική συμπεριφορά του $(k, 0)$ δεν είναι εύκολη υπόθεση (το σύνθετο σενάριο). Παραδείγματα που μπορούμε άμεσα να σκεφτούμε, όπως η

$$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$(w, z) \mapsto (w - k)^2 + z^2,$$

δεν αρκούν. Ωστόσο θα βγάλουμε συμπέρασμα με έναν απλό κατασκευαστικό τρόπο, αποτυπώνοντας ποιοτικά το πεδίο διευθύνσεων:

- i. Πρώτα απεικονίζουμε τις μηδενοκλινείς καμπύλες (*nullclines*) στον χώρο φάσης. Μια μηδενοκλινής καμπύλη αποτελεί καμπύλη στον χώρο φάσης επί της οποίας μηδενίζεται η παράγωγος μιας από τις εξαρτημένες μεταβλητές. Με βάση το (5.1), και όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3α (στο Σχήμα 5.3 απεικονίζεται η περίπτωση $k < \frac{\gamma}{\delta}$; αντίστοιχα θα έχουμε και για την περίπτωση $k = \frac{\gamma}{\delta}$ (βλ. Άσκηση 5.4)), όσον αφορά την $\frac{dx}{dt} = 0$ έχουμε τις x -μηδενοκλινείς

$$x = 0 \text{ και } y = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{k}x \right),$$

και από την $\frac{dy}{dt} = 0$ έχουμε τις y -μηδενοκλινείς

$$y = 0 \text{ και } x = \frac{\gamma}{\delta}.$$

- ii. Έπειτα σχεδιάζουμε κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα κατά μήκος των x -μηδενοκλινών καμπυλών και οριζόντια κατά μήκος των y -μηδενοκλινών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3β.
- iii. Στη συνέχεια επιλέγουμε κατάλληλη φορά στα παραπάνω ευθύγραμμα τμήματα, την οποία εξάγουμε άμεσα από το (5.1), όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3γ.
- iv. Τέλος απεικονίζουμε τα κατάλληλα διανύσματα στον υπόλοιπο χώρο φάσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3δ, με βάση τη φορά της συνισταμένης των διανυσμάτων στις μηδενοκλινείς καμπύλες.

Παίρνουμε έτσι την ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του $(k, 0)$ στο αναλλοίωτο σύνολο

$$(0, \infty) \times [0, \infty),$$

δηλ. παντού στον χώρο φάσης εκτός από το αναλλοίωτο σύνολο

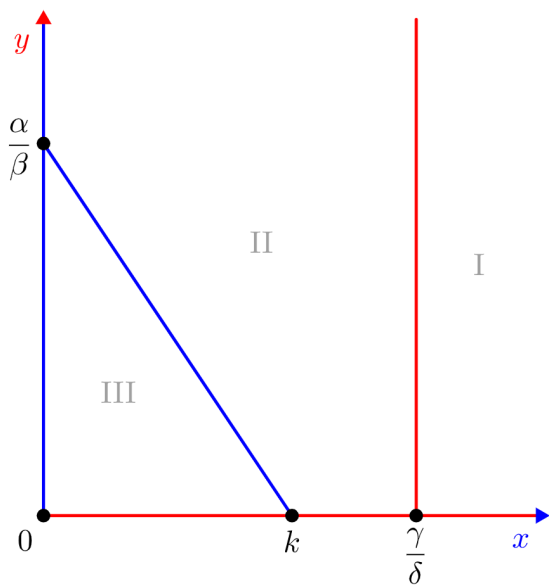
$$\{0\} \times [0, \infty),$$

όταν $k \leq \frac{\gamma}{\delta}$.

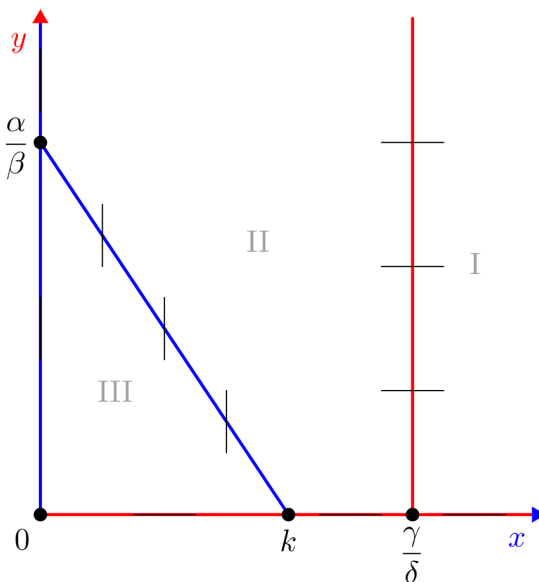
Συμπεραίνουμε έτσι τα εξής:

1. Αν $k > \frac{\gamma}{\delta}$, τότε κάθε λύση με μη μηδενική αρχική συνθήκη για τα θηράματα τείνει μελλοντικά στο σ.ι. της συμβίωσης.
2. Αν $k \leq \frac{\gamma}{\delta}$, τότε, για κάθε αρχική συνθήκη, μελλοντικά οι θηρευτές μειώνονται μέχρι εξαφάνισης.

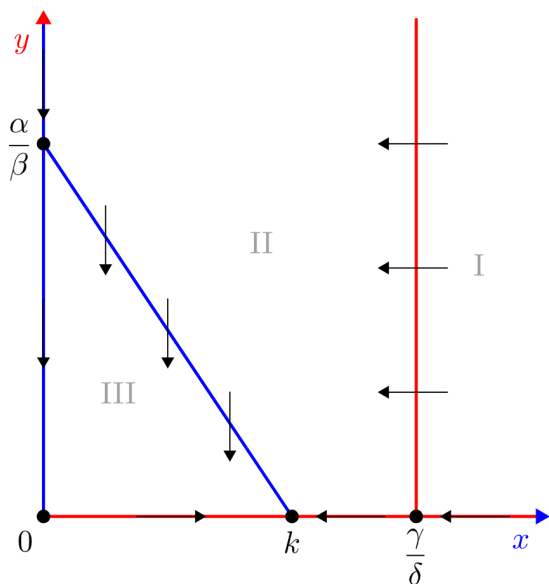
Άσκηση 5.4. Απεικονίστε ποιοτικά το πεδίο διευθύνσεων του (PP_{v2.1}), όταν $k = \frac{\gamma}{\delta}$ και όταν $k > \frac{\gamma}{\delta}$.



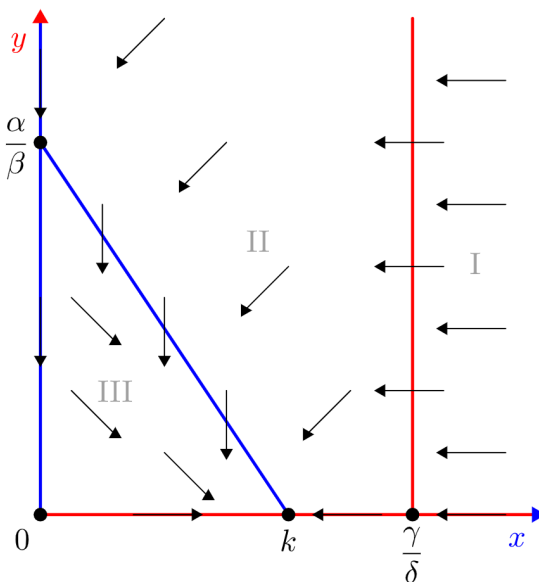
(α) Με μπλε οι x -μηδενοκλινείς καμπύλες και με κόκκινο οι y -μηδενοκλινείς. Προφανώς όλα τα σ.ι. βρίσκονται στην τομή των μηδενοκλινών καμπυλών. Εδώ, οι καμπύλες αυτές χωρίζουν τον χώρο φάσης σε τρεις περιοχές, I, II και III.



(β) Το πεδίο διευθύνσεων κατά μήκος κάθε μηδενοκλινούς καμπύλης είναι κάθετο στον αντίστοιχο άξονα.



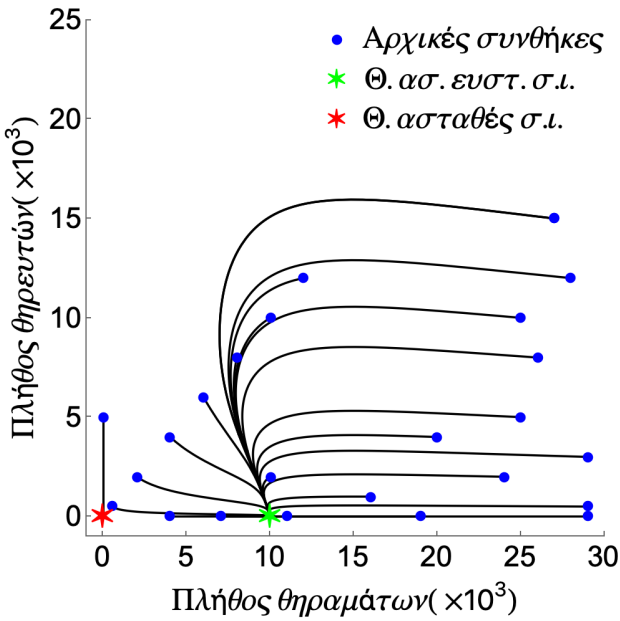
(γ) Η φορά του πεδίου διευθύνσεων κατά μήκος των μηδενοκλινών καμπυλών καθορίζεται από το (5.1). Για παράδειγμα, κατά μήκος της x -μηδενοκλινούς $y = \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{1}{k}x\right)$ παρατηρούμε ότι αφού βρισκόμαστε για $x \leq k < \frac{\gamma}{\delta}$, τότε από την (5.1β) προκύπτει ότι $\frac{dy}{dt} < 0$, δηλ. ότι η y φθίνει (και μάλιστα γνησίως), και άρα η φορά είναι προς “τα κάτω”, δηλ. προς την καμπύλη $y = 0$.



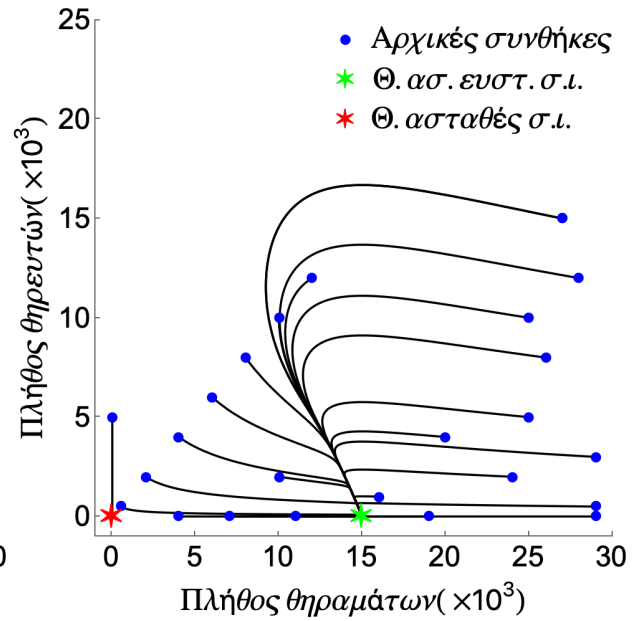
(δ) Η φορά των διανυσμάτων στο εσωτερικό κάθε περιοχής I, II και III προκύπτει από τη φορά της συνισταμένης των διανυσμάτων στο σύνορό της.

Σχήμα 5.3: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(PP_{v2.1})$, όταν $k < \frac{\gamma}{\delta}$.

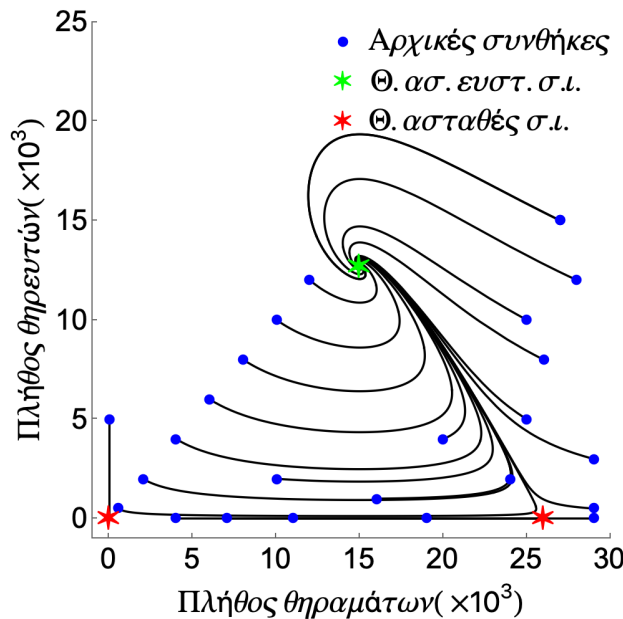
Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4, προς επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας.



(α) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10 \cdot 10^3$ άτομα = $k < \frac{\gamma}{\delta} = 15 \cdot 10^3$ άτομα.



(β) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $k = 15 \cdot 10^3$ άτομα = $\frac{\gamma}{\delta}$.



(γ) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $26 \cdot 10^3$ άτομα = $k > \frac{\gamma}{\delta} = 15 \cdot 10^3$ άτομα.

Σχήμα 5.4: Αριθμητική επίλυση του ($PP_{v2.1}$) για θετικούς χρόνους για διάφορες τιμές του k , με $\alpha = 30$ [χρόνος] $^{-1}$, $\beta = 1$ (10^3 άτομα) $^{-1}$ · [χρόνος] $^{-1}$, $\gamma = 15$ [χρόνος] $^{-1}$ και $\delta = 1$ (10^3 άτομα) $^{-1}$ · [χρόνος] $^{-1}$.

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Εξάρτηση από παράμετρο. Ένα πρόβλημα μεγάλου ενδιαφέροντος είναι η εξάρτηση των λύσεων ενός (ΠΑΤ) από παράμετρο.

Θεώρημα 5.5 (συνεχής/διαφορίσιμη εξάρτηση των λύσεων από παράμετρο). Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^n$, παράμετρος $\mu \in U$ με $\mu^* \in U$ και (ΠΑΤ) όπου $f(\cdot, \cdot) = f(\cdot, \cdot, \mu)$. Αν η f είναι C^k , με $k \in \overline{\mathbb{N}}$, σε μια περιοχή του (t_0, y_0, μ^*) , τότε μια ενδεχόμενη λύση, $y(\cdot, \cdot) = y(\cdot, \cdot, \mu)$, θα είναι C^{k-1} σε μια περιοχή του (t_0, y_0, μ^*) .

Σημειώνουμε ότι η εξάρτηση των λύσεων από την αρχική συνθήκη ή την f από τη μία, και η εξάρτηση τους από παράμετρο από την άλλη, είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, με το ένα αποτέλεσμα να μας οδηγεί στο άλλο και αντίστροφα.

Επίσης, το Θεώρημα 5.5 δίνει μια πολύ αποτελεσματική μέθοδο προσεγγιστικής επίλυσης εξισώσεων που είναι “κοντινές” σε “μη διαταραγμένες” εξισώσεις των οποίων οι λύσεις είναι γνωστές. Αρκεί να αναπαρασταθεί η λύση της διαταραγμένης εξίσωσης στη μορφή σειράς Taylor σε δυνάμεις της διαταραχής, να αντικατασταθεί αυτή η σειρά στη διαταραγμένη εξίσωση και να εξισωθούν οι συντελεστές των ίδιων δυνάμεων της διαταραχής. Ο πρώτος (ανεξάρτητος της διαταραχής) όρος της σειράς που αναπαριστά τη λύση θα είναι η γνωστή λύση της μη διαταραγμένης εξίσωσης. Επαναληπτικά επιλύσιμες εξισώσεις θα δώσουν τους ακόλουθους όρους της σειράς. Η πιο σημαντική απ’ αυτές, η εξίσωση των όρων πρώτου βαθμού ως προς τη διαταραχή, είναι μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση. Αυτή η διαδικασία χρησιμοποιείται σε ευρύτατο φάσμα εφαρμογών των διαφορικών εξισώσεων και εμπίπτει στις λεγόμενες *Μεθόδους Διαταραχών*.

Διακλάδωση από σημείο ισορροπίας (ή αλλιώς, τοπική διακλάδωση). Με τον όρο διακλάδωση (*bifurcation*) εννοούμε κάθε αλλαγή στην ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων ενός (ΠΑΤ), που η f εξαρτάται από μια παράμετρο, καθώς η παράμετρος αυτή αλλάζει τιμές. Οι διακλαδώσεις από σημείο ισορροπίας (σ.ι.) έχουν τοπικό χαρακτήρα, σε αντίθεση από τις διακλαδώσεις από κλειστή τροχιά που έχουν ολικό χαρακτήρα (και μπορεί να μη σχετίζονται καν με την ίδια τη λέξη διακλάδωση).

Το γενικό πλαίσιο της τοπικής θεωρίας διακλαδώσεων είναι αυτό μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας αυτόνομων (ΠΑΤ), δηλ. η f δεν εξαρτάται απευθείας από τον χρόνο, t , παρά μόνο μέσω της λύσης, y , και επίσης εξαρτάται από μια παράμετρο $\mu \in U^*$ για ανοικτό $U^* \subseteq \mathbb{R}$, τέτοιας ώστε για κάποια συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου, $\mu = \mu^*$, το (ΠΑΤ) έχει ένα μεμονωμένο μη υπερβολικό σ.ι.. Το κεντρικό φαινόμενο της θεωρίας αυτής, το οποίο και τη χαρακτηρίζει, είναι ότι υπάρχουν επιπρόσθετες, συνήθως μη εμφανείς, λύσεις του (ΠΑΤ) κοντά στο μη υπερβολικό αυτό σ.ι.. Τις διακλαδώσεις αυτές τις διαχωρίζουμε σε

- διακλαδώσεις σταθερής κατάστασης, όπου οι επιπρόσθετες λύσεις είναι σταθερές, και σε
- διακλαδώσεις Hopf, όπου οι επιπρόσθετες λύσεις είναι περιοδικές.

Η πορεία της ανάλυσης μιας τοπικής διακλάδωσης έχει ως εξής:

1. Την αναγνωρίζουμε και τη χαρακτηρίζουμε ως σταθερής κατάστασης, ή ως Hopf.
2. Σε περίπτωση που κλάδοι επιπρόσθετων λύσεων εμφανίζονται για $\mu < \mu^*$ ($\mu > \mu^*$) από ένα κλάδο που υπάρχει για τουλάχιστον $\mu \geq \mu^*$ ($\mu \leq \mu^*$), τότε τη χαρακτηρίζουμε ως υποκρίσιμη (*subcritical*) (υπερκρίσιμη (*supercritical*)). Αν είναι είτε υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη ταυτόχρονα, είτε τίποτα από δύο, τότε αποφεύγουμε αυτούς τους χαρακτηρισμούς.
3. Κατασκευάζουμε, έστω τοπικά, την “υπογραφή” της, δηλ. το αντίστοιχο διάγραμμα της, ως εξής:
 - i. Αν πρόκειται για διακλάδωση σταθερής κατάστασης, τότε το διάγραμμα είναι διδιάστατο.
 - ii. Αν πρόκειται για διακλάδωση Hopf, τότε το διάγραμμα είναι τριδιάστατο.

Και στις δύο περιπτώσεις στον οριζόντιο άξονα θα απεικονίζονται οι τιμές του μ γύρω από το μ^* .

4. Ταύτιση τοπικά του διαγράμματός της με το διάγραμμα μιας τυποποιημένης διακλάδωσης.

Σημειώνουμε ότι το θεμελιώδες εργαλείο θεωρητική μελέτης μιας τοπικής διακλάδωσης αποτελεί το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Διακλάδωση σταθερής κατάστασης. Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) με $f(\cdot) = f(\cdot, \mu) \in C^3(U \times U^*; \mathbb{R}^n)$, όπου $U \subseteq S_2$ και $U^* \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτά. Τα σ.ι. της θα τα συμβολίζουμε, ως συνήθως, με y^* . Έστω, επίσης, ότι για κάθε $\mu \in U^*$ το πρόβλημα έχει ένα μεμονωμένο σ.ι. (το οποίο θα εξαρτάται ομαλά από την μ). Θα το συμβολίζουμε με $y^* = y^\dagger = y^\dagger(\mu)$ για να το ξεχωρίζουμε από τα άλλα σ.ι. που θα εμφανιστούν στη διακλάδωση.

Ξεκινάμε με το επόμενο βασικό αποτέλεσμα, η απόδειξη του οποίου βασίζεται στο θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Θεώρημα 5.6. Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη:

Ο πίνακας Jacobi (με διαφορίσεις ως προς y , χωρίς διαφορίσεις ως προς μ), για $\mu = \mu^*, J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)$, έχει μία απλή μηδενική ιδιοτιμή και τις υπόλοιπες $n - 1$ μη μηδενικές, δηλ.

(Σ₁)

$$\lambda_1 = 0, \text{ και } \lambda_i \neq 0, \forall i \neq 1.$$

Τότε υπάρχει μια μοναδική ομαλή πραγματική ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_1(\mu)$ του $J(y^\dagger(\mu), \mu)$ σε μια περιοχή του μ^* , τέτοια ώστε $\lambda_1(\mu^*) = 0$. Δηλ., μπορούμε να δούμε τη μηδενική ιδιοτιμή ως μια ομαλή πραγματική συνάρτηση ως προς μ γύρω από το $\mu = \mu^*$.

Η συνθήκη του Θεωρήματος 5.6 αποτελεί την αναγκαία, αλλά όχι ικανή, συνθήκη για την ύπαρξη διακλάδωσης σταθερής κατάστασης από το σ.ι. $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$. Σημειώνουμε ότι για $n = 1$ η παραπάνω συνθήκη είναι απλά η

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = 0.$$

Η θεωρητική προσέγγιση των διακλαδώσεων σταθερής κατάστασης έχει ως εξής:

1. $n = 1$.

i. Διαχωρισμός διάφορων περιπτώσεων μονοπαραμετρικών οικογενειών (ΠΑΤ) όπου η παραπάνω αναγκαία συνθήκη ικανοποιείται, ανάλογα με επιπλέον συνθήκες που αφορούν τον μηδενισμό ή όχι κάποιων μερικών παραγώγων της f στο $(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)$.

Οι επιπλέον συνθήκες που αφορούν μερικές παραγώγους αμιγώς ως προς y λέγονται *συνθήκες μη εκφυλισμού*, ενώ οι συνθήκες που μπορούν να διατυπωθούν ως προς τις μερικές παραγώγους και ως προς μ λέγονται *συνθήκες εγκαρσιότητας*.

ii. Η ανάλυση κάθε μιας από τις παραπάνω περιπτώσεις θα μας δώσει μια αντιστοιχία αυτής με μια άλλη περίπτωση μιας τυποποιημένης μονοπαραμετρικής οικογένειας αυτόνομων (ΠΑΤ) με γνωστή διακλάδωση, όπου τώρα η f είναι ένα πολυώνυμο ως προς y που έχει συγκεκριμένες συναρτήσεις του μ για συντελεστές και σταθερά.

Τα πολυώνυμα αυτά λέγονται *κανονικές μορφές Poincaré*.

iii. Η αντιστοιχία αυτή της αρχικής μονοπαραμετρικής οικογένειας προβλημάτων με μια τυποποιημένη σημαίνει θετική απάντηση στο ερώτημα “ύπαρξη ή όχι διακλάδωσης” για την αρχική, καθώς επίσης ίδια συμπεριφορά της διακλάδωσης της αρχικής με αυτή της τυποποιημένης σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$.

2. Αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$.

i. Υποβιβασμός κάθε μονοπαραμετρικής οικογένειας αυτόνομων (ΠΑΤ) που ικανοποιεί την παραπάνω αναγκαία συνθήκη, σε μια μονοπαραμετρική οικογένεια μονοδιάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ).

Ο υποβιβασμός αυτός λέγεται *απλοποίηση Lyapunov-Schmidt*.

- ii. Η αντιστοιχία αυτή της αρχικής μονοπαραμετρικής οικογένειας προβλημάτων με την υποβιβασμένη της σημαίνει απάντηση στο ερώτημα “ύπαρξη ή όχι διακλάδωσης” για την αρχική, καθώς επίσης, σε περίπτωση ύπαρξης, ίδια συμπεριφορά της διακλάδωσης της αρχικής με την αυτή της υποβιβασμένης σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$. Μάλιστα, σε περίπτωση ύπαρξης, το διάγραμμα διακλάδωσης της υποβιβασμένης λέγεται διάγραμμα διακλάδωσης και της αρχικής.

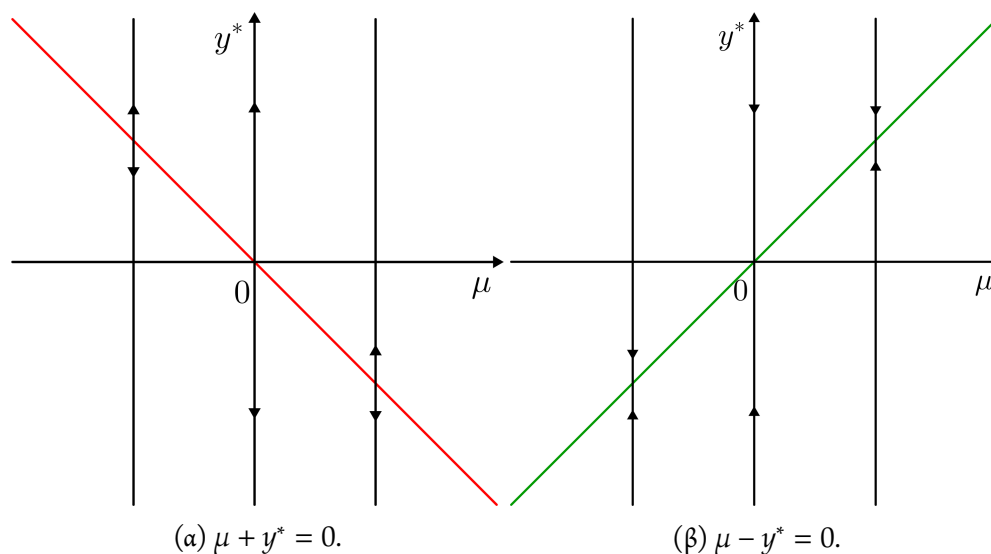
Οπότε, η τοπική συμπεριφορά της ενδεχόμενης διακλάδωσης μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας αυθαίρετης διάστασης αυτόνομων (ΠΑΤ) (που ικανοποιεί την παραπάνω αναγκαία συνθήκη) είναι ίδια με τη συμπεριφορά της γνωστής διακλάδωσης κάποιας τυποποιημένης μονοπαραμετρικής οικογένειας μονοδιάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ). Αφού και το διάγραμμα μιας διακλάδωσης αποτελεί την “υπογραφή” της, σε περίπτωση ύπαρξης διακλάδωσης λοιπόν, η μελέτη της ολοκληρώνεται με την τοπική ταύτιση του διαγράμματος της με το αντίστοιχο μιας από τις τυποποιημένες.

Μέρος του καταλόγου των τυποποιημένων μονοπαραμετρικών οικογενειών μονοδιάστατων προβλημάτων με γνωστές διακλαδώσεις είναι το εξής:

ΜΕΡΟΣ ΚΑΤΑΛΟΓΟΥ ΓΝΩΣΤΩΝ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

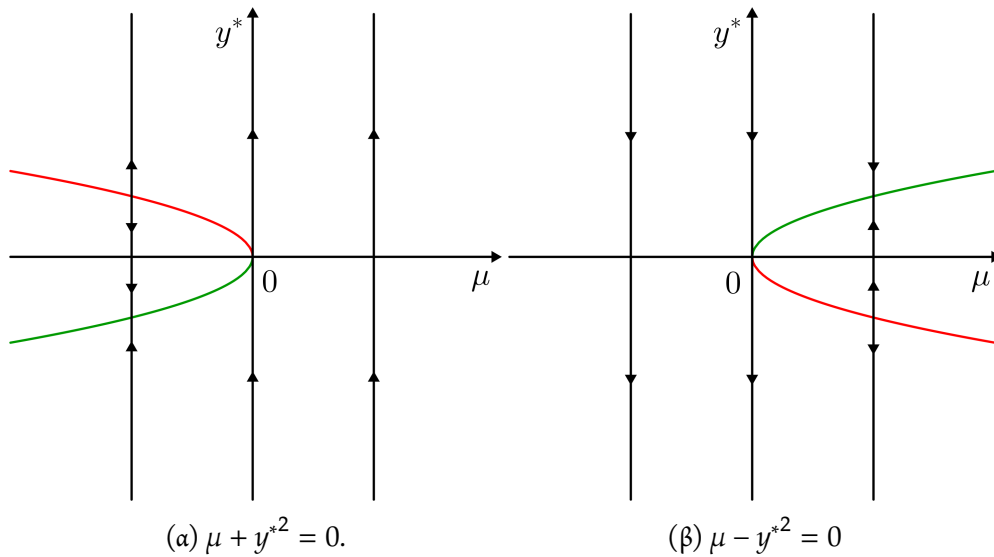
Με πράσινο χρωματίζονται οι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθείς κλάδοι ή τμήματα αυτών, ενώ με κόκκινο οι θετικά ασταθείς κλάδοι ή τμήματα αυτών, του αντίστοιχου διαγράμματος διακλάδωσης.

- (για λόγους σύγκρισης) $f(y, \mu) = \mu + y$ \diamond ΟΧΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ (βλ. Σχήμα 5.5α).
- (για λόγους σύγκρισης) $f(y, \mu) = \mu - y$ \diamond ΟΧΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ (βλ. Σχήμα 5.5β).



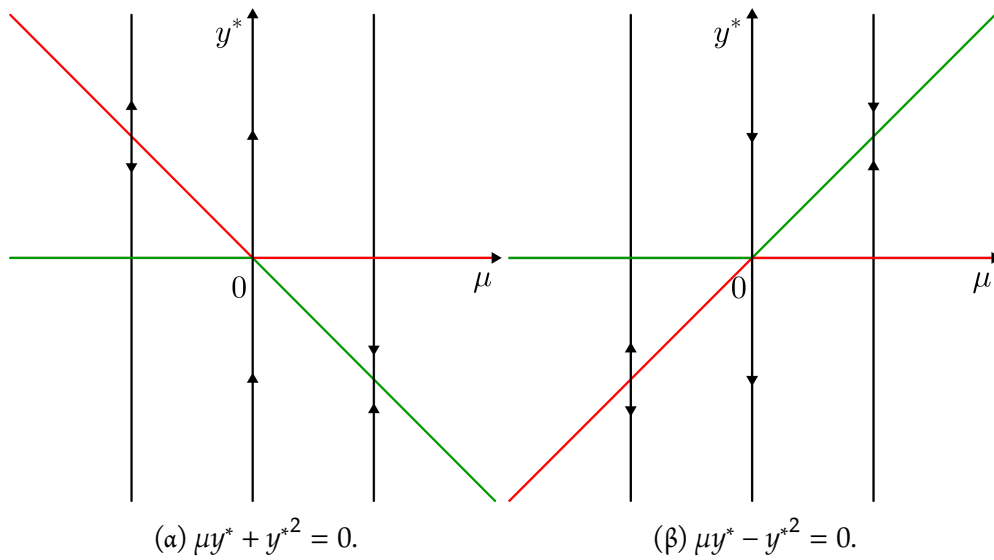
Σχήμα 5.5: Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu \pm y^* = 0$.

- $f(y, \mu) = \mu + y^2$ \diamond ΠΤΥΧΗ (FOLD/SADDLE-NODE) (βλ. Σχήμα 5.6α).
- $f(y, \mu) = \mu - y^2$ \diamond ΠΤΥΧΗ (βλ. Σχήμα 5.6β).



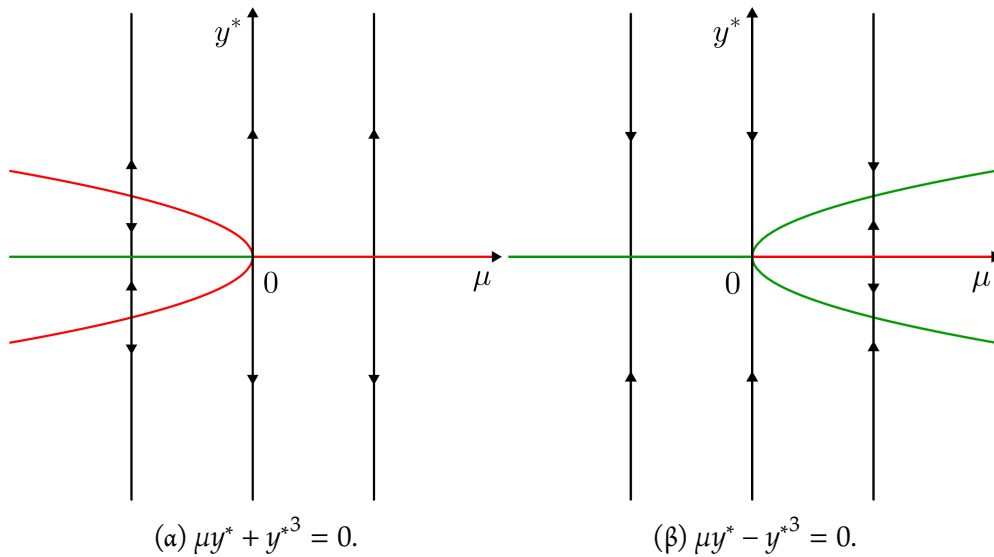
Σχήμα 5.6: Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu \pm y^{*2} = 0.$

- $f(y, \mu) = \mu y + y^2$ \diamond ΔΙΑΚΡΙΣΙΜΗ (TRANSCRITICAL) (βλ. Σχήμα 5.7α).
- $f(y, \mu) = \mu y - y^2$ \diamond ΔΙΑΚΡΙΣΙΜΗ (βλ. Σχήμα 5.7β).



Σχήμα 5.7: Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y^* \pm y^{*2} = 0.$

- $f(y, \mu) = \mu y + y^3$ \diamond ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ ΔΙΚΡΑΝΙΚΗ (SUBCRITICAL PITCHFORK) (βλ. Σχήμα 5.8α).
- $f(y, \mu) = \mu y - y^3$ \diamond ΥΠΕΡΚΡΙΣΙΜΗ ΔΙΚΡΑΝΙΚΗ (SUPERCRITICAL PITCHFORK) (βλ. Σχήμα 5.8β).

Σχήμα 5.8: Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y^* \pm y^{*3} = 0$.

Στα παραπάνω παραδείγματα συμμετέχουν αυστηρά δύο κλάδοι (ομαλές καμπύλες) στη διακλάδωση, όπου ο ένας από αυτούς αντιστοιχεί στο σ.ι. $y^\dagger(\mu)$, οι οποίοι τέμνονται μόνο στο σημείο διακλάδωσης $(\mu^*, y^\dagger(\mu^*)) = 0 \in \mathbb{R}^2$. Κάθε σ.ι. γύρω από το σημείο διακλάδωσης βρίσκεται αποκλειστικά πάνω σε έναν από τους δύο κλάδους.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι η διακλάδωση πτυχή δεν είναι ούτε υποκρίσιμη ούτε υπερκρίσιμη, ενώ η διακρίσιμη διακλάδωση είναι και υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη.

Μέρος του αποτελέσματος που μας αντιστοιχίζει κάθε μονοπαραμετρική οικογένεια μονοδιάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ) που παρουσιάζει διακλάδωση σταθερής κατάστασης, με μια από τις τυποποιημένες μονοπαραμετρικές οικογένειες μονοδιάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ) με γνωστή διακλάδωση, είναι το παρακάτω.

Θεώρημα 5.7. Έστω $n = 1$ και μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη διακλάδωσης σταθερής κατάστασης από το $y^\dagger(\mu)$ για $\mu = \mu^*$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = 0. \quad (\Sigma_1)$$

i. Αν

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) \neq 0, \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) \neq 0, \quad (\Sigma_{2i})$$

τότε υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης από το σ.ι. $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$, που αποτελείται από δύο κλάδους (ο ένας εκ των οποίων αντιστοιχεί στο $y^\dagger(\mu)$).

Μάλιστα, υπάρχουν (αντιστρέψιμες) αλλαγές εξαρτημένης μεταβλητής και παραμέτρου $y \mapsto x$ και $\mu \mapsto \kappa$, αντίστοιχα, και αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής $t \mapsto \tau$ που διατηρεί τη φορά, οι οποίες μετασχηματίζουν τοπικά την εξίσωση του (ΠΑΤ) στη μορφή

$$\frac{dx}{d\tau} = \kappa + sx^2 + o(x^2), \text{ καθώς } x \rightarrow 0, \text{ όπου } s = \text{sgn}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)\right) = \pm 1.$$

ii. Αν

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial y}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) \neq 0, \quad (\Sigma_{2ii})$$

τότε υπάρχει διακλάδωσης σταθερής κατάστασης από το σ.ι. $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$, που αποτελείται από δύο κλάδους.

(α) Αν

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = 0, \text{ και } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) \neq 0, \quad (\Sigma_{3\alpha'})$$

τότε υπάρχουν αλλαγές εξαρτημένης μεταβλητής και παραμέτρου $y \mapsto x$ και $\mu \mapsto \kappa$, αντίστοιχα, και αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής $t \mapsto \tau$ που διατηρεί τη φορά, οι οποίες μετασχηματίζουν τοπικά την εξίσωση του (ΠΑΤ) στη μορφή

$$\frac{dx}{d\tau} = \kappa x + sx^2 + o(x^2) \text{ καθώς } x \rightarrow 0, \text{ όπου } s = \text{sgn}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)\right) = \pm 1.$$

(β) Αν η f είναι περιττή ως προς y και

$$\frac{\partial f}{\partial \mu}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = 0, \text{ και } \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) \neq 0, \quad (\Sigma_{3\beta'})$$

τότε υπάρχουν αλλαγές εξαρτημένης μεταβλητής και παραμέτρου $y \mapsto x$ και $\mu \mapsto \kappa$, αντίστοιχα, και αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής $t \mapsto \tau$ που διατηρεί τη φορά, οι οποίες μετασχηματίζουν τοπικά την εξίσωση του (ΠΑΤ) στη μορφή

$$\frac{dx}{d\tau} = \kappa x + sx^3 + o(x^3) \text{ καθώς } x \rightarrow 0, \text{ όπου } s = \text{sgn}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)\right) = \pm 1.$$

Πρακτικά, το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι, αν ικανοποιούνται οι συνθήκες, τότε όχι μόνο θα υπάρχει διακλάδωση για το πρόβλημά μας, αλλά μάλιστα στην περίπτωση i. το διάγραμμά της θα έχει, σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$, τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με αυτό της διακλάδωσης πτυχής, στην ii.(α') με αυτό της διακρίσιμης, και στην ii.(β') με αυτό της δικρανικής.

Τώρα, περνάμε στη γενική περίπτωση n διαστάσεων και παρουσιάζουμε την απλοποίηση Lyapunov-Schmidt, η οποία είναι το εφαλτήριο για τη μελέτη ενδεχόμενης διακλάδωσης μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας n -διάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ), που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης σταθερής κατάστασης.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ LYAPUNOV-SCHMIDT

Έστω μια μονοπαραμετρική οικογένεια n -διάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω.

Ο αλγόριθμος υποβιβασμού διάστασης έχει ως εξής:

1. Μετασχηματισμός της μονοπαραμετρικής οικογένειας των εξισώσεων των (ΠΑΤ), μέσω κατάλληλης αλλαγής μεταβλητών, έτσι ώστε πλέον ο πίνακας Jacobi να βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη, αξιοποιησιμη μορφή, και συγκεκριμένα:

i. Διαγωνιοποίηση του $J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)$. Συγκεκριμένα εύρεση των n ιδιοτιμών λ_i (μόνο μια εκ των οποίων, η λ_1 , θα είναι μηδενική), των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων u_i , και του (αντιστρέψιμου) πίνακα ομοιότητας P και του αντίστροφου του ώστε

$$J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \neq 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \neq 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

και σε αυτή την περίπτωση ο P θα έχει ως στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, δηλ.

$$P := (u_1 \ \dots \ u_n).$$

ii. Αλλαγή μεταβλητών

$$y^\dagger(\mu) + Px := y \mapsto x := P^{-1}(y - y^\dagger(\mu)).$$

iii. Αναγνώριση της συνάρτησης F με τύπο

$$F(x, \mu) := P^{-1}f(Px + y^\dagger(\mu), \mu),$$

για τον πίνακα Jacobi της οποίας ισχύει

$$J(0, \mu^*) = \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \neq 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \neq 0 \end{pmatrix}$$

(από τον κανόνα αλυσίδας).

2. Επίλυση του $(n - 1) \times (n + 1)$ (μη γραμμικού) συστήματος

$$\begin{aligned} F_2(x, \mu) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x, \mu) &= 0, \end{aligned}$$

για την εύρεση μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων της μορφής

$$x_i = x_i(x_1, \mu), \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$$

(η επίλυση αυτή εξασφαλίζεται από θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης).

3. Αναγνώριση της συνάρτησης g με τύπο

$$g(x_1, \mu) := F_1(x_1, x_2(x_1, \mu), \dots, x_n(x_1, \mu)),$$

για την οποία ισχύει ότι

$$g(0, \mu^*) = 0 \text{ και } \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, \mu^*) = \lambda_1 = 0,$$

καθώς και της υποβιβασμένης μονοπαραμετρικής οικογένειας μονοδιάστατων αυτόνομων ΠΑΤ ως

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t, \mu) = g(x_1(t, \mu), \mu) \\ x_1(t_0, \mu) = q_1 \cdot (y_0(\mu) - y^\dagger(\mu)), \end{cases}$$

όπου q_1 είναι η πρώτη γραμμή του P^{-1} .

Τονίζουμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος υποβιβασμού διάστασης είναι εφαρμόσιμος σε όλες τις μονοπαραμετρικές οικογένειες αυτόνομων (ΠΑΤ) που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης σταθερής κατάστασης, ανεξάρτητα με τον αν υπάρχει τελικά διακλάδωση ή όχι.

Άμεσα από τον αλγόριθμο, συμπεραίνουμε ότι τα σ.ι. της υποβιβασμένης μονοπαραμετρικής οικογένειας μονοδιάστατων αυτόνομων ΠΑΤ είναι τα $x_1^* = q_1 \cdot (y^* - y^\dagger)$.

Επίσης, σε περίπτωση ύπαρξης διακλάδωσης σταθερής κατάστασης, το διάγραμμα της θα έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, στον κατακόρυφο άξονα θα υπάρχουν οι τιμές του x_1^* , ενώ στον οριζόντιο εκείνες του μ .
- Ο οριζόντιος άξονας, $x_1^* = 0$, θα είναι μέρος της διακλάδωσης (δηλ. η διακλάδωση θα εμφανίζεται πάνω του), καθώς το 0 είναι σ.ι. για την υποβιβασμένη οικογένεια μονοδιάστατων προβλημάτων, το οποίο αντιστοιχεί στο σ.ι. $y^* = y^\dagger$ της αρχικής.
- Ο άλλος κλάδος της διακλάδωσης, δηλ. αυτός που αντιστοιχεί σε σ.ι. $y^* \neq y^\dagger$, θα είναι η καμπύλη που γράφεται ως ένωση των καμπυλών $x_1^* = q_1 \cdot (y^*(\mu) - y^\dagger(\mu))$, για κάθε τέτοιο y^* .

Έτσι, η αξιοποίηση του αλγόριθμου αλλάζει με βάση το αν γνωρίζουμε ή όχι όλα τα σ.ι. σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$, ως εξής:

1. Αν γνωρίζουμε όλα τα σ.ι., $y^* = y^*(\mu)$, σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$, και όχι μόνο το $y^* = y^\dagger(\mu)$, τότε ο αλγόριθμος αξιοποιείται με έναν απλό κατασκευαστικό τρόπο:
 - i. Κατασκευή ενός διαγράμματος όπου στον κατακόρυφο άξονα υπάρχουν οι τιμές του x_1^* και στον οριζόντιο αυτές του μ .
 - ii. Αποτύπωση των γραφημάτων όλων των συναρτήσεων $q_1 \cdot (y^*(\mu) - y^\dagger(\mu))$ στο διάγραμμα.
 - iii. Αν κάποια από τα γραφήματα τέμνονται πάνω στον οριζόντιο άξονα, τότε υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης και το διάγραμμά της είναι η ίδια η κατασκευή χωρίς τα μη τεμνόμενα επί του οριζόντιου άξονα γραφήματα.
2. Αν δεν γνωρίζουμε όλα τα σ.ι., $y^* = y^*(\mu)$, σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$, αλλά γνωρίζουμε τουλάχιστον το $y^* = y^\dagger(\mu)$, τότε απαντάμε σχετικά με την ύπαρξη διακλάδωσης σταθερής κατάστασης, αλλά και τον τύπο της, μέσω της εφαρμογής του **Θεωρήματος 5.7** για την υποβιβασμένη μονοπαραμετρική οικογένεια μονοδιάστατων προβλημάτων.

Αν και με την παραπάνω διαπίστωση έχει τυπικά ολοκληρωθεί ο θεωρητικός κύκλος τοπικής μελέτης μιας διακλάδωσης σταθερής κατάστασης, ωστόσο υπάρχουν και κάποια επιπλέον, χρήσιμα, αποτελέσματα που αφορούν την υποβιβασμένη μονοπαραμετρική οικογένεια μονοδιάστατων προβλημάτων, όπως το επόμενο.

Θεώρημα 5.8. Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιείται μια ελαφρώς ισχυρότερη εκδοχή της αναγκαίας συνθήκης ύπαρξης διακλάδωσης σταθερής κατάστασης ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Ο } J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) \text{ έχει μία απλή μηδενική ιδιοτιμή και τις υπόλοιπες } n - 1 \text{ με αρνητικά πραγματικά} \\ \text{μέρη, δηλ.} \end{aligned} \tag{\Sigma_1'} \quad \lambda_1 = 0, \text{ και } \text{Re}\lambda_i < 0, \forall i \neq 1.$$

Έστω, επιπλέον, ότι υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης από το $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$, και ένα σημείο ισορροπίας $y^* = y^*(\bar{\mu})$ για κάποιο $\bar{\mu}$ εντός περιοχής του $\mu = \mu^*$. Αν

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(q_1 \cdot (y^*(\bar{\mu}) - y^\dagger(\bar{\mu})), \bar{\mu}) < 0,$$

τότε το $y^*(\bar{\mu})$ είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές και αρνητικά ασταθές, ενώ αν

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}(q_1 \cdot (y^*(\bar{\mu}) - y^\dagger(\bar{\mu})), \bar{\mu}) > 0,$$

τότε το $y^*(\bar{\mu})$ είναι θετικά ασταθές και αρνητικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Η αξία του παραπάνω αποτελέσματος φαίνεται όταν χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με κάποιο αποτέλεσμα ύπαρξης διακλάδωσης σταθερής κατάστασης όπως το παρακάτω, το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο παρά η γενίκευση του [σημείου ii. του Θεωρήματος 5.7](#) στις n διαστάσεις.

Θεώρημα 5.9. Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ), όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης σταθερής κατάστασης ως εξής:

$$O J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) \text{ έχει μία απλή μηδενική ιδιοτιμή και τις υπόλοιπες } n - 1 \text{ μη μηδενικές, δηλ.} \quad (\Sigma_1)$$

$$\lambda_1 = 0, \text{ και } \lambda_i \neq 0, \forall i \neq 1.$$

$$\frac{d\lambda_1}{d\mu}(\mu^*) \neq 0. \quad (\Sigma_{2ii})$$

Τότε

1. ισχύει ότι

$$\frac{d \det J(y^\dagger(\cdot), \cdot)}{d\mu}(\mu^*) \neq 0,$$

και

2. υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης από το $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$, που αποτελείται από δύο κλάδους.

Στα περισσότερα συγγράμματα ΣΔΕ που περιλαμβάνονται στη βιβλιογραφία του [Κεφαλαίου 1](#) μπορεί να βρεθεί μια συνοπτική, μη αυστηρή, εισαγωγή στην έννοια της διακλάδωσης. Για συστηματική μελέτη της σχετικής θεωρίας, οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται στα συγγράμματα [\[1\]](#), [\[2\]](#), [\[3\]](#), [\[4\]](#), [\[5\]](#) και ενδεχομένως στο [\[6\]](#). Η ανάλυση διακλάδωσης, για ένα ενδιαφέρον μοντέλο ξενιστή-παρασιτοειδούς με συναρτησιακή απόκριση Holling τύπου II, μπορεί να βρεθεί στο [\[7\]](#).

Βιβλιογραφία

- [1] J. Guckenheimer και P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [2] J. K. Hale και H. Koçak. *Dynamics and Bifurcations*. Springer, corrected edition, 1996.
- [3] G. Iooss. *Bifurcation of Maps and Applications*. North-Holland, 1979.
- [4] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 3rd edition, 2004.
- [5] J. E. Marsden και M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. Springer, 1976.
- [6] D. G. Schaeffer και J. W. Cain. *Ordinary Differential Equations - Basics and Beyond*. Springer, 2016.
- [7] C. Xiang, J. Huang, S. Ruan και D. Xiao. “Bifurcation analysis in a host-generalist parasitoid model with Holling II functional response”. Στο: *Journal of Differential Equations* 268 (2020), σσ. 4618–4662.

■ ΟΙΚΟΛΟΓΙΑ V

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Δυναμικά μοντέλα πολλών πληθυσμών (συνέχεια): Λογιστική παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra με επίδραση Allee

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

(α) Οριακός κύκλος

(β) Διακλάδωση από σημείο ισορροπίας (συνέχεια): Διακλάδωση Hopf

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 1-5](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Δεύτερη παραλλαγή του βασικού μοντέλου Lotka-Volterra. Αν αντί του συστήματος (4.1), και συγκεκριμένα της (4.1α), θεωρήσουμε ότι σε απουσία θηρευτών η δυναμική του πληθυσμού των θηραμάτων περιγράφεται από τη λογιστική εξίσωση με επίδραση Allee, τότε παίρνουμε το

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x \left(1 - \frac{1}{k_1} x\right) \left(1 - \frac{1}{k_2} x\right) - \beta xy \quad (6.1\alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy, \quad (6.1\beta)$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές και $k_1 < k_2$.

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Το ΠΑΤ για το παραπάνω μοντέλο είναι το εξής:

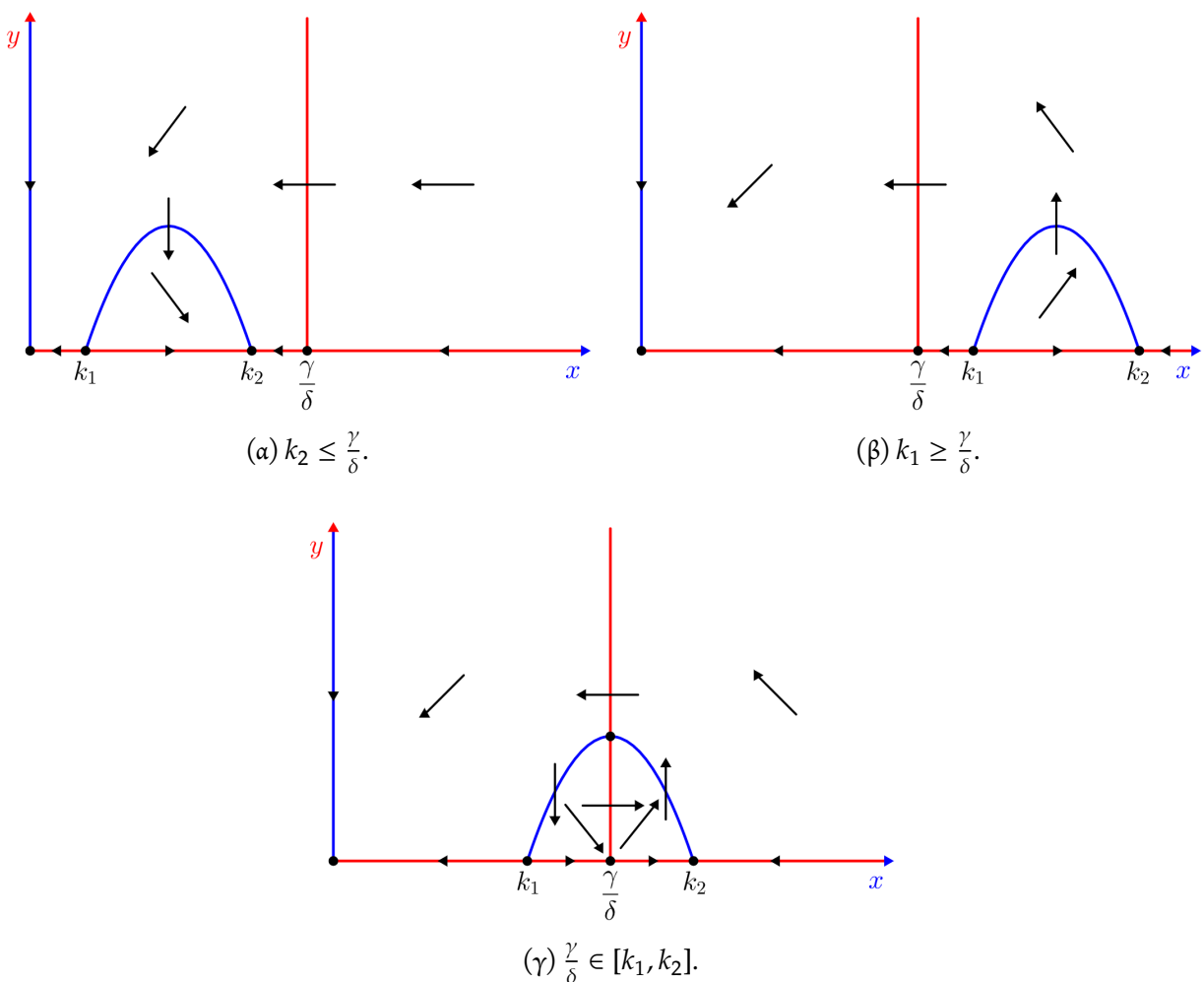
Με δεδομένα $x_0, y_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(x, y) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2$, τέτοια ώστε η (x, y) να ικανοποιεί τόσο το (6.1) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ (PP_{v2.2}) όσο και την αρχική συνθήκη $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$.

Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Ακριβώς με τα ίδια επιχειρήματα όπως και για το (PP_{v2.1}) (βλ. Άσκηση 6.1), παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα, μεγιστικής, θετικά ολικής και αρνητικά εκρηγνυόμενης λύσης του (PP_{v2.2}),

$$(x, y) : (-\varepsilon_1, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1 < \infty.$$

Άσκηση 6.1. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της βασικής (Φάση I) μελέτης του (PP_{v2.2}).

Πεδίο διευθύνσεων. Ξεκινάμε την ποιοτική ανάλυση του (PP_{v2.2}) με την απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.1, κάτι που μας δίνει πληροφορίες, γλαφυρά και περιεκτικά, για την ολική εικόνα του χώρου φάσης.



Σχήμα 6.1: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (PP_{v2.2}). Με μπλε οι x -μηδενοκλινείς καμπύλες και με κόκκινο οι y -μηδενοκλινείς.

Από το Σχήμα 6.1, αρχικά παρατηρούμε ότι ενδεχομένως να υπάρχουν τέσσερα σ.ι., δηλ. τα

$$(x^*, y^*) = \begin{cases} (0, 0), \\ (k_1, 0), \\ (k_2, 0), \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)\right), \quad \text{αν } \frac{\gamma}{\delta} \in [k_1, k_2]. \end{cases}$$

Το σ.ι. $\left(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)\right)$, που υπάρχει όταν $\frac{\gamma}{\delta} \in (k_1, k_2)$, συμπίπτει με το $(k_1, 0)$ και το $(k_2, 0)$, όταν $k_1 = \frac{\gamma}{\delta}$ και $k_2 = \frac{\gamma}{\delta}$, αντίστοιχα. Μάλιστα, η τεταγμένη του λαμβάνει ολικό μέγιστο όταν $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι

- το $(0, 0)$ είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αλλά όχι ολικά,
- το $(k_1, 0)$ είναι θετικά ασταθές, και
- το $(k_2, 0)$ είναι

$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αλλά όχι ολικά,} & \text{όταν } k_2 < \frac{\gamma}{\delta} \\ \text{θετικά ασταθές,} & \text{όταν } k_2 > \frac{\gamma}{\delta}, \end{cases}$$

ενώ δεν μπορούμε να βγάλουμε εύκολα συμπέρασμα για τις άλλες περιπτώσεις των σ.ι.. Οπότε καταφεύγουμε στην ανάλυση ευστάθειας μέσω γραμμικοποίησης.

Άσκηση 6.2. Δώστε τις λεπτομέρειες κατασκευής του Σχήματος 6.1. Ποια είναι τα άμεσα βιολογικά συμπεράσματα που εξάγετε;

Γραμμική ανάλυση ευστάθειας. Υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi για το σύστημά μας ως

$$J(w, z) = \begin{pmatrix} -\alpha \left(\left(1 - \frac{1}{k_1} w\right) \left(1 - \frac{1}{k_2} w\right) - \frac{2}{k_1 k_2} w \left(\frac{k_1+k_2}{2} - w\right) \right) - \beta z & -\beta w \\ \delta z & -\gamma + \delta w \end{pmatrix},$$

δηλ.

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$J(k_1, 0) = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) & -\beta k_1 \\ 0 & -\gamma + \delta k_1 \end{pmatrix}, \quad J(k_2, 0) = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) & -\beta k_2 \\ 0 & -\gamma + \delta k_2 \end{pmatrix}$$

και

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{2\alpha\gamma}{\delta k_1 k_2} \left(\frac{k_1+k_2}{2} - \frac{\gamma}{\delta}\right) & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ -\frac{\alpha\delta}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Άμεσα, από γραμμικοποίηση, έχουμε τα εξής:

- Το $(0, 0)$ επιβεβαιώνουμε ότι είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αφού οι ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα Jacobi είναι οι $\lambda_1 = -\alpha < 0$ και $\lambda_2 = -\gamma < 0$.
- Το $(k_1, 0)$ επιβεβαιώνουμε ότι είναι θετικά ασταθές, αφού οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = \alpha \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) > 0$ και $\lambda_2 = -\gamma + \delta k_1$.

- Σχετικά με το $(k_2, 0)$, οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = \alpha \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) < 0$ και $\lambda_2 = -\gamma + \delta k_2$, οπότε το παραπάνω σ.ι. επιβεβαιώνουμε ότι είναι

$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{όταν } k_2 < \frac{\gamma}{\delta} \\ \text{θετικά ασταθές,} & \text{όταν } k_2 > \frac{\gamma}{\delta}. \end{cases}$$

- Σχετικά με το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)\right)$, οι ιδιοτιμές δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm \left(\text{tr}^2 - 4 \det \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

όπου

$$\text{tr} = \frac{2\alpha\gamma}{\delta k_1 k_2} \left(\frac{k_1 + k_2}{2} - \frac{\gamma}{\delta} \right)$$

και

$$\det = -\alpha\gamma \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right) > 0, \text{ όταν } \frac{\gamma}{\delta} \in (k_1, k_2).$$

Αφού σε αυτή την περίπτωση η ορίζουσα είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του πίνακα Jacobi καθορίζεται από το αντίστοιχο πρόσημο του ίχνους. Άρα, το παραπάνω σ.ι. είναι

$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{όταν } \frac{k_1+k_2}{2} < \frac{\gamma}{\delta} \\ \text{θετικά ασταθές,} & \text{όταν } \frac{k_1+k_2}{2} > \frac{\gamma}{\delta}. \end{cases}$$

Προκύπτει, δηλ., μέσω γραμμικοποίησης το [Σχήμα 6.2](#). Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με τη θετική ευστάθεια/αστάθεια των

$$\begin{cases} \left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right), & \text{όταν } k_2 = \frac{\gamma}{\delta} \\ \left(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)\right), & \text{όταν } \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta}, \end{cases}$$

με αυτή την τεχνική. Για τη μελέτη τους καταφεύγουμε στη θεωρία διακλαδώσεων.

Άσκηση 6.3. Δώστε τις λεπτομέρειες κατασκευής του [Σχήματος 6.2](#).

Ανάλυση διακλάδωσης. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως για τη θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του $\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right)$ του [\(PP_{v2.1}\)](#), όταν $k = \frac{\gamma}{\delta}$, δείχνουμε ότι και το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right)$ του [\(PP_{v2.2}\)](#), όταν $k_2 = \frac{\gamma}{\delta}$, είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές (βλ. [Άσκηση 6.4](#)).

Όσον αφορά το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)\right)$ όταν $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta}$, για απλοποίηση του συμβολισμού θέτουμε

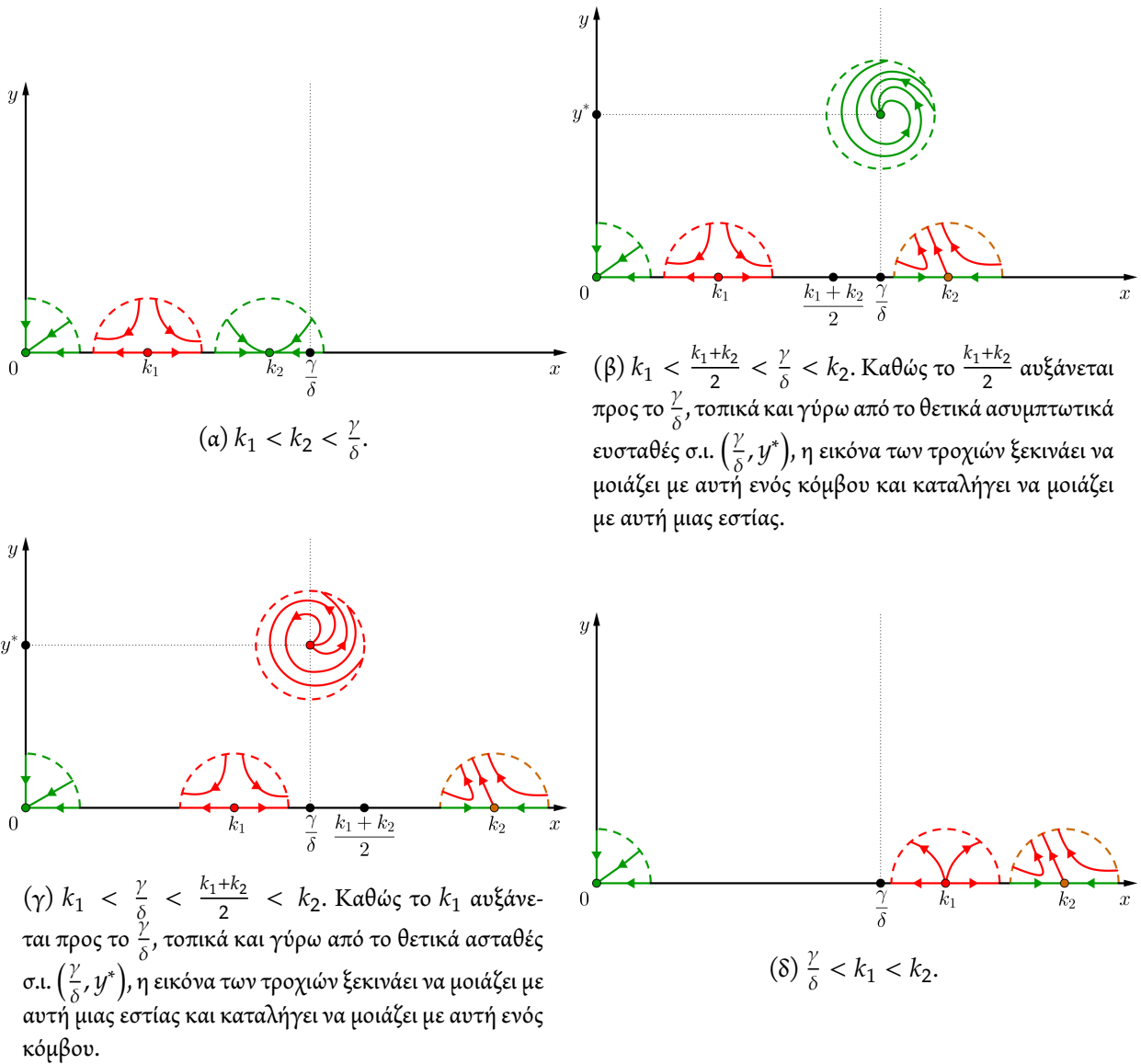
$$k := \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$\lambda_{\pm} = \pm i \det^{\frac{1}{2}} \neq 0, \text{ όταν } k = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Επίσης, έχουμε ότι

$$\text{Re} \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \text{tr}, \text{ όταν } k \text{ εντός μιας περιοχής του } \frac{\gamma}{\delta},$$



Σχήμα 6.2: Ποιοτική αναπαράσταση του χώρου φάσης του $(PP_{v2.2})$ για $\frac{\gamma}{\delta} \notin \left\{k_2, \frac{k_1+k_2}{2}\right\}$, όπως προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας. $y^* = -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)$.

οπότε, θεωρώντας τα $\text{Re}\lambda_{\pm}$ ως συναρτήσεις του k , έπεται ότι

$$\frac{d\text{Re}\lambda_{\pm}}{dk}(k) = \frac{\alpha\gamma}{\delta k_1 k_2} \neq 0 \text{ και ειδικότερα ότι } \frac{d\text{Re}\lambda_{\pm}}{dk}\left(\frac{\gamma}{\delta}\right) \neq 0.$$

Άρα υπάρχει διακλάδωση Hopf από το $\left(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}\right)\right)$ για $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta}$.

Μένει, λοιπόν, να υπολογίσουμε την ποσότητα Γ της συνθήκης μη εκφυλισμού, για να δούμε αν είναι μη μηδενική και σε αυτή την περίπτωση, μέσω του προσήμου της, να χαρακτηρίσουμε τη διακλάδωση ως υποκρίσιμη, ή υπερκρίσιμη. Ο χαρακτηρισμός αυτός θα μας δώσει και την ευστάθεια/αστάθεια του παραπάνω σ.ι. όταν $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta}$. Θα αποφύγουμε, ωστόσο, αυτόν τον επίπονο υπολογισμό και θα απαντήσουμε στα παραπάνω μέσω της αριθμητική επίλυσης του $(PP_{v2.2})$ (στον αντίποδα, βλ. Άσκηση 6.6).

Άσκηση 6.4. Σχετικά με το σ.ι. $(\frac{\gamma}{\delta}, 0)$ του $(PP_{v2.2})$ όταν $k_2 = \frac{\gamma}{\delta}$:

1. Συμπεράνετε την ύπαρξη διακλάδωσης σταθερής κατάστασης από το $(k_2, 0)$ για $k_2 = \frac{\gamma}{\delta}$.
2. Κατασκευάστε το διάγραμμα αυτής της διακλάδωσης, βρείτε τον τύπο της και συμπεράνετε τη θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του $(\frac{\gamma}{\delta}, 0)$, όταν $k_2 = \frac{\gamma}{\delta}$.

Άσκηση 6.5. Σχετικά με το σ.ι. $(\frac{\gamma}{\delta}, 0)$ του $(PP_{v2.2})$ όταν $k_1 = \frac{\gamma}{\delta}$:

1. Συμπεράνετε την ύπαρξη διακλάδωσης σταθερής κατάστασης από το $(k_1, 0)$ για $k_1 = \frac{\gamma}{\delta}$.
2. Ανήκει η διακλάδωση αυτή σε κάποια από τις τυποποιημένες μορφές;

Άσκηση 6.6 (Ο Παράδεισος απέχει μόνο μερικές σελίδες πράξεις ☺). Αποφανθείτε σχετικά με τον τύπο της διακλάδωσης Horf για το $(PP_{v2.2})$, και άρα και την ευστάθεια/αστάθεια του $(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} (1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}) (1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}))$ όταν $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta}$, μέσω του υπολογισμού της ποσότητας Γ της συνθήκης μη εκφυλισμού.

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται στο [Σχήμα 6.3](#) και στο [Σχήμα 6.4](#), προς επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας, αλλά και προς απάντηση των ερωτημάτων μας.

Μάλιστα θα καταδείξουμε ότι υπάρχει ευσταθής οριακός κύκλος όταν $\frac{k_1+k_2}{2} > \frac{\gamma}{\delta}$, οπότε διανθίζουμε το [Σχήμα 6.2γ](#) το οποίο παίρνει πλέον τη μορφή του [Σχήματος 6.5](#).

Πράγματι, παρατηρούμε από το [Σχήμα 6.6](#) και το [Σχήμα 6.7](#) ότι για τιμή του $\frac{k_1+k_2}{2}$ που είναι μεν μεγαλύτερη του $\frac{\gamma}{\delta}$, “κοντά” σε αυτό δε, υπάρχει μοναδική περιοδική λύση του $(PP_{v2.2})$, τέτοια ώστε η (κλειστή) τροχιά-ελκυστής της οποίας να βρίσκεται “κοντά” στο $(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} (1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}) (1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}))$ και να το περιβάλλει.

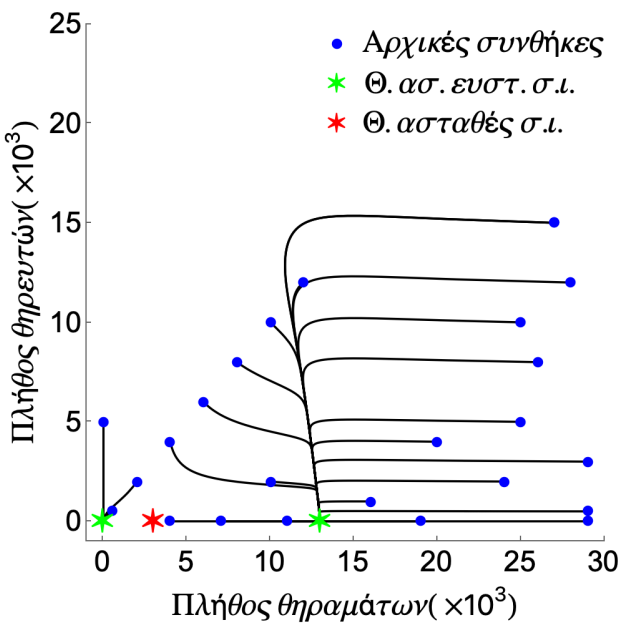
Πρόκειται δηλ. για μια υπερκρίσιμη διακλάδωση Horf και άρα το $(\frac{\gamma}{\delta}, -\frac{\alpha}{\beta} (1 - \frac{\gamma}{\delta k_1}) (1 - \frac{\gamma}{\delta k_2}))$ για $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, όπως άλλωστε καταδεικνύεται και στο [Σχήμα 6.3γ](#).

Παρατηρούμε, τέλος, ότι ο οριακός κύκλος εξαφανίζεται για κάποιο $\frac{k_1+k_2}{2}$ επαρκώς μεγαλύτερο του $\frac{\gamma}{\delta}$, όπως φαίνεται στο [Σχήμα 6.7δ](#).

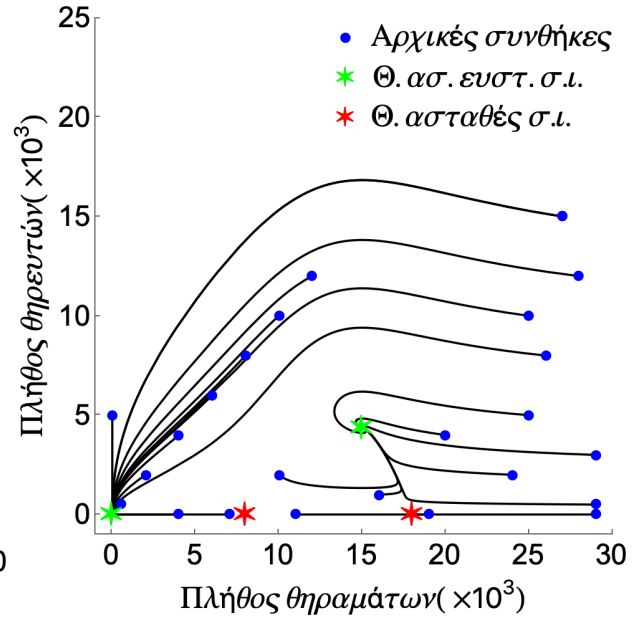
Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Οριακός κύκλος. Έστω $n = 2$ και αυτόνομο (ΠΑΤ), το οποίο για κάθε $y_0 \in S_2$ έχει μοναδική μεγιστική λύση, $y(\cdot, y_0)$.

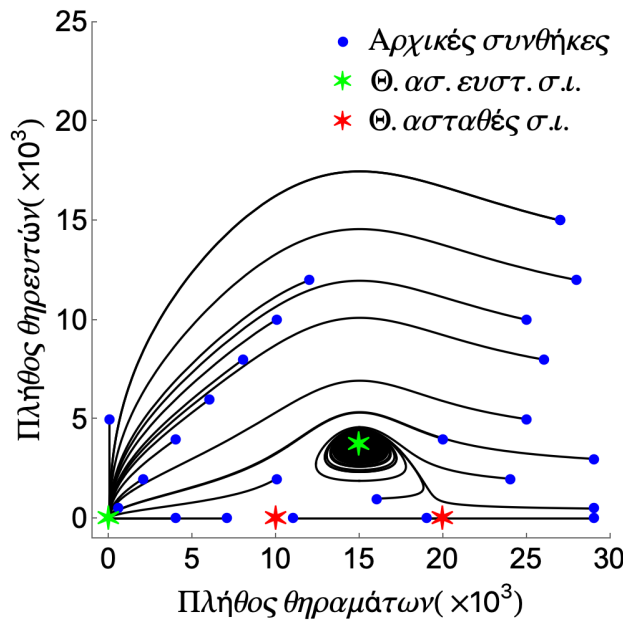
1. Κάθε (κλειστή) τροχιά, $\text{Ran}(y(\cdot, y_0)) \subsetneq S_2$, μιας περιοδικής λύσης, $y(\cdot, y_0)$, διαμερίζει τον εναπομείναντα χώρο φάσης σε δύο ξένες συνεκτικές συνιστώσες, την εσωτερική και την εξωτερική συνεκτική συνιστώσα του S_2 (που η τροχιά της $y(\cdot, y_0)$ καθορίζει), με τους προφανείς ορισμούς αυτών.
2. Εσωτερικός (εξωτερικός) οριακός κύκλος λέγεται κάθε κλειστή τροχιά, η οποία είναι απομονωμένη από οποιαδήποτε άλλη κλειστή τροχιά εντός της εσωτερικής (εξωτερικής) συνιστώσας. Οριακός κύκλος λέγεται κάθε κλειστή τροχιά, η οποία είναι τόσο εσωτερικός όσο και εξωτερικός οριακός κύκλος.
3. Υπάρχουν δύο τύποι εσωτερικού/εξωτερικού οριακού κύκλου:
 - i. Ο θετικά (αρνητικά) ευσταθής, προς τον οποίο κινούνται σπειροειδώς οι τροχιές θετικά (αρνητικά) ολικών λύσεων, πλησιάζοντάς τον από την εσωτερική/εξωτερική συνιστώσα, καθώς $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).



(α) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $3 \cdot 10^3$ άτομα = $k_1 < 13 \cdot 10^3$ άτομα = $\frac{\gamma}{\delta} < 15 \cdot 10^3$ άτομα.



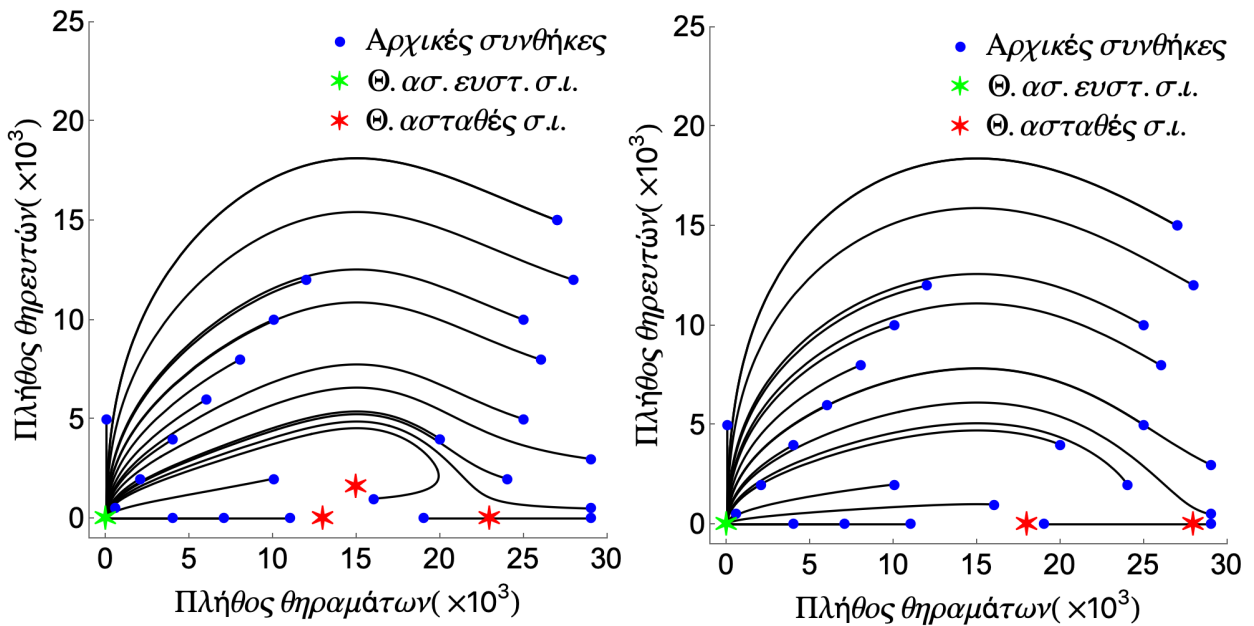
(β) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $8 \cdot 10^3$ άτομα = $k_1 < 13 \cdot 10^3$ άτομα = $\frac{k_1+k_2}{2} < \frac{\gamma}{\delta} = 15 \cdot 10^3$ άτομα $< k_2 = 18 \cdot 10^3$ άτομα.



(γ) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10 \cdot 10^3$ άτομα = $k_1 < 15 \cdot 10^3$ άτομα = $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{\gamma}{\delta} < k_2 = 20 \cdot 10^3$ άτομα.

Σχήμα 6.3: Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για θετικούς χρόνους και για διάφορες τιμές των k_1 και k_2 , με $\alpha = 2\gamma = 30$ [χρόνος] $^{-1}$ και $\beta = \delta = 1$ (10^3 άτομα) $^{-1}$ · [χρόνος] $^{-1}$.

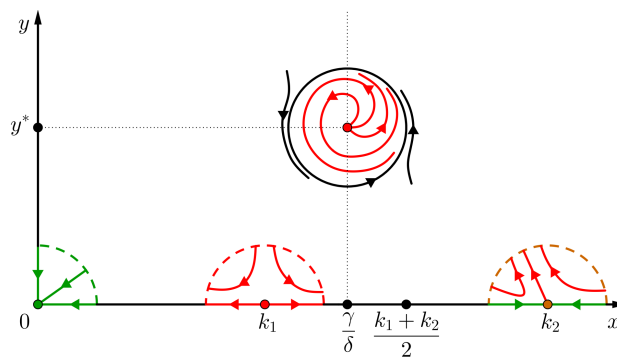
ii. Ο θετικά (αρνητικά) ασταθής, από τον οποίο κινούνται σπειροειδώς οι τροχιές θετικά (αρνητικά) ολικών λύσεων, απομακρυνόμενες από αυτόν από την εσωτερική/εξωτερική συνιστώσα, καθώς $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).



(α) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $13 \cdot 10^3$ άτομα = $k_1 < 15 \cdot 10^3$ άτομα = $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 18 \cdot 10^3$ άτομα $< k_2 = 23 \cdot 10^3$ άτομα.

(β) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $15 \cdot 10^3$ άτομα = $\frac{\gamma}{\delta} < k_1 = 18 \cdot 10^3$ άτομα $< k_2 = 28 \cdot 10^3$ άτομα.

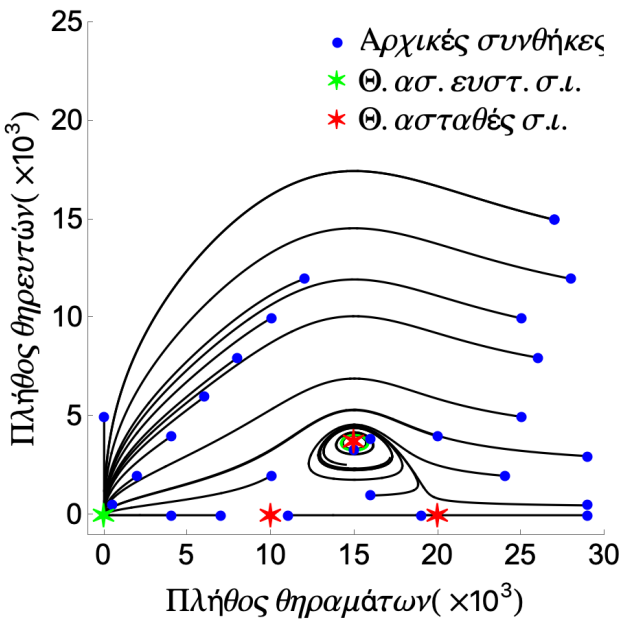
Σχήμα 6.4: (συνέχεια του Σχήματος 6.3) Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για μη θετικούς χρόνους για διάφορες τιμές των k_1 και k_2 , με $\alpha = 30 [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\beta = 1 (10^3 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\gamma = 15 [\text{χρόνος}]^{-1}$ και $\delta = 1 (10^3 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$.



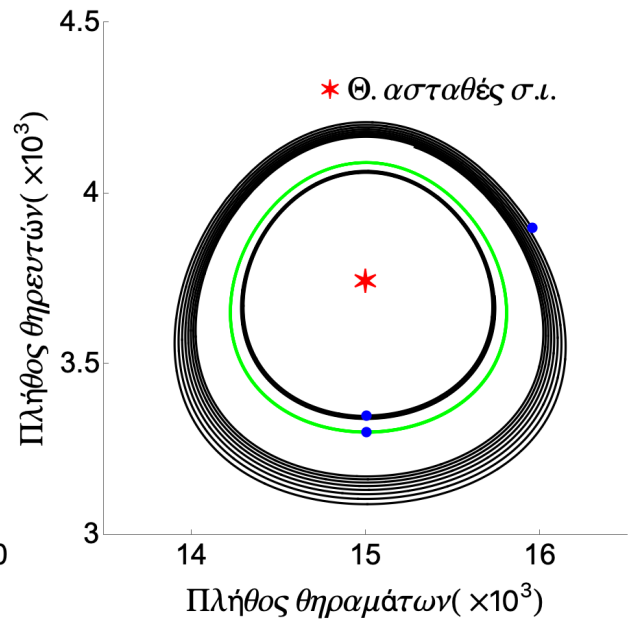
Σχήμα 6.5: Συμπλήρωση του Σχήματος 6.2γ.

4. Υπάρχουν τέσσερις τύποι οριακού κύκλου:

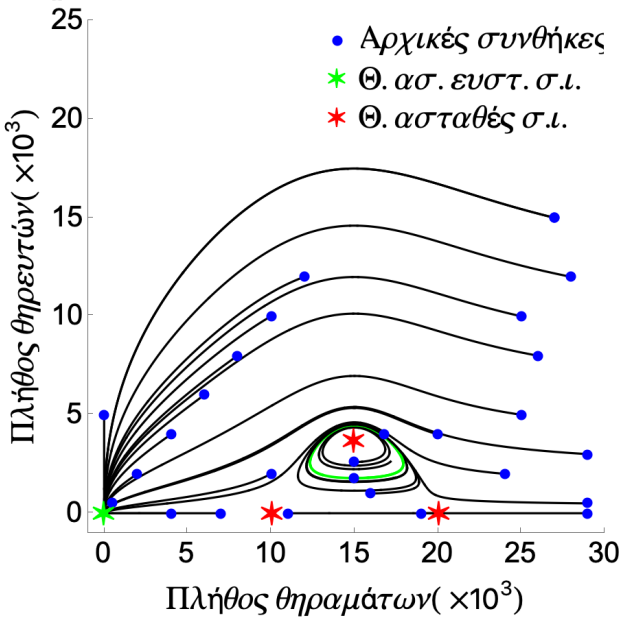
- i. Ο θετικά (αρνητικά) ευσταθής, προς τον οποίο κινούνται σπειροειδώς οι τροχιές θετικά (αρνητικά) ολικών λύσεων, πλησιάζοντάς τον τόσο από την εσωτερική όσο και από την εξωτερική συνιστώσα, καθώς $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).
- ii. Ο θετικά (αρνητικά) ασταθής, από τον οποίο κινούνται σπειροειδώς οι τροχιές θετικά (αρνητικά) ολικών λύσεων, απομακρυνόμενες από αυτόν τόσο από την εσωτερική όσο και από την εξωτερική συνιστώσα, καθώς $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$).
- iii. Ο εσωτερικά/εξωτερικά θετικά (αρνητικά) ευσταθής και εξωτερικά/εσωτερικά θετικά (αρνητικά) ασταθής, προς τον οποίο κινούνται σπειροειδώς οι τροχιές θετικά (αρνητικά) ολικών λύσεων, πλησιάζοντάς τον από την εσωτερική/εξωτερική συνιστώσα, καθώς $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$), καθώς



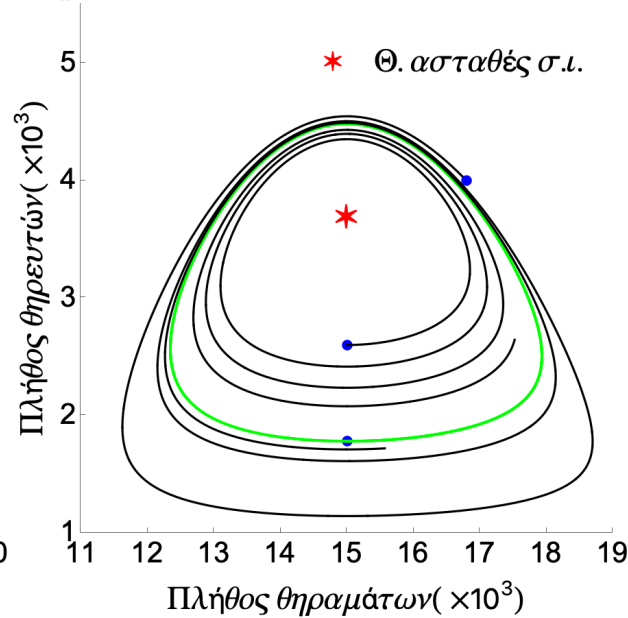
(α) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10001 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15001 \text{ άτομα} < k_2 = 20001 \text{ άτομα}$.



(β) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10001 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15001 \text{ άτομα} < k_2 = 20001 \text{ άτομα}$.



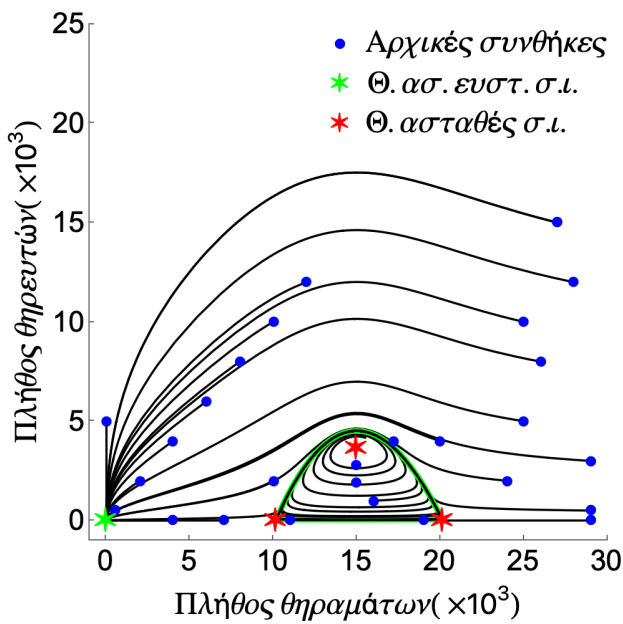
(γ) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10.1 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15.1 \cdot 10^3 \text{ άτομα} < k_2 = 20.1 \cdot 10^3 \text{ άτομα}$.



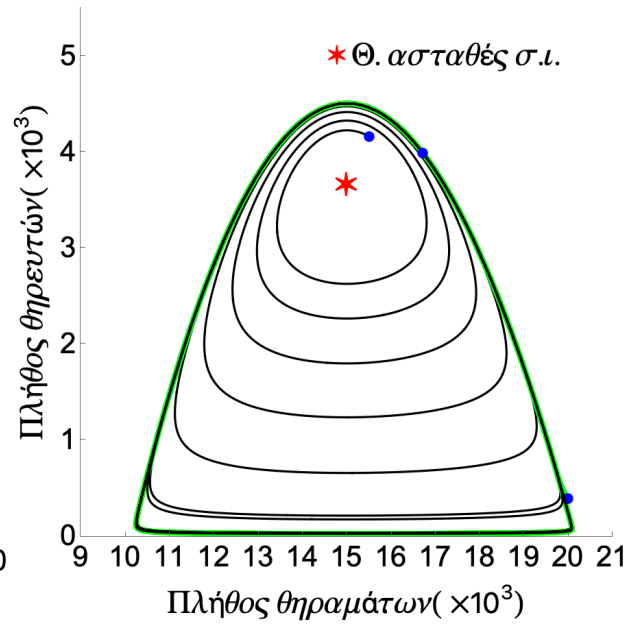
(δ) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10.1 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15.1 \cdot 10^3 \text{ άτομα} < k_2 = 20.1 \cdot 10^3 \text{ άτομα}$.

Σχήμα 6.6: (συνέχεια του Σχήματος 6.4α) Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για θετικούς χρόνους για διάφορες τιμές των k_1 και k_2 αλλά αυστηρά για $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2}$, με $\alpha = 2\gamma = 30 [\text{χρόνος}]^{-1}$ και $\beta = \delta = 1 (10^3 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$. Η πράσινη κλειστή τροχιά αποτελεί έναν ευσταθή οριακό κύκλο.

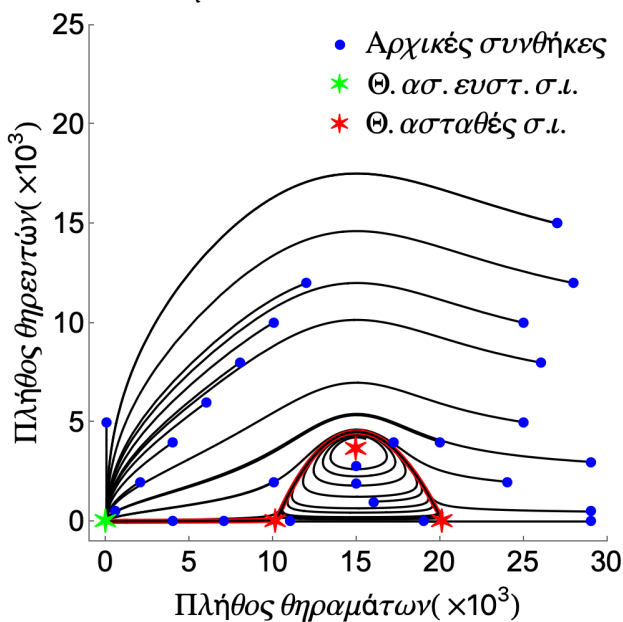
επίσης από τον οποίο κινούνται σπειροειδώς οι τροχιές θετικά (αρνητικά) ολικών λύσεων, απομακρυνόμενες από αυτόν από την εξωτερική/εσωτερική συνιστώσα, καθώς $t \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow -\infty$). Σε αυτές τις περιπτώσεις, ο οριακός κύκλος λέγεται ημιευσταθής.



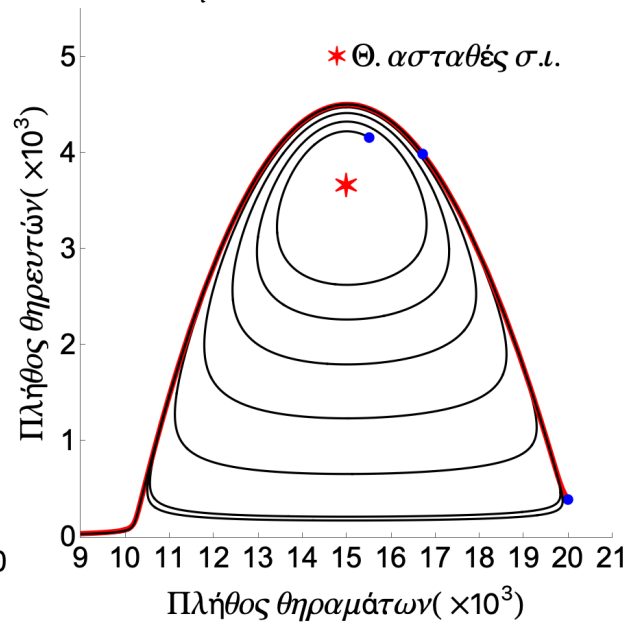
(α) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10144.392 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15144.392 \text{ άτομα} < k_2 = 20144.392 \text{ άτομα}$.



(β) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10144.392 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15144.392 \text{ άτομα} < k_2 = 20144.392 \text{ άτομα}$.



(γ) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10144.393 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15144.393 \text{ άτομα} < k_2 = 20144.393 \text{ άτομα}$.



(δ) Διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες, με $10144.393 \text{ άτομα} = k_1 < 15 \cdot 10^3 \text{ άτομα} = \frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2} = 15144.393 \text{ άτομα} < k_2 = 20144.393 \text{ άτομα}$.

Σχήμα 6.7: (συνέχεια του Σχήματος 6.4α) Αριθμητική επίλυση του $(PP_{v2.2})$ για θετικούς χρόνους για διάφορες τιμές των k_1 και k_2 , αλλά αυστηρά για $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{k_1+k_2}{2}$, με $\alpha = 30 [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\beta = 1 (10^3 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\gamma = 15 [\text{χρόνος}]^{-1}$ και $\delta = 1 (10^3 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$. Η πράσινη κλειστή τροχιά αποτελεί έναν ευσταθή οριακό κύκλο, ενώ η κόκκινη δηλώνει την καταστροφή του. Σημειώνουμε ότι, όπως έχουμε αναφέρει, ο φορμαλισμός που έχουμε επιλέξει μας επιτρέπει να μιλάμε για μη φυσικό πλήθος ατόμων.

Δύο είναι οι συστηματικοί τρόποι μελέτης οριακών κύκλων,

1. ο ένας είναι η θεωρία των διακλαδώσεων Hopf, και
2. ο άλλος είναι η θεωρία Poincaré-Bendixson.

Διακλάδωση Hopf. Η διακλάδωση αυτή ονομάζεται, επίσης, διακλάδωση Andronov-Hopf, ή διακλάδωση Poincaré-Andronov-Hopf, ή διακλάδωση γένεσης οριακού κύκλου.

Το γενικό πλαίσιο για τη μελέτη διακλαδώσεων Hopf είναι παρόμοιο με αυτό για τις διακλαδώσεις σταθερής κατάστασης:

Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) με $f(\cdot) = f(\cdot, \mu) \in C^3(U \times U^*; \mathbb{R}^n)$, όπου $U \subseteq S_2$ και $U^* \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτά. Σε αντίθεση με ό,τι κάναμε για τις διακλαδώσεις σταθερής κατάστασης, τώρα συμβολίζουμε με y^* όχι μόνο τα σ.ι., αλλά και τα σημεία πάνω σε οριακούς κύκλους. Έστω, επίσης, ότι για κάθε μ σε περιοχή γύρω από το μ^* , το πρόβλημα έχει ένα μεμονωμένο σ.ι. (το οποίο θα εξαρτάται ομαλά από την μ). Θα το γράφουμε ως $y^* = y^\dagger = y^\dagger(\mu)$.

Ξεκινάμε με το επόμενο βασικό αποτέλεσμα, η απόδειξη του οποίου βασίζεται στο θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.

Θεώρημα 6.7. Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η εξής συνθήκη:

Ο πίνακας Jacobi (με διαφορίσεις ως προς y , χωρίς διαφορίσεις ως προς μ), για $\mu = \mu^*$, $J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)$, έχει ένα ζεύγος απλών (συζυγών) μη μηδενικών φανταστικών ιδιοτιμών και καμία άλλη από τις υπόλοιπες $n - 2$ ιδιοτιμές επί του φανταστικού άξονα, δηλ.

$$\lambda_{1\pm} = \pm i\omega \neq 0, \text{ και } \operatorname{Re}\lambda_i \neq 0, \forall i \neq 1_{\pm}.$$

Τότε υπάρχει μοναδικό ζεύγος ομαλών φανταστικών ιδιοτιμών $\lambda_{1\pm} = \lambda_{1\pm}(\mu)$ του $J_{(y^\dagger(\mu), \mu)}$ σε μια περιοχή του μ^* , τέτοια ώστε $\lambda_{1\pm}(\mu^*) = 0$, δηλ., μπορούμε να δούμε τις φανταστικές ιδιοτιμές ως ομαλές φανταστικές συναρτήσεις ως προς μ γύρω από το $\mu = \mu^*$.

Η συνθήκη του Θεωρήματος 6.7 αποτελεί την αναγκαία, αλλά όχι ικανή, συνθήκη για την ύπαρξη διακλάδωσης Hopf από το παραπάνω σ.ι. όταν $\mu = \mu^*$.

Η θεωρητική προσέγγιση των διακλαδώσεων Hopf έχει ως εξής:

1. $n = 2$.

- i. Διαχωρισμός δύο περιπτώσεων μονοπαραμετρικών οικογενειών (ΠΑΤ), όπου η παραπάνω αναγκαία συνθήκη ικανοποιείται σε συνδυασμό με μία δεύτερη συνθήκη, ανάλογα με το πρόσημο μιας μη μηδενικής πραγματικής ποσότητας, $\operatorname{sgn}(\Gamma) \neq 0$, με το οποίο σχετίζεται μια τρίτη συνθήκη.

Η τρίτη συνθήκη αυτή, η οποία αφορά μερικές παραγώγους αμιγώς ως προς τις εξαρτημένες μεταβλητές, λέγεται συνθήκη μη εκφυλισμού.

- ii. Η ανάλυση κάθε μιας από τις παραπάνω περιπτώσεις θα μας δώσει μια αντιστοιχία αυτής με μια άλλη περίπτωση μιας τυποποιημένης μονοπαραμετρικής οικογένειας αυτόνομων (ΠΑΤ) με γνωστή διακλάδωση, όπου τώρα κάθε συνιστώσα της f είναι ένα πολυώνυμο ως προς τις εξαρτημένες μεταβλητές που έχει συγκεκριμένες συναρτήσεις του μ για συντελεστές και σταθερά.

Οι δύο περιπτώσεις της συνισταμένης των πολυωνύμων αυτών αποτελούν τις κανονικές μορφές Poincaré.

- iii. Η αντιστοιχία αυτή της αρχικής μονοπαραμετρικής οικογένειας προβλημάτων με μια τυποποιημένη, σημαίνει θετική απάντηση στο ερώτημα “ύπαρξη ή όχι διακλάδωσης” για την αρχική, καθώς επίσης ίδια συμπεριφορά της διακλάδωσης της αρχικής με αυτή της τυποποιημένης σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$.

2. Αυθαίρετο $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

- i. Υποβιβασμός κάθε μονοπαραμετρικής οικογένειας αυτόνομων (ΠΑΤ) που ικανοποιεί την παραπάνω αναγκαία συνθήκη, σε μια μονοπαραμετρική οικογένεια διδιάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ), μέσω της απλοποίησης Lyapunov-Schmidt.
- ii. Η αντιστοιχία αυτή της αρχικής μονοπαραμετρικής οικογένειας προβλημάτων με την υποβιβασμένη της σημαίνει απάντηση στο ερώτημα “ύπαρξη ή όχι διακλάδωσης” για την αρχική, καθώς επίσης, σε περίπτωση ύπαρξης, ίδια συμπεριφορά της διακλάδωσης της αρχικής με την αυτή της υποβιβασμένης σε μια περιοχή του $\mu = \mu^*$. Μάλιστα, σε περίπτωση ύπαρξης, το διάγραμμα διακλάδωσης της υποβιβασμένης λέγεται διάγραμμα διακλάδωσης και της αρχικής.

Σε αντίθεση με τις διακλαδώσεις σταθερής κατάστασης, ο κατάλογος των τυποποιημένων μονοπαραμετρικών οικογενειών μονοδιάστατων προβλημάτων με γνωστές διακλαδώσεις Hopf αποτελείται από μόνο δύο περιπτώσεις και έχει ως εξής:

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΓΝΩΣΤΩΝ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ HOPF

Με πράσινο χρωματίζονται οι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθείς κλάδοι ή τμήματα αυτών, ενώ με κόκκινο οι θετικά ασταθείς κλάδοι ή τμήματα αυτών, του αντίστοιχου διαγράμματος διακλάδωσης.

- $$\begin{aligned} f_1(y, \mu) &= \mu y_1 - y_2 + y_1 (y_1^2 + y_2^2) \\ f_2(y, \mu) &= y_1 + \mu y_2 + y_2 (y_1^2 + y_2^2) \end{aligned} \quad \diamond \quad \text{ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗ (βλ. Σχήμα 6.8).}$$
- $$\begin{aligned} f_1(y, \mu) &= \mu y_1 - y_2 - y_1 (y_1^2 + y_2^2) \\ f_2(y, \mu) &= y_1 + \mu y_2 - y_2 (y_1^2 + y_2^2) \end{aligned} \quad \diamond \quad \text{ΥΠΕΡΚΡΙΣΙΜΗ (βλ. Σχήμα 6.9).}$$

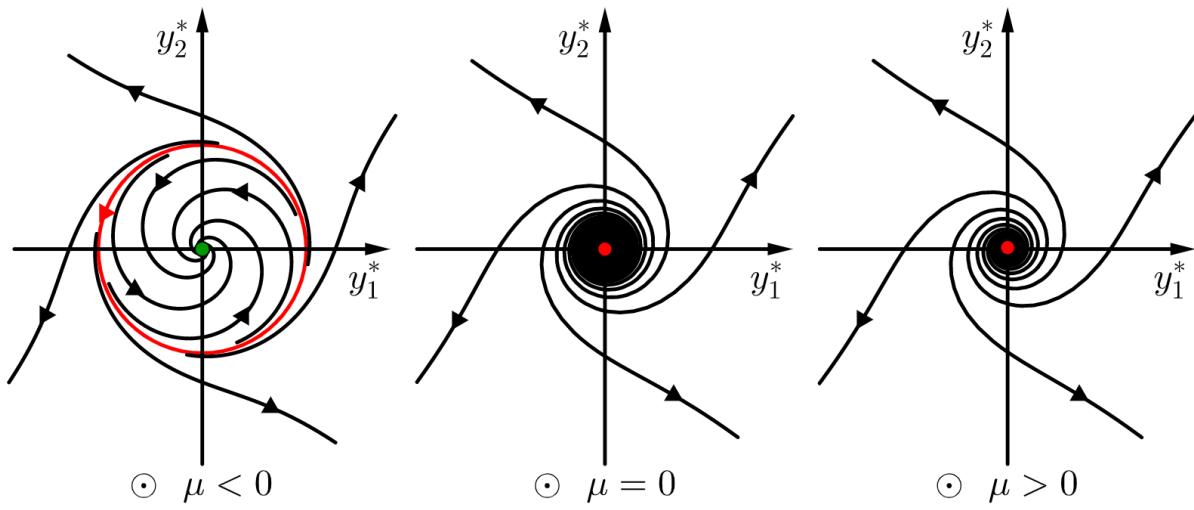
Στις παραπάνω συμμετέχουν αυστηρά δύο κλάδοι στη διακλάδωση, όπου ο ένας (καμπύλη) αντιστοιχεί στο σ.ι. $y^\dagger(\mu)$, και ο άλλος (επιφάνεια) αντιστοιχεί στη κλειστή τροχιά (η οποία εξαρτάται ομαλά από το μ), οι οποίοι τέμνονται στο σημείο διακλάδωσης $(\mu^*, y_1^\dagger(\mu^*), y_2^\dagger(\mu^*)) = 0 \in \mathbb{R}^3$. Κάθε σ.ι. γύρω από το σημείο διακλάδωσης βρίσκεται αποκλειστικά πάνω στον ευθύγραμμο κλάδο και κάθε περιοδική τροχιά αποκλειστικά πάνω στον κλάδο-επιφάνεια.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι στην υποκρίσιμη διακλάδωση υπάρχει θετικά ασταθής οριακός κύκλος που περιβάλλει το θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. $y^\dagger(\mu)$, ενώ στην υπερκρίσιμη υπάρχει θετικά ευσταθής οριακός κύκλος που περιβάλλει το θετικά ασταθές $y^\dagger(\mu)$.

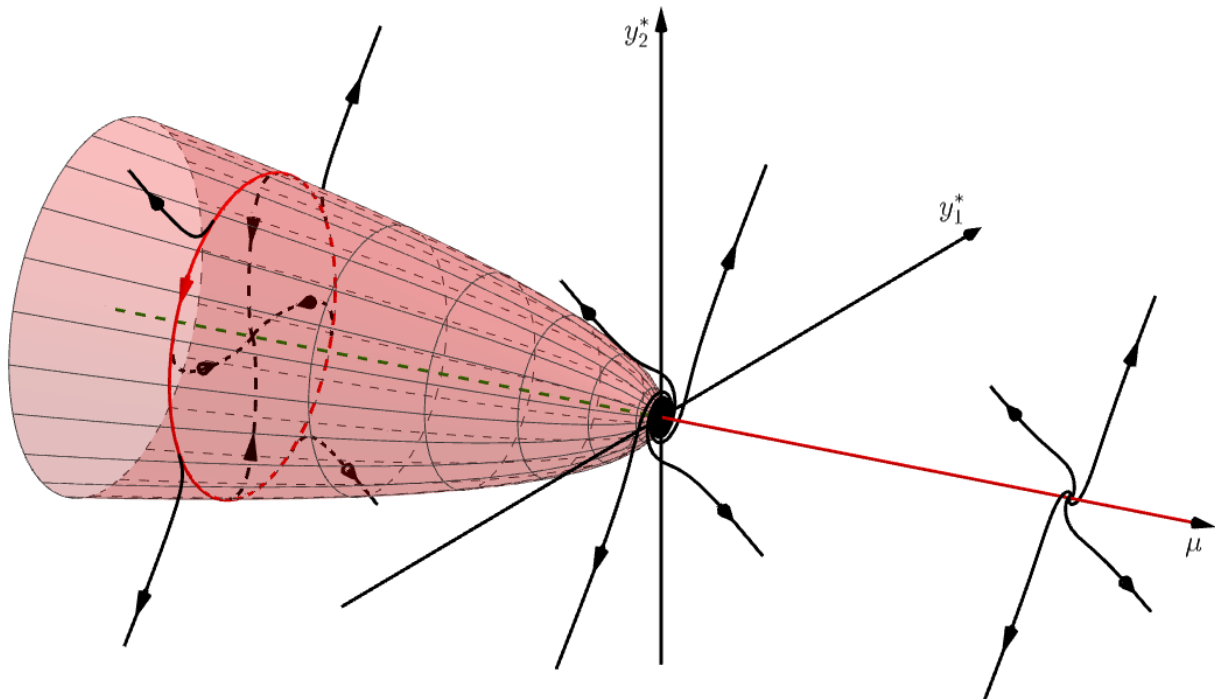
Σημειώνουμε, τέλος, ότι και στις δύο παραπάνω διακλαδώσεις, ο πίνακας Jacobi της f στο σημείο διακλάδωσης έχει την κανονική μορφή

$$J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και άρα το αν η διακλάδωση είναι υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη εξαρτάται αποκλειστικά από το μη γραμμικό μέρος της f . Άρα είναι λογικό να αναμένουμε ότι, αφού μετασχηματίσουμε μια δοσμένη μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) έτσι ώστε ο πίνακας Jacobi να έχει πλέον την παραπάνω κανονική μορφή, τότε το Γ της συνθήκης μη εκφυλισμού, που καθορίζει το αν είναι η διακλάδωση υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη, θα εξαρτάται αποκλειστικά από τους μη γραμμικούς όρους της νέας μονοπαραμετρικής οικογένειας εξισώσεων. Πράγματι:



(α) Στο $y_1^*y_2^*$ -επίπεδο.



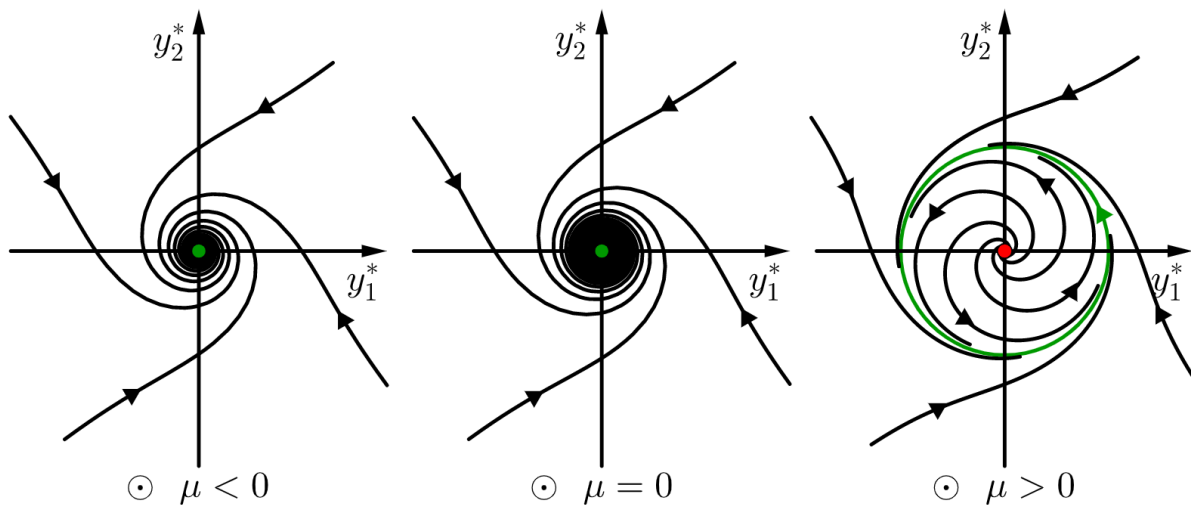
(β) Στον $\mu y_1^* y_2^*$ -χώρο.

Σχήμα 6.8: Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y_1^* - y_2^* + y_1^* (y_1^{*2} + y_2^{*2}) = 0 = y_1^* + \mu y_2^* + y_2^* (y_1^{*2} + y_2^{*2})$.

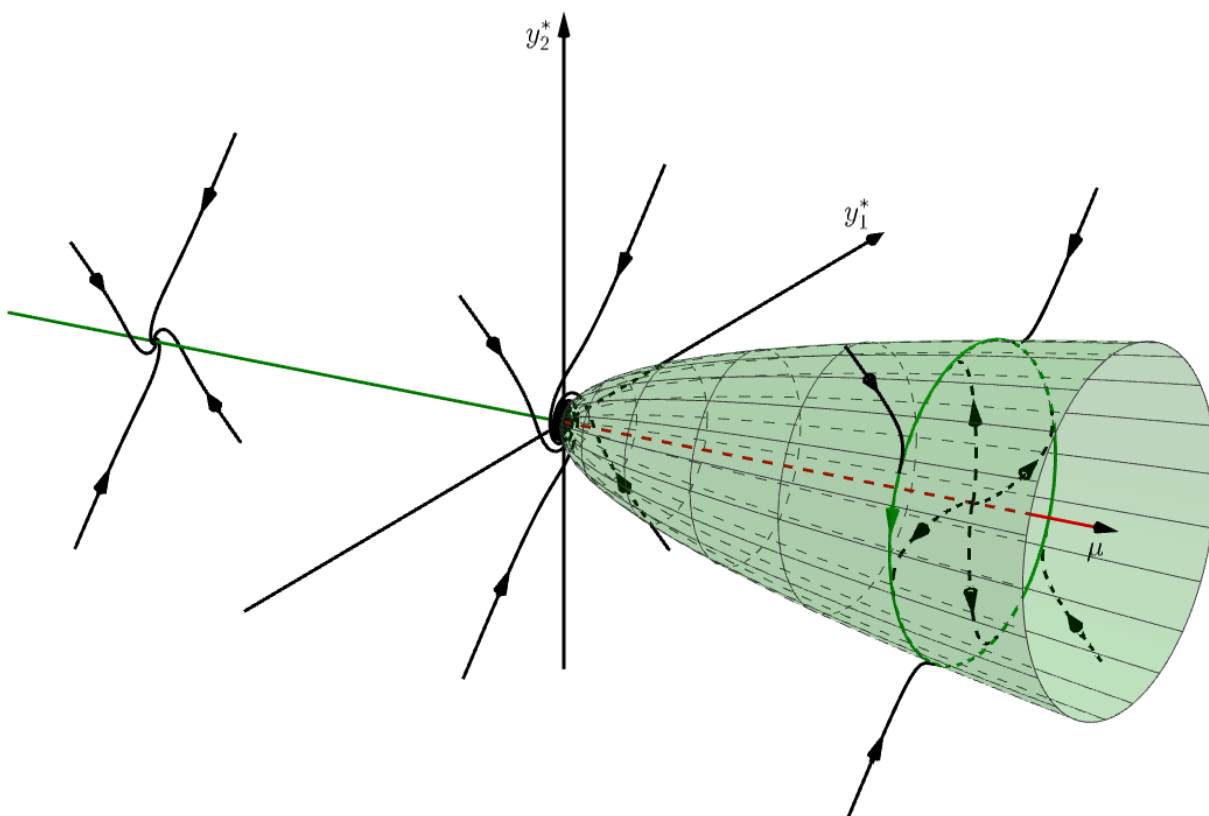
ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΟΥ Γ ΤΗΣ ΣΥΝΘΗΚΗΣ ΜΗ ΕΚΦΥΛΙΣΜΟΥ

Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η αναγκαία συνθήκη για διακλάδωση Hopf. Τα βήματα για τον υπολογισμό της ποσότητας Γ είναι τα εξής:

1. Μετασχηματισμός της μονοπαραμετρικής οικογένειας των εξισώσεων των (ΠΑΤ), μέσω κατάλληλης αλλαγής μεταβλητών, έτσι ώστε πλέον ο πίνακας Jacobi να βρίσκεται στην παραπάνω κανονική μορφή, και συγκεκριμένα:



(α) Στο $y_1^*y_2^*$ -επίπεδο.



(β) Στον $\mu y_1^*y_2^*$ -χώρο.

Σχήμα 6.9: Διάγραμμα διακλάδωσης $\mu y_1^* - y_2^* - y_1^* (y_1^{*2} + y_2^{*2}) = 0 = y_1^* + \mu y_2^* - y_2^* (y_1^{*2} + y_2^{*2})$.

i. Πραγματική (“κατά blocks”) διαγωνιοποίηση του $J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*)$. Συγκεκριμένα,

$$J(y^\dagger(\mu^*), \mu^*) = P \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} P^{-1},$$

όπου αν μ_- είναι το (μιγαδικό) ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_{1-} = -i\omega$, τότε

$$P := (\text{Re}\mu_- \quad \text{Im}\mu_-),$$

δηλ. οι στήλες του P είναι, στη σειρά, οι $\operatorname{Re}u_-$ και $\operatorname{Im}u_-$.

ii. Αλλαγή μεταβλητών

$$y^\dagger(\mu) + Px := y \mapsto x := P^{-1}(y - y^\dagger(\mu)).$$

iii. Αναγνώριση της συνάρτησης g με τύπο

$$g(x, \mu) := P^{-1}f(Px + y^\dagger(\mu), \mu),$$

για τον πίνακα Jacobi της οποίας ισχύει ότι

$$J(0, \mu^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Υπολογισμός της ποσότητας Γ ως

$$\begin{aligned} \Gamma := & \left[\frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1^3} + \frac{\partial^3 g_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial^3 g_2}{\partial x_2^3} \right] + \\ & + \frac{1}{\omega} \left[\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{\omega} \left[\frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2^2} \right], \end{aligned}$$

όπου όλες οι διαφορίσεις υπολογίζονται στο $x = 0 \in \mathbb{R}^2$.

Το γιατί το Γ δεν περιλαμβάνει κάποια παράγωγο πρώτης τάξης έγινε σαφές παραπάνω. Σχετικά όμως με το πώς προκύπτει το Γ , αναφέρουμε ότι μέσω πολικών συντεταγμένων η μονοπαραμετρική οικογένεια διδιάστατων προβλημάτων ανάγεται σε μια μονοδιάστατων προβλημάτων, στην οποία η συνθήκη που θα καθορίσει αν μια ενδεχόμενη δικρανική διακλάδωση είναι υποκρίσιμη ή υπερκρίσιμη μας δίνει τελικά τον ορισμό του Γ .

Τώρα, είμαστε σε θέση να παραθέσουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, που μας αντιστοιχίζει κάθε μονοπαραμετρική οικογένεια μονοδιάστατων αυτόνομων (ΠΙΑΤ) που παρουσιάζει διακλάδωση Hopf, με μια από τις τυποποιημένες μονοπαραμετρικές οικογένειες διδιάστατων αυτόνομων (ΠΙΑΤ) με γνωστή διακλάδωση. Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό έχει νόημα υπό το πρίσμα του **Θεωρήματος 6.7**.

Θεώρημα 6.8. Έστω $n = 2$ και μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΙΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τόσο η αναγκαία συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης Hopf όσο και μια δεύτερη συνθήκη, ως εξής:

Ο πίνακας $J(y^*(\mu^*), \mu^*)$ έχει ένα ζεύγος απλών (συζυγών) μη μηδενικών φανταστικών ιδιοτιμών, δηλ.

$$\lambda_{\pm} = \pm i\omega \neq 0. \tag{\Sigma_1}$$

Για το παραπάνω ζεύγος συζυγών ιδιοτιμών, οι οποίες είναι ομαλές ως προς μ σε περιοχή του $\mu = \mu^*$, ισχύει ότι

$$\frac{d\operatorname{Re}\lambda_{\pm}}{d\mu}(\mu^*) \neq 0. \tag{\Sigma_2}$$

Τότε υπάρχει διακλάδωση Hopf από το $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$, που αποτελείται από δύο κλάδους (ο ένας εκ των οποίων αντιστοιχεί στο $y^\dagger(\mu)$).

Αν, επιπλέον, ικανοποιείται και η συνθήκη μη εκφυλισμού

$$\Gamma \neq 0, \tag{\Sigma_3}$$

τότε υπάρχουν (αντιστρέψιμες) αλλαγές εξαρτημένης μεταβλητής και παραμέτρου $y \mapsto x$ και $\mu \mapsto \kappa$, αντίστοιχα, και αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής $t \mapsto \tau$ που διατηρεί τη φορά, οι οποίες μετασχηματίζουν την εξίσωση του (ΠΑΤ) στη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \kappa x_1 - x_2 + s x_1 (x_1^2 + x_2^2) + o(|x|^3) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_1 + \kappa x_2 + s x_2 (x_1^2 + x_2^2) + o(|x|^3), \end{aligned} \quad \text{καθώς } x \rightarrow 0, \text{ όπου } s = \text{sgn}(\Gamma) = \pm 1.$$

Πρακτικά, το παραπάνω αποτέλεσμα μας λέει ότι, αν ικανοποιούνται οι συνθήκες, τότε όχι μόνο θα υπάρχει διακλάδωση για το πρόβλημά μας, αλλά επιπλέον μας καθορίζει αν θα έχει ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά με το διάγραμμα της υποκρίσιμης ή της υπερκρίσιμης διακλάδωσης. Συγκεκριμένα, αν $\Gamma > 0$ ($\Gamma < 0$), τότε η διακλάδωση είναι υποκρίσιμη (υπερκρίσιμη).

Σημειώνουμε ότι η δεύτερη συνθήκη του **Θεωρήματος 6.8** απλοποιείται, λόγω του τύπου

$$\text{Re} \lambda_{\pm}(\mu) = \frac{1}{2} \text{tr} J(y^*(\mu), \mu), \text{ για κάθε } \mu \text{ σε μια περιοχή του } \mu^*, \text{ όταν } n = 2.$$

Όσον αφορά, τώρα, τη γενική περίπτωση των $n \geq 2$ διαστάσεων, υποβιβάζουμε τη μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης Hopf, μέσω της απλοποίησης Lyapunov-Schmidt, κατά έναν γενικότερο τρόπο από αυτόν με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε η διαδικασία για τις διακλάδωσεις σταθερής κατάστασης. Προφανώς η υποβιβασμένη οικογένεια θα αποτελείται από διδιάστατα αυτόνομα προβλήματα.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗ LYAPUNOV-SCHMIDT

Έστω μια μονοπαραμετρική οικογένεια n -διάστατων αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω.

Ο αλγόριθμος υποβιβασμού διάστασης έχει ως εξής:

1. Μετασχηματισμός της μονοπαραμετρικής οικογένειας των εξισώσεων των (ΠΑΤ), μέσω κατάλληλης αλλαγής μεταβλητών, έτσι ώστε πλέον ο πίνακας Jacobi να βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη, αξιοποιήσιμη μορφή, και συγκεκριμένα:
 - i. Πραγματική διαγωνιοποίηση του $J(y^*(\mu^*), \mu^*)$. Συγκεκριμένα, εύρεση των ιδιοτιμών λ_i , (όλες τους θα είναι μη μηδενικές, και μόνο δυο συζυγείς, $\lambda_{1\pm} = \pm i \omega$ θα έχουν μηδενικά πραγματικά μέρη), των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων u_i , και του (αντιστρέψιμου) πίνακα πραγματικής ομοιότητας P και του αντίστροφου του ώστε

$$J(y^*(\mu^*), \mu^*) = P \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_k \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ για κάποιο } \mathbb{N} \ni k \leq n,$$

και σε αυτή την περίπτωση

- κάθε C_i είτε θα είναι μία πραγματική ιδιοτιμή λ_i (δηλ. ένας 1×1 πραγματικός πίνακας), είτε θα είναι ένας 2×2 πραγματικός πίνακας, που θα αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών $\lambda_{i\pm} = \text{Re} \lambda_{i\pm} \pm i \text{Im} \lambda_{i\pm}$, και θα έχει τη μορφή

$$C_i := \begin{pmatrix} \text{Re} \lambda_{i\pm} & -\text{Im} \lambda_{i\pm} \\ \text{Im} \lambda_{i\pm} & \text{Re} \lambda_{i\pm} \end{pmatrix},$$

- ο P θα έχει τη μορφή

$$P := (P_1 \quad \cdots \quad P_k),$$

όπου για κάθε P_i θα ισχύει ότι

- αν το C_i είναι μία πραγματική ιδιοτιμή λ_i , τότε το P_i θα είναι μία στήλη, και συγκεκριμένα το αντίστοιχο πραγματικό ιδιοδιάνυσμα, u_i , της λ_i , και
- αν το C_i είναι ένας 2×2 πραγματικός πίνακας, που θα αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών $\lambda_{i\pm} = \text{Re}\lambda_{i\pm} \pm i \text{Im}\lambda_{i\pm}$, τότε το P_i θα αποτελείται από δύο πραγματικές στήλες, και συγκεκριμένα

$$P_i = \begin{pmatrix} \text{Re}u_{i-} & \text{Im}u_{i-} \end{pmatrix},$$

όπου u_{i-} το μιγαδικό ιδιοδιάνυσμα της λ_{i-} ,

και

- μόνο το C_1 έχει μηδενικά διαγώνια στοιχεία, και συγκεκριμένα

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

ii. Αλλαγή μεταβλητών

$$y^\dagger(\mu) + Px := y \mapsto x := P^{-1}(y - y^\dagger(\mu)).$$

iii. Αναγνώριση της συνάρτησης F με τύπο

$$F(x, \mu) := P^{-1}f(Px + y^\dagger(\mu), \mu),$$

για τον πίνακα Jacobi της οποίας ισχύει ότι

$$J(0, \mu^*) = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_k \end{pmatrix}.$$

2. Επίλυση του $(n - 2) \times (n + 1)$ (μη γραμμικού) συστήματος

$$\begin{aligned} F_3(x, \mu) &= 0 \\ &\vdots \\ F_n(x, \mu) &= 0, \end{aligned}$$

για την εύρεση μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας λύσεων της μορφής

$$x_i = x_i(x_1, x_2, \mu), \quad \forall i \in \{3, \dots, n\}.$$

3. Αναγνώριση της συνάρτησης $g = (g_1, g_2)$ με τύπο

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \mu) &:= F_1(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2, \mu), \dots, x_n(x_1, x_2, \mu)) \\ g_2(x_1, x_2, \mu) &:= F_2(x_1, x_2, x_3(x_1, x_2, \mu), \dots, x_n(x_1, x_2, \mu)), \end{aligned}$$

για την οποία ισχύει ότι

$$g(0, 0, \mu^*) = 0 \text{ και } J((0, 0), \mu^*) = C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

καθώς και της υποβιβασμένης μονοπαραμετρικής οικογένειας διδιάστατων αυτόνομων ΠΑΤ ως

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}(t, \mu) = g_1(x_1(t, \mu), x_2(t, \mu), \mu) \\ \frac{dx_2}{dt}(t, \mu) = g_2(x_1(t, \mu), x_2(t, \mu), \mu) \\ x_1(t_0, \mu) = q_1 \cdot (y_0(\mu) - y^\dagger(\mu)) \\ x_2(t_0, \mu) = q_2 \cdot (y_0(\mu) - y^\dagger(\mu)), \end{cases}$$

όπου $q_{1,2}$ είναι η πρώτη και η δεύτερη, αντίστοιχα, γραμμή του P^{-1} .

Τονίζουμε ότι ο παραπάνω αλγόριθμος υποβιβασμού διάστασης είναι εφαρμόσιμος σε όλες τις μονοπαραμετρικές οικογένειες αυτόνομων (ΠΑΤ) που ικανοποιούν την αναγκαία συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης Hopf, ανεξάρτητα με το αν υπάρχει τελικά διακλάδωση ή όχι.

Χρήσιμο είναι και το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 6.9. Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιείται μια ελαφρώς ισχυρότερη εκδοχή της αναγκαίας συνθήκης ύπαρξης διακλάδωσης Hopf ως εξής:

Ο $J(y^*(\mu^*), \mu^*)$ έχει ένα ζεύγος απλών (συζυγών) μη μηδενικών φανταστικών ιδιοτιμών και όλες τις υπόλοιπες $n - 2$ ιδιοτιμές στα αριστερά του φανταστικού άξονα, δηλ.

(Σ_1')

$$\lambda_{1\pm} = \pm i\omega \neq 0, \text{ και } \operatorname{Re}\lambda_i < 0, \forall i \neq 1_{\pm}.$$

Έστω, επιπλέον, ότι υπάρχει διακλάδωση Hopf από το $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$. Αν η διακλάδωση είναι υποκρίσιμη (υπερκρίσιμη), τότε οι οριακοί κύκλοι της διακλάδωσης είναι θετικά ασταθείς (ευσταθείς).

Η αξία του παραπάνω αποτελέσματος φαίνεται όταν χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με κάποιο αποτέλεσμα ύπαρξης διακλάδωσης Hopf, όπως το επόμενο, το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο παρά η γενίκευση του πρώτου μέρους του Θεωρήματος 6.8 στις $n \geq 2$ διαστάσεις.

Θεώρημα 6.10. Έστω μία μονοπαραμετρική οικογένεια αυτόνομων (ΠΑΤ) όπως παραπάνω, τέτοια ώστε να ικανοποιούνται τόσο η αναγκαία συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης Hopf όσο και μια δεύτερη συνθήκη, ως εξής:

Ο $J(y^*(\mu^*), \mu^*)$ έχει ένα ζεύγος απλών (συζυγών) μη μηδενικών φανταστικών ιδιοτιμών και καμία άλλη από τις υπόλοιπες $n - 2$ ιδιοτιμές επί του φανταστικού άξονα, δηλ.

(Σ_1)

$$\lambda_{1\pm} = \pm i\omega \neq 0, \text{ και } \operatorname{Re}\lambda_i \neq 0, \forall i \neq 1_{\pm}.$$

Για το παραπάνω ζεύγος συζυγών ιδιοτιμών, που είναι ομαλές ως προς μ σε περιοχή του $\mu = \mu^*$, ισχύει ότι

$$\frac{d\operatorname{Re}\lambda_{\pm}}{d\mu}(\mu^*) \neq 0. \quad (\Sigma_2)$$

Τότε υπάρχει διακλάδωση Hopf από το $y^\dagger(\mu)$ όταν $\mu = \mu^*$, που αποτελείται από δύο κλάδους.

Η βιβλιογραφία του παρόντος κεφαλαίου καλύπτεται πλήρως από εκείνη των Κεφαλαίων 1 και 5, οπότε δεν παρατίθεται και πάλι εδώ.

■ ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΑ Ι

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

- (α) Γενικά στοιχεία περί δυναμικών επιδημιολογικών μοντέλων κλάσεων
- (β) Δυναμικά επιδημιολογικά μοντέλα: Βασικό μοντέλο *SIR*

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

- (α) Ασυμπτωτική ανάλυση: Βασικές έννοιες
- (β) Αλγόριθμοι αδιαστατοποίησης

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, [Κεφάλαια 1-6](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Δυναμικά επιδημιολογικά μοντέλα κλάσεων. Χρησιμοποιώντας μοντέλα ΣΔΕ, [1], [2], μπορούμε να προβλέψουμε την (χρονική) εξέλιξη μιας επιδημίας ή/και μιας πανδημίας ενός λοιμώδους μεταδοτικού νοσήματος, π.χ.: πανδημίας όπως αυτής της πανούκλας (στην αρχαία Ελλάδα το 430 – 428 π.Χ., αλλά και στην Ευρώπη το 14ο αιώνα μ.Χ.), του AIDS, αλλά και της πρόσφατης πανδημίας του COVID-19.

Μια ευρέως χρησιμοποιούμενη πρακτική που απλοποιεί τη μαθηματική μοντελοποίηση των λοιμωδών μολυσματικών νοσημάτων είναι η αξιοποίηση των *μοντέλων κλάσεων* (*compartmental models*)¹, [3], [4], [5], [6]. Τα μοντέλα αυτά, σε αντίθεση με τα της Οικολογίας Πληθυσμών που περιγράφουν πληθυσμούς διαφορετικών ειδών, αφορούν κλάσεις ατόμων ενός πληθυσμού. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την κλάση των νοσούντων σε μία χώρα ως προς το μελετούμενο λοιμώδες μολυσματικό νόσημα σε αντιδιαστολή με την αντίστοιχη των μη νοσούντων.

Τα θεμελιώδη μοντέλα κλάσεων για την περιγραφή τη μετάδοσης λοιμωδών μολυσματικών νοσημάτων

¹Χρησιμοποιούμε τον όρο κλάση για τη μετάφραση του αγγλικού *compartment*, για να αναδείξουμε τη συνάφεια αυτού του όρου με τον αντίστοιχο μαθηματικό της κλάσης ισοδυναμίας (*equivalence class*).

περιέχονται σε μία σειρά τριών δημοσιεύσεων από τους Kermack και McKendrick το 1927, [7], το 1932, [8] και το 1933, [9], στην πρώτη από τις οποίες περιγράφονται *επιδημικά μοντέλα* (*epidemic models*), δηλ. μοντέλα χωρίς δημογραφικές παραμέτρους όπως γεννήσεις, μεταναστεύσεις, θάνατοι, ή άλλες όπως π.χ. περιπτώσεις ατελούς ανοσίας, ενώ στις επόμενες δύο δημοσιεύσεις περιγράφονται αντίστοιχα *ενδημικά μοντέλα* (*endemic models*), δηλ. με παρουσία τέτοιων παραμέτρων. Να σημειωθεί ότι στις εργασίες αυτές επεκτάθηκαν και μελετήθηκαν λεπτομερέστερα παλαιότερες ιδέες του Εν'κο, καθώς και των Hamer, Ross, Martini, ιδέες στις οποίες στηρίχθηκαν και άλλοι μελετητές, σύγχρονοι των Kermack και McKendrick, όπως ο Soper.

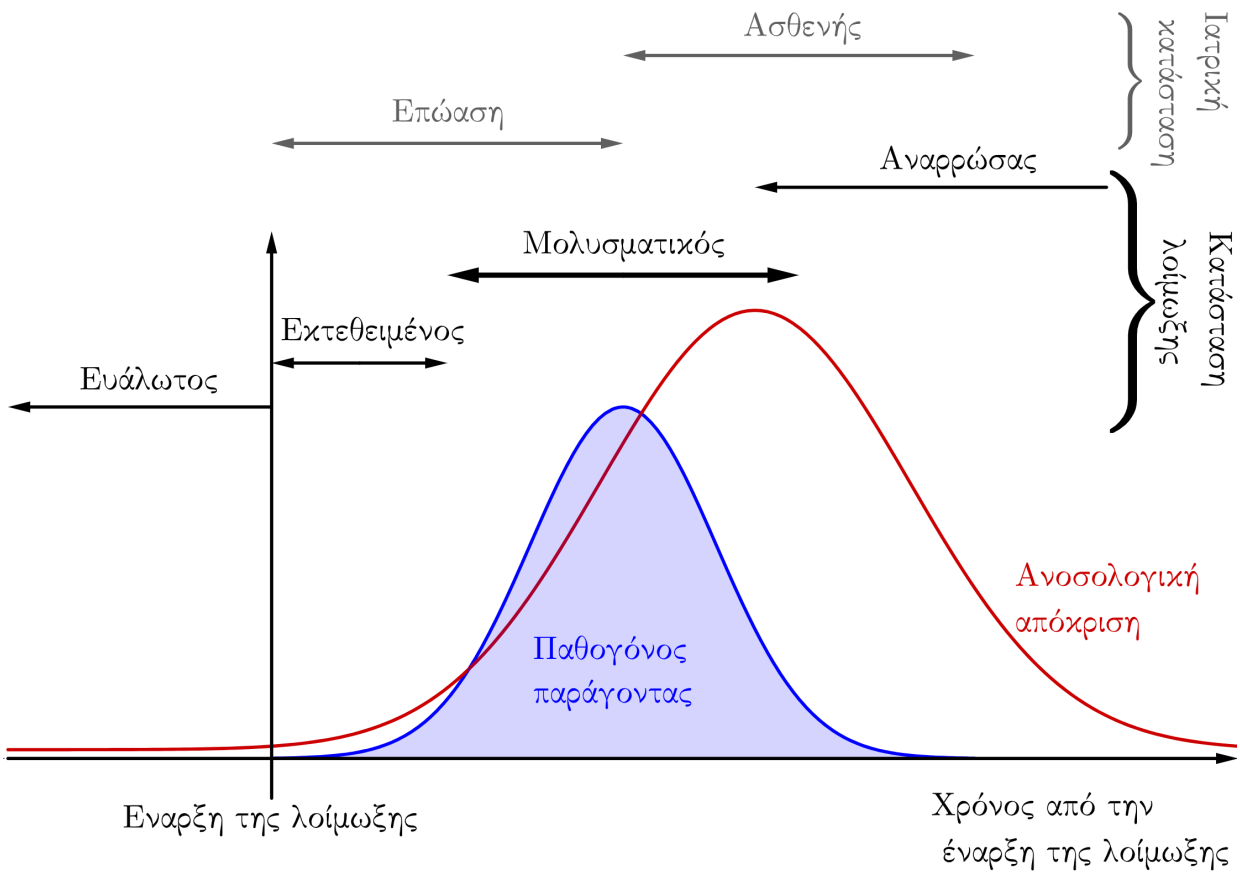
Εν γένει, στα μοντέλα Kermack-McKendrick, τα οποία δεν είναι απαραίτητα αμιγώς ΣΔΕ, ενδεχομένως υπάρχει εξάρτηση των βασικών παραμέτρων από την ηλικία των ατόμων, πρόκειται δηλ. για *μοντέλα δομημένα ως προς την ηλικία* (*age-structured models*). Μία ειδική περίπτωση των μοντέλων αυτών, όπου οι παράμετροι είναι σταθερές ως προς την ηλικία των ατόμων, είναι τα γνωστά μοντέλα *SIR* και οι παραλλαγές τους, με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Για να αναπτύξουμε ένα επιδημιολογικό μοντέλο κλάσεων για τη μελέτη της διασποράς ενός λοιμώδους μολυσματικού νοσήματος σε ένα πληθυσμό, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας διάφορα στοιχεία της Λοιμωξιολογίας και συγκεκριμένα κάποιες από τις κατηγοριοποιήσεις των λοιμώξεων. Οι λοιμώξεις γενικά διακρίνονται σε *ενεργές* (*active*) και σε *λανθάνουσες* (*latent*), ανάλογα με το αν εκδηλώνουν το αντίστοιχο λοιμώδες νόσημα ή όχι. Από τις ενεργές λοιμώξεις διακρίνουμε τις *κλινικές* (*clinical*) από τις *υποκλινικές* (*subclinical*), με βάση την εμφάνιση ή όχι παρατηρήσιμων κλινικών συμπτωμάτων του αντίστοιχου λοιμώδους νοσήματος. Οι κλινικές λοιμώξεις, τώρα, διακρίνονται σε *οξείες* (*acute*), *υποξείες* (*subacute*) και *χρόνιες* (*chronic*), με βάση τον χρονικό ορίζοντα κλιμάκωσης, ύφεσης και εξαφάνισης των συμπτωμάτων των αντίστοιχων λοιμωδών νοσημάτων. Επίσης, οι λοιμώξεις στη γενικότητά τους διακρίνονται με βάση τα κριτήρια Koch (τα οποία συνήθως δεν μπορούν να εφαρμοστούν στη σύγχρονη πρακτική για ηθικούς λόγους) στο αν είναι *μολυσματικές* (*infectious*) ή όχι, δηλ. αν υπάρχει ένας παράγοντας μετάδοσης ή όχι, και οι μολυσματικές διακρίνονται με τη σειρά τους σε *μεταδοτικές* (*contagious*) ή όχι, δηλ. αν ο παράγοντας μετάδοσης διευκολύνεται με την κοντινή κοινωνική επαφή και την ανταλλαγή υγρών ή αν δεν επηρεάζεται από αυτές. Μία άλλη κατηγοριοποίηση, τέλος, μπορεί να γίνει με βάση την ανοσολογική απόκριση του οργανισμού κατά τη διάρκεια της λοίμωξης και μετά από αυτή.

Η πρόοδος ενός λοιμώδους και μεταδοτικού νοσήματος εξαρτάται μεταξύ άλλων από τη συγκέντρωση του παθογόνου παράγοντα στο εσωτερικό του ξενιστή, από τον ρυθμό ανάπτυξής του και από την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτού και των στοιχείων της ανοσοαπόκρισης του ξενιστή. Στο [Σχήμα 7.1](#) βλέπουμε ένα απλοποιημένο προφίλ λοίμωξης, από την αρχική εμφάνιση ενός παθογόνου παράγοντα στον οργανισμό.

Για τη μελέτη της εξέλιξης μιας επιδημίας από ένα λοιμώδες μολυσματικό νόσημα συνήθως κατατάσσουμε έναν πληθυσμό έμβιων ατόμων (ανθρώπων, ζώων, φυτών, κ.ά.) πλήθους N στις παρακάτω, μεταξύ άλλων, κλάσεις:

1. Οι *ευάλωτοι* (*susceptible*) και το πλήθος τους S : Η ομάδα ατόμων του πληθυσμού τα οποία είναι μεν υγιή αλλά και εν δυνάμει ασθενείς.
2. Τα *βρέφη με παθητική ανοσία* (*maternally derived immunity*) και το πλήθος τους M : Η ομάδα ατόμων του πληθυσμού τα οποία δεν γεννιούνται ανήκοντας στην ομάδα των ευάλωτων, αλλά έχοντας παθητική ασυλία στην ασθένεια για τους πρώτους μήνες της ζωής τους λόγω των μητρικών αντισωμάτων (από τον πλακούντα ή/και το μητρικό γάλα).
3. Οι *μολυσμένοι/μολυσματικοί* (*infected/infectious*) και το πλήθος τους I : Η ομάδα ατόμων του πληθυσμού τα οποία φέρουν τον παθογόνο παράγοντα, νοσούν από αυτόν ή/και τον μεταδίδουν.
4. Οι *εκτεθειμένοι* (*exposed*) και το πλήθος τους E : Η ομάδα ατόμων του πληθυσμού τα οποία φέρουν τον παθογόνο παράγοντα, αλλά όχι ακόμη μολυσματικά (λανθάνουσα φάση).
5. Οι *αναρρώσαντες/διαγραμμένοι* (*recovered/removed*) και το πλήθος τους R : Η ομάδα ατόμων του πληθυσμού τα οποία είτε έχουν θεραπευτεί και έχουν αποκτήσει ανοσία, είτε έχουν πεθάνει, είτε έχουν μπει



Σχήμα 7.1: Χρονοδιάγραμμα λοίμωξης που περιγράφει τη δυναμική του παθογόνου παράγοντα, την ανοσολογική απόκριση του φορέα/ασθενούς, καθώς και επιμέρους φάσεις της λοίμωξης. Να σημειωθεί ότι η περίοδος ασθένειας όπου τα συμπτώματα εκδηλώνονται δεν συσχετίζεται απαραίτητα με κάποια από τις φάσεις λοίμωξης.

σε καραντίνα, είτε έχουν αφαιρεθεί από το σύνολο του πληθυσμού κατόπιν της λοίμωξής τους για να περιοριστεί η έκταση της λοίμωξης στον πληθυσμό (συνήθης τακτική σε κτηνοτροφικές μονάδες).

- 6. Οι φορείς (*carrier*) και το πλήθος τους C : Η ομάδα ατόμων του πληθυσμού τα οποία φέρουν τον παθογόνο παράγοντα χωρίς να εκδηλώνουν τη νόσο. Η δυνατότητα μετάδοσης του μολυσματικού παράγοντα αυτών των ατόμων παρουσιάζει διακυμάνσεις τόσο στο χρόνο για μία λοίμωξη όσο και μεταξύ των διάφορων λοιμώξεων.

Η επιλογή της κλάσης (ισοδυναμίας) στην οποία θα ανήκει το κάθε άτομο καθορίζεται από την επιλογή της σχέσης (ισοδυναμίας) που διέπει τα άτομα των κλάσεων, η οποία με τη σειρά της καθορίζεται (στην προκειμένη περίπτωση) από συγκεκριμένες κλινικοεργαστηριακές εξετάσεις.

Με βάση τους ορισμούς παραπάνω, το I καθορίζει την ύπαρξη ή μη αλλά και την πορεία μιας επιδημίας. Πράγματι, λέμε ότι το φαινόμενο εξελίσσεται όσο μεταβάλλεται το I . Λέμε επίσης ότι μία επιδημία ξεσπά όταν το I αυξάνεται σε σχέση με την αρχική μας παρατήρηση, ότι έχει φτάσει στην κορυφή της τη στιγμή που το I θα αρχίσει να μειώνεται, και τότε πλέον η επιδημία θα βαίνει προς ύφεση.

Σημειώνεται, τέλος, ότι όταν δεν ληφθούν υπόψη δημογραφικοί όροι στο μοντέλο, αν οι διαγραμμένοι περιέχουν και τυχόν νεκρούς από το λοιμώδες μολυσματικό νόσημα, τότε το πλήθος N είναι σταθερό, δηλ. $N \equiv N_0 > 0$. Από την άλλη μεριά, όταν ληφθούν τέτοιοι όροι υπόψη, αν η χρονική κλίμακα της εξέλιξης μιας επιδημίας από ένα λοιμώδες μολυσματικό νόσημα είναι πολύ μικρότερη (π.χ. εβδομάδες) από την αντιστοιχη για ουσιαστικές αλλαγές στην αναλογία γεννήσεων/θανάτων (π.χ. δεκαετίες), κάτι που ισχύει εν γένει, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πλήθος N είναι σταθερό.

Βασικό μοντέλο SIR. Για την κατασκευή του μοντέλου απαιτούμε τα ακόλουθα:

1. Ο πληθυσμός σταθερού πλήθους $N \equiv N_0$ χωρίζεται σε τρεις κλάσεις, αυτές των ευάλωτων, των μολυσμένων/μολυσματικών και των διαγραμμένων, τα πλήθη των οποίων, S , I και R αντίστοιχα, είναι συναρτήσεις ως προς τον χρόνο t (και μάλιστα τουλάχιστον απόλυτα συνεχείς). Δηλ.,

$$N_0 \equiv N = S + I + R. \quad (7.1)$$

Για παράδειγμα, δεν λαμβάνουμε υπόψη μας το χρόνο επώασης του λοιμώδους νοσήματος, θεωρούμε ότι όσοι αναρρώνουν έχουν αναπτύξει ισόβια ανοσία κ.ο.κ..

2. Κατά την απουσία μολυσμένων/μολυσματικών το πλήθος των υπολοίπων είναι σταθερό, δηλ.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dR}{dt} \equiv 0, \text{ όταν } I \equiv 0.$$

3. Αντίστοιχα, κατά την απουσία ευάλωτων (“τροφή” για την επιδημία) το πλήθος των μολυσμένων/μολυσματικών μειώνεται με ρυθμό ανάλογο του πλήθους, δηλ.

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I, \text{ όπου } \gamma > 0, \text{ όταν } S \equiv 0.$$

4. Σε πλήρη αντιστοιχία με το σύστημα (4.1) και σε συμφωνία με τον **νόμο δράσης της μάζας** (I τύπο Holling), [10], οι ρυθμοί μεταβολής του πλήθους των ευάλωτων και των μολυσμένων/μολυσματικών εξαρτώνται γραμμικά από το γινόμενο των πληθών τους, και μάλιστα έχουν αντίθετους γραμμικούς συντελεστές, $-\beta < 0$ και $\beta > 0$, αντίστοιχα, με

$$\beta = \frac{m \omega}{N_0}, \quad (7.2)$$

όπου m ο μέσος αριθμός κοντινών κοινωνικών επαφών ενός ατόμου με άλλα άτομα συναρτήσει του χρόνου και ω η πιθανότητα συναρτήσει του χρόνου ένας ευάλωτος να μεταπηδήσει στη κλάση των μολυσμένων/μολυσματικών μετά από μία κοντινή κοινωνική επαφή με έναν από αυτούς.

Συνοψίζοντας, οδηγούμαστε στις εξισώσεις:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad (7.3\alpha)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I + \beta SI \quad (7.3\beta)$$

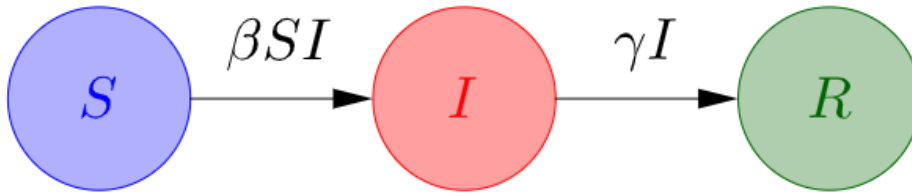
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I. \quad (7.3\gamma)$$

Η (7.3γ) προκύπτει από τον συνδυασμό των (7.3α) και (7.3β) με την

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0,$$

η οποία θέλουμε να ισχύει λόγω της (7.1). Οι ροές μετακίνησης από τη μία ομάδα στην άλλη απεικονίζονται στο Σχήμα 7.2.

Σημειώνουμε ότι το β είναι ο (μέσος) ρυθμός μετάδοσης του λοιμώδους μολυσματικού νοσήματος και ότι η *επίπτωσή* (*incidence*) του, δηλ. το πλήθος των νέων κρουσμάτων ανά μονάδα χρόνου, εκφράζεται με τον όρο βSI στο μοντέλο αυτό, σε αντιδιαστολή με το γ που είναι ο (μέσος) ρυθμός ανάρρωσης/διαγραφής των μολυσμένων/μολυσματικών. Έτσι, το γ^{-1} είναι η (μέση) διάρκεια του νοσήματος, ή αλλιώς η (μέση) μολυσματική διάρκεια, μέχρι την ανάρρωση/διαγραφή.



Σχήμα 7.2: Διάγραμμα ροών του μοντέλου (7.3).

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Ένα ΠΑΤ στο οποίο χρησιμοποιείται ένα τέτοιο μοντέλο είναι το εξής:

Με δεδομένα $S_0, I_0, R_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S, I, R) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^3$, τέτοια ώστε η (S, I, R) να ικανοποιεί τόσο το (7.3) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0)$.

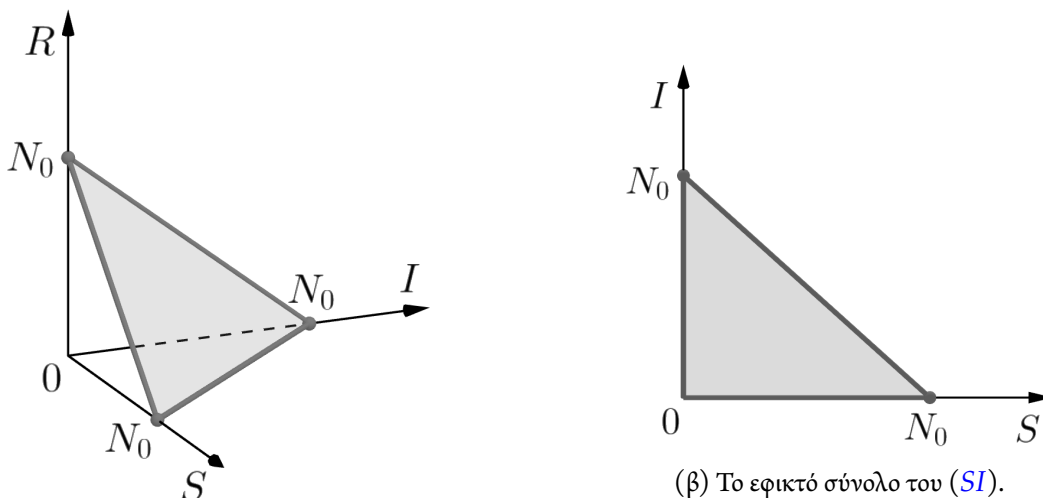
Λόγω της (7.1), το παραπάνω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το εξής:

Με δεδομένα $S_0, I_0, R_0 \geq 0$, θέτουμε $N_0 := S_0 + I_0 + R_0$ και αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S, I, R) : \mathcal{I} \rightarrow \{(s, i, r) \in [0, N_0]^3 \mid s + i + r = N_0\}$, τέτοια ώστε η (S, I, R) να ικανοποιεί τόσο το (7.3) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0)$. (SIR)

Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, λόγω της (7.1) εύκολα συμπεραίνουμε ότι η συνιστώσα R της λύσης περισεύει, και έτσι, λόγω της δομής του ίδιου του (7.3), το (SIR) είναι ισοδύναμο με το εξής:

Με δεδομένα $S_0, I_0, R_0 \geq 0$, θέτουμε $N_0 := S_0 + I_0 + R_0$ και αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S, I) : \mathcal{I} \rightarrow \{(s, i) \in [0, N_0]^2 \mid s + i \leq N_0\}$, τέτοια ώστε η (S, I) να ικανοποιεί τόσο το $\{(7.3\alpha) - (7.3\beta)\}$ στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(S(0), I(0)) = (S_0, I_0)$. (SI)

Το εφικτό σύνολο, δηλ. το σύνολο τιμών των εξαρτημένων μεταβλητών, του (SIR) και του (SI), απεικονίζεται στο Σχήμα 7.3α και στο Σχήμα 7.3β, αντίστοιχα.



(α) Το εφικτό σύνολο του (SIR).

(β) Το εφικτό σύνολο του (SI).

Σχήμα 7.3: Το εφικτό σύνολο του (SIR) και του (SI).

Άσκηση 7.1. Δώστε τις λεπτομέρειες σχετικά με το ότι τα (SIR) και (SI) είναι ισοδύναμα σε όλες τις Φάσεις μελέτης τους.

Υπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχούς ως προς τα αρχικά δεδομένα λύσης του γενικού προβλήματος. Ανεξάρτητα από το πρόσημο του N_0 , εξάγουμε, κατά τα γνωστά (βλ. Άσκηση 7.2), ύπαρξη, μοναδικότητα και ομαλότητα μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης,

$$(S^\diamond, I^\diamond) : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \infty,$$

για το εξής βοηθητικό γενικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } S_0, I_0 \in \mathbb{R}, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ (S, I) : \mathcal{I} & \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ τέτοια ώστε η } (S, I) \text{ να ικανοποιεί τόσο το } \{(7.3\alpha) - (7.3\beta)\} \text{ στο } (S^\diamond I^\diamond) \\ & \mathcal{I} \setminus \{0\} \text{ όσο και την αρχική συνθήκη } (S(0), I(0)) = (S_0, I_0). \end{aligned}$$

Αναλλοίωτα σύνολα, καλή τοποθέτηση ενός ενδιάμεσου προβλήματος και ομαλότητα της λύσης του. Κατά τα γνωστά, πλέον, μπορούμε να δείξουμε ότι τα σύνολα

$$\{(s, 0)\} \forall s \in [0, \infty), \{0\} \times (0, \infty) \text{ και } (0, \infty)^2$$

είναι αναλλοίωτα για το $(S^\diamond I^\diamond)$ (βλ. Άσκηση 7.2). Συνεπώς, η (S^\diamond, I^\diamond) όταν $S_0, I_0 \geq 0$ λύνει επίσης το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } S_0, I_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ (S, I) : \mathcal{I} & \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ τέτοια ώστε η } (S, I) \text{ να ικανοποιεί τόσο το } \{(7.3\alpha) - (7.3\beta)\} \\ & \text{στο } \mathcal{I} \setminus \{0\} \text{ όσο και την αρχική συνθήκη } (S(0), I(0)) = (S_0, I_0). \end{aligned} \quad (S^\geq I^\geq)$$

Δηλ. υπάρχει μοναδική, ομαλή, συνεχής ως προς τα αρχικά δεδομένα και μεγιστική λύση του $(S^\geq I^\geq)$,

$$(S^\geq, I^\geq) : (-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ όπου } 0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \infty,$$

καθώς επίσης τα παραπάνω σύνολα είναι αναλλοίωτα και για το $(S^\geq I^\geq)$.

Άσκηση 7.2. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της μελέτης Φάσης I του $(S^\diamond I^\diamond)$.

Ολικότητα της λύσης του ενδιάμεσου προβλήματος. Σχετικά με το ε_2 , αθροίζοντας τις (7.3α) και (7.3β) έπεται ότι

$$\frac{dS^\geq}{dt} + \frac{dI^\geq}{dt} = -\gamma I^\geq \leq 0,$$

άρα από σύγκριση έχουμε ότι

$$S^\geq(t) + I^\geq(t) \leq S_0 + I_0, \forall t \in [0, \varepsilon_2),$$

δηλ. $\varepsilon_2 = \infty$ και έτσι έπεται η θετική ολικότητα.

Σχετικά με το ε_1 , αντιστρέφουμε πρώτα τον χρόνο και έτσι θεωρούμε την

$$\begin{aligned} (\sigma, \iota) : (-\infty, \varepsilon_1) & \rightarrow [0, \infty)^2 \\ \tau & \mapsto (\sigma(\tau), \iota(\tau)) := (S^\geq(-\tau), I^\geq(-\tau)), \end{aligned}$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\tau} & = \beta\sigma\iota \\ \frac{d\iota}{d\tau} & = \gamma\iota - \beta\sigma\iota \end{aligned}$$

και $(\sigma(0), \iota(0)) = (S_0, I_0)$. Αθροίζοντας τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος, παίρνουμε ότι

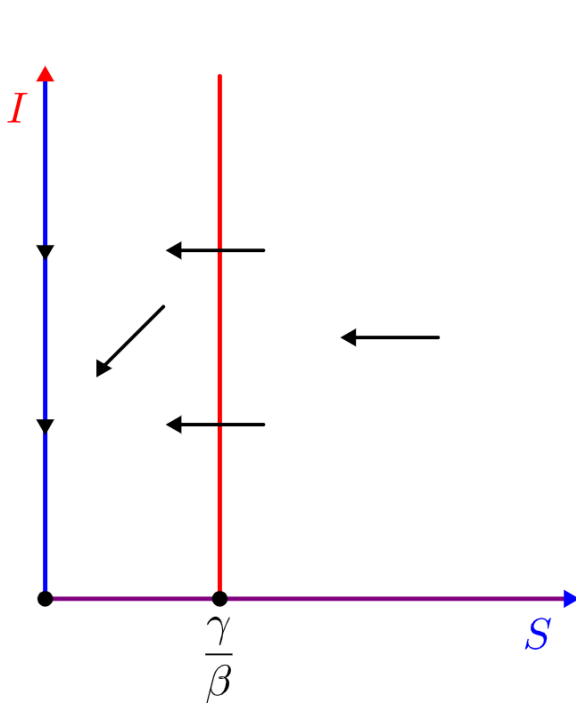
$$\frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{d\iota}{d\tau} = \gamma \iota \leq \gamma(\sigma + \iota),$$

άρα από σύγκριση συμπεραίνουμε ότι

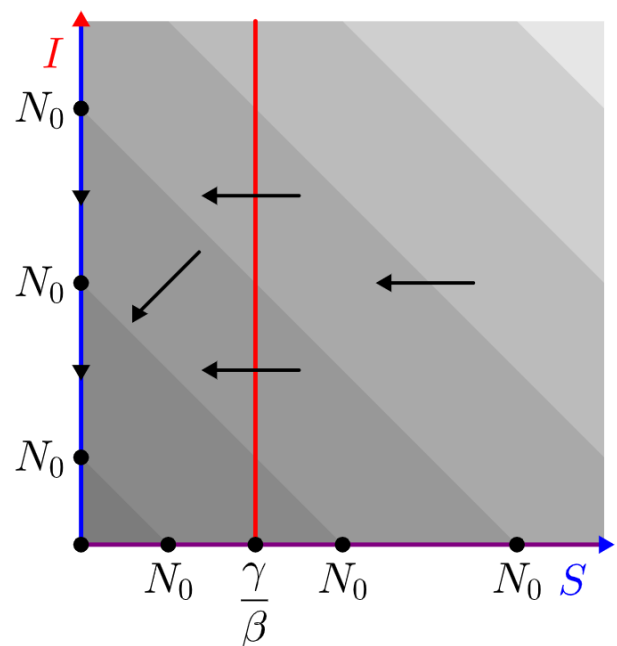
$$\sigma(\tau) + \iota(\tau) \leq (S_0 + I_0) e^{\gamma\tau}, \quad \forall \tau \in [0, \varepsilon_1),$$

δηλ. $\varepsilon_1 = \infty$ και η αρνητική ολικότητα έπεται.

Πεδίο διευθύνσεων θετική ομαλότητα των λύσεων του αρχικού προβλήματος. Η αδρή κατασκευή του πεδίου διευθύνσεων του $(S \geq I \geq 0)$ δίνεται στο Σχήμα 7.4α.



(α) Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(S \geq I \geq 0)$. Με μπλε οι S -μηδενοκλινείς καμπύλες και με κόκκινο οι I -μηδενοκλινείς. Η καμπύλη $I \equiv 0$ είναι μωβ γιατί είναι κοινή μηδενοκλινής. Συμπεραίνουμε άμεσα την ολικότητα των λύσεων του προβλήματος.



(β) Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (SI) για διάφορες τιμές του N_0 . Οι μηδενοκλινείς είναι οι ίδιες με αυτές του Σχήματος 7.4α, ωστόσο περιορισμένες εντός του εκάστοτε εφικτού συνόλου. Συμπεραίνουμε τη θετική ολικότητα των λύσεων του προβλήματος, ωστόσο, υπάρχει τώρα το ενδεχόμενο μια (μεγιστική) λύση να ορίζεται πλέον σε διάστημα που είναι κλειστό από τα αριστερά.

Σχήμα 7.4: Αδρή απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(S \geq I \geq 0)$ και του (SI) . Μέσω της διαδικασίας αυτής μπορούμε για τα συγκεκριμένα προβλήματα να βγάλουμε συμπεράσματα που αφορούν την ολικότητα ή μη των λύσεών τους.

Τροποποιώντας κατάλληλα το Σχήμα 7.4α, μπορούμε να κατασκευάσουμε αδρά και το πεδίο διευθύνσεων του (SI) , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.4β. Η μόνη διαφορά με το Σχήμα 7.4α είναι ότι πλέον οφείλουμε να λάβουμε υπόψη μας το εφικτό σύνολο

$$\{(s, i) \in [0, N_0]^2 \mid s + i \leq N_0\},$$

εντός του οποίου θα “ζουν” τώρα οι μεγιστικές λύσεις μας. Άρα παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα, θετικά ολικής, και μεγιστικής λύσης του (SI) ,

$$(S, I) : \begin{cases} \text{είτε } \mathbb{R} \\ \text{είτε } [-\varepsilon_1, \infty), \quad \text{όπου } \varepsilon_1 \in [0, \infty) \end{cases} \rightarrow [0, \infty)^2.$$

Δηλ., η μοναδική μεγιστική λύση του (SI) μπορεί να έχει για πεδίο ορισμού διάστημα που είναι κλειστό από τα αριστερά (βλ. Άσκηση 7.4).

Συμπερασματικά, η αδρή απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων ενός προβλήματος είναι ικανή κάποιες φορές να μας δώσει πληροφορίες και για την ολικότητα ή μη των λύσεών του.

Άσκηση 7.3. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της κατασκευής του Σχήματος 7.4.

Άσκηση 7.4. Συμπεράνετε ότι οι τροχιές των μεγιστικών λύσεων του (SI) που διέρχονται (ουσιαστικά ξεκινούν) από την υποτείνουσα του αντίστοιχου εφικτού συνόλου εκτός του $(N_0, 0)$, είναι οι μόνες που έχουν για πεδίο ορισμού διάστημα κλειστό από τα αριστερά, και σχεδιάστε αδρά μια τέτοια.

Γενική λύση σε πεπλεγμένη μορφή. Ορίζουμε

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (s, i) \mapsto f(s, i) := -\beta i + \gamma \ln s - \beta s$$

και την $F : \mathbb{R} \text{ ή } [-\varepsilon_1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ως $F := f \circ (S, I)$ όταν $S_0 > 0$, όπου (S, I) λύση του (SI) , αφού αν $S_0 > 0$ τότε $S(t) > 0$ για κάθε $t \in (-\varepsilon_1, \infty)$ ή $t \in [-\varepsilon_1, \infty)$. Χρησιμοποιώντας το (7.3), άμεσα παίρνουμε το νέο σύστημα

$$\frac{dS}{dt} = SI \frac{\partial f}{\partial i}(S, I) \\ \frac{dI}{dt} = -SI \frac{\partial f}{\partial s}(S, I)$$

από όπου παίρνουμε την

$$\frac{dF}{dt} = 0,$$

δηλ. καταλήγουμε στην

$$I + S - \frac{\gamma}{\beta} \ln S = c, \text{ για κάποιο σταθερό } c \in \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

Μπορούμε εύκολα με τη μελέτη της (7.4) να αποτυπώσουμε με αξιοπιστία το γράφημα των καμπυλών στάθμης, η πραγματική μορφή των οποίων δίνεται στο Σχήμα 7.5β.

Συνεπώς, είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε αδρά μεν, ορθά και χωρίς να χάνουμε πληροφορία δε, το διάγραμμα φάσης του (SI) , η πραγματική μορφή του οποίου δίνεται στο Σχήμα 7.6.

Άσκηση 7.5. Δώστε τις λεπτομέρειες κατασκευής του Σχήματος 7.5 και του Σχήματος 7.6.

Ανάλυση ευστάθειας. Όπως άλλωστε υπονοήσαμε κατά την εύρεση των αναλλοιώτων συνόλων, τα σ.ι. του (SI) είναι τα

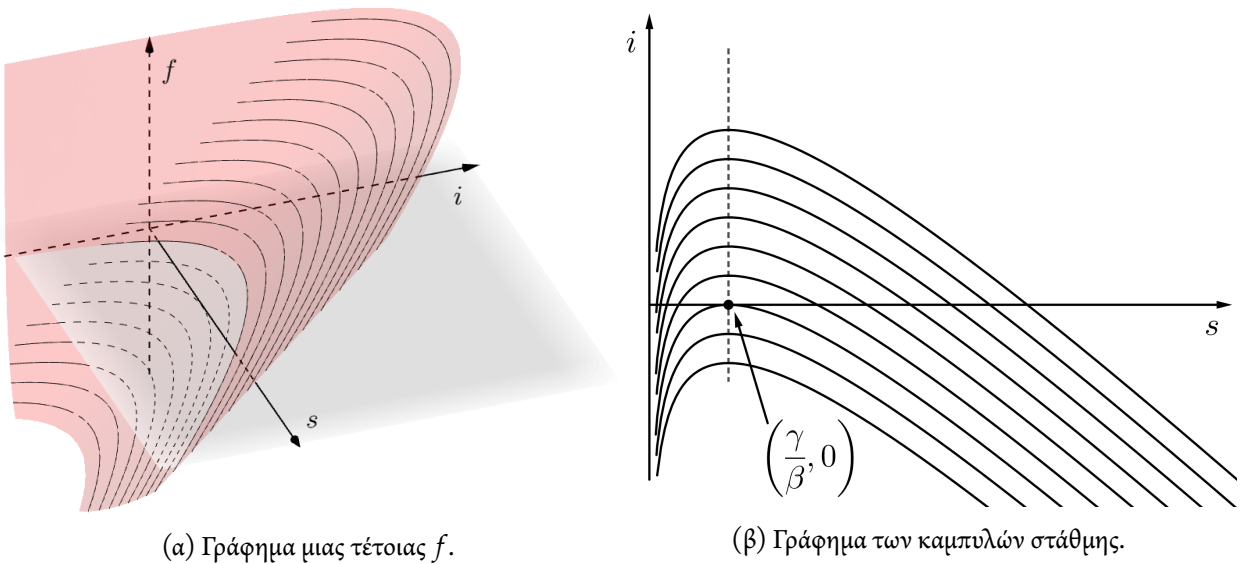
$$(S^*, I^*) = (s, 0), \quad \forall s \in [0, N_0].$$

Ήδη με το Σχήμα 7.6 έχουμε εικόνα της ευστάθειας/αστάθειας των παραπάνω σ.ι.. Ας γίνουμε όμως πιο αναλυτικοί.

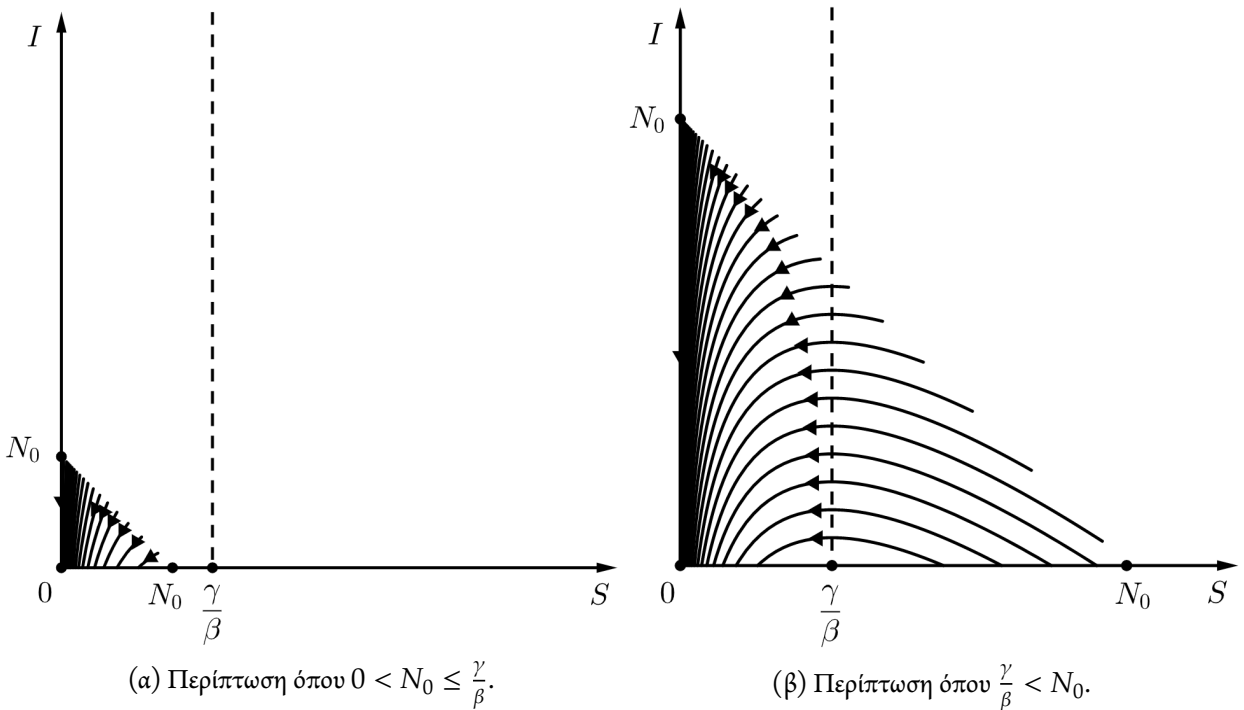
Αν προσπαθήσουμε να βγάλουμε συμπέρασμα μέσω γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας θα οδηγηθούμε εν μέρει σε αδιέξοδο. Πράγματι, ο πίνακας Jacobi του συστήματός μας είναι ο

$$J(s, i) = \begin{pmatrix} -\beta i & -\beta s \\ \beta i & -\gamma + \beta s \end{pmatrix}$$

και οι ιδιοτιμές του στα σ.ι. είναι οι $\lambda_1 = 0$ και $\lambda_2 = -\gamma + \beta s$ για $s \in [0, N_0]$. Οπότε



Σχήμα 7.5: Γεωμετρία των f και των καμπυλών στάθμης.



Σχήμα 7.6: Διαγράμματα φάσης του (SI) . Αν $R_0 = 0$, τότε όλες οι τροχιές ξεκινούν από την $I + S = N_0$. Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά της λύσης ενδεχομένως να αλλάξει ανάλογα με το αν $0 < N_0 \leq \frac{\gamma}{\beta}$ ή αν $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$. Συγκεκριμένα, αν εκφράσουμε το I της λύσης συναρτήσει του S , τότε ενώ στην περίπτωση όπου $0 < N_0 \leq \frac{\gamma}{\beta}$ η I είναι φθίνουσα για κάθε δεδομένη αρχική συνθήκη, στην περίπτωση όπου $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$ το I ενδεχομένως να αυξάνει πριν να αρχίσει τελικά να φθίνει.

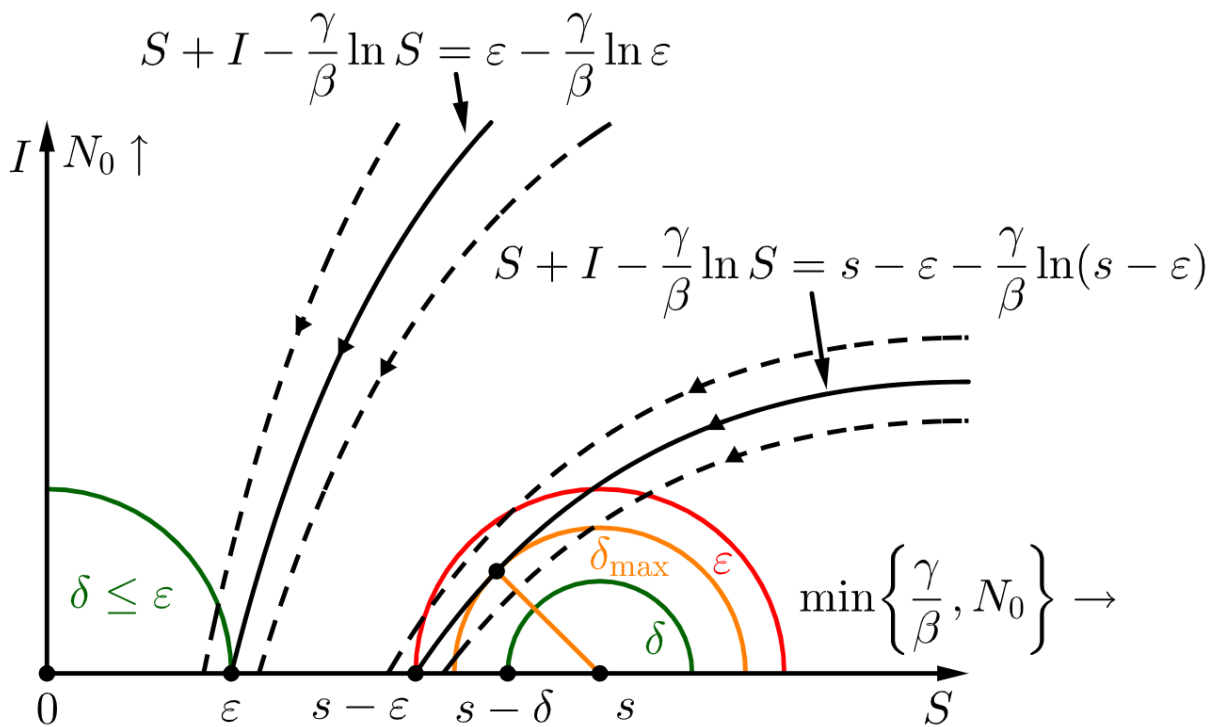
- αν $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$, τότε το $(s, 0)$ για κάθε $s \in \left(\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right]$ είναι θετικά ασταθές, ενώ
- δεν μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με το $(s, 0)$ για κάθε $s \in \left[0, \min\left\{\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right\}\right]$.

Ωστόσο, υπό το πρίσμα του Σχήματος 7.6 μπορούμε να κατασκευάσουμε το Σχήμα 7.7, που ανοίγει τον δρόμο

για την αξιοποίηση απευθείας του (“ $\varepsilon - \delta$ ”) ορισμού της ευστάθειας ως εξής (βλ. [Άσκηση 7.7](#)):

- Για το $(0, 0)$, για κάθε $\varepsilon \in \left(0, \frac{\gamma}{\beta}\right]$ αρκεί να επιλέξουμε κάποιο $\delta \in (0, \varepsilon]$.
- Για το $(s, 0)$ με $s \in \left(0, \min\left\{\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right\}\right]$, για κάθε $\varepsilon \in (0, s]$ αρκεί να επιλέξουμε κάποιο $\delta \in (0, \delta_{\max}]$, όπου $\delta_{\max} \in (0, \varepsilon)$ με

$$\delta_{\max} := \text{dist}\left((s, 0), \left\{S + I - \frac{\gamma}{\beta} \ln S = s - \varepsilon - \frac{\gamma}{\beta} \ln(s - \varepsilon)\right\}\right).$$



Σχήμα 7.7: Σχηματική απεικόνιση των επιτρεπτών δ σε σχέση με τα ε για την ευστάθεια των σ.ι. $(s, 0)$ με $s \in \left[0, \min\left\{\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right\}\right]$, μέσω του ορισμού της ευστάθειας.

Μάλιστα, έχουμε ότι η παραπάνω ευστάθεια δεν είναι ασυμπτωτική.

Συνοπτικά, έχουμε τον [Πίνακα 7.1](#) για την ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του (SI) .

Πίνακας 7.1: Ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του (SI) .

συνθήκη \ σ.ι.	$(s, 0), \forall s \in \left[0, \min\left\{\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right\}\right]$	$(s, 0), \forall s \in \left(\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right]$
$0 < N_0 \leq \frac{\gamma}{\beta}$	θετικά ευσταθές, όχι ασυμπτωτικά	–
$\frac{\gamma}{\beta} < N_0$	θετικά ευσταθές, όχι ασυμπτωτικά	θετικά ασταθές

Άσκηση 7.6. επαληθεύστε τη θετική αστάθεια των $(s, 0)$ για κάθε $s \in \left(\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right]$ όταν $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$, με τη χρήση του θεωρήματος Četaev και της

$$V: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$(s, i) \mapsto V(s, i) := \frac{i^2}{2}.$$

Άσκηση 7.7. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες σχετικά με την ευστάθεια του $(s, 0)$ για κάθε $s \in \left[0, \min\left\{\frac{\gamma}{\beta}, N_0\right\}\right]$, απευθείας με την επαλήθευση του ορισμού αυτής.

Επιδημιολογικά συμπεράσματα. Με βάση το διάγραμμα φάσης του Σχήματος 7.6, η επιδημία θα ξεσπάσει αν και μόνον αν

$$\boxed{\frac{\gamma}{\beta} < S_0 < N_0}, \tag{7.5}$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\frac{\gamma}{\beta} < S_0 \neq N_0},$$

και ο ουδός, ή κατώφλι (*threshold*), για την ύφεσή της είναι η τιμή $\frac{\gamma}{\beta}$ για το πλήθος των ευάλωτων S . Το σύμπερασμα αυτό ονομάζεται και *θεώρημα ουδού της Επιδημιολογίας* (*threshold theorem of Epidemiology*). Άρα μία επιδημία μπορεί να ελεγχθεί με τρεις τρόπους ως εξής:

1. Με τη μείωση του S_0 , δηλ. με τη μείωση του αρχικού πλήθους των εν δυνάμει μολυσμένων/μολυσματικών.
2. Με την αύξηση του γ , δηλ. με αύξηση της ανίχνευσης των μολυσμένων/μολυσματικών, μέσω ιατρικών ελέγχων αλλά και μέσω της ενημέρωσης του κοινού, όπως επίσης με έγκαιρη απομόνωση και τη σωστή περίθαλψή τους.
3. Με τη μείωση του β , και συγκεκριμένα του m στη σχέση (7.2), δηλ. με τη μείωση του μέσου αριθμού των κοντινών κοινωνικών επαφών κάθε ατόμου.

Τέλος, η επιδημία θα σβήσει λόγω εξάλειψης των μολυσμένων/μολυσματικών και όχι λόγω του ότι δεν θα υπάρχουν άλλοι ευάλωτοι που να μη μεταπήδησαν στη κλάση των τελευταίων, καθώς κατά το κρίσιμο σημείο της (δηλ. όταν λάβει το I τη μέγιστή της τιμή) πάντα θα υπάρχουν εναπομείναντες ευάλωτοι.

Το αδιάστατο πρόβλημα. Στην πράξη χρησιμοποιείται ευρέως η αδιάστατη μορφή του (*SIR*) και του (*SI*), που οδηγεί στη μείωση του αριθμού των παραμέτρων σε μία. Μίας και η εν δυνάμει μέγιστη τιμή των S , I και R είναι από κοινού η N_0 , οι αδιάστατες εξαρτημένες μεταβλητές επιλέγονται να είναι οι

$$S \mapsto S_\alpha := \frac{S}{N_0}, I \mapsto I_\alpha := \frac{I}{N_0}, R \mapsto R_\alpha := \frac{R}{N_0}$$

και το (7.3) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dS_\alpha}{dt} = -\frac{\beta N_0}{\gamma} S_\alpha I_\alpha$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dI_\alpha}{dt} = -I_\alpha + \frac{\beta N_0}{\gamma} S_\alpha I_\alpha$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{dR_\alpha}{dt} = I_\alpha,$$

το οποίο μας ωθεί να επιλέξουμε ως αδιάστατη ανεξάρτητη μεταβλητή την

$$t \mapsto t_\alpha := \gamma t$$

και έτσι το (7.3) να γίνει τελικά

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = -\mathcal{R}_0 S_\alpha I_\alpha \quad (7.6\alpha)$$

$$\frac{dI_\alpha}{dt_\alpha} = -I_\alpha + \mathcal{R}_0 S_\alpha I_\alpha \quad (7.6\beta)$$

$$\frac{dR_\alpha}{dt_\alpha} = I_\alpha, \quad (7.6\gamma)$$

όπου

$$\mathcal{R}_0 := \frac{\beta N_0}{\gamma}$$

είναι η μοναδική (αδιάστατη) σταθερά του αδιάστατου μοντέλου η οποία ονομάζεται βασικός αριθμός (αναλογία, ρυθμός) αναπαραγωγής (*basic reproductive number (ratio, rate)*) και προφέρεται “*r nought*” ή “*r zero*”), βλ., π.χ., [11]. Μάλιστα, με βάση την (7.2),

ο \mathcal{R}_0 είναι ο μέσος αριθμός των δευτερογενών κρουσμάτων που προκαλούνται από έναν μόνο μολυσμένο/μολυσματικό, όταν αυτός βρεθεί σε ένα πληθυσμό με μόνο ευάλωτους γύρω του.

Έτσι, για παράδειγμα, η αδιαστατοποιημένη εκδοχή του (SI) θα έχει ως εξής:

Με δεδομένα $S_0, I_0, R_0 \geq 0$, θέτουμε $N_0 := S_0 + I_0 + R_0$ και αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S_\alpha, I_\alpha) : \mathcal{I} \rightarrow \{(s, i) \in [0, 1]^2 \mid s + i \leq 1\}$, τέτοια ώστε η (S_α, I_α) να ικανοποιεί τόσο το $\{(7.6\alpha) - (7.6\beta)\}$ στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(S_\alpha, I_\alpha) = \left(\frac{S_0}{N_0}, \frac{I_0}{N_0}\right)$ για $t_\alpha = 0$. (SI α)

Τώρα, η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ξεσπάσει επιδημία, (7.5), γίνεται

$$1 < \mathcal{R}_0 S_{\alpha_0} < \mathcal{R}_0,$$

όπου $S_{\alpha_0} := \frac{S_0}{N_0}$, ή ισοδύναμα

$$S_{\alpha_0} \neq 1, S_{\alpha_0} \neq 0 \text{ και } \mathcal{R}_0 > \frac{1}{S_{\alpha_0}}.$$

Άρα,

- αναγκαία συνθήκη για να ξεσπάσει επιδημία είναι η $\mathcal{R}_0 > 1$, ενώ
- ικανή συνθήκη για να μην ξεσπάσει επιδημία είναι η $\mathcal{R}_0 \leq 1$.

Συνεχίζοντας την αναδιατύπωση των συμπερασμάτων μας της προηγούμενης παραγράφου, θα έχουμε ότι όσο μεγαλύτερη του 1 είναι η τιμή του \mathcal{R}_0 , τόσο δυσκολότερο είναι να ελεγχθεί η επιδημία, κάτι που έχει όντως παρατηρηθεί. Για παράδειγμα, το SARS που προκαλείται από τον SARS-CoV (SARS-CoV-1) έχει $2 \lesssim \mathcal{R}_0 \lesssim 4$ και το COVID-19 που προκαλείται από τον SARS-CoV-2 έχει: το αρχέγονο στέλεχος $2.4 \lesssim \mathcal{R}_0 \lesssim 3.4$, το στέλεχος Άλφα $4 \lesssim \mathcal{R}_0 \lesssim 5$, το στέλεχος Δέλτα $\mathcal{R}_0 \approx 5.1$ και το στέλεχος Όμικρον $\mathcal{R}_0 \approx 9.5$, καθιστώντας τους κορωνοϊούς αυτούς πιο μολυσματικούς από τους ιούς της γρίπης (που μεταδίδονται επίσης

μέσω σταγονιδίων στον αέρα) καθώς για τον βασικό αριθμό αναπαραγωγής της γρίπης έχει υπολογιστεί ότι $1.2 \lesssim \mathcal{R}_0 \lesssim 1.4$. Από την άλλη, η ανεμοβλογιά, δηλ. η πρωτοπαθής λοίμωξη από τον ιό του έρπητα ζωστήρα, HHV-3 ή VZV, και η ιλαρά, που προκαλείται από τον παραμυξοϊό της ιλαράς του γένους morbillivirus, MeV, ανήκουν στις πιο μεταδοτικές ασθένειες με $10 \lesssim \mathcal{R}_0 \lesssim 12$ και $12 \lesssim \mathcal{R}_0 \lesssim 18$, αντίστοιχα.

Αναφορικά μόνο σημειώνουμε ότι μία άλλη ποσότητα που χρησιμοποιείται συχνά είναι ο δραστήκος/ενεργός/αποτελεσματικός “αριθμός” αναπαραγωγής (*effective reproductive number*) ο οποίος ορίζεται ως η συνάρτηση

$$\mathcal{R}_e: \mathbb{R} \text{ ή } [-\gamma\varepsilon_1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$t_\alpha \mapsto \mathcal{R}_e(t_\alpha) := \mathcal{R}_0 S_\alpha(t_\alpha),$$

και λαμβάνει υπόψη του το ποσοστό των ευάλωτων, δηλ.

ο $\mathcal{R}_e(t_\alpha)$ είναι ο μέσος αριθμός των δευτερογενών κρουσμάτων που προκαλούνται από έναν μόνο μολυσμένο/μολυσματικό τη χρονική στιγμή t_α .

Εάν, μέσω παρεμβάσεων (“μέτρα κατά επιδημίας”), ο \mathcal{R}_e μπορέσει να γίνει μικρότερος από το 1, τότε η επιδημία θα βαιίνει προς ύφεση.

Εκτιμήσεις Kermack-McKendrick. Κλασικές είναι πλέον οι παρακάτω δύο εκτιμήσεις που οφείλονται στους Kermack και McKendrick.

1. Η πρώτη αφορά τη μεταβολή του S . Συγκεκριμένα, αν το αρχικό πλήθος των ευάλωτων S_0 είναι μεγαλύτερο από τον ουδό $\frac{\gamma}{\beta}$ μεν, αρκετά κοντά του δε, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το πλήθος των ευάλωτων που τελικά θα νοσήσουν, υπό την προϋπόθεση ότι το αρχικό πλήθος των μολυσμένων I_0 είναι πολύ μικρό σε σχέση με το S_0 . Μάλιστα, η μεταβολή του S είναι κατά προσέγγιση συμμετρική γύρω από τον ουδό. Η εκτίμηση αυτή βασίζεται στην παρατήρηση από το [Σχήμα 7.6](#) ότι

$$\text{αν } I_0 \ll S_0 \text{ και } S_0 - \frac{\gamma}{\beta} \ll \frac{\gamma}{\beta}, \text{ τότε } S_0 - S_\infty \ll S_0, \text{ όπου } S_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} S(t). \quad (*)$$

Έτσι έχουμε ότι δεδομένης της (*),

$$\text{αν } S_0 = \frac{\gamma}{\beta} + \nu \text{ με } 0 < \nu \ll \frac{\gamma}{\beta} \text{ και επίσης } I_0 \ll S_0, \text{ τότε } S_0 - S_\infty \approx 2\nu.$$

Πράγματι, από την (7.4) θα έχουμε

$$0 = I_0 + S_0 - S_\infty + \frac{\gamma}{\beta} \ln \frac{S_\infty}{S_0} \approx S_0 - S_\infty + \frac{\gamma}{\beta} \ln \left(1 - \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) \right),$$

μιας και $I_0 \ll S_0$. Λόγω της (*) μπορούμε να εκτιμήσουμε με βάση το ανάπτυγμα κατά Taylor και να πάρουμε

$$S_0 - S_\infty - \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right) - \frac{\gamma}{2\beta} \left(\frac{S_0 - S_\infty}{S_0} \right)^2 \approx 0,$$

και λύνοντας ως προς $S_0 - S_\infty$ συμπεραίνουμε ότι

$$S_0 - S_\infty \approx 2S_0 \left(\frac{\beta}{\gamma} S_0 - 1 \right) = 2\frac{\gamma}{\beta} \left(1 + \frac{\beta}{\gamma} \nu \right) \frac{\beta}{\gamma} \nu \approx 2\nu.$$

Ορισμένοι συγγραφείς αναφέρουν αυτό το αποτέλεσμα ως *θεώρημα ουδού της Επιδημιολογίας (threshold theorem of Epidemiology)*.

2. Η δεύτερη αφορά τα R και $\frac{dR}{dt}$. Πρώτα, δυο λόγια εισαγωγικά για τη χρησιμότητα αυτών των ποσοτήτων. Κατά τη διάρκεια μιας επιδημίας είναι σχεδόν πάντα αδύνατο να καθορισθεί ο αριθμός των νέων μολυσμένων ανά ημέρα ή ανά εβδομάδα, καθώς οι μόνοι από αυτούς που μπορούν να καταγραφούν και να αφαιρεθούν από τη διαδικασία είναι αυτοί που θα επισκεφτούν τελικά τις δομές υγείας. Σχεδόν πάντα όταν γίνεται λόγος για στατιστικά στοιχεία του συστήματος δημόσιας υγείας σχετικά με τα “νέα κρούσματα” ενός νοσήματος (δηλ. μία μέτρηση που αφορά το I), εννοείται ότι πρόκειται για νέα καταγεγραμμένα κρούσματα του νοσήματος αυτού (δηλ. μία μέτρηση που αφορά το R) τα οποία εν προκειμένω αφαιρούνται από τη διαδικασία/αλυσίδα μετάδοσης. Οπότε για να εφαρμόσουμε το μοντέλο σε πραγματικές καταστάσεις επιδημίας, να συγκρίνουμε δηλ. εν πρώτοις τα πραγματικά στοιχεία παλαιότερων επιδημιών με τη λύση του (7.3) και στη συνέχεια, αν πειστούμε, να το χρησιμοποιούμε και για προβλέψεις κατά τη διάρκεια τρεχουσών επιδημιών, χρειαζόμαστε εν γένει να γνωρίζουμε τον αριθμό των διαγραμμένων και τον αριθμό των διαγραμμένων ανά μονάδα χρόνου ως συνάρτηση του χρόνου, δηλ. το R και το $\frac{dR}{dt}$, αντίστοιχα. Υπό αυτό το πρίσμα, από την (7.4) και την (7.1) παίρνουμε ότι

$$R + \frac{\gamma}{\beta} \ln S = c, \text{ για κάποιο } c \in \mathbb{R}, \text{ δηλ. } S = S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R}$$

και έτσι η (7.3γ) γίνεται

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \left(N_0 - R - S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} \right). \quad (7.7)$$

Για το αποτέλεσμα, τώρα, απαιτείται η υπόθεση ότι η επιδημία δεν είναι μεγάλη, και συγκεκριμένα ότι

$$\sup_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ \text{ή} \\ t \in [-\varepsilon_1, \infty)}} \{R(t)\} \left(= \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) \right) \ll \frac{\gamma}{\beta}. \quad (**)$$

Έτσι έχουμε ότι δεδομένης της (**), τότε

$$R(t) \approx \frac{\gamma^2}{S_0 \beta^2} \left(\frac{S_0 \beta}{\gamma} - 1 + \alpha \tanh(\varphi(t)) \right) \text{ και } \frac{dR}{dt} \approx \frac{\alpha^2 \beta^2}{2 S_0 \gamma} \operatorname{sech}^2(\varphi(t)), \text{ με}$$

$$\varphi(t) := \frac{1}{2} \alpha \gamma t - \phi, \quad \alpha := \left(\left(\frac{S_0 \beta}{\gamma} - 1 \right)^2 + \frac{2 S_0 (N_0 - S_0) \beta^2}{\gamma^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ και}$$

$$\phi := \tanh^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} \left(\frac{S_0 \beta}{\gamma} - 1 \right) \right).$$

Πράγματι, λόγω της (**), με χρήση του αναπτύγματος κατά Taylor η (7.7) γίνεται

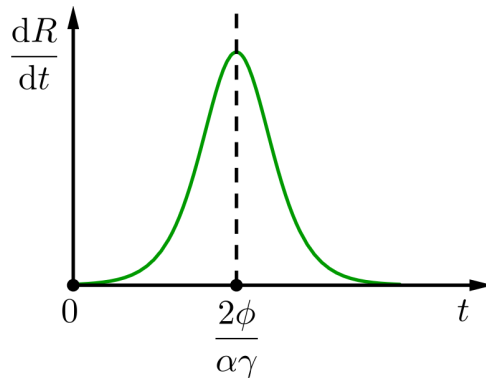
$$\frac{dR}{dt} \approx \gamma \left(N_0 - S_0 + \left(\frac{S_0 \beta}{\gamma} - 1 \right) R - \frac{S_0 \beta^2}{2 \gamma^2} R^2 \right),$$

της οποίας η λύση γνωρίζουμε ότι είναι η

$$R(t) \approx \frac{\gamma^2}{S_0 \beta^2} \left(\frac{S_0 \beta}{\gamma} - 1 + \alpha \tanh(\varphi(t)) \right),$$

και έτσι παίρνουμε το ζητούμενο. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.8, το γράφημα της παραπάνω προσέγγισης της $\frac{dR}{dt}$ απεικονίζει μία συμμετρική “καμπάνα” γύρω από τον χρόνο $t = \frac{2\phi}{\alpha\gamma}$ και έχει παρατηρηθεί ήδη από τότε ότι αποτελεί μία καλή προσέγγιση της επιδημιολογικής καμπύλης, δηλ. του γραφήματος

του αριθμού των διαγραμμένων ανά μονάδα χρόνου ως προς το χρόνο, διάφορων λοιμωδών μολυσματικών νοσημάτων. Συγκεκριμένα, οι δύο ερευνητές προσέγγισαν ικανοποιητικά πραγματικά δεδομένα για τον αριθμό των θανάτων ανά εβδομάδα για όσες εβδομάδες κράτησε μία επιδημία βουβωνικής πανώλης στη Βομβάη (πλέον Μουμπάι) της Ινδίας από το δεύτερο μισό του 1905 έως το πρώτο μισό του 1906, με τη συνάρτηση $890 \operatorname{sech}^2(0.2t - 3.4)$, όπου το t μετράται σε εβδομάδες. Από τότε εμφανίζεται τακτικά στη βιβλιογραφία πληθώρα εφαρμογών αυτής της προσέγγισης για πραγματικά δεδομένα.



Σχήμα 7.8: Δεδομένης της (**), το γράφημα της εκτίμησης $\frac{dR}{dt} \approx \frac{\alpha^2 \gamma^3}{2S_0 \beta^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \phi\right)$, αποτελεί μία καλή προσέγγιση της παρατηρούμενης επιδημιολογικής καμπύλης.

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.9 και στο Σχήμα 7.10, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας.

Επίσης, με το Σχήμα 7.11 επαληθεύουμε την πρώτη εκτίμηση Kermack-McKendrick και με το Σχήμα 7.12 τη δεύτερη.

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Σύμβολα τάξης μεγέθους. Το κεφαλαίο όμικρον (O) (*big oh*) (λέγεται επίσης και σύμβολο Bachmann) και το πεζό (μικρό) όμικρον (o) (*little oh*) (λέγεται επίσης και σύμβολο Landau), καθώς και η μεγάλη ανισότητα \ll (λέγεται επίσης και σύμβολο Vinogradov), είναι μαθηματικά σύμβολα της ασυμπτωτικής ανάλυσης.

Έστω f και g συναρτήσεις ορισμένες έτσι ώστε οι παρακάτω σχέσεις να έχουν νόημα, $\Sigma \subseteq \operatorname{Dom}(f) \cap \operatorname{Dom}(g)$, καθώς επίσης $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Γράφουμε

$$f(x) = O(g(x)), \quad \forall x \in \Sigma,$$

αν $\exists M_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \leq M_0 |g(x)|, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Ενδεχομένως να γράφουμε

$$f(x) = O(g(x)), \quad \text{καθώς } x \rightarrow x_0,$$

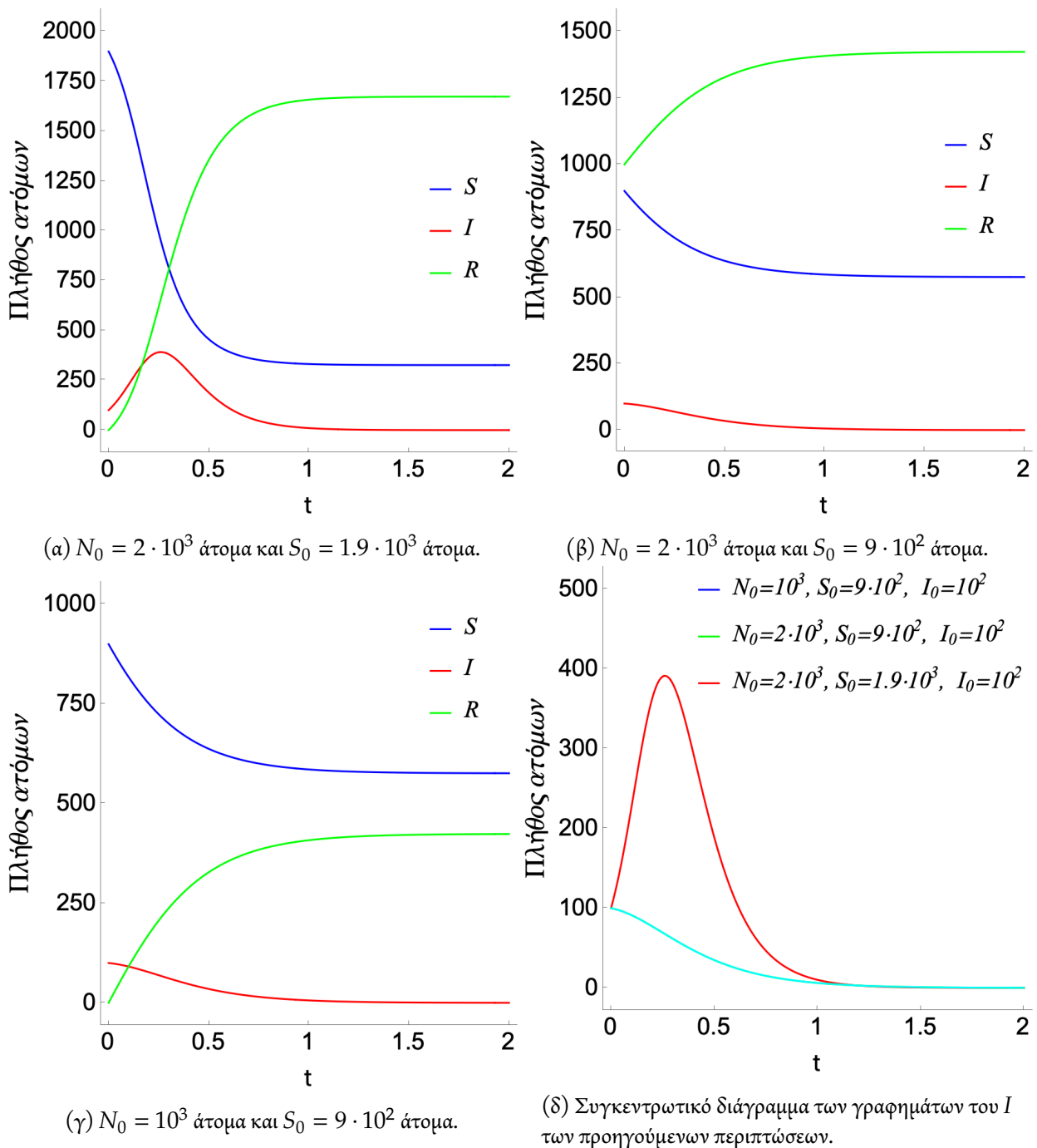
όταν

$$|f(x)| \leq M_0 |g(x)|, \quad \text{για κάθε } x \text{ σε μια περιοχή του } x_0,$$

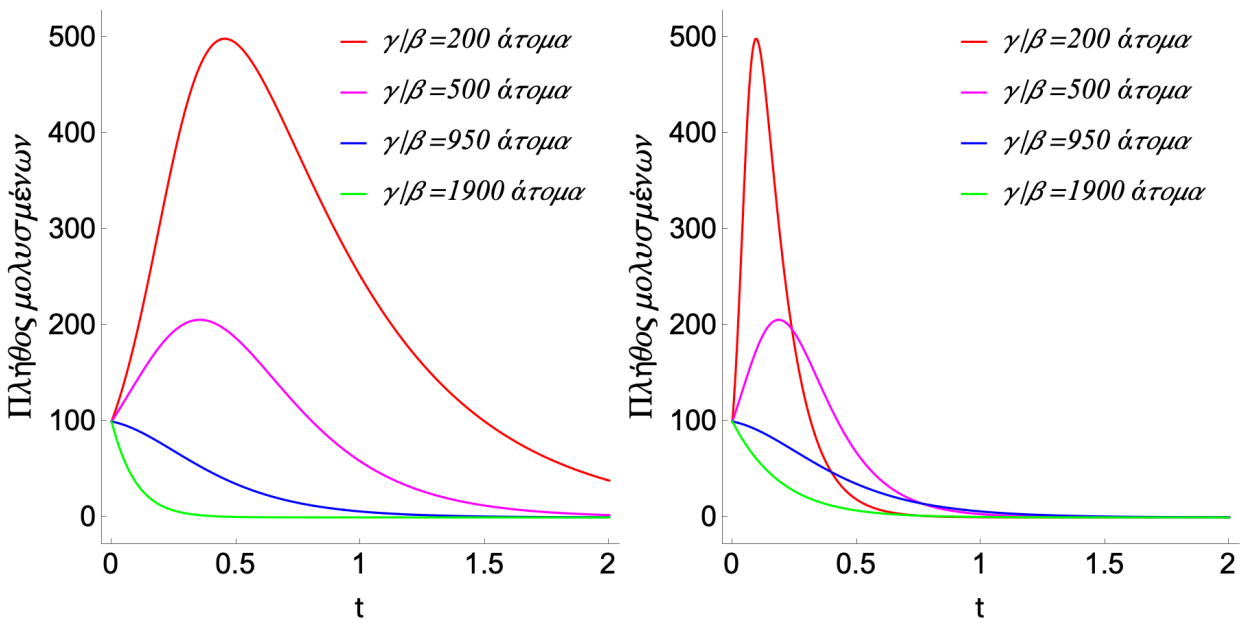
δηλ. θεωρούμε το Σ να είναι μια περιοχή του x_0 . Άλλες φορές γράφουμε σκέτα

$$f = O(g),$$

όταν εννοείται το σύνολο στο οποίο θεωρούμε την αντίστοιχη ανισότητα.



Σχήμα 7.9: Γραφήματα των S , I και R για μη αρνητικούς χρόνους, για ίδια λοιμώδη μεταδοτικά νοσήματα, $\beta = 1 (10^2 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$ και $\gamma = 9.5 [\text{χρόνος}]^{-1}$, αλλά για διαφορετικές αρχικές συνθήκες εκτός του σταθερού $I_0 = 10^2$ άτομα. Παραμένει ίδιος δηλ. ο ουδός $\frac{\gamma}{\beta}$ και μετατοπίζονται οι αρχικές συνθήκες εκατέρωθεν αυτού στο διάγραμμα φάσης του (SI) (Σχήμα 7.6), παραμένοντας ωστόσο στο ίδιο ύψος I_0 , έτσι ώστε να καταδείξουμε ότι οι αλλαγές στη συμπεριφορά της λύσης δεν οφείλονται στην τιμή I_0 . Στις περιπτώσεις (α) και (β) ισχύει $\frac{\gamma}{\beta} < N_0$ και στην (γ) ισχύει $0 < \frac{\gamma}{\beta} < N_0$. Μόνο στην (α) ικανοποιείται η (7.5) και έτσι μόνο σε αυτή θα ξεσπάσει επιδημία. Στο διάγραμμα (δ) καταγράφονται συγκεντρωτικά τα I των προηγούμενων περιπτώσεων. Σημειώνουμε ότι τα γραφήματα για τα S και I θα είναι τα ίδια για τις περιπτώσεις (β) και (γ), όπου, εκτός από το I_0 , και το S_0 είναι κοινό και για τις δύο.



(α) Σταθερό $\beta = 1 (10^2 \text{ άτομα})^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$ και μεταβαλλόμενο γ . (β) Σταθερό $\gamma = 9.5 [\text{χρόνος}]^{-1}$ και μεταβαλλόμενο β .

Σχήμα 7.10: Γραφήματα του I για μη αρνητικούς χρόνους, για ίδιες αρχικές συνθήκες, $N_0 = 10^3$ άτομα, $S_0 = 9 \cdot 10^2$ άτομα και $I_0 = 10^2$ άτομα, αλλά για διαφορετικά λοιμώδη μολυσματικά νοσήματα. Μεταβάλλεται δηλ. κάθε φορά ο ουδός $\frac{\gamma}{\beta}$. Στην περίπτωση (α) μεταβάλλεται κρατώντας το β σταθερό και μεταβάλλοντας το γ , ενώ στην περίπτωση (β) κρατώντας σταθερό το γ και μεταβάλλοντας το β , για να καταδείξουμε έτσι την επιρροή της εκάστοτε παραμέτρου στο προφίλ της λύσης. Ωστόσο, το αν θα ξεσπάσει επιδημία (κόκκινο και μωβ γράφημα) ή όχι (μπλε και πράσινο γράφημα) εξαρτάται συνολικά και αποκλειστικά από τον λόγο $\frac{\gamma}{\beta}$ στο παράδειγμά μας.

2. Γράφουμε

$$f(x) = o(g(x)), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0,$$

ανν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Προφανώς, ισχύουν τα

$$f(x) = o(g(x)), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x) = O(g(x)), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0$$

και

$$f(x) = O(g(x)), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0 \not\Rightarrow f(x) = o(g(x)), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0.$$

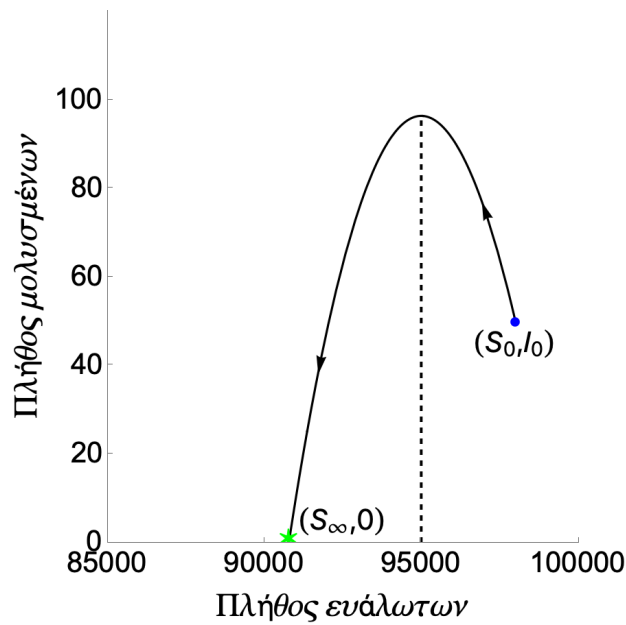
3. Γράφουμε

$$f(x) \sim g(x), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0,$$

ανν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| = 0.$$

Οι υπόλοιποι ορισμοί εμπλέκουν μια προεπιλεγμένη ποσότητα που επιλέγεται κάθε φορά αδρά (ποιοτικά). Έστω, λοιπόν, f, g, Σ και x_0 όπως πριν.



Σχήμα 7.11: Η τροχιά της λύσης για θετικούς χρόνους στο επίπεδο φάσης του (SI) , για $\frac{\gamma}{\beta} = 9.5 \cdot 10^4$ άτομα και για αρχικές συνθήκες $N_0 = 2 \cdot 10^5$ άτομα, $S_0 = 9.8 \cdot 10^4$ άτομα και $I_0 = 50$ άτομα. Έχουμε τότε ότι $S_\infty \approx 90800$ άτομα. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι $S_0 - \frac{\gamma}{\beta} = 3 \cdot 10^3$ άτομα $\approx 4 \cdot 10^3$ άτομα $\approx \frac{\gamma}{\beta} - S_\infty$, αν λάβουμε υπόψη την κλίμακα μεγέθους των S_0 και $\frac{\gamma}{\beta}$ σε σχέση με αυτή των παραπάνω διαφορών.

4. Γράφουμε

$$f(x) \ll g(x), \forall x \in \Sigma,$$

ανν $\exists M_1 > 0$ “κοντά” στο 0, τέτοιο ώστε

$$|f(x)| \leq M_1 |g(x)|, \forall x \in \Sigma.$$

Προφανώς, ισχύουν τα

$$f(x) \ll g(x), \forall x \in \Sigma \Rightarrow f(x) = O(g(x)), \forall x \in \Sigma$$

και

$$f(x) = O(g(x)), \forall x \in \Sigma \not\Rightarrow f(x) \ll g(x), \forall x \in \Sigma.$$

Ενδεχομένως να γράφουμε

$$f(x) \ll g(x), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0,$$

με την ευκόλως εννοούμενη ερμηνεία, ή, άλλες φορές, σκέτα

$$f \ll g.$$

5. Γράφουμε

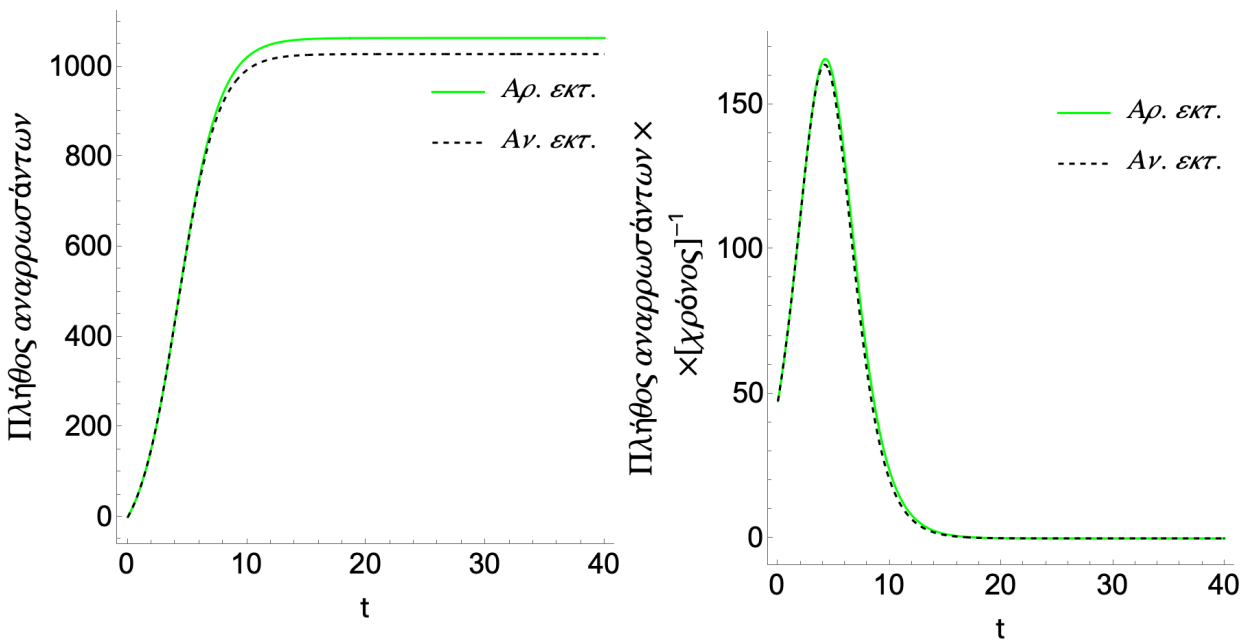
$$f(x) \asymp g(x), \forall x \in \Sigma,$$

ανν $\exists M_2, M_3 > 0$ “κοντά” στο 1, τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leq M_2 |g(x)| \text{ και } |g(x)| \leq M_3 |f(x)|, \forall x \in \Sigma.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι εντός του S οι f και g είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, ή αλλιώς, είναι συγκρίσιμες. Προφανώς, ισχύουν τα

$$f(x) \asymp g(x), \forall x \in \Sigma \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \text{ και } g(x) = O(f(x)), \forall x \in \Sigma$$



(α) Το γράφημα της αριθμητικής εκτίμησης του R (πράσινο συνεχές), σε σύγκριση με αυτό της αναλυτικής εκτίμησης $R(t) \approx \frac{\gamma^2}{S_0\beta^2} \left(\frac{S_0\beta}{\gamma} - 1 + \alpha \tanh(\varphi(t)) \right)$ (μαύρο διακεκομμένο).

(β) Το γράφημα της αριθμητικής εκτίμησης του $\frac{dR}{dt}$ (πράσινο συνεχές), σε σύγκριση με αυτό της αναλυτικής εκτίμησης $\frac{dR}{dt} \approx \frac{\alpha^2\gamma^3}{2S_0\beta^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\alpha\gamma t - \phi\right)$ (μαύρο διακεκομμένο).

Σχήμα 7.12: Αριθμητική και αναλυτική εκτίμηση του R και του $\frac{dR}{dt}$ για $\frac{\gamma}{\beta} = 9.5 \cdot 10^3$ άτομα και για αρχικές συνθήκες $N_0 = 10^4$ άτομα, $S_0 = 9995$ άτομα και $I_0 = 5$ άτομα.

και

$$f(x) = O(g(x)) \text{ και } g(x) = O(f(x)), \forall x \in \Sigma \Rightarrow f(x) \asymp g(x), \forall x \in \Sigma.$$

Όπως και πριν, ενδεχομένως να γράφουμε

$$f(x) \asymp g(x), \text{ καθώς } x \rightarrow x_0,$$

ή, άλλες φορές, σκέτα

$$f \asymp g.$$

Αλγόριθμοι αδιαστατοποίησης. Η αδιαστατοποίηση, ή αλλιώς κανονικοποίηση, (*scaling*) είναι μια βασική τεχνική που επιτρέπει την εκτίμηση του σχετικού μεγέθους των όρων που εμφανίζονται στις εξισώσεις ενός μοντέλου, όταν συγκριθούν με κάποιες “εσωτερικές” ποσότητες αναφοράς που προκύπτουν κατά φυσιολογικό τρόπο από το αντίστοιχο (ΠΑΤ). Περιγραφικά, συνίσταται στην επιλογή νέων, συνήθως αδιάστατων, μεταβλητών και την αναδιατύπωση του προβλήματος μέσω αυτών των μεταβλητών.

Η έννοια της αδιαστατοποίησης είναι ιδιαίτερα σημαντική για τον χαρακτηρισμό παραμέτρων ως μεγάλων ή/και μικρών, όταν εφαρμόζονται μέθοδοι διαταραχών για την επίλυση ενός προβλήματος. Αν, π.χ., μελετάμε την κίνηση ενός παγετώνα, ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή του προβλήματος. Είναι προφανές ότι δεν είναι δυνατόν να παρατηρήσουμε σημαντικές αλλαγές σε χρονικό διάστημα ενός δευτερολέπτου, δηλ. ότι το δευτερόλεπτο ως χρονική μονάδα είναι ακατάλληλη (πολύ “γρήγορη”). Αντίστοιχα, αν μελετάμε μια πυρηνική αντίδραση, το δευτερόλεπτο ως χρονική μονάδα είναι επίσης ακατάλληλη (πολύ “αργή”), καθώς κάθε σημαντική μεταβολή έχει ολοκληρωθεί σε ένα πολύ μικρό κλάσμα του πρώτου δευτερολέπτου. Κάθε χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα έχει συνεπώς μια εγγενή κλίμακα χρόνου (χαρακτηριστικό χρόνο αναφοράς). Συγκεκριμένα, ο χαρακτηριστικός χρόνος στην περίπτωση του παγετώνα πρέπει να είναι της τάξης ετών, ενώ

στην περίπτωση της πυρηνικής αντίδρασης της τάξης εκατομμυριοστών του δευτερολέπτου. Υπάρχουν προβλήματα που έχουν πολλαπλές κλίμακες χρόνου. Για παράδειγμα, μια χημική αντίδραση μπορεί να αρχίζει και να εξελίσσεται για αρκετό χρόνο αργά και μετά να ολοκληρώνεται μ' ένα ταχύτατο τελικό στάδιο, οπότε ο χαρακτηριστικός χρόνος αναφοράς που είναι κατάλληλος για το πρώτο διάστημα, είναι ακατάλληλος για το δεύτερο. Η παρατήρηση αυτή είναι *sine qua non* κατά την αναζήτηση προσεγγιστικών λύσεων γύρω στις διάφορες εγγενείς χρονικές κλίμακες ενός τέτοιου προβλήματος.

Εκτός της θεωρητικής σημασίας της αδιαστατοποίησης για τη μελέτη του (ΠΑΤ), έχει επίσης αξία και σε πρακτικό επίπεδο, καθώς

1. οδηγεί στη μείωση του αριθμού των παραμέτρων και επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό τους από στατιστικές μελέτες καθώς επίσης την αναζήτηση των τιμών τους στη βιβλιογραφία για την αριθμητική επίλυση του (ΠΑΤ), και
2. επιτρέπει την άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων διάφορων αριθμητικών επιλύσεων του (ΠΑΤ).

Αν είναι γνωστός ο χαρακτηριστικός χρόνος αναφοράς t_* , τότε μπορούμε να ορίσουμε μια νέα αδιάστατη χρονική μεταβλητή t_α ως εξής

$$t_\alpha := \frac{t}{t_*},$$

για την οποία ισχύει

$$t_\alpha \geq 1 \Leftrightarrow t \geq t_*, \text{ για κάθε } t \text{ εντός κάποιου συνόλου.}$$

Αν δεν είναι γνωστός ο t_* , τότε ο προσδιορισμός του είναι ένα ουσιαστικό πρόβλημα. Γενικά, δεν υπάρχουν σωστές ή λανθασμένες χαρακτηριστικές ποσότητες αναφοράς (αρκεί προφανώς να έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις ποσότητες που χαρακτηρίζουν), τόσο για την ανεξάρτητη μεταβλητή (δηλ. τον χρόνο t), όσο και για τις εξαρτημένες μεταβλητές (δηλ. τις συνιστώσες του y), παρά μόνο χρήσιμες και άχρηστες. Ο γενικός κανόνας είναι ότι οι ποσότητες αυτές, προσδιορίζονται από συνδυασμούς διαφόρων διαστατικών σταθερών του προβλήματος και ότι πρέπει, χονδρικά, να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την ποσότητα που χαρακτηρίζουν. Παραθέτουμε δύο αλγόριθμους που μας βοηθάνε στην παραπάνω διαδικασία εύρεσης τέτοιων ποσοτήτων.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΑΔΙΑΣΤΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Έστω (ΠΑΤ), το οποίο θέλουμε να εκφράσουμε με αδιάστατες μεταβλητές (εξαρτημένες και ανεξάρτητη).

Η διαδικασία αδιαστατοποίησης που θα ακολουθήσουμε εξαρτάται από τον λόγο για τον οποίο την εφαρμόζουμε.

Στην περίπτωση που **υπάρχει σ.ι. του προβλήματος εντός του $(0, \infty)^n$ και θέλουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων κοντά σε αυτό**, τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Αναγνώριση του σ.ι., $y^* \in (0, \infty)^n$, που μας ενδιαφέρει.
2. Επιλογή των y_1^*, \dots, y_n^* ως χαρακτηριστικές ποσότητες αναφοράς για τις εξαρτημένες μεταβλητές y_1, \dots, y_n αντίστοιχα.
3. Αδιαστατοποίηση των εξαρτημένων μεταβλητών στο μοντέλο.
4. Επιλογή του εναπομείναντος διαστατικού χρονικού όρου στο μοντέλο μας ως χαρακτηριστική ποσότητα αναφοράς για την ανεξάρτητη μεταβλητή.
5. Αδιαστατοποίηση της ανεξάρτητης μεταβλητής στο μοντέλο.

Στην περίπτωση που **υπάρχει το supremum κάθε εξαρτημένης μεταβλητής εντός του $(0, \infty)$ και θέλουμε να συγκρίνουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές μεταξύ τους**, τότε ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Αναγνώριση των $\sup \text{Ran}(y_1), \dots, \sup \text{Ran}(y_n) \in (0, \infty)$.

2. Επιλογή των $\sup \text{Ran}(y_1), \dots, \sup \text{Ran}(y_n)$ ως χαρακτηριστικές ποσότητες αναφοράς για τις εξαρτημένες μεταβλητές y_1, \dots, y_n αντίστοιχα.
3. Αδιαστατοποίηση των εξαρτημένων μεταβλητών στο μοντέλο.
4. Επιλογή του εναπομείναντος διαστατικού χρονικού όρου στο μοντέλο μας ως χαρακτηριστική ποσότητα αναφοράς για την ανεξάρτητη μεταβλητή.
5. Αδιαστατοποίηση της ανεξάρτητης μεταβλητής στο μοντέλο.

Λεπτομέρειες για τις έννοιες που αναφέρονται στο [Μαθηματικό Υπόβαθρο](#) μπορούν να βρεθούν στα συγγράμματα [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25].

Βιβλιογραφία

- [1] O. Diekmann, H. Heesterbeek και T. Britton. *Mathematical Tools for Understanding Infectious Disease Dynamics*. Princeton University Press, 2013.
- [2] M. J. Keeling και P. Rohani. *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. Princeton University Press, 2011.
- [3] J. M. Cushing. *An Introduction to Structured Population Dynamics*. SIAM, 1998.
- [4] M. Iannelli. *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*. Giardini, 1994.
- [5] M. Iannelli και F. Milner. *The Basic Approach to Age-Structured Population Dynamics*. Springer, 2017.
- [6] M. Iannelli, M. Martcheva και F. A. Milner. *Gender-Structured Population Modeling*. SIAM, 2005.
- [7] W. O. Kermack και A. G. McKendrick. “Contributions to the mathematical theory of epidemics”. Στο: *Proceedings of Royal Society of London, Series A* 115 (1927), σσ. 700–721.
- [8] W. O. Kermack και A. G. McKendrick. “Contributions to the mathematical theory of epidemics. II. The problem of endemicity”. Στο: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 138 (1932), σσ. 55–83.
- [9] W. O. Kermack και A. G. McKendrick. “Contributions to the mathematical theory of epidemics. III. Further studies of the problem of endemicity”. Στο: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 141 (1933), σσ. 94–122.
- [10] P. Waage και C. M. Guldberg. “Studier i Affiniteten”. Στο: *Videnskabs-selskabet i Christiania* 35 (1864), σσ. 35–45.
- [11] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek και J. A. J. Metz. “On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations”. Στο: *Journal of Mathematical Biology* 28 (1990), σσ. 365–382.
- [12] G. I. Barenblatt. *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [13] C. M. Bender και S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, 1999.
- [14] M. D. Greenberg. *Foundations of Applied Mathematics*. Courier Corporation, 2013.
- [15] E. J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991.
- [16] M. H. Holmes. *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, 2012.
- [17] M. H. Holmes. *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2019.

- [18] J. Jost. *Mathematical Methods in Biology and Neurobiology*. Springer, 2014.
- [19] J. P. Keener. *Principles of Applied Mathematics: Transformation and Approximation*. Westview Press, 2nd edition, 2000.
- [20] P. A. Lagerstrom. *Matched Asymptotic Expansions*. Springer, 1988.
- [21] C.-C. Lin και L. A. Segel. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. SIAM, 1988.
- [22] J. D. Logan. *Applied Mathematics*. Wiley, 4th edition, 2013.
- [23] J. A. Murdock. *Perturbations: Theory and Methods*. SIAM, 1999.
- [24] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, 2011.
- [25] T. Szirtes. *Applied Dimensional Analysis and Modeling*. Elsevier, 2nd edition, 2007.

■ ΕΠΙΔΗΜΙΟΛΟΓΙΑ II

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Δυναμικά επιδημιολογικά μοντέλα (συνέχεια): Βασικό μοντέλο *SIR* με δημογραφικούς όρους

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

(α) Θεωρία Poincaré-Bendixson

(β) Αποκλεισμός περιοδικών λύσεων με χρήση του αρνητικού κριτηρίου Bendixson-Dulac

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 1-7](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Βασικό μοντέλο *SIR* με δημογραφικούς όρους. Η ανάλυση του βασικού μοντέλου *SIR* έδειξε ότι μία επιδημία ενός λοιμώδους μεταδοτικού νοσήματος βαίνει προς ύφεση και τελικά σβήνει, λόγω της μείωσης του πληθους των ευάλωτων κάτω από έναν ουδό. Ωστόσο, υπάρχουν λοιμώδη μεταδοτικά νοσήματα που παραμένουν στον πληθυσμό χωρίς να εξαλείφονται, που είναι δηλ. *ενδημικά* (*endemic*), ή αλλιώς, που παρουσιάζουν *ενδημικότητα* (*endemicity*). Άρα συμπεραίνουμε ότι σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να τροποποιήσουμε το βασικό μοντέλο έτσι ώστε να επιτρέπουμε την ανανέωση της κλάσης των ευάλωτων. Ένας τρόπος για κάτι τέτοιο στα πλαίσια ενός μοντέλου των τριών κλάσεων ευάλωτων - μολυσμένων/μολυσματικών - διαγραμμαμένων είναι να συμπεριλάβουμε και την εισαγωγή ευάλωτων νεογνών στην αλυσίδα. Συνεπώς, για την κατασκευή μιας παραλλαγής του συστήματος (7.3) έτσι ώστε να περιέχει επιπρόσθετους δημογραφικούς όρους, κάνουμε τις ακόλουθες τροποποιήσεις:

1. Λαμβάνουμε υπόψη μας γεννήσεις και θανάτους, που συμβαίνουν όμως με αντίθετους ρυθμούς έτσι ώστε $N \equiv N_0$.
2. Όλα τα νεογνά είναι ευάλωτα.

3. Ο ρυθμός των θανάτων της κάθε κλάσης είναι ίδιος.

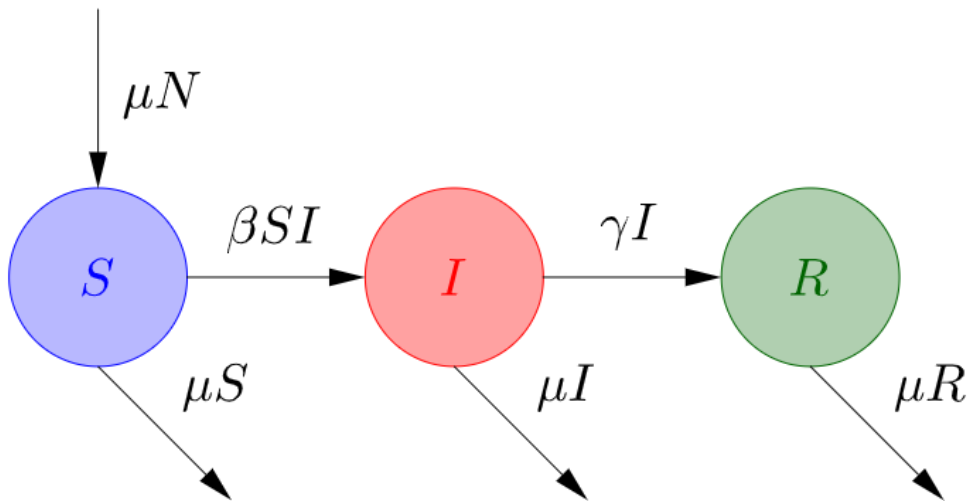
Οδηγούμαστε έτσι στις εξισώσεις:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \beta SI \quad (8.1\alpha)$$

$$\frac{dI}{dt} = -(\gamma + \mu)I + \beta SI \quad (8.1\beta)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R, \quad (8.1\gamma)$$

όπου $\mu > 0$ είναι ο (μέσος) ρυθμός θανάτων αλλά και γεννήσεων, μ^{-1} η (μέση) διάρκεια ζωής, $\gamma + \mu$ ο (μέσος) ρυθμός ανάρρωσης/διαγραφής ή θανάτου των μολυσμένων/μολυσματικών και $(\gamma + \mu)^{-1}$ η (μέση) διάρκεια του νοσήματος, ή αλλιώς η (μέση) μολυσματική διάρκεια, μέχρι την ανάρρωση/διαγραφή ή το θάνατο. Οι ροές απεικονίζονται στο Σχήμα 8.1.



Σχήμα 8.1: Διάγραμμα ροών του μοντέλου (8.1).

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Ένα ΠΑΤ στο οποίο χρησιμοποιείται ένα τέτοιο μοντέλο είναι το εξής:

Με δεδομένα $S_0, I_0, R_0 \geq 0$, θέτουμε $N_0 := S_0 + I_0 + R_0$ και αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S, I, R) : \mathcal{I} \rightarrow \{(s, i, r) \in [0, N_0]^3 \mid s + i + r = N_0\}$, τέτοια ώστε η (S, I, R) να ικανοποιεί τόσο το (8.1) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, I_0, R_0)$. (SIR μ)

Ισοδύναμα, μπορούμε να θεωρήσουμε το εξής:

Με δεδομένα $S_0, I_0, R_0 \geq 0$, θέτουμε $N_0 := S_0 + I_0 + R_0$ και αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S, I) : \mathcal{I} \rightarrow \{(s, i) \in [0, N_0]^2 \mid s + i \leq N_0\}$, τέτοια ώστε η (S, I) να ικανοποιεί τόσο το $\{(8.1\alpha) - (8.1\beta)\}$ στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(S(0), I(0)) = (S_0, I_0)$. (SI μ)

Τα εφικτά σύνολα των (SIR μ) και (SI μ), συμπίπτουν με τα αντίστοιχα για το (SIR) και το (SI), απεικονίζονται δε στο Σχήμα 7.3α και στο Σχήμα 7.3β.

Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Όπως και για το (SI), έτσι και για το (SIμ) παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα, θετικά ολικής και μεγιστικής λύσης

$$(S, I) : \begin{cases} \text{είτε } \mathbb{R} \\ \text{είτε } [-\varepsilon_1, \infty), \end{cases} \quad \text{όπου } \varepsilon_1 \in [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2.$$

Άσκηση 8.1. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της μελέτης Φάσης I του (SIμ), και αναγνωρίστε τα αναλλοίωτα σύνολα, τόσο του (SIμ) όσο και του (SIRμ).

Σημεία ισορροπίας. Άμεσα από το (8.1) συμπεραίνουμε ότι τα σ.ι. του (SIμ) είναι ένα και εν δυνάμει δύο. Συγκεκριμένα,

$$(S^*, I^*) = \begin{cases} (N_0, 0) \\ \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta} \right), \end{cases} \quad \text{αν } \frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0.$$

Το πρώτο είναι γνωστό ως ελεύθερο νοσήματος σημείο ισορροπίας/σταθερό σημείο (*disease-free steady state/equilibrium/fixed point*) και το δεύτερο ως ενδημικό σημείο ισορροπίας/σταθερό σημείο (*endemic steady state/equilibrium/fixed point*).

Ανάλυση ευστάθειας. Υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi ως

$$J(s, i) = \begin{pmatrix} -\beta i - \mu & -\beta s \\ \beta i & -\gamma + \beta s - \mu \end{pmatrix},$$

οπότε

$$J(N_0, 0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta N_0 \\ 0 & -\gamma + \beta N_0 - \mu \end{pmatrix}$$

και

$$J\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-\beta \mu N_0}{\gamma + \mu} & -\gamma - \mu \\ \frac{\beta \mu N_0}{\gamma + \mu} - \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{αν } \frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0.$$

Άμεσα, από γραμμικοποίηση, έχουμε τα εξής:

- Για το $(N_0, 0)$, παρατηρούμε ότι ο πίνακας έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = \beta N_0 - (\gamma + \mu)$ και $\lambda_2 = -\mu < 0$. Άρα έχουμε ότι το παραπάνω σ.ι. είναι

$$\begin{cases} \text{θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{αν } 0 < N_0 < \frac{\gamma + \mu}{\beta} \\ \text{θετικά ασταθές,} & \text{αν } \frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0. \end{cases}$$

- Για το $\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta}\right)$, αν $\frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0$, παρατηρούμε ότι

$$\text{tr} = \frac{-\beta \mu N_0}{\gamma + \mu} < 0 \text{ και επίσης } \det = \mu (\beta N_0 - (\gamma + \mu)) > 0,$$

άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και τελικά καταλήγουμε ότι το παραπάνω σ.ι. είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Συνοπτικά, έχουμε τον Πίνακα 8.1 για την ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του $(SI\mu)$.

Πίνακας 8.1: Ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του $(SI\mu)$.

σ.ι. / συνθήκη	$(N_0, 0)$	$\left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma+\mu} - \frac{\mu}{\beta}\right)$
$0 < N_0 < \frac{\gamma+\mu}{\beta}$	θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές	–
$\frac{\gamma+\mu}{\beta} < N_0$	θετικά ασταθές	θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές

Ωστόσο δεν μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με την ευστάθεια/αστάθεια του $\left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, 0\right)$ όταν $N_0 = \frac{\gamma+\mu}{\beta}$ μέσω γραμμικοποίησης, λόγω μη υπερβολικότητάς του.

Άσκηση 8.2. Απεικονίστε ποιοτικά τον χώρο φάσης του $(SI\mu)$ για $N_0 \neq \frac{\gamma+\mu}{\beta}$, όπως προκύπτει από τη γραμμική ανάλυση ευστάθειας.

Ανάλυση διακλάδωσης. Παρατηρούμε ότι αν κοιτάξουμε την $\lambda_1 = \beta N_0 - (\gamma + \mu)$ ως συνάρτηση του N_0 έχουμε ότι

$$\lambda_1\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}\right) = 0, \quad \frac{d\lambda_1}{dN_0}\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}\right) \neq 0 \text{ και } \lambda_2 < 0,$$

δηλ. υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης από το $(N_0, 0)$ όταν $N_0 = \frac{\gamma+\mu}{\beta}$. Άρα θα χαρακτηρίσουμε το τύπο της διακλάδωσης αυτής, για να βγάλουμε συμπέρασμα για την ευστάθεια/αστάθεια του $\left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, 0\right)$ όταν $N_0 = \frac{\gamma+\mu}{\beta}$. Γνωρίζουμε όλα τα σ.ι. $(S^*, I^*) = (S^*(N_0), I^*(N_0))$ γύρω από το $N_0 = \frac{\gamma+\mu}{\beta}$, άρα θα το κάνουμε κατασκευάζοντας το διάγραμμα της διακλάδωσης.

Επιλέγουμε τον κατάλληλο συνδυασμό των S^* και I^* , οι τιμές του οποίου θα απεικονίζονται στον κατακόρυφο άξονα του διαγράμματος. Ο συνδυασμός αυτός προκύπτει από την απλοποίηση Lyapunov-Schmidt, ως εξής: Πρώτα διαγωνιοποιούμε τον $J\left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, 0\right)$

$$J\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, 0\right) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 = 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = -\mu \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{\gamma}{\mu} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 + \frac{\gamma}{\mu} \end{pmatrix},$$

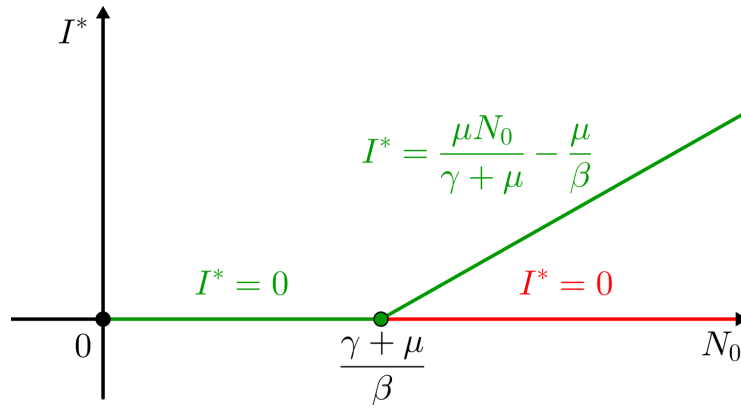
όπου τα $\left(-1 - \frac{\gamma}{\mu}, 1\right)$ και $(1, 0)$, τα οποία έχουν επιλεγεί για την πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα, στήλη του P , είναι τα ιδιοδιανύσματα της $\lambda_1 = 0$ και της $\lambda_2 = -\mu$, αντίστοιχα. Έπειτα επιλέγουμε το συνδυασμό

$$(0, 1) \cdot (S^* - N_0, I^*) = I^*,$$

όπου το $(0, 1)$ είναι η πρώτη γραμμή του P^{-1} .

Άρα το διάγραμμα της διακλάδωσης δίνεται στο Σχήμα 8.2, και παρατηρούμε ότι πρόκειται για μια διακριτή διακλάδωση (ο ασταθής κλάδος $I^* = \frac{\mu N_0}{\gamma+\mu} - \frac{\mu}{\beta} < 0$ για $N_0 < \frac{\gamma+\mu}{\beta}$ απορρίπτεται) από το θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. $\left(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, 0\right)$.

Οπότε, η ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του $(SI\mu)$ συνοψίζεται τελικά στον Πίνακα 8.2.



Σχήμα 8.2: Διάγραμμα διακλάδωσης για την $I^* \left(I^* - \left(\frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta} \right) \right) = 0$. Με πράσινο απεικονίζεται η θετική ασυμπτωτική ευστάθεια, ενώ με κόκκινο η θετική αστάθεια.

Πίνακας 8.2: Ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι. του $(SI\mu)$.

συνθήκη \ σ.ι.	$(N_0, 0)$	$\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta} \right)$
$0 < N_0 \leq \frac{\gamma + \mu}{\beta}$	θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές	–
$\frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0$	θετικά ασταθές	θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια. Το αν είναι τα θετικά ασυμπτωτικά ευσταθή σ.ι. του $(SI\mu)$ και ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθή, μπορούμε (εκτός μέσω των τεχνικών που έχουμε ήδη δει (βλ. Άσκηση 8.3)), να το εξαγάγουμε μέσω του θεωρήματος Poincaré-Bendixson σε συνδυασμό με το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac.

Αρχικά θα αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να υπάρχει ομοκλινής τροχιά, ή κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα ετεροκλινών τροχιών, ή κλειστή τροχιά, εντός του χώρου φάσης, η/το οποία/οποίο, αν περιβάλλει τα θετικά ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία, τότε θα αποκόπτει την πορεία κάποιων (φραγμένων) θετικών ημιτροχιών προς αυτά. Πράγματι, όσον αφορά τις ομοκλινείς τροχιές και τα ζεύγη αντίστροφων ετεροκλινών τροχιών, αυτά αποκλείονται άμεσα λόγω της γνώσης μας σχετικά με το πλήθος και την ευστάθεια/αστάθεια των σ.ι.. Όσον αφορά τις κλειστές τροχιές, από τη μία έχουμε ότι (βλ. Άσκηση 8.1) τα σύνολα

$$\Sigma_1 := [0, N_0] \times \{0\} \text{ και } \{(s, i) \in [0, N_0] \times (0, N_0) \mid s + i \leq N_0\} =: \Sigma_2$$

είναι αναλλοίωτα, άρα αν θα υπήρχαν τέτοιες τροχιές θα βρίσκονταν αναγκαστικά εντός του δεύτερου. Από την άλλη, επιλέγοντας την

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \cup (0, \infty) &\rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ (s, i) &\mapsto \varphi(s, i) := \frac{1}{i}, \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε, από το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac, ότι δεν υπάρχουν τέτοιες τροχιές ούτε εντός του Σ_2 , καθώς, θέτοντας

$$f_{N_0}(s, i) := (\mu N_0 - \mu s - \beta si, -(\gamma + \mu)i + \beta si), \quad \forall N_0 > 0,$$

θα έχουμε ότι

$$\nabla \cdot (\varphi f_{N_0})(s, i) = -\frac{\mu}{i} - \beta < 0, \quad \forall (s, i) \in \Sigma_2.$$

Σημειώνουμε ότι με το ίδιο επιχείρημα μπορούμε συγχρόνως να αποκλείσουμε τόσο ομοκλινείς τροχιές, όσο και ζεύγη αντίστροφων ετεροκλινών.

Άρα, από το θεώρημα Poincaré-Bendixson συμπαίρνουμε ότι το ω -οριακό σύνολο κάθε (φραγμένης) τροχιάς που βρίσκεται εντός του συμπαγούς εφικτού συνόλου

$$\{(s, i) \in [0, N_0]^2 \mid s + i \leq N_0\}$$

του $(SI\mu)$, θα συνίσταται από κάποιο σ.ι.. Στην περίπτωση όπου $0 < N_0 \leq \frac{\gamma + \mu}{\beta}$, προφανώς το σ.ι. αυτό θα είναι το μοναδικό, δηλ. το $(N_0, 0)$, και έτσι προκύπτει η ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του. Στην περίπτωση όπου $\frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0$, το παραπάνω σ.ι. είναι ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές μόνο εντός του Σ_1 , ενώ εντός του Σ_2 είναι το $\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta}\right)$.

Άσκηση 8.3. Αποδείξτε την ολικότητα της θετικής ασυμπτωτικής ευστάθειας των αντίστοιχων σ.ι. του $(SI\mu)$:

1. με την ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(SI\mu)$, ή, εναλλακτικά,
2. για $\frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0$, με την άμεση μέθοδο Lyapunov, μέσω της

$$V: (0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$(s, i) \mapsto f\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta}\right) - f(s, i),$$

όπου

$$f: (0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)$$

$$(s, i) \mapsto f(s, i) := \left(\frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta}\right) \ln i - i + \frac{\gamma + \mu}{\beta} \ln s - s.$$

Επιδημιολογικά συμπεράσματα. Στο βασικό μοντέλο SIR με δημογραφικούς όρους, αν ο σταθερός πληθυσμός N_0 είναι μεγαλύτερος του ουδού $\frac{\gamma + \mu}{\beta}$, τότε το μελετούμενο λοιμώδες μεταδοτικό νόσημα θα είναι ενδημικό.

Μάλιστα, μπορούμε να περιγράψουμε περαιτέρω τη συμπεριφορά του φαινομένου καθώς βαίνει προς την ενδημική ισορροπία. Πράγματι, αν γίνουμε ακόμα πιο αναλυτικοί με τη μελέτη της ευστάθειας του $(SI\mu)$ και υπολογίσουμε ακριβώς τις ιδιοτιμές του $J\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta}\right)$ όταν $\frac{\gamma + \mu}{\beta} < N_0$, θα βρούμε ότι

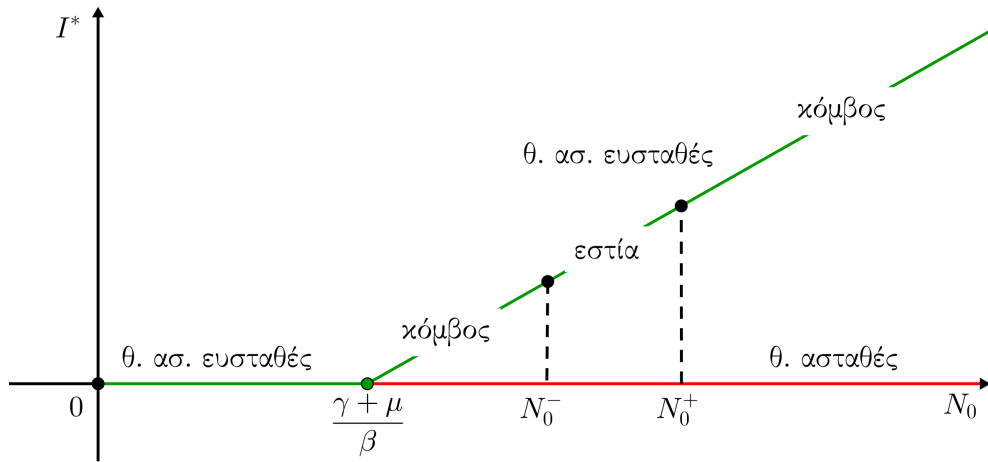
$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm (\text{tr}^2 - 4\det)^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{\beta\mu}{2(\gamma + \mu)} \left(-N_0 \pm \left(N_0^2 - \frac{4(\gamma + \mu)^2}{\beta\mu} N_0 + \frac{4(\gamma + \mu)^3}{\beta^2\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

από όπου έχουμε για

$$N_0^{\pm} := \frac{\gamma + \mu}{\beta} \cdot \frac{2(\gamma + \mu)}{\mu} \left(1 \pm \left(1 - \frac{\mu}{\gamma + \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right) > \frac{\gamma + \mu}{\beta} \quad (8.2)$$

ότι

$$\lambda_{\pm} \in \begin{cases} (-\infty, 0), & \text{αν } N_0 \in \left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, N_0^-\right) \cup [N_0^+, \infty) \\ \mathbb{C} \text{ με } \text{Re}\lambda_{\pm} < 0, & \text{αν } N_0 \in (N_0^-, N_0^+). \end{cases}$$



Σχήμα 8.3: Μπορούμε να διανθίσουμε το διάγραμμα διακλάδωσης του Σχήματος 8.2, έτσι ώστε να περιλαμβάνεται και η πληροφορία που αφορά την ποιοτική εικόνα του χώρου φάσης “κοντά” στο ενδημικό σ.ι..

Δηλ., μπορούμε να διανθίσουμε το διάγραμμα διακλάδωσης όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.3. Μάλιστα, είμαστε σε θέση (βλ. Άσκηση 8.4) να υπολογίσουμε την περίοδο T της προσεγγιστικής φθίνουσας ταλάντωσης, καθώς και την απόσβεση D του πλάτους της προσεγγιστικής λύσης στη διάρκεια μιας περιόδου, όταν $N_0 \in (N_0^-, N_0^+)$, ως

$$T \approx \frac{4\pi(\gamma + \mu)}{\beta\mu \left(-N_0^2 + \frac{4(\gamma + \mu)^2}{\beta\mu} N_0 - \frac{4(\gamma + \mu)^3}{\beta^2\mu} \right)^{\frac{1}{2}}} \text{ και } D \approx e^{-\frac{\beta\mu N_0}{2(\gamma + \mu)} T}.$$

Έτσι, αν υποθέσουμε ότι η (μέση) μολυσματική διάρκεια είναι πολύ μικρότερη από την (μέση) διάρκεια ζωής, πράγμα το οποίο εν γένει ισχύει, δηλ. αν $(\gamma + \mu)^{-1} \ll \mu^{-1}$ ή αλλιώς $\mu \ll \gamma + \mu$, τότε από την (8.2) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\gamma + \mu}{\beta} \approx N_0^- \ll N_0^+,$$

που σημαίνει ότι αναμένουμε εν γένει το σ.ι. $\left(\frac{\gamma + \mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma + \mu} - \frac{\mu}{\beta} \right)$ να μοιάζει με εστία για τη λύση του $(SI\mu)$. Συγκεκριμένα, τα πλήθη των κλάσεων θα οδεύουν, κατά προσέγγιση, ταλαντούμενα και με περίοδο T προς την ενδημική ισορροπία, με απόσβεση D του πλάτους τους ανά περίοδο.

Άσκηση 8.4. Δώστε τις λεπτομέρειες υπολογισμού των ποσοτήτων T και D της προσεγγιστικής λύσης “κοντά” στο ενδημικό σ.ι., όταν $N_0 \in (N_0^-, N_0^+)$.

Το αδιάστατο πρόβλημα. Για τους ίδιους λόγους για τους οποίους εισαγάγαμε την αδιάστατη μορφή του (SIR) και του (SI) , μπορούμε κατά πλήρη αντιστοιχία να εισαγάγουμε την αδιάστατη μορφή του $(SIR\mu)$ και του $(SI\mu)$, αντίστοιχα. Αναφέρουμε μόνο (βλ. Άσκηση 8.5) ότι μέσω της κανονικοποίησης

$$S \mapsto S_\alpha := \frac{S}{N_0}, I \mapsto I_\alpha := \frac{I}{N_0}, R \mapsto R_\alpha := \frac{R}{N_0}, t \mapsto t_\alpha := (\gamma + \mu) t,$$

η αδιάστατη μορφή του (8.1) είναι η

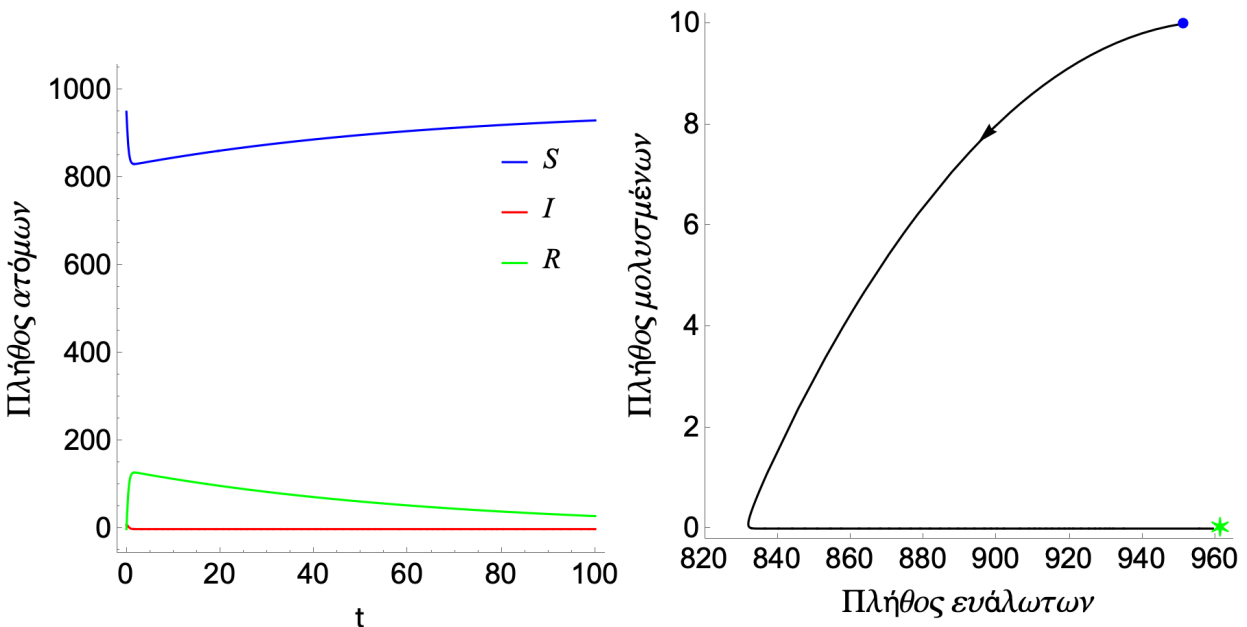
$$\begin{aligned}\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} &= M - MS_\alpha - \mathcal{R}_0 S_\alpha I_\alpha \\ \frac{dI_\alpha}{dt_\alpha} &= -I_\alpha + \mathcal{R}_0 S_\alpha I_\alpha \\ \frac{dR_\alpha}{dt_\alpha} &= I_\alpha - MR_\alpha,\end{aligned}$$

όπου

$$\mathcal{R}_0 := \frac{\beta N_0}{\gamma + \mu} \text{ και } M := \frac{\mu}{\gamma + \mu}.$$

Άσκηση 8.5. Δικαιολογήστε την επιλογή των αδιάστατων μεταβλητών για το $(SIR\mu)$ και υπολογίστε τον αντίστοιχο δραστικό “αριθμό” αναπαραγωγής, \mathcal{R}_e .

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.4, στο Σχήμα 8.5, στο Σχήμα 8.6 και στο Σχήμα 8.7, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας.



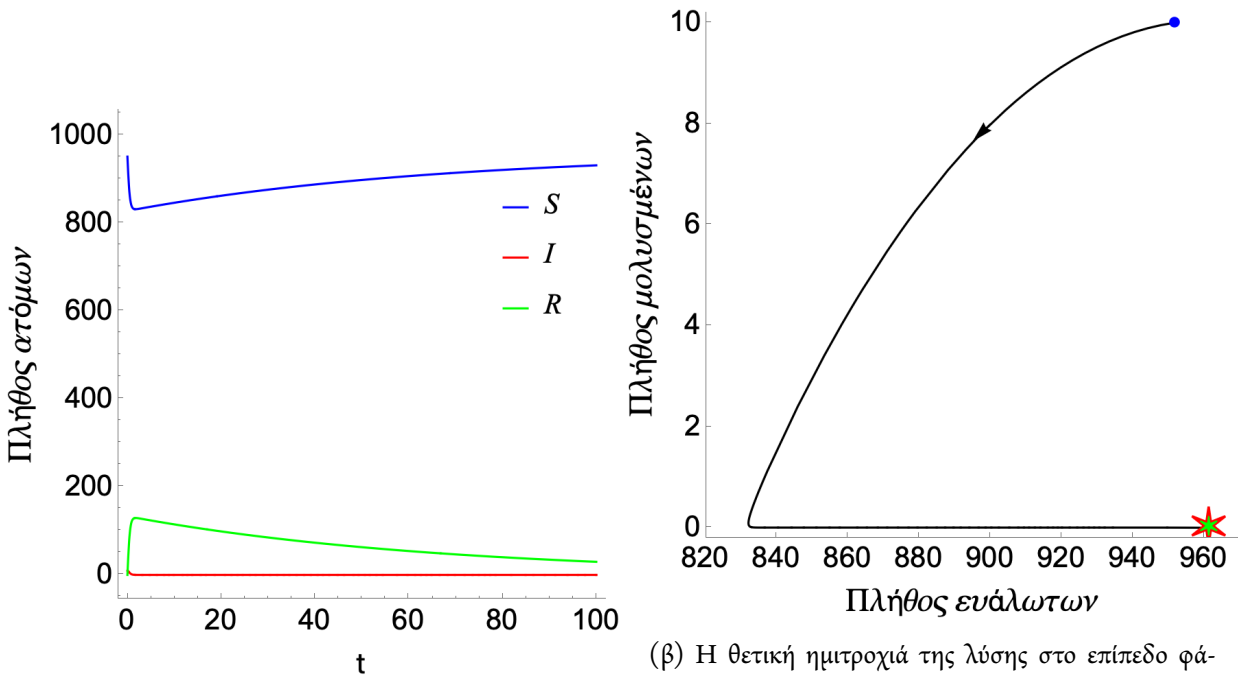
(α) Τα S , I και R για θετικούς χρόνους.

(β) Η θετική ημιτροχιά στο επίπεδο φάσης SI . Απεικονίζεται το ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. $(N_0, 0)$ (πράσινο αστέρι).

Σχήμα 8.4: Γραφήματα των S , I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς της λύσης στο επίπεδο φάσης του $(SI\mu)$, με αρχικές συνθήκες $N_0 = 961$ άτομα, $I_0 = 10$ άτομα και $S_0 = N_0 - I_0$, και τιμές των παραμέτρων $\mu = 0.015$ [χρόνος] $^{-1}$, $\gamma = 24.985$ [χρόνος] $^{-1}$ και $\beta = 0.026$ άτομα $^{-1}$ · [χρόνος] $^{-1}$. Σημειώνουμε ότι $0 < N_0 < \frac{\gamma + \mu}{\beta} = 961.538461$ άτομα.

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Θεωρία Poincaré-Bendixson. Πριν περάσουμε στη διατύπωση του κεντρικού αποτελέσματος, θα χρειαζόμαστε κάποιες έννοιες. Έτσι, έστω $y_0 \in S_2$, όπου S_2 ο χώρος φάσης ενός αυτόνομου (ΠΑΤ), το οποίο έχει



(α) Τα S, I και R για θετικούς χρόνους.

(β) Η θετική ημιτροχιά της λύσης στο επίπεδο φάσης SI . Απεικονίζεται το θετικά ασταθές σ.ι. $(N_0, 0)$ (κόκκινο αστέρι) και το ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές $(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma+\mu} - \frac{\mu}{\beta})$ (πράσινο αστέρι), τα οποία εδώ είναι πολύ κοντά μεταξύ τους.

Σχήμα 8.5: Γραφήματα των S, I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς της λύσης στο επίπεδο φάσης του $(SI\mu)$, με αρχικές συνθήκες $N_0 = 961.6$ άτομα, $I_0 = 10$ άτομα και $S_0 = N_0 - I_0$, και τιμές των παραμέτρων $\mu = 0.015$, $\gamma = 24.985$ και $\beta = 0.026$. Σημειώνουμε ότι $961.538461 = \frac{\gamma+\mu}{\beta} < N_0 < N_0^- \approx 961.683$ άτομα.

μοναδική μεγιστική θετικά (αρνητικά) ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$. Τότε ορίζεται το ω -οριακό (α -οριακό) σύνολο του y_0 , $\omega(y_0) \subseteq S_2$ ($\alpha(y_0) \subseteq S_2$), ως

$$\omega(y_0) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\text{Ran}(y(\cdot, y_0)|_{[m, \infty)})} \left(\alpha(y_0) := \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\text{Ran}(y(\cdot, y_0)|_{(-\infty, -m]})} \right).$$

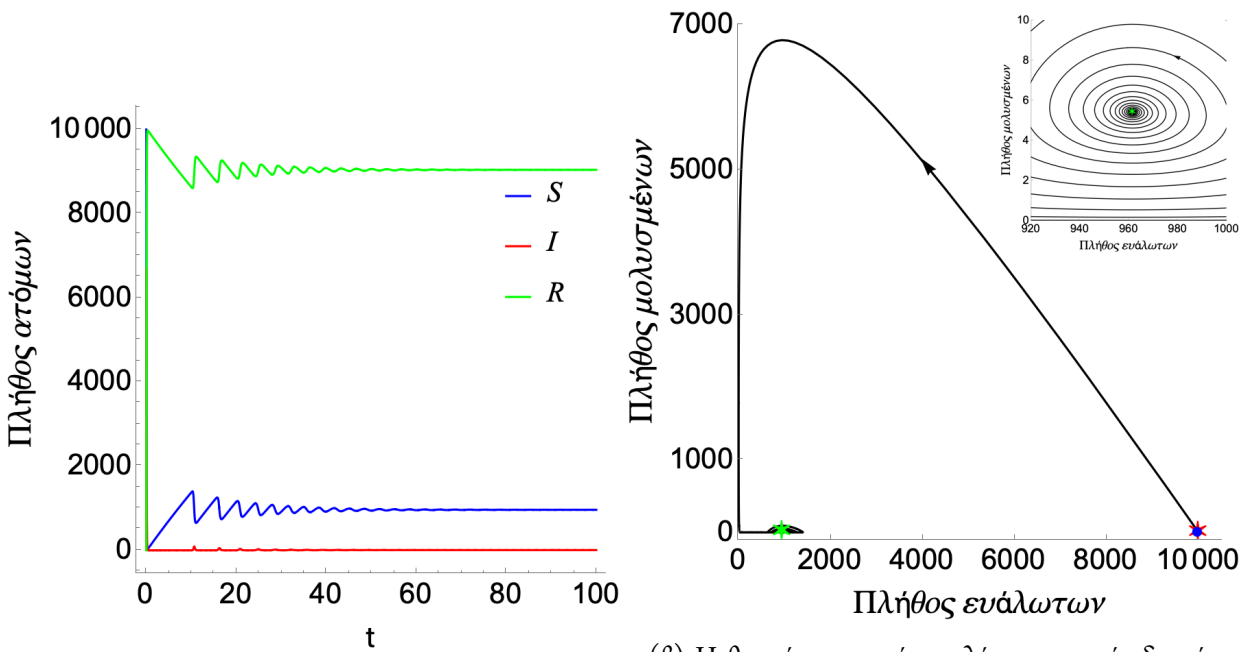
Εύκολα συμπεραίνουμε ότι όλα τα σημεία πάνω σε μια τροχιά έχουν το ίδιο ω -οριακό (α -οριακό) σύνολο. Άμεσα επαληθεύσιμα παραδείγματα οριακών συνόλων αποτελούν το $\{y^*\} = \omega(y^*) = \alpha(y^*)$ για κάθε σ.ι. y^* του αυτόνομου (ΠΑΤ), όπως επίσης και η ίδια η τροχιά κάθε περιοδικής λύσης y του (ΠΑΤ), δηλ. $\text{Ran}(y(\cdot, y_0)) = \omega(y_0) = \alpha(y_0)$ για κάθε τέτοια y .

Την ιδέα για το επόμενο αποτέλεσμα την είχε αρχικά συλλάβει ο Poincaré, αλλά ήταν ο Bendixson, μετά από μια δεκαετία περίπου, που το απέδειξε πλήρως. Για την ιστορία (και πολλά άλλα ενδιαφέροντα θέματα περί) του θεωρήματος αυτού βλ. [1].

Θεώρημα 8.6 (Poincaré-Bendixson). Έστω $n = 2$, αυτόνομο (ΠΑΤ) το οποίο για κάθε $y_0 \in S_2$ έχει μοναδική μεγιστική θετικά (αρνητικά) ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$, καθώς επίσης ότι υπάρχουν $y_0 \in S_2$ και συμπαγές $\Sigma \subseteq S_2$, τέτοια ώστε

$$\text{Ran}(y(\cdot, y_0)|_{(0, \infty)}) \subseteq \Sigma \quad \left(\text{Ran}(y(\cdot, y_0)|_{(-\infty, 0)}) \subseteq \Sigma \right),$$

δηλ. η αντίστοιχη θετική (αρνητική) ημιτροχιά είναι φραγμένη. Τότε το $\omega(y_0)$ ($\alpha(y_0)$)



(α) Τα S, I και R για θετικούς χρόνους.

(β) Η θετική ημιτροχιά της λύσης στο επίπεδο φάσης SI . Απεικονίζεται το θετικά ασταθές σ.ι. $(N_0, 0)$ (κόκκινο αστέρι) και το ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές $(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma+\mu} - \frac{\mu}{\beta})$ (πράσινο αστέρι).

Σχήμα 8.6: Γραφήματα των S, I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς της λύσης στο επίπεδο φάσης του $(SI\mu)$, με αρχικές συνθήκες $N_0 = 10^4$ άτομα, $I_0 = 10$ άτομα και $S_0 = N_0 - I_0$, και τιμές των παραμέτρων $\mu = 0.015 [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\gamma = 24.985 [\text{χρόνος}]^{-1}$ και $\beta = 0.026 \text{ άτομα}^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$. Σημειώνουμε ότι $961.683 \approx N_0^- < N_0 < N_0^+ \approx 6.40929 \cdot 10^6$ άτομα.

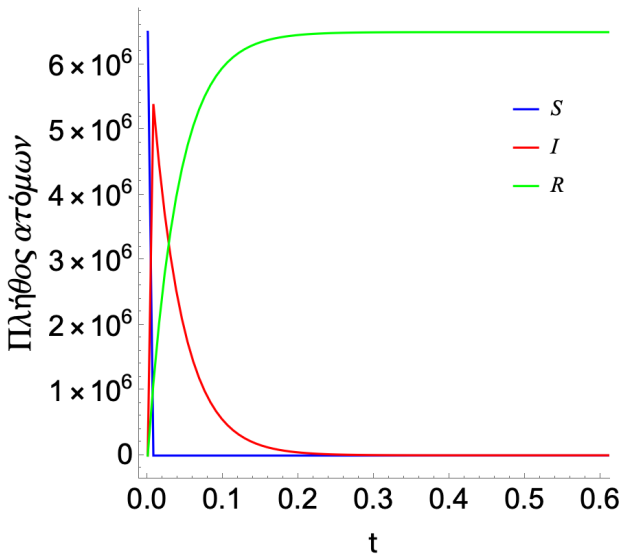
1. είτε περιέχει κάποιο σ.ι.,
2. είτε είναι ένας οριακός κύκλος.

Συγκεκριμένα, υπό τις παραπάνω υποθέσεις έχουμε τα εξής:

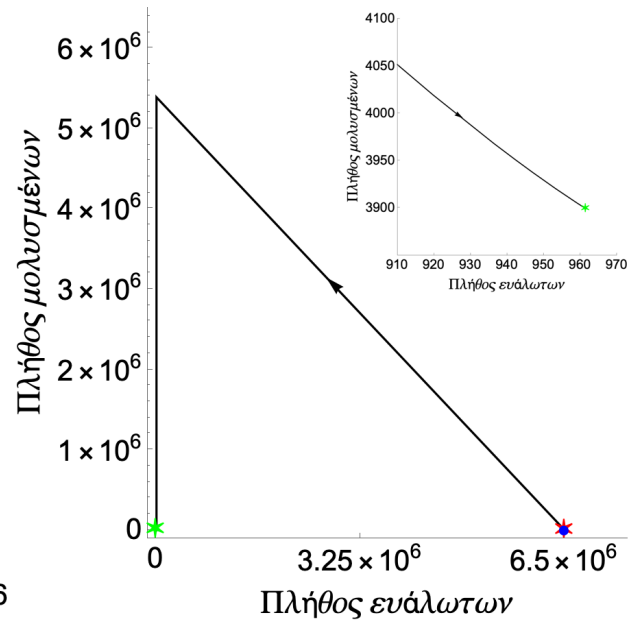
1. Έστω ότι το $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$ περιέχει ένα ή περισσότερα του ενός αλλά πεπερασμένα στο πλήθος σ.ι..
 - i. Αν το $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$ περιέχει μόνο σ.ι., τότε το $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$ είναι ένα μοναδικό σ.ι..
 - ii. Αν το $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$ δεν περιέχει μόνο σ.ι., τότε το $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$ αποτελείται από ένα σύνολο τροχιών ολικών λύσεων, κάθε μία από τις οποίες τείνει, καθώς $t \rightarrow \pm\infty$, σε ένα από τα σ.ι., που περιέχονται και αυτά στο $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$.
2. Αν το $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$ δεν περιέχει σ.ι., τότε το $\omega(y_0) (\alpha(y_0))$ είναι ένας οριακός κύκλος.

Με αφορμή το σημείο 1.ii. του Θεωρήματος 8.6, εισάγουμε κάποιες έννοιες που αφορούν ένα αυτόνομο (ΠΑΤ), με $n = 2$, που έχει λύση:

- α. Κάθε τροχιά ολικής λύσης που τείνει στο ίδιο σ.ι., καθώς $t \rightarrow -\infty$ και $t \rightarrow \infty$, λέγεται ομοκλινής (homoclinic orbit) και παράδειγμα της γεωμετρίας της αποτυπώνεται στο Σχήμα 8.8β.
- β. Κάθε τροχιά ολικής λύσης που τείνει σε διαφορετικά σ.ι., καθώς $t \rightarrow -\infty$ και $t \rightarrow \infty$, λέγεται ετεροκλινής (heteroclinic orbit) και παράδειγμα της γεωμετρίας της αποτυπώνεται στο Σχήμα 8.8γ. Μάλιστα ένα σύνολο ετεροκλινών τροχιών, οι οποίες, μαζί με τα αντίστοιχα σ.ι., σχηματίζουν κατά τμήματα



(α) Τα S, I και R για θετικούς χρόνους.



(β) Η θετική ημιτροχιά της λύσης στο επίπεδο φάσης SI . Απεικονίζεται το θετικά ασταθές σ.ι. $(N_0, 0)$ (κόκκινο αστέρι) και το ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές $(\frac{\gamma+\mu}{\beta}, \frac{\mu N_0}{\gamma+\mu} - \frac{\mu}{\beta})$ (πράσινο αστέρι).

Σχήμα 8.7: Γραφήματα των S, I και R για θετικούς χρόνους, καθώς και της θετικής ημιτροχιάς της λύσης στο επίπεδο φάσης του $(SI\mu)$, με αρχικές συνθήκες $N_0 = 6.5 \cdot 10^6$ άτομα, $I_0 = 10$ άτομα και $S_0 = N_0 - I_0$, και τιμές των παραμέτρων $\mu = 0.015 [\text{χρόνος}]^{-1}$, $\gamma = 24.985 [\text{χρόνος}]^{-1}$ και $\beta = 0.026 \text{ άτομα}^{-1} \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$. Σημειώνουμε ότι $N_0 > N_0^+ \approx 6.40929 \cdot 10^6$ άτομα.

ομαλό και προσανατολισμένο σύνορο κάποιου απλά συνεκτικού συνόλου, λέγεται κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα ετεροκλινών τροχιών (βλ., επίσης, Σχήμα 8.8γ).

Στην πράξη, το Θεώρημα 8.6 χρησιμοποιείται συνήθως για δύο σκοπούς,

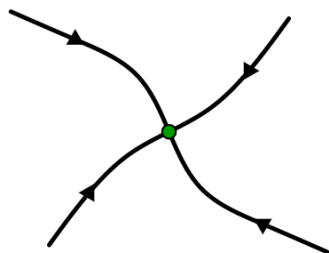
1. την ολική ασυμπτωτική ευστάθεια σ.ι. με αποκλεισμό ομοκλινών τροχιών, ζεύγους αντίστροφων ετεροκλινών τροχιών και κλειστών τροχιών, μέσω του αρνητικού κριτηρίου Bendixson-Dulac, και
2. την ύπαρξη περιοδικών λύσεων μέσω της αξιοποίησης χωρίων παγίδευσης που δεν περιέχουν σ.ι..

Συνέπεια του Θεωρήματος 8.6 αποτελεί το ακόλουθο αποτέλεσμα, η γεωμετρία του οποίου απεικονίζεται στο Σχήμα 8.9.

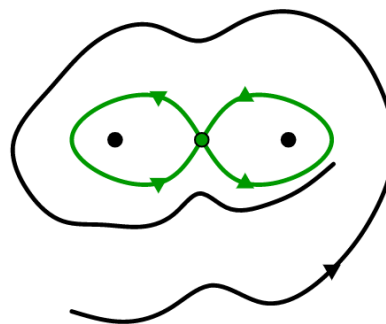
Θεώρημα 8.7 (Poincaré). Έστω $n = 2$ και αυτόνομον (ΠΑΤ), το οποίο έχει μοναδική μεγιστική θετικά, ή αρνητικά, ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$, για κάθε $y_0 \in S_2$, όπου $S_2^\circ \neq \emptyset$, καθώς επίσης ότι υπάρχει $\Sigma \subsetneq S_2$, τέτοιο ώστε

$$\Sigma = \begin{cases} \text{είτε μια ομοκλινής τροχιά,} \\ \text{είτε ένα κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα ετεροκλινών τροχιών,} \\ \text{είτε μια κλειστή τροχιά.} \end{cases}$$

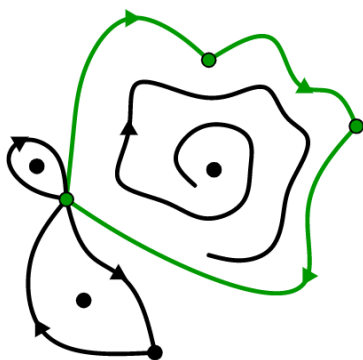
1. Τότε υπάρχει περιοχή του $\bar{\Sigma}$ εντός του S_2 , στην οποία δεν υπάρχει σ.ι. του (ΠΑΤ).
2. Αν όλα τα σημεία που "γνήσια περιβάλλει" το $\bar{\Sigma}$ ανήκουν στο S_2 , τότε τουλάχιστον ένα από αυτά είναι σ.ι. του (ΠΑΤ).



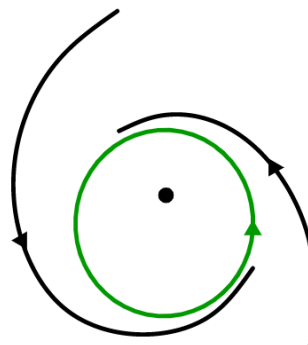
(α) Ένα σ.ι..



(β) Δύο ομοκλινείς τροχιές (τροχιές όπου ταυτίζονται το α -οριακό και το ω -οριακό σύνολο έκαστης) με κοινό αντίστοιχο σ.ι., μαζί με το σημείο αυτό.



(γ) Ένα κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα ετεροκλινών τροχιών μαζί με τα αντίστοιχα σ.ι. (όλα μαζί με πράσινο). Απεικονίζονται, επίσης, δύο άλλες ετεροκλινείς τροχιές που και αυτές σχηματίζουν ένα (ανεξάρτητο του προηγούμενου) κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα, καθώς και μια ομοκλινής τροχιά.



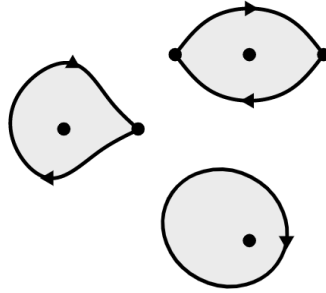
(δ) Μια κλειστή τροχιά.

Σχήμα 8.8: Παραδείγματα ω -οριακών συνόλων (με πράσινο) ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) στο επίπεδο, όπως προκύπτουν από το **Θεώρημα 8.6**. Παρατηρούμε ότι i. η κλειστότητα των ομοκλινών τροχιών, ii. η κλειστότητα των κλειστών και προσανατολισμένων συμπλεγμάτων ετεροκλινών τροχιών, και iii. οι κλειστές τροχιές, σχηματίζουν κατά τμήματα ομαλά και προσανατολισμένα σύνορα κάποιων απλά συνεκτικών συνόλων.

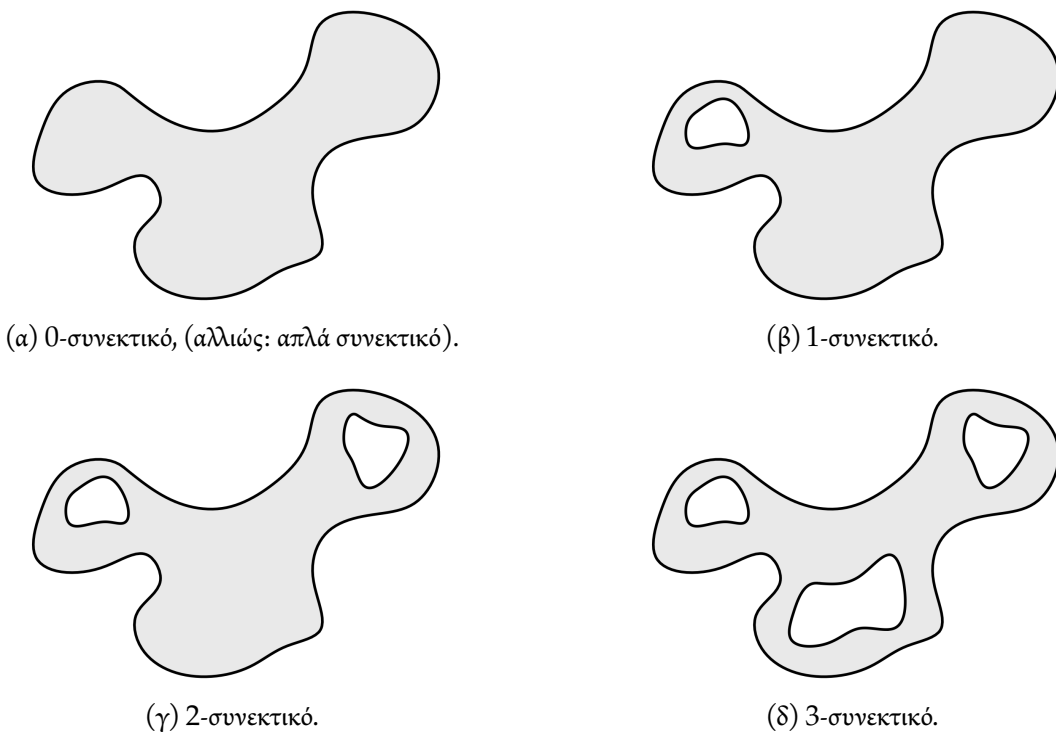
Για την επόμενη συνέπεια του **Θεωρήματος 8.6** εισάγουμε μια έννοια, που χρησιμοποιείται για την ταξινόμηση συνεκτικών συνόλων στο επίπεδο και γενικεύει την έννοια του απλά συνεκτικού συνόλου. Συγκεκριμένα, ένα $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^2$ με $\Sigma^\circ \neq \emptyset$ λέγεται m -συνεκτικό, με $m \in \mathbb{N}_0$, ανν είναι συνεκτικό και έχει ακριβώς m “τρύπες”. Προφανώς οι έννοιες “0-συνεκτικό” και “απλά συνεκτικό” είναι ταυτόσημες (στο επίπεδο πάντα). Παραδείγματα της γεωμετρίας τέτοιων συνόλων απεικονίζονται στο **Σχήμα 8.10**.

Θεώρημα 8.8. Έστω $n = 2$, αυτόνομο (ΠΑΤ) το οποίο για κάθε $y_0 \in S_2$ έχει μοναδική μεγιστική θετικά, ή αρνητικά, ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$ και συμπαγές 1-συνεκτικό $\Sigma \subseteq S_2$, όπου $\partial\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ με $\Sigma_1 \neq \emptyset \neq \Sigma_2$ και $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, τέτοιο ώστε κάθε Σ_1 και Σ_2 να είναι

- είτε η κλειστότητα



Σχήμα 8.9: Χονδρικά, σύμφωνα με το [Θεώρημα 8.7](#), κάθε ομοκλινής τροχιά, κάθε κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα ετεροκλινών τροχιών, και κάθε κλειστή τροχιά στον χώρο φάσης ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) στο επίπεδο, περιβάλλει γνήσια κάποιο σ.ι..



(α) 0-συνεκτικό, (αλλιώς: απλά συνεκτικό).

(β) 1-συνεκτικό.

(γ) 2-συνεκτικό.

(δ) 3-συνεκτικό.

Σχήμα 8.10: Παραδείγματα m -συνεκτικών συνόλων στο επίπεδο, με $m \in \mathbb{N}_0$.

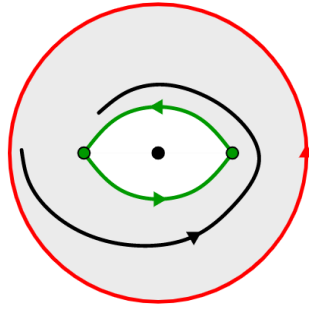
- είτε μιας ομοκλινούς τροχιάς,
- είτε ενός κλειστού και προσανατολισμένου συμπλέγματος τροχιών,
- είτε μια κλειστή τροχιά.

Αν το¹ Σ° δεν περιλαμβάνει ούτε σ.ι. ούτε κλειστές τροχιές, τότε όλες μαζί οι τροχιές ολικών λύσεων του (ΠΑΤ) εντός του Σ° τείνουν σε κάποια από τις Σ_1 και Σ_2 , καθώς $t \rightarrow -\infty$, και στην άλλη, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Παραδείγματα της γεωμετρίας του [Θεωρήματος 8.8](#) απεικονίζονται στο [Σχήμα 8.11](#).

Αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac. Όπως έχουμε αναφέρει, το [Θεώρημα 8.6](#) μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την εξαγωγή ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σ.ι., αν αυτό συνδυαστεί με ένα αποτέλεσμα

¹Με A° συμβολίζεται το εσωτερικό του συνόλου A .



Σχήμα 8.11: Χονδρικά, σύμφωνα με το [Θεώρημα 8.8](#), μεταξύ δύο διαδοχικών, είτε ομοκλινών τροχιών, είτε κλειστών και προσανατολισμένων συμπλεγμάτων ετεροκλινών τροχιών, είτε κλειστών τροχιών, στον χώρο φάσης ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) στο επίπεδο, οι τροχιές απομακρύνονται από τη μία και πλησιάζουν την άλλη.

αποκλεισμού ύπαρξης περιοδικών τροχιών εντός του χώρου φάσης. Ένα τέτοιο αποτέλεσμα αποτελεί το παρακάτω, το οποίο, κατά τα άλλα, είναι ανεξάρτητο του [Θεωρήματος 8.6](#) και των συνεπειών του, καθώς για την απόδειξή του χρησιμοποιείται μονάχα το θεώρημα Green.

Θεώρημα 8.9 (Bendixson-Dulac, ή αλλιώς, αρνητικό κριτήριο). Έστω $n = 2$, αυτόνομο (ΠΑΤ) τέτοιο ώστε $f = (f_1, f_2) \in C^1(U; \mathbb{R}^2)$ με ανοικτό $U \subseteq S_2$, και m -συνεκτικό $\Sigma \subseteq U$ με $m \in \mathbb{N}_0$, εντός του οποίου υπάρχουν στο πλήθος ακριβώς

- i. m_1 ομοκλινείς τροχιές,
- ii. m_2 ζεύγη αντίστροφων ετεροκλινών τροχιών, και
- iii. m_3 κλειστές τροχιές,

όπου $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{N}_0$. Αν υπάρχει $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε η απόκλιση του γινομένου φf , δηλ. η

$$\nabla \cdot (\varphi f) = \frac{\partial(\varphi f_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\varphi f_2)}{\partial x_2} = \nabla \varphi \cdot f + \varphi \nabla \cdot f,$$

να διατηρεί σταθερό, μη μηδενικό, πρόσημο σχεδόν παντού στο Σ , τότε

$$m_1 + m_2 + m_3 \leq m.$$

Σημειώνουμε ότι στη βιβλιογραφία αναφέρονται συχνά μόνο οι κλειστές τροχιές στο [Θεώρημα 8.9](#), ωστόσο δεν αποκλείονται ούτε οι ομοκλινείς τροχιές ούτε τα ζεύγη αντίστροφων ετεροκλινών τροχιών, λόγω των γεωμετρικών γενικεύσεων (κατά τμήματα ομαλά σύνορο, χωρίς ενδεχομένως κάποια σημεία του συνόρου) που επιδέχεται το θεώρημα Green (και γενικότερα το θεώρημα Stokes στον \mathbb{R}^n).

Η βιβλιογραφία του παρόντος κεφαλαίου καλύπτεται πλήρως από εκείνη του [Κεφαλαίου 1](#), οπότε δεν παρατίθεται και πάλι εδώ. Μοναδική συμπλήρωση αποτελεί η εργασία [\[1\]](#).

Βιβλιογραφία

- [1] K. Ciesielski. “The Poincaré-Bendixson theorem: from Poincaré to the XXIst century”. Στο: *Central European Journal of Mathematics* 10 (2012), σσ. 2110–2128.

■ ΒΙΟΧΗΜΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ Ι

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

- (α) Κινητική χημικών αντιδράσεων
- (β) Βασικό μοντέλο ενζυμικής κατάλυσης

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

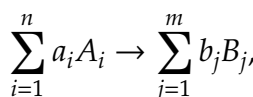
- (α) Η συνάρτηση Lambert
- (β) Τοπικά προσεγγιστικές λύσεις προβλήματος: Βασικές έννοιες και τεχνικές

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, [Κεφάλαια 1-8](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Γενικά περί χημικών αντιδράσεων. Μια χημική αντίδραση (*chemical reaction*) είναι μια διαδικασία μετατροπής ενός συνόλου χημικών ουσιών (*chemical substances*) (χημικά στοιχεία, ιόντα, χημικές ενώσεις) σε ένα άλλο. Η χημική εξίσωση (*chemical equation*) μιας μονόδρομης (*irreversible*) χημικής αντίδρασης έχει τη μορφή



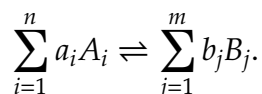
όπου οι χημικές ουσίες $A_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ αποτελούν τα αντιδρώντα (*reagents*) και οι $B_j \forall j \in \{1, \dots, m\}$ τα προϊόντα (*products*). Επιπλέον, οι συντελεστές

$$a_i, b_j \in \mathbb{N}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$$

ονομάζονται στοιχειομετρικοί (*stoichiometric*) και προκύπτουν από τον νόμο διατήρησης της ύλης (μάζας) (*conservation of matter (mass)*). Πολλά θέματα που εγείρονται κατά τη δυναμική μελέτη μιας μονόδρομης χημι-

κής αντίδρασης μπορούν να εξηγηθούν φυσικά με μία από τις γνωστές θεωρίες χημικών αντιδράσεων, αυτή της θεωρίας συγκρούσεων (*collision theory*), την οποία και πρότεινε ο Arrhenius το 1889, [1]. Σύμφωνα με αυτή, για να αντιδράσουν κάποια εν δυνάμει αντιδρώντα θα πρέπει να συγκρουστούν αποτελεσματικά, δηλ. να έχουν ικανό μέτρο ταχύτητας και σωστή κατεύθυνση κίνησης, έτσι ώστε να σπάσουν οι εσωτερικοί τους δεσμοί και στη συνέχεια να δημιουργηθούν άλλοι, οι οποίοι άλλοι σχηματίζουν τα προϊόντα. Έτσι, σε ένα οσοδήποτε μικρό χρονικό διάστημα, στις γρήγορες χημικές αντιδράσεις οι αποτελεσματικές συγκρούσεις μεταξύ των αντιδρώντων είναι περισσότερες από αυτές στις αργές.

Από την άλλη, η χημική εξίσωση μιας αμφίδρομης (*reversible*) χημικής αντίδρασης έχει τη μορφή



Μια αμφίδρομη αντίδραση πραγματοποιείται και προς τις δύο (αντίθετες) κατευθύνσεις ταυτόχρονα, και καταλήγει σε μια κατάσταση δυναμικής ισορροπίας, γνωστή ως χημική ισορροπία (*chemical equilibrium*), όπου η σύσταση (τόσο ποιοτική όσο και ποσοτική) των αντιδρώντων και των προϊόντων παραμένει σταθερή. Ενώ δίνεται η εντύπωση ότι το μείγμα δεν αντιδρά, ωστόσο οι δύο αντίστροφες αντιδράσεις γίνονται ακατάπαυστα με την ίδια ταχύτητα (*rate*) v . Στη θεωρία, όλες οι χημικές αντιδράσεις είναι αμφίδρομες. Ωστόσο στην πράξη, οι χημικές αντιδράσεις στις οποίες η πλάστιγγα γέρνει κατά πολύ περισσότερο προς τη μία πλευρά, ώστε τουλάχιστον μία από της χημικές ουσίες που εμφανίζονταν στην αρχή τελικά να μην ανιχνεύεται, λαμβάνονται ως μονόδρομες. Επιπλέον, στις πολύ αργές μονόδρομες αντιδράσεις δίνεται η ψευδαίσθηση χημικής ισορροπίας. Ωστόσο η αξιοποίηση καταλυτών (*catalysts*) είναι ένας αξιόπιστος τρόπος να διακρίνουμε μια αληθή χημική ισορροπία από μια φαινομενική, και τελικά μια αργή μονόδρομη χημική αντίδραση από μια αμφίδρομη. Καταλύτης ονομάζεται μια ουσία, η οποία με την παρουσία της (συνήθως σε μικρές ποσότητες), αυξάνει την ταχύτητα μιας αντίδρασης, ενώ στο τέλος της αντίδρασης παραμένει σχεδόν αμετάβλητη τόσο στη μάζα όσο και στη χημική της σύσταση. Στις βιοχημικές αντιδράσεις (*biochemical reactions*), δηλ. στις χημικές αντιδράσεις του μεταβολισμού (*metabolism*) των οργανισμών (*organisms*), τα ένζυμα (*enzymes*) παίζουν τον ρόλο των καταλυτών, τα οποία και χαρακτηρίζονται ως βιοκαταλύτες (*biocatalysts*). Τέτοιες δε αντιδράσεις καλούνται ενζυμικές (*enzymatic*), και τα αντιδρώντα εκτός των ενζύμων καλούνται συνολικά υπόστρωμα (*substrate*).

Για την αμιγώς δυναμική μελέτη μιας χημικής αντίδρασης, ή γενικότερα ενός συστήματος χημικών εξισώσεων, χρησιμοποιούμε ΣΔΕ οι οποίες εμπλέκουν τις ποσότητες των χημικών ουσιών που εξετάζονται καθώς και των ρυθμών μεταβολής αυτών των ποσοτήτων¹.

Παρακάτω αναφέρουμε βασικές συνθήκες που επιβάλλουμε, οι οποίες αποτελούν το έδαφος για τη μαθηματική μοντελοποίηση των χημικών αντιδράσεων και κατ' επέκταση για τη δυναμικής τους μελέτη. Οι συνθήκες αυτές, αν και περιορίζουν από τη μία το φάσμα των υπό μελέτη χημικών αντιδράσεων, από την άλλη ικανοποιούνται από τις βιοχημικές αντιδράσεις, οι οποίες εν τέλει είναι και το ζητούμενο.

1. Ενδιαφερόμαστε μόνο για τα διαλύματα (*solutions*), δηλ. για ομογενή υγρά μείγματα όπου όλες οι χημικές ουσίες είναι πλήρως διαλυμένες. Η βάση του διαλύματος, δηλ. η χημική ουσία του διαλύματος η οποία είναι σε υγρή μορφή, βρίσκεται σε περίσσεια, και ενδεχομένως δεν συμμετέχει στην υπό μελέτη χημική αντίδραση, αποτελεί τον διαλύτη (*solvent*). Ο συνήθης διαλύτης στις βιοχημικές αντιδράσεις είναι το νερό (H_2O).
2. Ο όγκος του διαλύματος είναι σταθερός, μια συνθήκη η οποία είναι σχεδόν πάντα αποδεκτή και ιδιαίτερα χρήσιμη στην πράξη. Έτσι, η συγκέντρωση μιας χημικής ουσίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της ποσοτικής μεταβολής της ίδιας. Συγκεκριμένα, η συγκέντρωση μιας πλήρως διαλυμένης χημικής ουσίας A δίνεται από τον τύπο

$$[A] = \frac{n_A}{V},$$

¹Για τη σχέση των Μαθηματικών γενικά με τη Χημεία βλ. το ενδιαφέρον άρθρο [2].

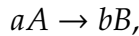
όπου n_A είναι η ποσότητα της ουσίας μετρημένης σε γραμμομόρια (mol) και V ο (σταθερός) όγκος του διαλύματος μετρημένος συνήθως σε λίτρα (L). Η συγκέντρωση σε αυτή την περίπτωση αναφέρεται πιο περιγραφικά ως γραμμομοριακότητα κατ' όγκο ή μοριακότητα κατ' όγκο ($molarity$) και μετράται σε molars (M), δηλ. $1M = 1mol \cdot L^{-1}$. Σημειώνουμε ότι κατά τη δυναμική μελέτη οι συγκεκριμένες θεωρούνται ως συναρτήσεις ως προς τον χρόνο, δηλ.

$$[A] : \mathbb{R} \supseteq \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty) \\ t \mapsto [A](t),$$

για κατάλληλο διάστημα \mathcal{I} , ωστόσο η αναγραφή του ορίσματος (t) στον συμβολισμό δεν συνηθίζεται.

3. Η θερμοκρασία κατά τη διάρκεια μελέτης των χημικών αντιδράσεων παραμένει σταθερή. Γενικά, η ταχύτητα μιας μονόδρομης αντίδρασης αυξάνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας, καθώς η αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση της μέσης κινητικής ενέργειας των αντιδρώντων (κατανομή των Maxwell-Boltzmann) με επακόλουθη αύξηση του αριθμού των αποτελεσματικών συγκρούσεων. Επιπλέον, δεν υφίστανται ακτινοβολίες, οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν χημικές μεταβολές στα αντιδρώντα, με συνέπεια να αλλάξουν ενδεχομένως οι μηχανισμοί και οι ταχύτητες των χημικών αντιδράσεων.

Ταχύτητα μονόδρομης χημικής αντίδρασης. Σύμφωνα με τη στοιχειομετρία της παρακάτω χημικής εξίσωσης



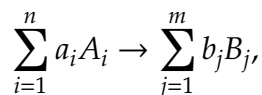
αν σε ένα οσοδήποτε μικρό χρονικό διάστημα αντιδράσουν $ax \text{ mol } A$, τότε στο ίδιο χρονικό διάστημα θα σχηματιστούν $bx \text{ mol } B$. Έπεται άμεσα ότι

$$\frac{1}{a} \left| \frac{d[A]}{dt} \right| = \frac{1}{b} \left| \frac{d[B]}{dt} \right|, \text{ δηλ. } -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = \frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt},$$

μιας και η A καταναλώνεται και η B παράγεται. Αυτό το συμπέρασμα δεν πρέπει να μας εκπλήσσει, καθώς η στοιχειομετρία μιας χημικής εξίσωσης επιβάλλεται από τον νόμο διατήρησης της ύλης, ο οποίος στην προκειμένη έχει τη μορφή

$$b[A] + a[B] = \text{σταθερό.}$$

Γενικεύοντας, αν έχουμε την



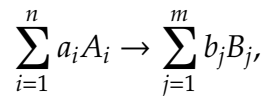
τότε

$$-\frac{1}{a_1} \frac{d[A_1]}{dt} = \dots = -\frac{1}{a_n} \frac{d[A_n]}{dt} = \frac{1}{b_1} \frac{d[B_1]}{dt} = \dots = \frac{1}{b_m} \frac{d[B_m]}{dt},$$

και η συνάρτηση αυτή ως προς τον χρόνο δεν είναι άλλη από την ταχύτητα v της παραπάνω χημικής αντίδρασης.

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης είναι η συγκέντρωση των αντιδρώντων, η πίεση όταν ένα τουλάχιστον αντιδρών βρίσκεται σε αέρια μορφή, η επιφάνεια επαφής των στερεών αντιδρώντων, η θερμοκρασία, η ακτινοβολία και η παρουσία καταλυτών. Εδώ, οι μόνιμοι παράγοντες επιρροής είναι η συγκέντρωση των αντιδρώντων και η παρουσία βιοκαταλυτών, καθώς οι υπόλοιποι παράγοντες είναι είτε σταθεροί είτε απόντες.

Απλή χημική αντίδραση. Μια απλή ή στοιχειώδης (*elementary*) χημική αντίδραση



ορίζεται να ικανοποιεί τον **νόμο δράσης της μάζας**, [3], (I τύπο Holling), δηλ. ισχύει ότι

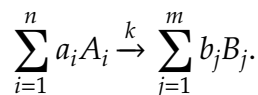
$$v = k \prod_{i=1}^n [A_i]^{a_i},$$

δηλ.

$$-\frac{1}{a_i} \frac{d[A_i]}{dt} = \frac{1}{b_j} \frac{d[B_j]}{dt} = k \prod_{i=1}^n [A_i]^{a_i}, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\},$$

όπου η $k > 0$ (με, ή χωρίς, κάποιον δείκτη) είναι ενδιάστατη (οι διαστάσεις τις εξαρτώνται από την αντίστοιχη χημική αντίδραση), ονομάζεται *σταθερά* της χημικής αντίδρασης (*rate constant*) και εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Ο νόμος αυτός ουσιαστικά μας εξασφαλίζει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης κάθε χημικής ουσίας (είτε προϊόντος, είτε αντιδρώντος) είναι ανάλογος του γινομένου των συγκεντρώσεων των αντιδρώντων, και μπορεί να εξαχθεί πιθανοθεωρητικά υπό το πλαίσιο της θεωρίας των αποτελεσματικών συγκρούσεων, όπως ακριβώς έγινε και για μοντέλα Οικολογίας (συναντήσεις μεταξύ θηρευτών και θηραμάτων) και Επιδημιολογίας (επαφές μεταξύ ευάλωτων και μολυσματικών).

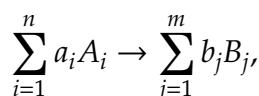
Θεωρείται ότι μια απλή χημική αντίδραση τελείται σε ένα στάδιο/βήμα, αυτό ακριβώς που περιγράφεται από τη χημική της εξίσωση. Μάλιστα, ο van 't Hoff το 1884, [4], εισήγαγε τη “φυσική ταξινόμηση” των απλών χημικών αντιδράσεων, η οποία περιέχει αποκλειστικά χημικές αντιδράσεις όπου για τις αντίστοιχες χημικές εξισώσεις ισχύει ότι $\sum_{i=1}^n a_i \in \{1, 2, 3\}$ (προφανώς τότε $n \in \{1, 2, 3\}$). Μιας και για τη δυναμική μελέτη μιας απλής χημικής αντίδρασης απαιτούνται μόνο η στοιχειομετρία της και η γνώση της σταθεράς k , θα ξεχωρίζουμε μια απλή χημική αντίδραση από τη χημική της εξίσωση, η οποία θα έχει πλέον ως εξής



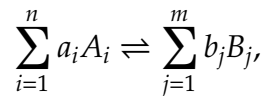
Πολύπλοκη χημική αντίδραση. Μια πολύπλοκη (*complex*) χημική αντίδραση αποτελείται από περισσότερες της μιας απλές χημικές αντιδράσεις οι οποίες διαπλέκονται μεταξύ τους. Παραδείγματα πολύπλοκων χημικών αντιδράσεων αποτελούν

1. οι μονόδρομες με απλές συνιστώσες σε επαλληλία,
2. οι αμφίδρομες με απλές συνιστώσες (προς αντίθετες κατευθύνσεις) και
3. οι συνθέσεις των παραπάνω περιπτώσεων.

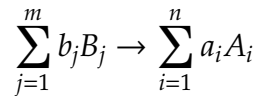
Αμφίδρομη χημική αντίδραση. Η δυναμική προσέγγιση των αμφίδρομων χημικών αντιδράσεων μπορεί να γίνει μέσω της θεώρησης που ήδη έχουμε αναφέρει, ότι δηλ. οι μονόδρομες αποτελούν ακραίες περιπτώσεις των πρώτων. Συγκεκριμένα, θεωρούμε τις ταχύτητες ως προσημασμένα μεγέθη, δηλ. ως διανύσματα διάστασης 1, και επεκτείνουμε τον ορισμό της ταχύτητας μονόδρομων χημικών αντιδράσεων και για αμφίδρομες. Θεωρώντας τη θετική φορά προς τα δεξιά, η



με θετική ταχύτητα v_+ , θεωρείται ως αμφίδρομη



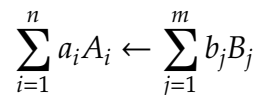
με προσημασμένη ταχύτητα v , όπου η



έχει θετική ταχύτητα v_- , και για τις οποίες ισχύει ότι

$$v_+ \gg v_-.$$

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω χημική αντίδραση με εξίσωση γραμμένη ως



θα έχει πλέον αρνητική ταχύτητα ίση με $-v_-$. Επιπλέον, τα αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για την περίπτωση όπου

$$v_- \gg v_+.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$-\frac{1}{a_i} \frac{d[A_i]}{dt} = \frac{1}{b_j} \frac{d[B_j]}{dt} = v = v_+ - v_-, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}.$$

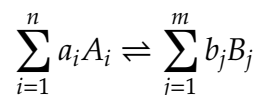
Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, κατά τη διάρκεια της χημικής ισορροπίας ισχύει ότι

$$v_+ \approx v_-,$$

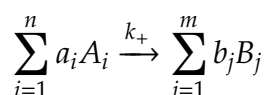
ή, ισοδύναμα,

$$\frac{d[A_i]}{dt} \approx \frac{d[B_j]}{dt} \approx 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}.$$

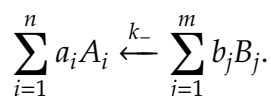
Τέλος, η απλούστερη αμφίδρομη χημική αντίδραση



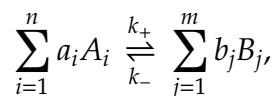
λαμβάνεται όταν οι επιμέρους αντίθετες μονόδρομες χημικές αντιδράσεις είναι απλές, δηλ. όταν



και



Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε



και ισχύουν οι εξισώσεις

$$-\frac{1}{a_i} \frac{d[A_i]}{dt} = \frac{1}{b_j} \frac{d[B_j]}{dt} = k_+ \prod_{i=1}^n [A_i]^{a_i} - k_- \prod_{j=1}^m [B_j]^{b_j}, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\},$$

καθώς

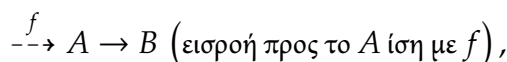
$$v_+ = k_+ \prod_{i=1}^n [A_i]^{a_i} \text{ και } v_- = k_- \prod_{j=1}^m [B_j]^{b_j}.$$

Τονίζουμε, ωστόσο, ότι παρακάτω θα δούμε έναν γενικό τρόπο εξαγωγής συστημάτων διαφορικών εξισώσεων όπως το παραπάνω, χαρακτηριστικά για την εκάστοτε υπό μελέτη χημική αντίδραση, οσοδήποτε πολύπλοκη και αν είναι αυτή.

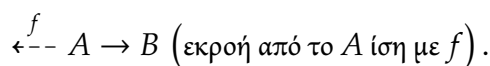
Εισροές και εκροές. Πολλές φορές θεωρούμε αφηρημένους όρους εισροών ή/και εκροών σε μια χημική αντίδραση. Αυτή η πρακτική είναι απαραίτητη και ουσιαστική όταν, για παράδειγμα, η υπό μελέτη χημική αντίδραση αποτελεί επιμέρους τμήμα σύνθετης χημικής διεργασίας όπως είναι ένα μεταβολικό μονοπάτι (*metabolic pathway*) (γλυκόλυση, κύκλος του κιτρικού οξέος κτλ). Εδώ, αυτούς του όρους τους συμβολίζουμε σε διακεκομμένα βέλη



που έχουν κατάλληλη κατεύθυνση κάθε φορά. Συγκεκριμένα, όταν υπάρχει εισροή η αιχμή του βέλους δείχνει προς τη χημική ουσία που προστίθεται εξωγενώς, π.χ.



ενώ όταν υπάρχει εκροή το πίσω μέρος του βέλους δείχνει προς τη χημική ουσία που αφαιρείται, π.χ.

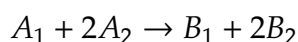


Η μονάδα μέτρησης των όρων εισροών και εκροών είναι προφανώς τα molars ανά μονάδα χρόνου, του οποίου η μονάδα μέτρησης είναι το δευτερόλεπτο (s) (συνήθως οι υποδιαίρέσεις του και σπάνια τα πολλαπλάσιά του).

Μηχανισμός χημικής αντίδρασης. Οι απλές συνιστώσες μιας χημικής αντίδρασης σε συνδυασμό με ενδεχόμενους όρους εισροών ή/και εκροών συνθέτουν τον *μηχανισμό* (*mechanism*) της. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο μηχανισμός μιας χημικής αντίδρασης αποτελεί τον σκελετό της. Αν το πλήθος των συνιστωσών μιας χημικής αντίδρασης είναι ίσο με 1, τότε είναι μονόδρομη και μάλιστα απλή, διαφορετικά είναι πολύπλοκη.

Η εύρεση ενός αξιόπιστου μηχανισμού αποτελεί το πρώτο και ουσιαστικό βήμα για τη θεωρητική δυναμική μοντελοποίηση μιας χημικής αντίδρασης. Τονίζεται, ωστόσο, ότι οι βιοχημικές -και όχι μόνο- αντιδράσεις είναι πολύπλοκες και ο μηχανισμός των περισσότερων από αυτές είναι άγνωστος και ενδεχομένως υπερβολικά σύνθετος.

Με το πείραμα ευελπιστούμε να ξεπεράσουμε τη δυσκολία ενός άγνωστου μηχανισμού. Για παράδειγμα, αν η μονόδρομη χημική αντίδραση



έχει βρεθεί πειραματικά ότι δεν είναι απλή και μάλιστα ότι η ταχύτητά της κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση

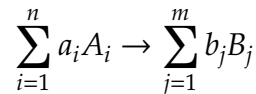
$$v \approx k[A_1][A_2],$$

τότε ένας πιθανός μηχανισμός της χημικής αντίδρασης είναι ο



ο οποίος και θα καθορίσει κατάλληλη επιλογή παραμέτρων και αρχικών τιμών συγκεντρώσεων των χημικών ουσιών.

Νόμος της ταχύτητας. Σε τελική ανάλυση, θα καταφύγουμε στο πείραμα για την επαλήθευση (στην περίπτωση γνωστού μηχανισμού), ή την εξαγωγή (στην περίπτωση μη γνωστού μηχανισμού), της σχέσης της ταχύτητας μιας μονόδρομης χημικής αντίδρασης ως προς τη συγκέντρωση των αντιδρώντων. Έτσι, η ταχύτητα της



συχνά θεωρείται ότι ακολουθεί τον νόμο της ταχύτητας (*rate law*)

$$v \approx k \prod_{i=1}^n [A_i]^{x_i},$$

όπου οι εκθέτες $x_i \in \mathbb{R}$ προκύπτουν πειραματικά, και σε αυτή την περίπτωση η χημική αντίδραση χαρακτηρίζεται ως τάξης x_i ως προς A_i , ενώ η ολική τάξη της χημικής αντίδρασης ισούται με $\sum_{i=1}^n x_i$. Στην περίπτωση όπου τελικά

$$x_i \approx a_i, \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

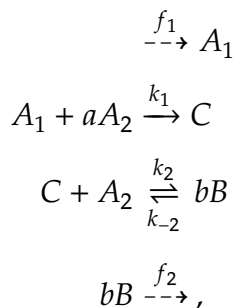
τότε η χημική αντίδραση είναι απλή και ο νόμος της ταχύτητας δεν είναι άλλος από τον νόμο δράσης της μάζας.

Δυναμική μοντελοποίηση μιας χημικής αντίδρασης με γνωστό μηχανισμό. Δεδομένου ενός μηχανισμού μιας χημικής αντίδρασης, για την εύρεση των εξισώσεων της δυναμικής των συγκεντρώσεων των χημικών ουσιών που συμμετέχουν σε αυτή γίνεται χρήση δύο εργαλείων,

1. του νόμου δράσης της μάζας και
2. του νόμου διατήρησης της ύλης (μάζας).

Έτσι, έστω X μια από τις υπό μελέτη χημικές ουσίες της χημικής αντίδρασης και x η συγκέντρωσή της. Απομονώνουμε τις απλές χημικές αντιδράσεις του μηχανισμού στις οποίες συμμετέχει η X . Για κάθε τέτοια απλή χημική αντίδραση, ο νόμος δράσης της μάζας μας δίνει τον τύπο της επιμέρους μεταβολής της $\frac{dx}{dt}$. Το άθροισμα όλων αυτών των επιμέρους μεταβολών ισούται με τη συνολική ζητούμενη μεταβολή της $\frac{dx}{dt}$, λόγω της ισχύος του νόμου διατήρησης της ύλης (μάζας).

Δεν χρειάζεται παρά ένα παράδειγμα για να γίνει αμέσως αντιληπτό το παραπάνω σκεπτικό. Με δεδομένο τον ακόλουθο μηχανισμό



καταλήγουμε στο εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{d[A_1]}{dt} &= f_1 - k_1 [A_1][A_2]^a \\ \frac{d[A_2]}{dt} &= -ak_1 [A_1][A_2]^a - k_2 [C][A_2] + k_{-2}[B]^b \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1 [A_1][A_2]^a - k_2 [C][A_2] + k_{-2}[B]^b \\ \frac{d[B]}{dt} &= bk_2 [C][A_2] - bk_{-2}[B]^b - f_2. \end{aligned}$$

Υποβιβασμός του πλήθους των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος. Είναι προτιμητέο να περιορίσουμε την ανάλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων στην ανάλυση ενός ισοδύναμου με λιγότερες εξισώσεις. Αυτή είναι συνήθως και η διαδικασία που ακολουθούμε όταν μελετάμε συστήματα που προκύπτουν από τη μοντελοποίηση της κινητικής χημικών αντιδράσεων, βλ., π.χ., [5], [6]. Μάλιστα, αυτή η απλοποίηση έπεται εύκολα, συνήθως από εξισώσεις που προκύπτουν μέσω κατάλληλων γραμμικών συνδυασμών των εξισώσεων του αρχικού συστήματος.

Για παράδειγμα, αν $b = 1$, το 4×4 σύστημα της προηγούμενης παραγράφου μετατρέπεται άμεσα σε ένα 2×2 σύστημα μέσω των εξισώσεων

$$\frac{d[A_1]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} + \frac{d[B]}{dt} = f_1 - f_2$$

και

$$a \frac{d[A_1]}{dt} - \frac{d[A_2]}{dt} - \frac{d[B]}{dt} = af_1 + f_2,$$

δηλ., ισοδύναμα, των

$$A_1 + C + B = \int (f_1 - f_2) dt$$

και

$$aA_1 - A_2 - B = \int (af_1 + f_2) dt,$$

όπου βεβαίως οι ροές f_1 και f_2 είναι γνωστές, ενώ, αν $a = 1$ και $b = 2$, τότε μετατρέπεται σε ένα 3×3 σύστημα μέσω της εξίσωσης

$$\frac{d[A_2]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} + \frac{d[B]}{dt} = -f_2.$$

Βασικό μοντέλο ενζυμικής κατάλυσης. Εδώ θα μελετήσουμε το θεμελιώδες μαθηματικό μοντέλο για τη μελέτη της κινητικής της γενικής ενζυμικής αντίδρασης με χημική εξίσωση



όπου S είναι το υπόστρωμα, P το προϊόν και E το ένζυμο που την καταλύει.

Πρώτα, λίγα εισαγωγικά λόγια περί της ιστορίας της². Ήδη από το 1894 ο Fischer, [8], είχε αναπτύξει το μοντέλο κλειδαριάς και κλειδιού (*lock and key model*) για την ερμηνεία της βιοκατάλυσης, ενώ πριν το 1901 ο Brown πρότεινε ένα ενδιάμεσο βήμα στην ενζυμική αντίδραση που περιγράφεται από την (9.1) όπου το υπόστρωμα σχηματίζει με το ένζυμο ένα σύμπλοκο (*complex*) πριν ξεκινήσει η κατάλυση, ιδέα που δημοσιεύθηκε το 1902, [9]. Ήδη δηλ. από τότε είχε γίνει αντιληπτό ότι οι ενζυμικές βιοχημικές αντιδράσεις θα πρέπει να τελούνται σε τουλάχιστον δύο στάδια, και μάλιστα θα πρέπει τα στάδια αυτά να έχουν διαφορετικές χρονικές κλίμακες (*scales*). Βασιζόμενος στην ιδέα αυτή, σε συνδυασμό με συζητήσεις που είχε με τον Bodenstein, ο Henri δημοσίευσε το 1902, [10], και στη συνέχεια το 1903, [11], μια αρχική εκδοχή μιας αξιόπιστης διαφορικής εξίσωσης για την περιγραφή της κινητικής της ενζυμικής αντίδρασης με χημική εξίσωση την (9.1), ιδέα που είχε συλλάβει ήδη από το 1901. Μετά από μια δεκαετία, το 1913, οι Michaelis και Menten, [12] (σε μετάφραση στα Αγγλικά: [13]), εξήγαγαν την εξίσωση αυτή χρησιμοποιώντας ένα πιο λεπτομερές και αναλυτικό σχήμα που αξιοποιεί την υπόθεση ταχείας ισορροπίας (*rapid equilibrium assumption*), την ερμήνευσαν σε πειστικό βαθμό και τη μελέτησαν διεξοδικά. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας ως παράδειγμα την καταλυόμενη από την ιμβερτάση υδρόλυση της σουκρόζης σε γλυκόζη και φρουκτόζη, μελέτησαν την (9.1) μέσω του μηχανισμού



όπου ($k_1, k_{-1}, k_2 > 0$ και) C παριστάνει το σύμπλοκο υποστρώματος-ενζύμου, και εμμέσως συμπεράναν ότι όταν

$$[S] = [S]_0 \gg [E]_0 = [E] \text{ και } [C] = [C]_0 = 0, \text{ για } t = 0, \tag{9.3}$$

συνθήκη αποδεκτή στις ενζυμικές αντιδράσεις, τότε για την ταχύτητα v της ενζυμικής αντίδρασης με χημική εξίσωση την (9.1) ισχύει ότι

$$v \approx \frac{v_{\text{sup}} [S]}{K_{\text{dis}} + [S]}, \tag{9.4}$$

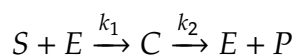
όπου

$$v_{\text{sup}} := k_2[E]_0,$$

καθώς επίσης

$$K_{\text{dis}} := \frac{k_{-1}}{k_1}, \tag{9.5}$$

η σταθερά που πλέον καλείται σταθερά διάστασης (*dissociation constant*) του συμπλόκου. Από την άλλη, οι Van Slyke και Cullen, [14], στη μελέτη τους για την καταλυόμενη από την ουρεάση υδρόλυση της ουρίας σε αμμωνία και διοξείδιο του άνθρακα, αντί της (9.2) χρησιμοποίησαν τον μηχανισμό



και κατέληξαν το 1914 στην

$$v \approx \frac{v_{\text{sup}} [S]}{K_{\text{VSC}} + [S]} \tag{9.6}$$

²Για επιπλέον ιστορικά στοιχεία μπορεί κανείς να ανατρέξει στην εργασία [7].

αντί της (9.4), όπου

$$K_{\text{VSC}} := \frac{k_2}{k_1}, \quad (9.7)$$

σταθερά η οποία είναι πλέον γνωστή ως η σταθερά Van Slyke-Cullen. Το 1925 οι Briggs και Haldane, [15], δημοσίευσαν μία μικρή εργασία όπου συνέθεταν τις ιδέες των Michaelis-Menten και των Van Slyke-Cullen μέσω μιας ακατέργαστης πρώτης εκδοχής μιας νέας -για την ενζυμική κινητική- υπόθεσης (ήδη χρησιμοποιούμενη γενικά στη χημική κινητική από το 1913), της γνωστής πλέον με το όνομα τυπική υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης (*standard quasi-steady state assumption*). Ειδικότερα, βελτίωσαν τις (9.4) και (9.6), καταδεικνύοντας ότι

$$v \approx \frac{v_{\text{sup}} [S]}{K_M + [S]}, \quad (9.8)$$

όπου

$$K_M := K_{\text{dis}} + K_{\text{VSC}} = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}. \quad (9.9)$$

Έχει πλέον καθιερωθεί να λέγεται ότι η (9.8) “χαρακτηρίζει την κινητική των Michaelis-Menten” και η σταθερά της (9.9) να καλείται σταθερά Michaelis-Menten³. Οι Lineweaver και Burk το 1934, [17], καθιέρωσαν την (9.8) στη μορφή

$$\frac{1}{v} \approx \frac{1}{v_{\text{sup}}} + \frac{K_M}{v_{\text{sup}}} \frac{1}{[S]}$$

ως εργαλείο πειραματικού υπολογισμού των τιμών των v_{sup} και K_M . Ήδη από τις αρχές του δεύτερου μισού του 20ου αιώνα και καθ’ όλη τη διάρκειά του, πολλοί ερευνητές ασχολήθηκαν με την εγκυρότητα της υπόθεσης σχεδόν σταθερής κατάστασης και τον προσδιορισμό των δύο χρονικών κλιμάκων του μοντέλου μέσω εφαρμογής της Μεθοδολογίας Διαταραχών. Ωστόσο, ήταν πολύ αργότερα, το 1988 και το 1989, όταν ο Segel μόνος του, [18], και μαζί με τον Slemrod, [19], αντίστοιχα, έδειξε ότι όταν

$$(K_M + [S]_0) \gg [E]_0 \text{ και } [C]_0 = 0, \quad (9.10)$$

τότε υπάρχουν όντως δύο χρονικές κλίμακες, τις οποίες και κατέγραψε ως εξής

$$t_C = \frac{1}{k_1 (K_M + [S]_0)} \ll \frac{K_M + [S]_0}{k_2 [E]_0} = t_S,$$

και ισχύει ότι

$$v \approx \begin{cases} 0, & \text{για χρόνους συγκρίσιμους με } t_C \\ \text{όπως στην (9.8),} & \text{για χρόνους συγκρίσιμους με } t_S. \end{cases}$$

Μάλιστα, η (9.10) είναι γενικότερη της (9.3) αφού επιτρέπει

$$\frac{[E]_0}{[S]_0} = O(1), \text{ καθώς } \frac{[E]_0}{K_M + [S]_0} \rightarrow 0^+$$

ή ακόμα και

$$[E]_0 \gg [S]_0.$$

Το 1996 οι Corless, Gonnet, Hare, Jeffrey και Knuth, [20], (και όχι το 1997 οι Schnell και Mendoza, [21], όπως συχνά αναφέρεται στη βιβλιογραφία) αποτύπωσαν τη λύση της εξίσωσης της κινητικής Michaelis-Menten σε κλειστή μορφή χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Lambert, W , και για την ακρίβεια τον κύριο κλάδο αυτής, W_0 . Επιπλέον, μέσω τις προαναφερόμενης δουλειάς των Segel και Slemrod εισάγεται μια πρώτη

³Μια ενδιαφέρουσα εργασία περί της εξίσωσης Michaelis-Menten είναι η [16].

μορφή άλλης υπόθεσης, της αντίστροφης υπόθεσης σχεδόν σταθερής κατάστασης (*reverse quasi-steady state assumption*), όπου καταδεικνύεται ότι όταν

$$[E]_0 \gg K_M \text{ και } [C]_0 = 0, \quad (9.11)$$

τότε υπάρχουν πάλι δύο χρονικές κλίμακες,

$$\tilde{t}_S = \frac{1}{k_1[E]_0} \ll \frac{1}{k_2} = \tilde{t}_C,$$

και ισχύει ότι

$$v \approx \begin{cases} k_1[E]_0 [S], & \text{για χρόνους συγκρίσιμους με } \tilde{t}_S \\ 0, & \text{για χρόνους συγκρίσιμους με } \tilde{t}_C. \end{cases} \quad (9.12)$$

Περίπου μια δεκαετία αργότερα, το 2000, οι Schnell και Maini, [22], διαπίστωσαν ότι η (9.11) δεν αρκεί για να ισχύει η (9.12), αντίθετα, η νέα υπόθεση θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$[E]_0 \gg K_M, [E]_0 \gg [S]_0 \text{ και } [C]_0 = 0.$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι το 1996, με την εργασία των Borghans, Boer και Segel, [23], εισάγεται ο μετασχηματισμός της συγκέντρωσης του ολικού υποστρώματος, $[T]$, δηλ. το άθροισμα των συγκεντρώσεων του ελεύθερου/αδέσμευτου υποστρώματος συν του δεσμευμένου υποστρώματος σε μορφή συμπλόκου με το ένζυμο, δηλ.

$$[T] := [S] + [C], \quad (9.13)$$

για να περιγραφεί μια τρίτη υπόθεση, η ολική υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης (*total quasi-steady state assumption*) και αρκετοί ερευνητές έχουν από τότε ασχοληθεί με την υπόθεση αυτή (βλ., π.χ., [24], [25], [26], [27], [28] [29]). Ωστόσο, όπως θα παρατηρήσουμε εδώ (βλ. Άσκηση 9.6 και Άσκηση 9.8), δεν υπάρχει ουσιαστική τρίτη υπόθεση, παρά μόνο μια διαφορετική προσέγγιση των δύο πρώτων, [30].

Τώρα, επιστρέφοντας στη μελέτη μας, αξιοποιώντας τον μηχανισμό (9.2) με τον τρόπο που έχουμε ήδη παρουσιάσει, καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\frac{d[S]}{dt} = -k_1 [S] [E] + k_{-1} [C] \quad (9.14\alpha)$$

$$\frac{d[E]}{dt} = -k_1 [S] [E] + (k_{-1} + k_2) [C] \quad (9.14\beta)$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1 [S] [E] - (k_{-1} + k_2) [C] \quad (9.14\gamma)$$

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2 [C]. \quad (9.14\delta)$$

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Το ΠΑΤ για το παραπάνω μοντέλο είναι το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } [S]_0, [E]_0, [C]_0, [P]_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{S} \text{ και} \\ & \text{συνάρτηση } ([S], [E], [C], [P]) : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty)^4, \text{ τέτοια ώστε η } ([S], [E], [C], [P]) \\ & \text{να ικανοποιεί τόσο το (9.14) στο } \mathcal{S} \setminus \{0\} \text{ όσο και την αρχική συνθήκη} \\ & ([S], [E], [C], [P]) = ([S]_0, [E]_0, [C]_0, [P]_0) \text{ για } t = 0. \end{aligned} \quad (SECP)$$

Για μια λύση του (SECP) ισχύει ότι

$$\frac{d[S]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} + \frac{d[P]}{dt} = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$[S] + [C] + [P] = [S]_0 + [C]_0 + [P]_0 =: A_1, \quad (9.15)$$

λόγω της αρχικής συνθήκης του (SECP), όπως επίσης ότι

$$\frac{d[E]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$[E] + [C] = [E]_0 + [C]_0 =: A_2. \quad (9.16)$$

Από τις (9.15) και (9.16) σε συνδυασμό με τη μη αρνητικότητα των συστωσών των λύσεων του (SECP), συμπεραίνουμε ότι

$$[S] \leq A_1, [E] \leq A_2, [C] \leq \min\{A_1, A_2\} \text{ και } [P] \leq A_1. \quad (9.17)$$

Επιπλέον, από την (9.14γ) σε συνδυασμό με τα φράγματα για τις $[S]$ και $[E]$ στην (9.17) έχουμε ότι

$$[C] \leq \frac{A_1 A_2}{K_M}, \quad (9.18)$$

όπου K_M όπως στην (9.9), ενώ οι υπόλοιπες εξισώσεις του (9.14) δεν περιέχουν επιπλέον πληροφορία. Έτσι, από την (9.17) και την (9.18) παίρνουμε τελικά ότι

$$[S] \leq A_1, [E] \leq A_2, [C] \leq \min\left\{A_1, A_2, \frac{A_1 A_2}{K_M}\right\} =: A_3 \text{ και } [P] \leq A_1. \quad (9.19)$$

Υπό το πρίσμα της (9.19), θέτουμε

$$\Omega_0 := \left\{ (s, e, c, p) \in [0, A_1] \times [0, A_2] \times [0, A_3] \times [0, A_1] \mid s + c + p = A_1, e + c = A_2 \right\}$$

και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ισοδύναμο του (SECP) πρόβλημα ως εξής:

Με δεδομένα $[S]_0, [E]_0, [C]_0, [P]_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $([S], [E], [C], [P]) : \mathcal{I} \rightarrow \Omega_0$, τέτοια ώστε η $([S], [E], [C], [P])$ να ικανοποιεί τόσο το (9.14) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $([S], [E], [C], [P]) = ([S]_0, [E]_0, [C]_0, [P]_0)$ για $t = 0$.

Τώρα, υπό την ισχύ των (9.15) και (9.16), συμπεραίνουμε ότι το σύστημα (9.14) μπορεί ισοδύναμα να περιοριστεί στο

$$\frac{d[S]}{dt} = -k_1 A_2 [S] + k_1 [S][C] + k_{-1} [C] \quad (9.20\alpha)$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1 A_2 [S] - k_1 [S][C] - (k_{-1} + k_2) [C]. \quad (9.20\beta)$$

Με χρήση της (9.20β) σε συνδυασμό με το φράγμα της $[S]$ στην (9.19) έχουμε ότι

$$[C] \leq \frac{A_1 A_2}{K_M + A_1}. \quad (9.21)$$

Άρα, από το φράγμα της $[C]$ στην (9.19) και την (9.21) παίρνουμε ότι τελικά

$$[C] \leq \min\left\{A_1, A_2, \frac{A_1 A_2}{K_M}, \frac{A_1 A_2}{K_M + A_1}\right\} = \min\left\{A_1, \frac{A_1 A_2}{K_M + A_1}\right\} =: A_4. \quad (9.22)$$

Μάλιστα, βασικές για τη συνέχεια είναι οι άμεσα επαληθεύσιμες συνεπαγωγές

$$\boxed{A_2 \leq K_M + A_1 \Rightarrow A_4 = \frac{A_1 A_2}{K_M + A_1}} \quad (9.23)$$

και στον αντίποδα,

$$\boxed{A_2 \geq K_M + A_1 \Rightarrow A_4 = A_1}. \quad (9.24)$$

Τώρα, υπό το πρίσμα του φράγματος της $[S]$ στην (9.19) και της (9.22), θέτουμε

$$\Omega_1 := \{(s, c) \in [0, A_1] \times [0, A_4] \mid s + c \leq A_1\}$$

και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ισοδύναμο του (SECP) πρόβλημα ως εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } [S]_0, [E]_0, [C]_0, [P]_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{S} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{S} \text{ και} \\ & \text{συνάρτηση } ([S], [C]) : \mathcal{S} \rightarrow \Omega_1, \text{ τέτοια ώστε η } ([S], [C]) \text{ να ικανοποιεί τόσο το} \\ & (9.20) \text{ στο } \mathcal{S} \setminus \{0\} \text{ όσο και την αρχική συνθήκη } ([S], [C]) = ([S]_0, [C]_0) \text{ για } t = 0. \end{aligned} \quad (SC)$$

Άσκηση 9.1. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες πίσω από όλα τα φράγματα των εξαρτημένων μεταβλητών του (SECP) και του (SC), μέχρι και την εξαγωγή των (9.23) και (9.24).

Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Με γνωστά επιχειρήματα (βλ. Άσκηση 9.2), παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα, θετικά ολικής και μεγιστικής λύσης του (SC),

$$([S], [C]) : \begin{cases} \text{είτε } \mathbb{R} \\ \text{είτε } [-\varepsilon_1, \infty), \end{cases} \quad \text{όπου } \varepsilon_1 \in [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2,$$

και μάλιστα η αδρή απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (SC), για τη μη τετριμμένη περίπτωση όπου $A_1 > 0$ και $A_2 > 0$, δίνεται στο σχήμα Σχήμα 9.1. Οι μόνες μεγιστικές λύσεις με ανοικτό πεδίο ορισμού είναι οι σταθερές, το πεδίο ορισμού των οποίων είναι συγκεκριμένα όλο το \mathbb{R} .

Άσκηση 9.2. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της μελέτης Φάσης I του (SC), αναγνωρίστε τα αναλλοίωτα σύνολα, τόσο του (SC) όσο και του (SECP) και ελέγξτε την κατασκευή του Σχήματος 9.1 καθώς και του αντίστοιχού του για την περίπτωση όπου είτε $A_1 = 0$ είτε $A_2 = 0$.

Σημεία ισορροπίας. Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα

$$([S]^*, [C]^*) = \begin{cases} (s, 0) \text{ με } s \in [0, A_1], & \text{όταν } A_1 = 0 \text{ ή } A_2 = 0 \\ (0, 0), & \text{όταν } A_2 > 0 \end{cases}$$

είναι τα σ.ι. του (SC). Ωστόσο, άμεσα συμπεραίνουμε ότι έχει νόημα να μελετήσουμε την ευστάθεια μόνο του $(0, 0)$ για τη μη τετριμμένη περίπτωση όπου $A_1 > 0$ και $A_2 > 0$.

Ανάλυση ευστάθειας. Υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi ως

$$J(s, c) = \begin{pmatrix} k_1(c - A_2) & k_1 s + k_{-1} \\ k_1(A_2 - c) & -k_1 s - (k_{-1} + k_2) \end{pmatrix},$$

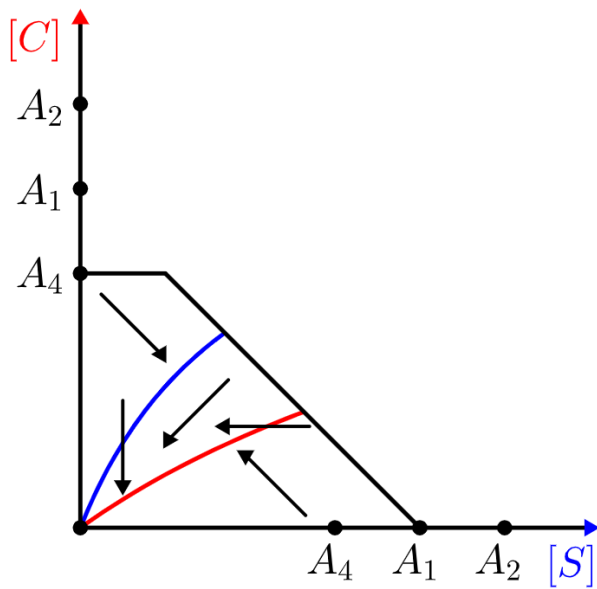
οι ιδιοτιμές του οποίου στο $(0, 0)$ δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm \left(\text{tr}^2 - 4 \det \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

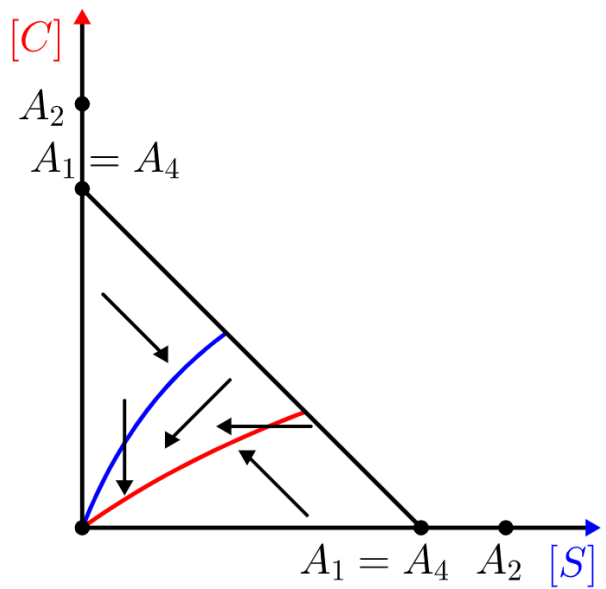
όπου

$$\text{tr} = -k_1 A_2 - (k_{-1} + k_2) < 0 \text{ και } \det = k_1 k_2 A_2 > 0.$$

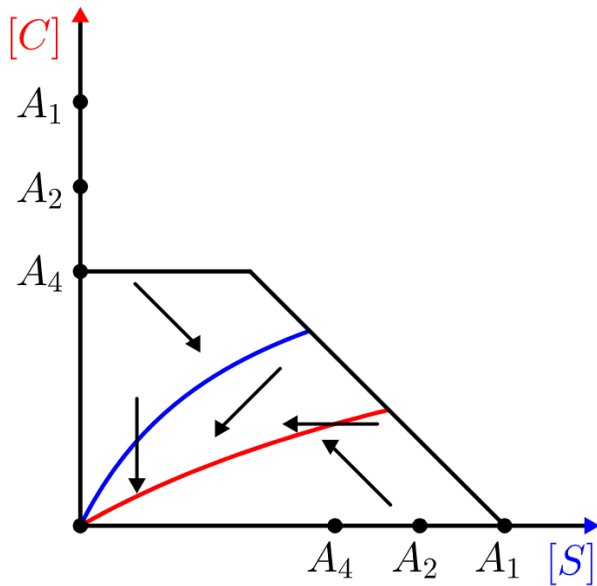
Άρα το $(0, 0)$ είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. του (SC).



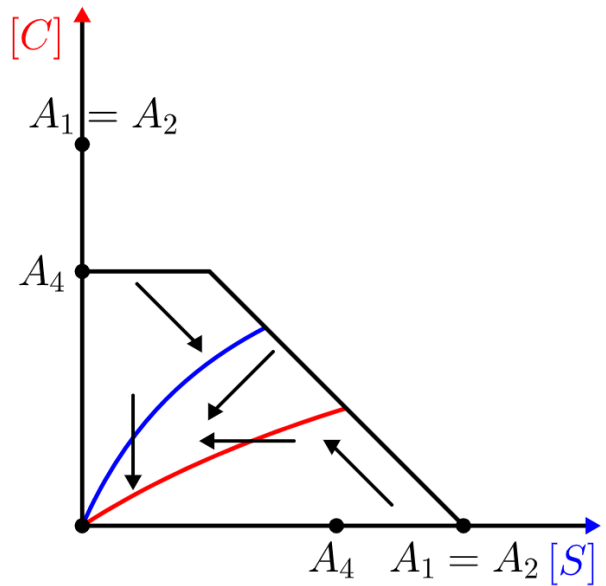
(α) $0 < A_4 < A_1 < A_2$.



(β) $0 < A_1 = A_4 < A_2$.



(γ) $0 < A_4 < A_2 < A_1$.



(δ) $0 < A_4 < A_1 = A_2$.

Σχήμα 9.1: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (SC) για διάφορες περιπτώσεις των A_1 , A_2 και A_4 , όταν $A_1 > 0$ και $A_2 > 0$. Με μπλε η [S]-μηδενοκλινή καμπύλη και με κόκκινο η [C]-μηδενοκλινή. Σημειώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι $A_4 \leq A_1$ και $A_4 < A_2$, δεδομένου ότι $A_1 > 0$ και $A_2 > 0$.

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια. Άμεσα από το Σχήμα 9.1, ή εναλλακτικά με χρήση του συνδυασμού του θεωρήματος Poincaré-Bendixson με το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac (βλ. Άσκηση 9.3), συμπεραίνουμε την ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του $(0, 0)$.

Έτσι, υπό το πρίσμα της (9.16), για κάθε αρχική συνθήκη του (SECP), η συγκέντρωση του ενζύμου, $[E]$, θα παραμείνει τελικά (για $t \rightarrow \infty$) αμετάβλητη, όπως άλλωστε αναμενόταν.

Άσκηση 9.3. Δείξτε την ολικότητα της θετικής ασυμπτωτικής ευστάθειας του $(0, 0)$ για το (SC), αξιοποιώντας το θεώρημα Poincaré-Bendixson, σε συνδυασμό με το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac με τη συνάρτηση $\varphi \equiv 1$.

Τυπική υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης. Η τυπική υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης είναι η εξής:

$$\boxed{A_1 > 0 \text{ και } 0 < A_2 \ll K_M + A_1}, \quad (\text{sQSSA})$$

ή, ισοδύναμα,

$$A_1 > 0 \text{ και } \begin{cases} 0 < A_2 \ll K_M, \text{ ή} \\ 0 < A_2 \ll A_1, \text{ ή} \\ \text{τα δύο τελευταία μαζί ισχύουν ταυτόχρονα,} \end{cases}$$

και υπό την ισχύ αυτής μελετάμε το (SC), δηλ., με χρήση αποκλειστικά της (sQSSA) θα δείξουμε ότι:

1. Το (SC) έχει εγγενώς δύο χρονικές κλίμακες τις οποίες και θα υπολογίσουμε. Μάλιστα, η (sQSSA) οφείλει την ονομασία της στην ύπαρξη των παραπάνω χρονικών κλιμάκων. Συγκεκριμένα, εκτός μιας μικρής αρχικής χρονικής διάρκειας όπου η ενζυμική αντίδραση με χημική εξίσωση την (9.1) δεν εξελίσσεται, δηλ. $v \approx 0$, κατά την υπόλοιπη χρονική διάρκειά της η ενζυμική αντίδραση βρίσκεται σε μια σταθερή κατάσταση κατά την οποία ισχύει η (9.8).
2. Υπάρχει μια καλή ολική (αναλυτική) προσέγγιση της λύσης του (SC) σε κλειστή μορφή την οποία και θα υπολογίσουμε.

Για να αναδειχθούν οι προαναφερθείσες χρονικές κλίμακες, το πρώτο και βασικό βήμα είναι η αδιαστατοποίηση του (SC). Έτσι, κατά τα γνωστά, λόγω του φράγματος της [S] στην (9.19) και της (9.22) επιλέγουμε τις αδιάστατες εξαρτημένες μεταβλητές ως

$$S_\alpha(t_\alpha) := \frac{1}{A_1} [S] \left(\frac{t}{t_*} \right) \text{ και } C_\alpha(t_\alpha) := \frac{1}{A_4} [C] \left(\frac{t}{t_*} \right),$$

όπου έχουμε επιλέξει μια αυθαίρετη, προς ώρας, χρονική κλίμακα $t_* > 0$ για την αδιαστατοποίηση, δηλ.

$$t_\alpha := \frac{t}{t_*},$$

ο υπολογισμός της/των οποίας/οποίων θα προκύψει φυσικά κατά τη διαδικασία. Παρατηρούμε, όμως, ότι δεδομένης της (sQSSA) έπεται από την (9.23) ότι

$$\boxed{A_4 = \varepsilon A_1 \ll A_1}$$

και

$$C_\alpha(t_\alpha) = \frac{1}{\varepsilon A_1} [C] \left(\frac{t}{t_*} \right),$$

όπου

$$0 \stackrel{(\text{sQSSA})}{<} \varepsilon := \frac{A_2}{K_M + A_1} \stackrel{(\text{sQSSA})}{\ll} 1, \quad (9.25)$$

δηλ., ισοδύναμα,

$$0 < \varepsilon \approx 0. \quad (9.26)$$

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η ενδεχόμενη μεταβολή της [S] είναι πολύ μεγαλύτερη της αντίστοιχης της [C]. Τώρα, το (9.20) θα πάρει την ακόλουθη μορφή

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = k_1 A_2 t_* \left(-S_\alpha + \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha + \frac{\rho}{(1 + \rho)(1 + \sigma)} C_\alpha \right) \quad (9.27\alpha)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = k_1 (K_M + A_1) t_* \left(S_\alpha - \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{1}{1 + \sigma} C_\alpha \right), \quad (9.27\beta)$$

όπου

$$\sigma := \frac{A_1}{K_M} \text{ και } \rho := \frac{K_{\text{dis}}}{K_{\text{VSC}}} = \frac{k_{-1}}{k_2}, \quad (9.28)$$

όπου K_{dis} και K_{VSC} όπως στις (9.5) και (9.7), αντίστοιχα.

Παρατηρώντας το (9.27), ορίζουμε

$$\frac{1}{k_1(K_M + A_1)} =: t_1 \stackrel{(9.25)}{\ll} \frac{t_1}{\varepsilon} = \frac{1}{k_1 A_2} =: t_2,$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$t_* = t_1 \Rightarrow \begin{cases} k_1 A_2 t_* = \varepsilon \\ k_1 (K_M + A_1) t_* = 1 \end{cases} \quad \text{και } t_* = t_2 \Rightarrow \begin{cases} k_1 A_2 t_* = 1 \\ k_1 (K_M + A_1) t_* = \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases}$$

και έτσι το (9.27) να πάρει τις εξής μορφές:

• Αν $t_\alpha = \frac{t}{t_1}$, τότε

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = \varepsilon \left(-S_\alpha + \frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha C_\alpha + \frac{\rho}{(1+\rho)(1+\sigma)} C_\alpha \right) \quad (9.29\alpha)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = S_\alpha - \frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{1}{1+\sigma} C_\alpha. \quad (9.29\beta)$$

• Αν $t_\alpha = \frac{t}{t_2}$, τότε

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = -S_\alpha + \frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha C_\alpha + \frac{\rho}{(1+\rho)(1+\sigma)} C_\alpha \quad (9.30\alpha)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \left(S_\alpha - \frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{1}{1+\sigma} C_\alpha \right). \quad (9.30\beta)$$

Θέτοντας

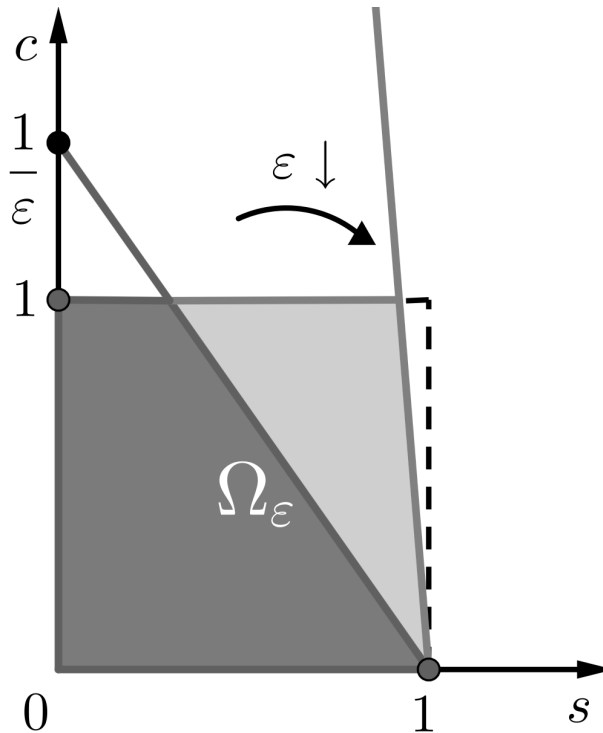
$$\Omega_\varepsilon := \{(s, c) \in [0, 1]^2 \mid s + \varepsilon c \leq 1\},$$

το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 9.2, η αδιαστατοποιημένη εκδοχή του (SC) θα έχει ως εξής:

Με δεδομένα $[S]_0, [E]_0, [C]_0, [P]_0 \geq 0$ και $\varepsilon > 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S_\alpha, C_\alpha) : \mathcal{I} \rightarrow \Omega_\varepsilon$, τέτοια ώστε η (S_α, C_α) να ικανοποιεί τόσο το (9.29) αν $t_\alpha = \frac{t}{t_1}$ ή το (9.30) αν $t_\alpha = \frac{t}{t_2}$ στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική $(SC\alpha_s)$

$$\text{συνθήκη } (S_\alpha, C_\alpha) = \left(\frac{[S]_0}{A_1}, \frac{[C]_0}{\varepsilon A_1} \right) \text{ για } t_\alpha = 0.$$

Μελετάμε ξεχωριστά την κάθε μία από τις δύο εκδοχές του $(SC\alpha_s)$ για να βρούμε από μία αντίστοιχη προσέγγιση, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο εξωτερικό στρώμα, της λύσης $([S], [C])$ του (SC), δηλ. μια προσέγγιση για χρόνους συγκρίσιμους με t_1 , γνωστή και ως εσωτερική προσέγγιση, και μια για συγκρίσιμους με t_2 , γνωστή και ως εξωτερική προσέγγιση, αντίστοιχα. Αναλυτικότερα:



Σχήμα 9.2: Το εφικτό σύνολο Ω_ϵ του $(SC\alpha_s)$. Παρατηρούμε ότι $\Omega_\epsilon \rightarrow [0, 1] \times [0, 1] \cup \{(1, 0)\}$ καθώς $\epsilon \rightarrow 0^+$, δηλ. $\bigcup_{\epsilon \in (0, \infty)} \Omega_\epsilon = [0, 1] \times [0, 1] \cup \{(1, 0)\}$.

- Κοιτώντας το (SC) σαν ένα διαταραγμένο πρόβλημα με διαταραχή $\epsilon > 0$ “κοντά” στο 0, έχουμε, υπό το πρίσμα της συνεχούς (και ομαλής) εξάρτησης της λύσης από τις παραμέτρους του προβλήματος, την εξής πληροφορία για την (9.29α)

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = \underbrace{\epsilon \left(-S_\alpha + \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha + \frac{\rho}{(1 + \rho)(1 + \sigma)} C_\alpha \right)}_{= O(\epsilon), \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0^+}$$

$= O(1)$ (ομοιόμορφα ως προς t_α), καθώς $\epsilon \rightarrow 0^+$,
 αφού $(S_\alpha, C_\alpha) = O(1)$, καθώς $\epsilon \rightarrow 0^+$,
 αφού $(S_\alpha, C_\alpha) \in \Omega_\epsilon, \forall \epsilon > 0$

καθώς επίσης

$$\underbrace{\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha}}_{= O(1), \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0^+, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1, \text{ αφού } S_\alpha = O(1), \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0^+, \text{ σε συνδυασμό με τον ορισμό της παραγώγου}} = \underbrace{\dots}_{= O(\epsilon), \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0^+}$$

άρα

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = O(\epsilon), \text{ καθώς } \epsilon \rightarrow 0^+, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1.$$

Έτσι, λόγω της (9.26) έπεται ότι

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha}(t_\alpha) \approx 0, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1, \quad (9.31)$$

και λόγω της αρχικής συνθήκης του (SC α_s) έχουμε τελικά ότι

$$S_\alpha(t_\alpha) \approx \frac{[S]_0}{A_1}, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1.$$

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική ισότητα στην (9.29β), τότε η τελευταία γίνεται μια γραμμική διαφορική προσεγγιστική εξίσωση, η λύση της οποίας είναι η

$$C_\alpha(t_\alpha) \approx \frac{(1 + \sigma) S_\alpha}{1 + \sigma S_\alpha} + \left(\frac{[C]_0}{\varepsilon A_1} - \frac{(1 + \sigma) S_\alpha}{1 + \sigma S_\alpha} \right) e^{-\frac{1 + \sigma S_\alpha}{1 + \sigma} t_\alpha}, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1,$$

δεδομένης της αρχικής συνθήκης του (SC α_s). Συνεπώς, η εσωτερική προσέγγιση, ($[S]_{in}, [C]_{in}$), της λύσης ($[S], [C]$) του (SC), δηλ. η προσέγγιση για t για τα οποία ισχύει ότι

$$t \asymp t_1,$$

είναι η

$$\begin{aligned} [S]_{in} &\equiv [S]_0, \\ [C]_{in} &= \frac{A_2[S]_0}{K_M + [S]_0} + \left([C]_0 - \frac{A_2[S]_0}{K_M + [S]_0} \right) e^{-k_1(K_M + [S]_0)t}. \end{aligned}$$

- Για την (9.30β) έχουμε ότι

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\left(S_\alpha - \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{1}{1 + \sigma} C_\alpha \right)}_{= O(1), \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0^+} = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

καθώς επίσης

$$\underbrace{\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha}}_{= O(1), \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0^+, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1} = \dots = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0^+$$

άρα

$$\underbrace{S_\alpha - \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{1}{1 + \sigma} C_\alpha}_{= O(\varepsilon), \text{ καθώς } \varepsilon \rightarrow 0^+, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1}$$

Έτσι, έπεται ότι

$$\varepsilon \frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = S_\alpha - \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{1}{1 + \sigma} C_\alpha \approx 0, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1, \quad (9.32)$$

δηλ.

$$C_\alpha \approx \frac{(1 + \sigma) S_\alpha}{1 + \sigma S_\alpha}, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1.$$

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική ισότητα στην (9.30α), τότε η τελευταία γίνεται μια μη γραμμική διαφορική προσεγγιστική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, δηλ.

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} \approx -\frac{S_\alpha}{(1 + \rho)(1 + \sigma S_\alpha)}, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1, \quad (9.33)$$

η λύση της οποίας είναι η (βλ. Άσκηση 9.4)

$$S_\alpha(t_\alpha) \approx \frac{1}{\sigma} W_0 \left(\sigma \ell e^{\sigma \ell - \frac{1}{1+\rho} t_\alpha} \right), \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1,$$

όπου W_0 ο κύριος κλάδος της συνάρτησης Lambert, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, και $\ell \geq 0$ μια σταθερά που μένει να προσδιοριστεί. Συνεπώς, η εξωτερική προσέγγιση, $([S]_{\text{out}}, [C]_{\text{out}})$, της λύσης $([S], [C])$ του (SC), δηλ. η προσέγγιση για t για τα οποία ισχύει ότι

$$t \asymp t_2,$$

είναι η

$$\begin{aligned} [S]_{\text{out}} &= K_M W_0 \left(\frac{\ell A_1}{K_M} e^{\frac{1}{K_M} (\ell A_1 - k_2 A_2 t)} \right), \\ [C]_{\text{out}} &= \frac{A_2 W_0 \left(\frac{\ell A_1}{K_M} e^{\frac{1}{K_M} (\ell A_1 - k_2 A_2 t)} \right)}{1 + W_0 \left(\frac{\ell A_1}{K_M} e^{\frac{1}{K_M} (\ell A_1 - k_2 A_2 t)} \right)}. \end{aligned}$$

Πώς θα βρούμε μια ολική/ομοιόμορφη προσέγγιση της λύσης $([S], [C])$ του (SC) από τις επιμέρους προσεγγίσεις $([S]_{\text{in}}, [C]_{\text{in}})$ και $([S]_{\text{out}}, [C]_{\text{out}})$; Καταρχάς, επιλέγοντας την ενδιάμεση των t_1 και t_2 χρονική κλίμακα ως

$$t_{\text{int}} := \frac{t_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \in (t_1, t_2),$$

δηλ. επιλέγοντας τη χρονική κλίμακα στο στρώμα επικάλυψης, βρίσκουμε εύκολα ότι το κοινό όριο που προκύπτει από τη συνθήκη συναρμογής των δύο επιμέρους λύσεων θα πρέπει να είναι το

$$L := \left([S]_0, \frac{A_2 [S]_0}{K_M + [S]_0} \right).$$

Συνεπώς

$$\ell = \frac{[S]_0}{A_1}$$

και άρα μια ομοιόμορφη προσέγγιση, $([S]_{\text{un}}, [C]_{\text{un}})$, της $([S], [C])$ είναι η

$$([S]_{\text{un}}, [C]_{\text{un}}) = ([S]_{\text{in}}, [C]_{\text{in}}) + ([S]_{\text{out}}, [C]_{\text{out}}) - L,$$

δηλ., αναλυτικότερα, η

$$\begin{aligned} [S]_{\text{un}} &= K_M W_0 \left(\frac{[S]_0}{K_M} e^{\frac{1}{K_M} ([S]_0 - k_2 A_2 t)} \right), \\ [C]_{\text{un}} &= \frac{A_2 W_0 \left(\frac{[S]_0}{K_M} e^{\frac{1}{K_M} ([S]_0 - k_2 A_2 t)} \right)}{1 + W_0 \left(\frac{[S]_0}{K_M} e^{\frac{1}{K_M} ([S]_0 - k_2 A_2 t)} \right)} + \left([C]_0 - \frac{A_2 [S]_0}{K_M + [S]_0} \right) e^{-k_1 (K_M + [S]_0) t}. \end{aligned}$$

Άσκηση 9.4. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης στην (9.33) μέσω χωρισμού μεταβλητών.

Άσκηση 9.5. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της συναρμογής των επιμέρους προσεγγιστικών λύσεων του (SC), υπό την ισχύ της (sQSSA).

Άσκηση 9.6. Αντί της προσέγγισης ελεύθερου υποστρώματος, όπου μελετήθηκε η δυναμική της συγκέντρωσης του ελεύθερου/αδέσμευτου υποστρώματος, [S], αντιμετωπίστε το (SC) μέσω της προσέγγισης ολικού υποστρώματος, όπου μελετάται η δυναμική της συγκέντρωσης του ολικού υποστρώματος, [T], όπως αυτή ορίστηκε στην (9.13). Συγκεκριμένα:

1. Τροποποιήστε το (9.20) έτσι ώστε οι εξαρτημένες μεταβλητές να είναι πλέον οι [T] και [C], και θεωρήστε το αντίστοιχο ΠΑΤ.
2. Επιλύστε προσεγγιστικά το παραπάνω θεωρούμενο πρόβλημα υπό την ισχύ της (sQSSA).
3. Συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τα αντίστοιχα της προσέγγισης ελεύθερου υποστρώματος.

Αντίστροφη υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης. Η αντίστροφη υπόθεση σχεδόν σταθερής κατάστασης είναι η εξής:

$$A_1 > 0 \text{ και } A_2 \gg K_M + A_1, \quad (rQSSA)$$

ή, ισοδύναμα,

$$A_1 > 0, A_2 \gg K_M \text{ και } A_2 \gg A_1,$$

και υπό την ισχύ αυτής μελετάμε το (SC). Παρατηρούμε ότι η μεγάλη ανισότητα της (rQSSA) είναι η αντίστροφη της αντίστοιχης της (sQSSA), εξ ου και η ονομασία της πρώτης. Με χρήση αποκλειστικά της (rQSSA) θα δείξουμε ότι:

1. Το (SC) έχει εγγενώς δύο χρονικές κλίμακες τις οποίες και θα υπολογίσουμε. Συγκεκριμένα, εκτός μιας μικρής αρχικής χρονικής διάρκειας όπου η ενζυμική αντίδραση με χημική εξίσωση την (9.1) εξελίσσεται με ταχύτητα v που παρουσιάζει κατά προσέγγιση γραμμική συμπεριφορά ως προς την [S] και συγκεκριμένα $v \approx k_1 A_2 [S]$ όπως στην (9.12), κατά την υπόλοιπη χρονική διάρκειά της η ενζυμική αντίδραση δεν εξελίσσεται, δηλ. $v \approx 0$.
2. Υπάρχει μια καλή ολική προσέγγιση της λύσης του (SC) σε κλειστή μορφή την οποία και θα υπολογίσουμε.

Κατά τα γνωστά, επιλέγουμε τις αδιάστατες εξαρτημένες μεταβλητές ως

$$S_\alpha(t_\alpha) := \frac{1}{A_1} [S] \left(\frac{t}{t_*} \right) \text{ και } C_\alpha(t_\alpha) := \frac{1}{A_4} [C] \left(\frac{t}{t_*} \right),$$

όπου έχουμε επιλέξει μια αυθαίρετη, προς ώρας, χρονική κλίμακα $t_* > 0$ για την αδιαστατοποίηση. Παρατηρούμε, όμως, ότι δεδομένης της (*rQSSA*) έπεται από την (9.24) ότι

$$\boxed{A_4 = A_1}$$

και

$$C_\alpha(t_\alpha) = \frac{1}{A_1} [C] \left(\frac{t}{t_*} \right).$$

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η ενδεχόμενη μεταβολή της $[S]$ είναι συγκρίσιμη με την αντίστοιχη της $[C]$. Θέτουμε

$$0 \stackrel{(\text{rQSSA})}{<} \eta := \frac{A_1}{A_2} < \frac{K_M + A_1}{A_2} = \frac{1}{\varepsilon} \stackrel{(\text{rQSSA})}{\ll} 1, \quad (9.34)$$

όπου ε όπως στην (9.25), δηλ., ισοδύναμα

$$0 < \eta < \frac{1}{\varepsilon} \approx 0, \quad (9.35)$$

και έτσι το (9.20) θα πάρει την ακόλουθη μορφή

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{k_1 (K_M + A_1) A_2}{A_1} t_* \left(-\frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha + \frac{\eta\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha + \frac{\eta\rho}{(1 + \rho)(1 + \sigma)} C_\alpha \right) \quad (9.36\alpha)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{k_1 (K_M + A_1) A_2}{A_1} t_* \left(\frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha - \frac{\eta\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{\eta}{1 + \sigma} C_\alpha \right), \quad (9.36\beta)$$

όπου σ και ρ όπως στην (9.28).

Επίσης κατά τα γνωστά, παρατηρώντας το (9.36), ορίζουμε

$$\frac{A_1}{k_1 (K_M + A_1) A_2} =: t_1 \stackrel{(9.34)}{\ll} \frac{t_1}{\eta} = \frac{1}{k_1 (K_M + A_1)} =: t_2,$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$t_* = t_1 \Rightarrow \frac{k_1 (K_M + A_1) A_2}{A_1} t_* = 1 \text{ και } t_* = t_2 \Rightarrow \frac{k_1 (K_M + A_1) A_2}{A_1} t_* = \frac{1}{\eta},$$

και έτσι το (9.36) να πάρει τις εξής μορφές:

- Αν $\boxed{t_\alpha = \frac{t}{t_1}}$, τότε

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = -\frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha + \frac{\eta\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha + \frac{\eta\rho}{(1 + \rho)(1 + \sigma)} C_\alpha \quad (9.37\alpha)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha - \frac{\eta\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{\eta}{1 + \sigma} C_\alpha. \quad (9.37\beta)$$

- Αν $\boxed{t_\alpha = \frac{t}{t_2}}$, τότε

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} = -\frac{\sigma}{\eta(1 + \sigma)} S_\alpha + \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha + \frac{\rho}{(1 + \rho)(1 + \sigma)} C_\alpha \quad (9.38\alpha)$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{\sigma}{\eta(1 + \sigma)} S_\alpha - \frac{\sigma}{1 + \sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{1}{1 + \sigma} C_\alpha. \quad (9.38\beta)$$

Θέτοντας

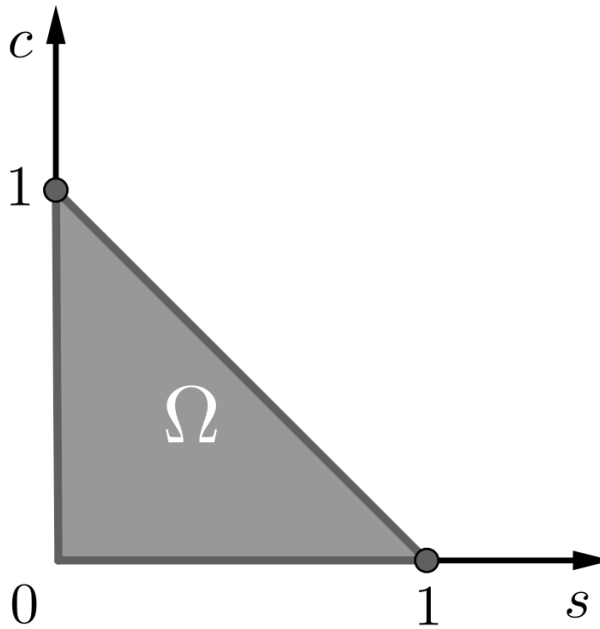
$$\Omega := \{(s, c) \in [0, 1]^2 \mid s + c \leq 1\},$$

το οποίο απεικονίζεται στο Σχήμα 9.3, η αδιαστατοποιημένη εκδοχή του (SC) θα έχει ως εξής:

Με δεδομένα $[S]_0, [E]_0, [C]_0, [P]_0 \geq 0$ και $\eta > 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(S_\alpha, C_\alpha) : \mathcal{I} \rightarrow \Omega$, τέτοια ώστε η (S_α, C_α) να ικανοποιεί τόσο το (9.37) αν $t_\alpha = \frac{t}{t_1}$ ή το (9.38) αν $t_\alpha = \frac{t}{t_2}$ στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(SC\alpha_r)$

$$(S_\alpha, C_\alpha) = \left(\frac{[S]_0}{A_1}, \frac{[C]_0}{A_1} \right) \text{ για } t_\alpha = 0.$$

Μελετάμε ξεχωριστά την κάθε μία από τις δύο εκδοχές του $(SC\alpha_r)$:



Σχήμα 9.3: Το εφικτό σύνολο Ω του $(SC\alpha_r)$.

- Από την (9.37α), η οποία λόγω της (9.35) θα πάρει την προσεγγιστική γραμμική μορφή

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} \approx -\frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1, \quad (9.39)$$

θα πάρουμε, λόγω της αρχικής συνθήκης του $(SC\alpha_r)$, ότι

$$S_\alpha(t_\alpha) \approx \frac{[S]_0}{A_1} e^{-\frac{\sigma}{1+\sigma} t_\alpha}, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1.$$

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική ισότητα στην (9.37β), η οποία θα έχει πλέον την προσεγγιστική μορφή

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} \approx \frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1,$$

τότε θα πάρουμε ότι

$$C_\alpha(t_\alpha) \approx \frac{[C]_0}{A_1} + \frac{[S]_0}{A_1} \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{1+\sigma} t_\alpha} \right), \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1,$$

δεδομένης της αρχικής συνθήκης του $(SC\alpha_r)$. Συνεπώς, η προσέγγιση στο εσωτερικό στρώμα, $([S]_{in}, [C]_{in})$, της $([S], [C])$ είναι η

$$\begin{cases} [S]_{in} = [S]_0 e^{-k_1 A_2 t}, \\ [C]_{in} = [C]_0 + [S]_0 (1 - e^{-k_1 A_2 t}). \end{cases}$$

- Από την (9.38α) έχουμε ότι

$$\eta \left(\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha} - \frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha C_\alpha - \frac{\rho}{(1+\rho)(1+\sigma)} C_\alpha \right) = -\frac{\sigma}{1+\sigma} S_\alpha \approx 0, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1, \quad (9.40)$$

δηλ.

$$S_\alpha(t_\alpha) \approx 0, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1,$$

άρα

$$\frac{dS_\alpha}{dt_\alpha}(t_\alpha) \approx 0, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1.$$

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω προσεγγιστική ισότητα στο άθροισμα των (9.38α) και (9.38β), τότε από αυτό προκύπτει η παρακάτω γραμμική διαφορική προσεγγιστική εξίσωση

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} \approx -\frac{1}{(1+\rho)(1+\sigma)} C_\alpha, \text{ όταν } t_\alpha \asymp 1,$$

η λύση της οποίας είναι η

$$C_\alpha(t_\alpha) \approx \ell e^{-\frac{1}{(1+\rho)(1+\sigma)} t_\alpha}, \text{ όπου } t_\alpha \asymp 1,$$

όπου $\ell \geq 0$ μια σταθερά που μένει να προσδιοριστεί. Συνεπώς, η προσέγγιση στο εξωτερικό στρώμα, $([S]_{out}, [C]_{out})$, της $([S], [C])$ είναι η

$$\begin{cases} [S]_{out} \equiv 0, \\ [C]_{out} = \ell A_1 e^{-k_2 t}. \end{cases}$$

Τέλος, από τη συνθήκη συναρμογής βρίσκουμε ότι

$$\ell = \frac{[S]_0}{A_1} + \frac{[C]_0}{A_1}$$

καθώς επίσης ότι η ομοιόμορφη προσέγγιση, $([S]_{un}, [C]_{un})$, της $([S], [C])$ είναι η

$$\begin{cases} [S]_{un} = [S]_0 e^{-k_1 A_2 t}, \\ [C]_{un} = [C]_0 e^{-k_2 t} + [S]_0 (e^{-k_2 t} - e^{-k_1 A_2 t}). \end{cases}$$

Άσκηση 9.7. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της συναρμογής των επιμέρους προσεγγιστικών λύσεων του (SC) , υπό την ισχύ της $(rQSSA)$.

Άσκηση 9.8. Επιλύστε το ΠΑΤ της προσέγγισης ολικού υποστρώματος στην Άσκηση 9.6 υπό την ισχύ της $(rQSSA)$ αυτή τη φορά, και συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τα αντίστοιχα της προσέγγισης ελευθέρου υποστρώματος.

Συμπεράσματα. Δεδομένης της (sQSSA) υπάρχει $t_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d[S]}{dt}(t) \approx 0, \text{ όταν } t \asymp t_1,$$

το οποίο προκύπτει άμεσα από την (9.31), όπως επίσης ότι υπάρχει $t_2 \gg t_1$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d[C]}{dt}(t) \approx 0, \text{ όταν } t \asymp t_2,$$

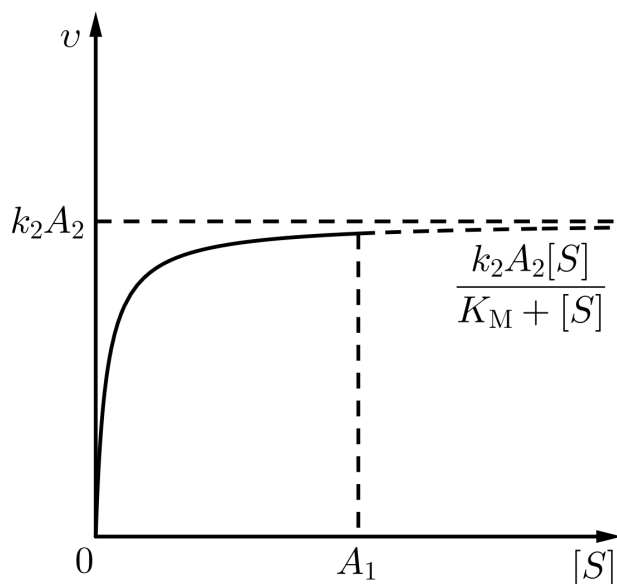
το οποίο προκύπτει με τη σειρά του από την (9.32). Μάλιστα, λόγω της (9.33) ισχύει ότι

$$\frac{d[S]}{dt} \approx -\frac{k_2 A_2 [S]}{K_M + [S]}, \text{ όταν } t \asymp t_2.$$

Συμπεραίνουμε, έτσι, ότι

$$v \approx \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \asymp t_1 \\ \frac{k_2 A_2 [S]}{K_M + [S]}, & \text{όταν } t \asymp t_2, \end{cases}$$

όπου v η ταχύτητα της χημικής αντίδρασης με χημική εξίσωση την (9.1), δηλ. μη τετριμμένη κινητική εμφανίζεται μόνο στο εξωτερικό στρώμα. Η παραπάνω προσεγγιστική ισότητα για t συγκρίσιμα με t_2 δεν είναι άλλη από την προσέγγιση των Michaelis-Menten για την κινητική της προαναφερόμενης χημικής αντίδρασης, όπως αναφέραμε ήδη στην (9.8), και απεικονίζεται στο Σχήμα 9.4.



Σχήμα 9.4: Προσέγγιση για την κινητική της χημικής αντίδρασης (9.1) υπό την ισχύ της (sQSSA), για χρόνους συγκρίσιμους με t_2 .

Επιπλέον, δεδομένης της (rQSSA) υπάρχει $t_1 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d[S]}{dt} \approx -k_1 A_2 [S], \text{ όταν } t \asymp t_1,$$

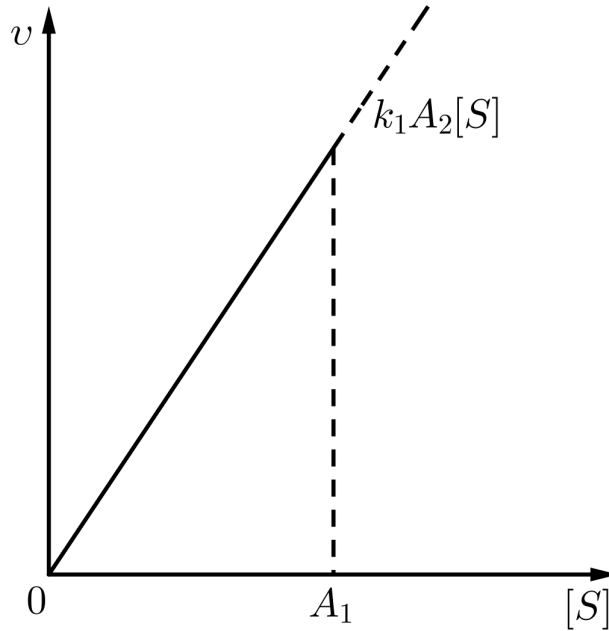
το οποίο προκύπτει άμεσα από την (9.39), όπως επίσης ότι υπάρχει $t_2 \gg t_1$ τέτοιο ώστε

$$\frac{d[S]}{dt}(t) \approx [S](t) \approx 0, \text{ όταν } t \asymp t_2,$$

το οποίο προκύπτει με τη σειρά του από την (9.40). Συμπεραίνουμε, έτσι, ότι

$$v \approx \begin{cases} k_1 A_2 [S], & \text{όταν } t_\alpha \asymp t_1 \\ 0, & \text{όταν } t_\alpha \asymp t_2, \end{cases}$$

δηλ. μη τετριμμένη κινητική εμφανίζεται αυτή τη φορά μόνο στο εσωτερικό στρώμα, η οποία και απεικονίζεται στο Σχήμα 9.5.



Σχήμα 9.5: Προσέγγιση για την κινητική της χημικής αντίδρασης (9.1) υπό την ισχύ της (rQSSA), για χρόνους συγκρίσιμους με t_1 .

Σημειώνουμε ότι παρόλο που για την ανάλυση της (rQSSA) χρησιμοποιήθηκε άμεσα η σχέση $0 < \eta \approx 0$, δηλ. η

$$A_1 \ll A_2,$$

εντούτοις και η

$$K_M \ll A_2,$$

αν και -τρόπον τινά- “κρυφή”, αφού δεν εμφανίζεται άμεσα στις αδιαστατοποιημένες εξισώσεις (9.37) και (9.38), παίζει ουσιαστικό ρόλο για τον διαχωρισμό της (rQSSA) από την (sQSSA). Πράγματι, έστω ότι

$$K_M \not\ll A_2,$$

δηλ.

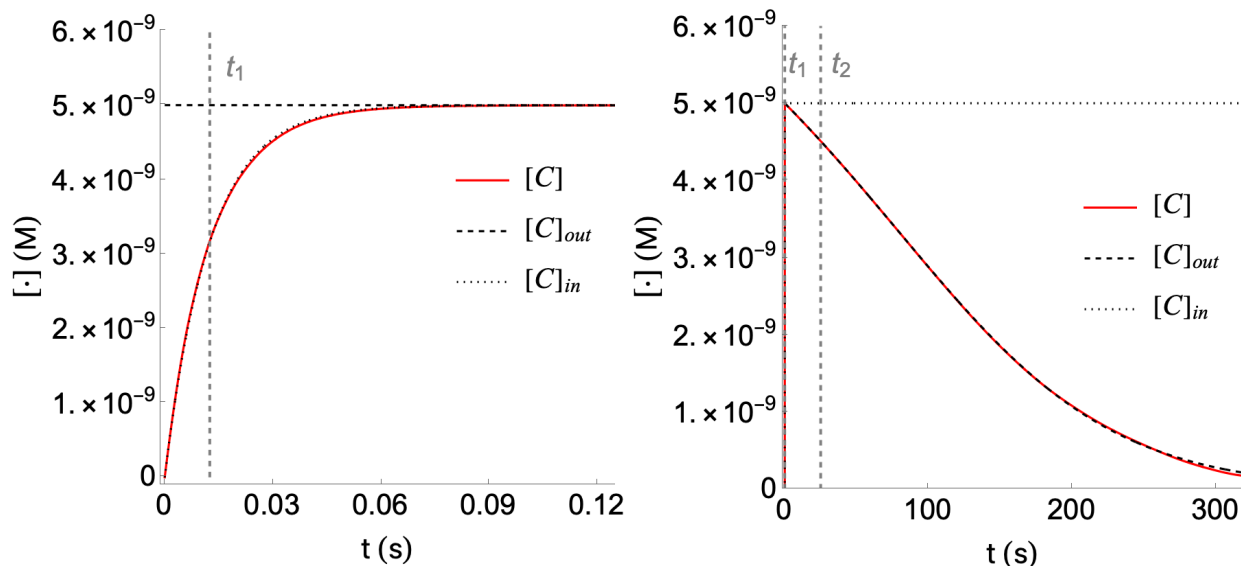
$$K_M \gg A_2 \text{ ή } K_M \asymp A_2.$$

Τότε, δεδομένης της $A_1 \ll A_2$, καταλήγουμε ότι

$$\begin{cases} A_2 \ll K_M + A_1, & \text{αν } K_M \gg A_2 \gg A_1, \text{ ή} \\ A_2 \asymp K_M + A_1, & \text{αν } K_M \asymp A_2 \gg A_1. \end{cases}$$

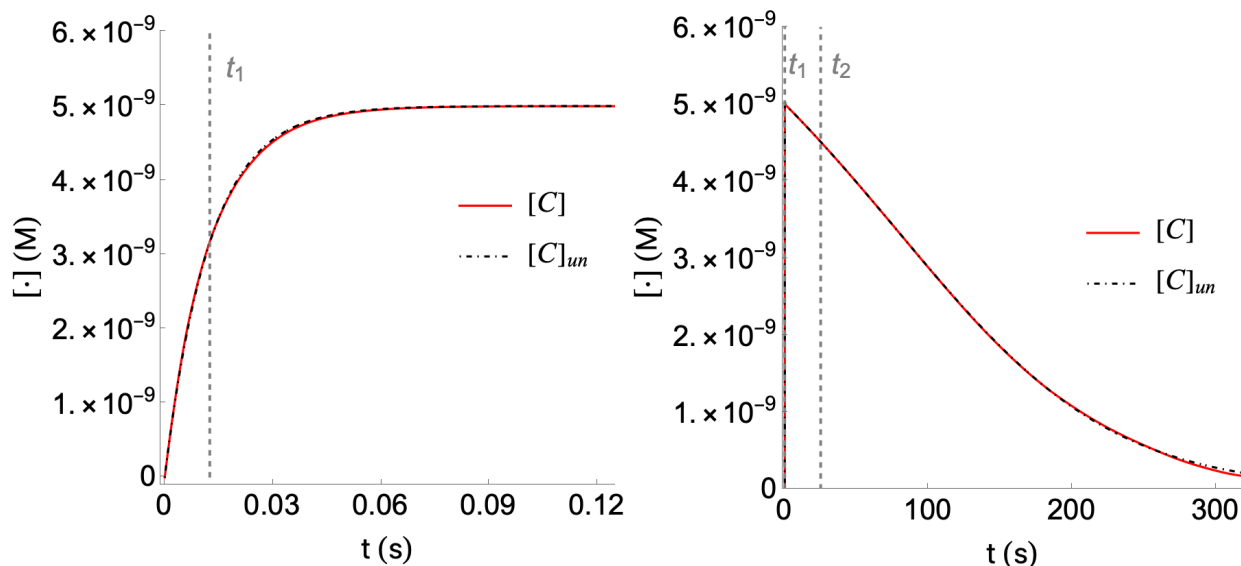
Στην πρώτη περίπτωση ισχύει η (sQSSA), ενώ στη δεύτερη δεν ισχύει καμία από τις (sQSSA) και (rQSSA).

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.6 και στο Σχήμα 9.7, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας.



(α) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση, στο εσωτερικό στρώμα.

(β) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση, στο εξωτερικό στρώμα.



(γ) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την ομοιόμορφη προσέγγιση, στο εσωτερικό στρώμα.

(δ) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την ομοιόμορφη προσέγγιση, στο εξωτερικό στρώμα.

Σχήμα 9.6: Σύγκριση του αποτελέσματος της αριθμητικής επίλυσης του (SC) υπό την ισχύ της (sQSSA) (όντως υπάρχουν δύο διακεκριμένες φάσεις εξέλιξης του φαινομένου), με τις αντίστοιχες αναλυτικές προσεγγίσεις (εσωτερική, εξωτερική και ομοιόμορφη).

Για τις αριθμητικές τιμές των σταθερών και των αρχικών συνθηκών υπό την ισχύ της (sQSSA) ακολουθούμε την εργασία του Segel, [18], όπως φαίνεται στον Πίνακα 9.1.

Πίνακας 9.1: Επιλογή αριθμητικών τιμών των σταθερών και των αρχικών συνθηκών υπό την ισχύ της (sQSSA), όπως στην εργασία [18].

Παράμετρος	Τιμή	Μονάδες μέτρησης
k_{-1}	25	s^{-1}
k_1	$4 \cdot 10^6$	$M^{-1}s^{-1}$
k_2	15	s^{-1}
$[S]_0$	10^{-5}	M
$[E]_0$	10^{-8}	M
$[C]_0$	0	M
$[P]_0$	0	M

Υπολογίζουμε

$$K_M = [S]_0 = A_1 \text{ και } A_2 = [E]_0 = 10^{-3}[S]_0 = 10^{-3}A_1,$$

δηλ.

$$\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$$

και

$$t_1 = 1,25 \cdot 10^{-2}s \text{ και } t_2 = 25s.$$

Για τις αριθμητικές τιμές των σταθερών και των αρχικών συνθηκών υπό την ισχύ της (rQSSA), αυτή τη φορά, τροποποιούμε αντίστοιχα τον Πίνακα 9.1, όπως φαίνεται στον Πίνακα 9.2.

Πίνακας 9.2: Επιλογή αριθμητικών τιμών των σταθερών και των αρχικών συνθηκών υπό την ισχύ της (rQSSA).

Παράμετρος	Τιμή	Μονάδες μέτρησης
k_{-1}	25	s^{-1}
k_1	$4 \cdot 10^6$	$M^{-1}s^{-1}$
k_2	15	s^{-1}
$[S]_0$	10^{-5}	M
$[E]_0$	10^{-2}	M
$[C]_0$	0	M
$[P]_0$	0	M

Υπολογίζουμε

$$K_M = [S]_0 = A_1 \text{ και } A_2 = [E]_0 = 10^3[S]_0 = 10^3A_1,$$

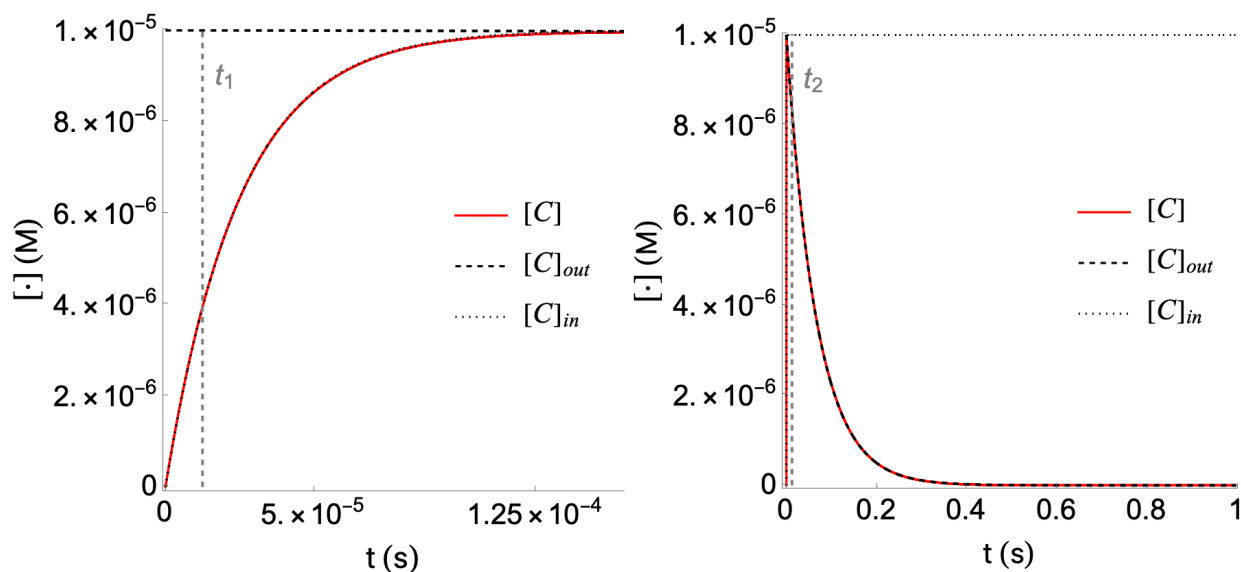
δηλ.

$$\varepsilon = 500, \frac{1}{\varepsilon} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ και } \eta = 10^{-3}$$

και

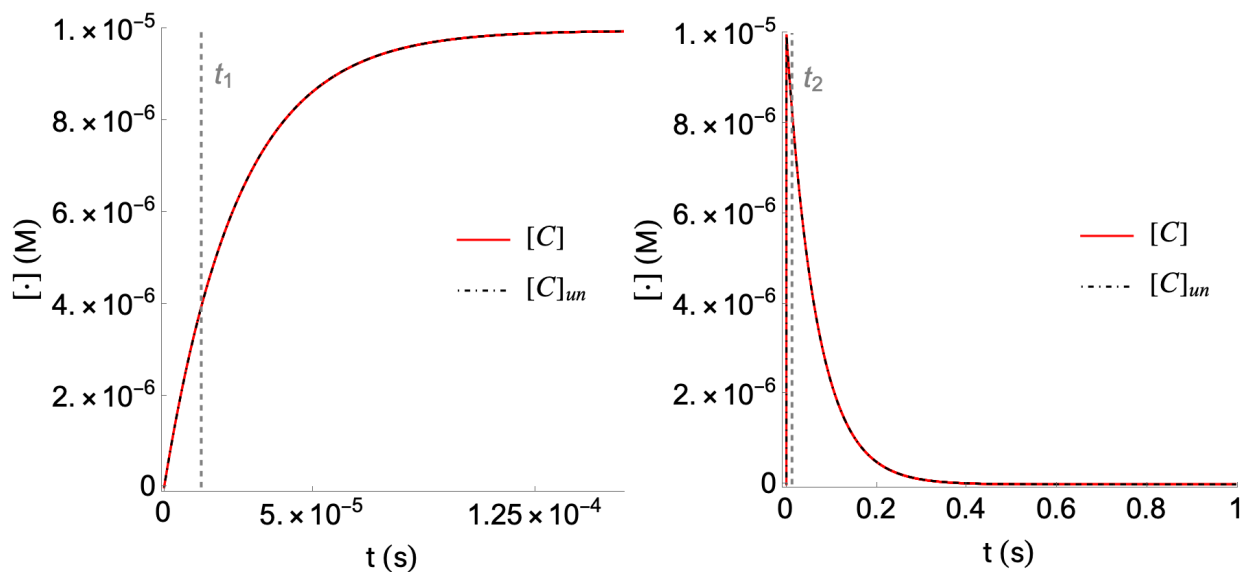
$$t_1 = 1,25 \cdot 10^{-5}s \text{ και } t_2 = 1,25 \cdot 10^{-2}s.$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι για λόγους συμπαγούς παρουσίασης των αποτελεσμάτων επιλέχθηκε μόνο το [C] στα παραπάνω σχήματα. Ανάλογα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν με τον ίδιο τρόπο και για τις άλλες εξαρτημένες μεταβλητές.



(α) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση, στο εσωτερικό στρώμα.

(β) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την εσωτερική και εξωτερική προσέγγιση, στο εξωτερικό στρώμα.



(γ) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την ομοιόμορφη προσέγγιση, στο εσωτερικό στρώμα.

(δ) Αριθμητική προσέγγιση σε σύγκριση με την ομοιόμορφη προσέγγιση, στο εξωτερικό στρώμα.

Σχήμα 9.7: Σύγκριση του αποτελέσματος της αριθμητικής επίλυσης του (SC) υπό την ισχύ της ($rQSSA$) αυτή τη φορά (όντως υπάρχουν, και τώρα, δύο διακεκριμένες φάσεις εξέλιξης του φαινομένου), με τις αντίστοιχες αναλυτικές προσεγγίσεις (εσωτερική, εξωτερική και ομοιόμορφη).

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Η συνάρτηση Lambert. Μια πολύ χρήσιμη, αλλά όχι ιδιαίτερα γνωστή, συνάρτηση είναι η συνάρτηση Lambert, η οποία συμβολίζεται με το κεφαλαίο λατινικό γράμμα W . Αν και η συνάρτηση αυτή εμφανίζεται σε πληθώρα εφαρμογών και αποτελεί σημαντικό εργαλείο της Εφαρμοσμένης Ανάλυσης, εντούτοις η παρουσία της συχνά δεν αναγνωρίζεται.

Αν και καλείται συνάρτηση, τυπικά η W δεν είναι συνάρτηση, αλλά αποτελείται από επιμέρους κλάδους οι οποίοι αποτελούν συναρτήσεις. Και ενώ στο σώμα των μιγαδικών αριθμών η W έχει αριθμήσιμα άπειρους τέτοιους κλάδους, και συγκεκριμένα, ορίζεται ο κλάδος W_k , για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, μόνο οι δύο W_{-1} και W_0 αφορούν τελικά το σώμα των πραγματικών αριθμών, και συνεπώς η παρουσίαση εδώ εστιάζεται μόνο σε αυτούς. Ο κλάδος W_0 καλείται κύριος και μάλιστα, όταν δεν υπάρχει ενδεχόμενο σύγχυσης, συχνά συμβολίζεται σκέτα με W (μια πρακτική που αποφεύγεται στο παρόν σύγγραμμα).

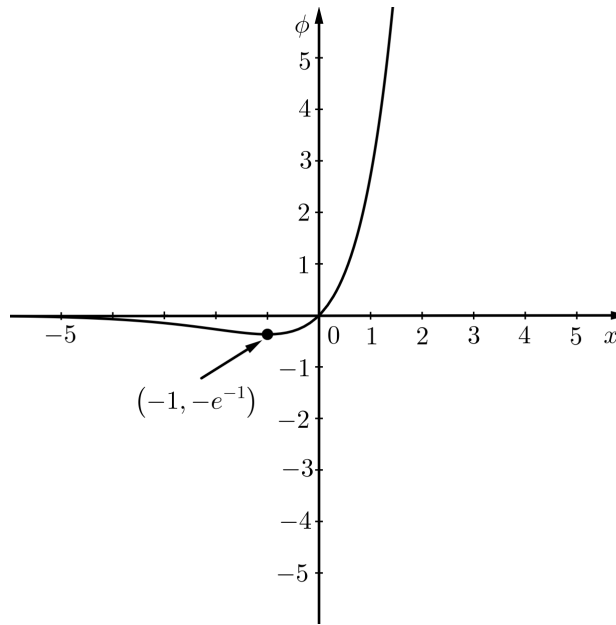
Γενικά, η συνάρτηση W ορίζεται μέσω της αντίστροφής της. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \phi(x) := xe^x, \end{aligned}$$

η οποία εμφανίζει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$ με $\phi(-1) = -e^{-1}$. Μάλιστα, ισχύει ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, \infty)$, καθώς επίσης

$$\text{Ran}(\phi|_{(-\infty, -1]}) = [-e^{-1}, 0) \text{ και } \text{Ran}(\phi|_{[-1, \infty)}) = [-e^{-1}, \infty),$$

όπως άλλωστε φαίνεται και στο [Σχήμα 9.8](#).



Σχήμα 9.8: Γραφική παράσταση της ϕ .

Τότε, οι W_{-1} και W_0 ορίζονται ως

$$\begin{aligned} W_{-1}: [-e^{-1}, 0) &\rightarrow \mathbb{R} & W_0: [-e^{-1}, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto W_{-1}(x) := \phi|_{(-\infty, -1]}^{-1}(x) & \text{και} & \\ & & & x \mapsto W_0(x) := \phi|_{[-1, \infty)}^{-1}(x), \end{aligned}$$

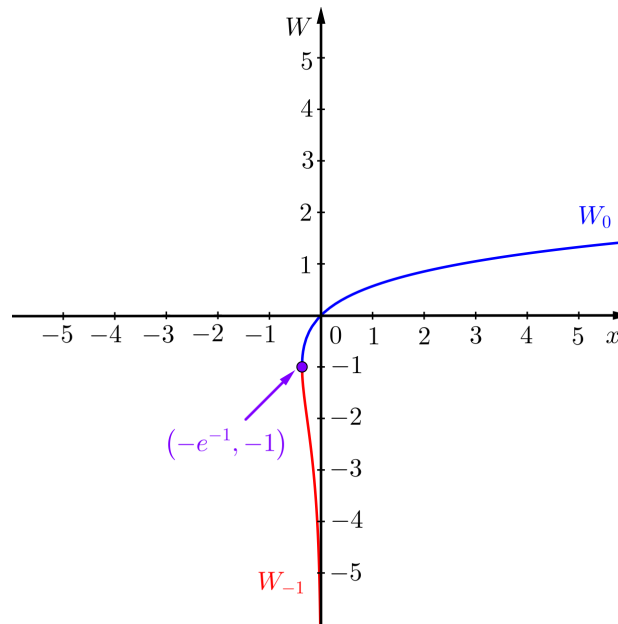
και προφανώς ισχύει ότι η W_{-1} είναι γνησίως φθίνουσα και η W_0 γνησίως αύξουσα, καθώς επίσης

$$\text{Ran}(W_{-1}) = (-\infty, -1] \text{ και } \text{Ran}(W_0) = [-1, \infty),$$

όπως άλλωστε φαίνεται και στο [Σχήμα 9.9](#).

Για παράδειγμα, το σενάριο συχνά θα θέλει, για κάποια $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, να λύσουμε ως προς x_1 την εξίσωση

$$\phi(x_1) = x_2,$$



Σχήμα 9.9: Γραφική παράσταση των κλάδων W_{-1} (κόκκινο) και W_0 (μπλε).

κάτι που θα είναι εφικτό αν $x_2 \in [-e^{-1}, \infty)$, και, μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε ότι

$$x_1 = \begin{cases} W_{-1}(x_2) \text{ και } W_0(x_2), & \text{αν } x_2 \in [-e^{-1}, 0) \\ W_0(x_2), & \text{αν } x_2 \in [0, \infty). \end{cases}$$

Για περισσότερες πληροφορίες για τη συνάρτηση Lambert βλ., π.χ., [20].

Τοπικά προσεγγιστικές λύσεις. Δεδομένων δύο διακεκριμένων χρονικών κλιμάκων

$$0 < t_1 \ll t_2$$

εντός του S_1 ενός (ΠΑΤ), το οποίο για κάθε $y_0 \in S_2$ έχει μοναδική μεγιστική θετικά ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$, όπου $t_1, t_2 \in \text{Dom}(y)$, καθώς επίσης και ενός $y_0 \in S_2$, έχουμε τα εξής (βλ. Σχήμα 9.10):

1. Η περιοχή γύρω από το t_1 (t_2), για κάθε t εντός της οποίας θεωρείται ότι

$$t \asymp t_1 \text{ (} t \asymp t_2 \text{),}$$

λέγεται εσωτερικό (εξωτερικό) στρώμα/χωρίο.

2. Μια προσέγγιση της λύσης εντός του εσωτερικού (εξωτερικού) στρώματος, y_{in} (y_{out}), λέγεται εσωτερική (εξωτερική). Μια προσέγγιση της λύσης εντός τόσο του εσωτερικού όσο και του εξωτερικού στρώματος λέγεται ολική/ομοιόμορφη. Το στρώμα το οποίο έχει πολύ μικρότερο εύρος σε σύγκριση με το άλλο, λέγεται οριακό/συννοριακό.
3. Η περιοχή μεταξύ των t_1 και t_2 , στην οποία τέμνονται το εσωτερικό και το εξωτερικό στρώμα, λέγεται στρώμα/χωρίο/περιοχή επικάλυψης.
4. Μια χρονική κλίμακα, t_{int} , τέτοια ώστε

- i. να βρίσκεται μεταξύ των t_1 και t_2 , δηλ.

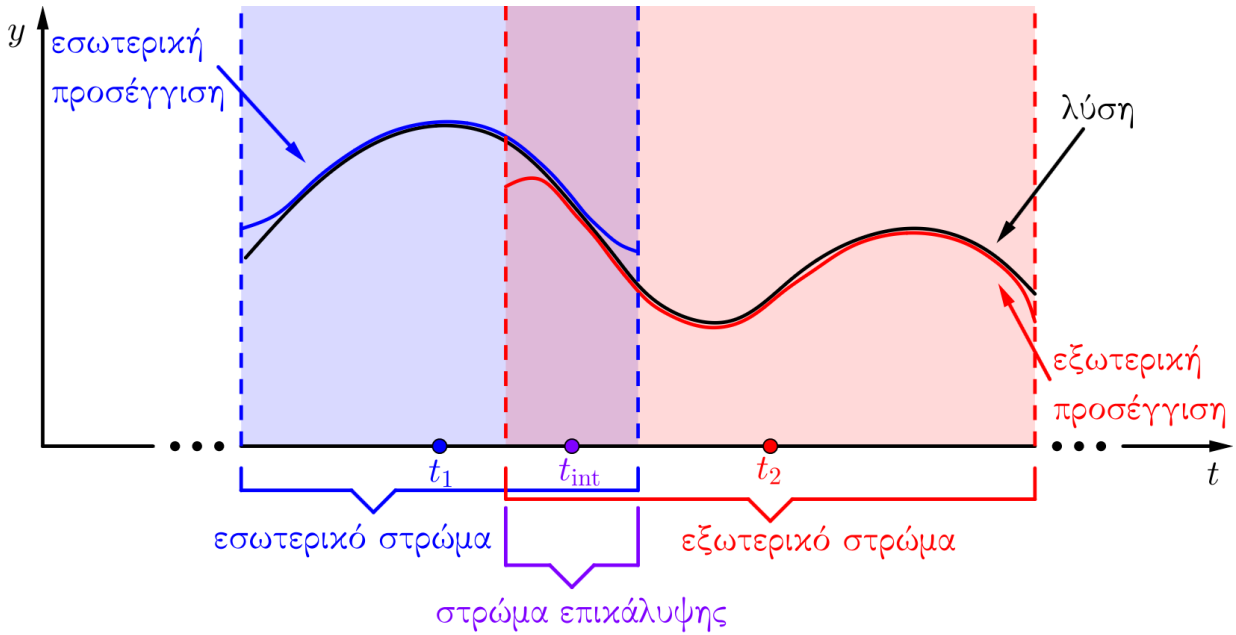
$$t_1 < t_{\text{int}} < t_2$$

και

ii. για κάθε t εντός του στρώματος επικάλυψης να θεωρείται ότι

$$t \asymp t_{\text{int}},$$

λέγεται ενδιάμεση.



Σχήμα 9.10: Βασικές έννοιες κατά τη μελέτη τοπικά προσεγγιστικών λύσεων.

Συναρμογή προσεγγιστικών λύσεων. Δεδομένων μιας εσωτερικής και μιας εξωτερικής προσέγγισης, ψάχνουμε πώς θα τις συναρμόσουμε στο στρώμα επικάλυψής τους. Με τον όρο *συναρμογή* δεν εννοούμε τη συνεχή συρραφή των δύο προσεγγίσεων σε κάποιο σημείο του στρώματος επικάλυψης, αλλά της εύρεσης ενός κοινού τους ορίου εντός του στρώματος αυτού και την κατάλληλη αξιοποίησή του για την εύρεση μια ομοιόμορφης προσέγγισης. Κομβικό ρόλο στην παραπάνω διαδικασία παίζει μια συνθήκη, γνωστή ως *συνθήκη συναρμογής*.

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ

Έστω δύο διακεκριμένες χρονικές κλίμακες

$$0 < t_1 \ll t_2 = \frac{t_1}{\varepsilon}, \text{ όπου } 0 < \varepsilon \ll 1 \Leftrightarrow 0 < \varepsilon \approx 0,$$

εντός του S_1 ενός (ΠΑΤ), το οποίο για κάθε $y_0 \in S_2$ έχει μοναδική μεγιστική θετικά ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$, όπου $t_1, t_2 \in \text{Dom}(y)$, καθώς επίσης και ενός $y_0 \in S_2$. Έστω, επίσης, οι αντίστοιχες προσεγγίσεις της λύσης, η εσωτερική, y_{in} , και η εξωτερική, y_{out} .

Ο αλγόριθμος συναρμογής των δύο αυτών προσεγγίσεων έχει ως εξής:

1. Επιλογή της ενδιάμεσης χρονικής κλίμακας, t_{int} , ως

$$t_{\text{int}} := \frac{t_1}{\varepsilon^2},$$

καθώς η τάξη μεγέθους του $\frac{1}{\varepsilon^2}$ βρίσκεται ανάμεσα στις αντίστοιχες τάξεις των 1 και $\frac{1}{\varepsilon}$.

2. Γραφή τόσο της εσωτερικής όσο και της εξωτερικής προσέγγισης στο στρώμα επικάλυψης, δηλ.

$$\forall t \asymp t_{\text{int}},$$

ως

$$y_{\text{in}}(t) = y_{\text{in}}\left(\frac{t_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} t_{\alpha}\right)$$

$$y_{\text{out}}(t) = y_{\text{out}}\left(\frac{t_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} t_{\alpha}\right),$$

όπου

$$\frac{t}{t_{\text{int}}} =: t_{\alpha} \asymp 1.$$

3. Επιβολή της συνθήκης συναρμογής, δηλ.

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+, \\ t_{\alpha} \text{ σταθ.}}} y_{\text{in}}\left(\frac{t_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} t_{\alpha}\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+, \\ t_{\alpha} \text{ σταθ.}}} y_{\text{out}}\left(\frac{t_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} t_{\alpha}\right) =: L.$$

4. Εξαγωγή της ομοιόμορφης προσέγγισης, y_{un} , ως

$$y_{\text{un}}(t) := y_{\text{in}}(t) + y_{\text{out}}(t) - L, \text{ για κάθε } t \asymp t_1 \text{ ή } t \asymp t_2.$$

Σημειώνουμε την προφανή παραλλαγή του παραπάνω αλγόριθμου: Αν, ισοδύναμα, θεωρήσουμε ότι

$$0 < \varepsilon t_2 = t_1 \ll t_2 \text{ και άρα } t_{\text{int}} := \varepsilon^{\frac{1}{2}} t_1,$$

τότε η συνθήκη συναρμογής παίρνει τη μορφή

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+, \\ t_{\alpha} \text{ σταθ.}}} y_{\text{in}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} t_2 t_{\alpha}\right) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0^+, \\ t_{\alpha} \text{ σταθ.}}} y_{\text{out}}\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} t_2 t_{\alpha}\right) =: L.$$

Λεπτομέρειες, όσον αφορά τη συνάρτηση W του Lambert μπορούν να βρεθούν στην εργασία [20], ενώ για τις προσεγγιστικές λύσεις και τη συναρμογή τους στα συγγράμματα [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38], [39], [40], [41], [42], [43], [44].

Βιβλιογραφία

- [1] S. Arrhenius. “Über die dissociationswärme und den einfluss der temperatur auf den dissociationsgrad der elektrolyte”. Στο: *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 4 (1889), σσ. 96–116.
- [2] J. Klinowski και A. L. Mackay. “Mathematics and Chemistry”. Στο: *The Princeton Companion to Mathematics*. Επιμέλεια υπό T. Gowers, J. Barrow-Green και I. Leader. Princeton University Press, 2008, σσ. 827–837.
- [3] P. Waage και C. M. Guldberg. “Studier i Affiniteten”. Στο: *Videnskabs-selskabet i Christiania* 35 (1864), σσ. 35–45.
- [4] J. H. van 't Hoff. *Études de Dynamique Chimique*. Frederik Muller & Co., 1884.
- [5] P. L. Houston. *Chemical Kinetics and Reaction Dynamics*. Courier Corporation, 2012.

- [6] G. B. Marin, G. S. Yablonsky και D. Constales. *Kinetics of Chemical Reactions: Decoding Complexity*. Wiley, 2nd edition, 2019.
- [7] A. Cornish-Bowden. “The origins of enzyme kinetics”. Στο: *FEBS Letters* 587 (2013), σσ. 2725–2730.
- [8] E. Fischer. “Einfluss der configuration auf die wirkung der enzyme”. Στο: *Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft* 27 (1894), σσ. 2985–2993.
- [9] A. J. Brown. “Enzyme action”. Στο: *Journal of the Chemical Society Transactions* 81 (1902), σσ. 373–388.
- [10] V. Henri. “Über das gesetz der wirkung des invertins”. Στο: *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 39 (1902), σσ. 194–216.
- [11] V. Henri. *Lois Générales de l'Action des Diastases*. Librairie Scientifique A. Hermann, Paris, 1903.
- [12] L. Michaelis και M. L. Menten. “Die kinetik der invertinwirkung”. Στο: *Biochemische Zeitschrift* 49 (1913), σσ. 333–369.
- [13] K. A. Johnson και R. S. Goody. “The Original Michaelis Constant: Translation of the 1913 Michaelis-Menten Paper”. Στο: *Biochemistry* 50 (2011), σσ. 8264–8269.
- [14] D. D. Van Slyke και G. E. Cullen. “The mode of action of urease and of enzymes in general”. Στο: *Journal of Biological Chemistry* 19 (1914), σσ. 141–180.
- [15] G. E. Briggs και J. B. S. Haldane. “A note on the kinetics of enzyme action”. Στο: *Biochemical Journal* 19 (1925), σσ. 338–339.
- [16] B. Srinivasan. “A guide to the Michaelis-Menten equation: steady state and beyond”. Στο: *The FEBS Journal* 289 (2022), σσ. 6086–6098.
- [17] H. Lineweaver και D. Burk. “The determination of enzyme dissociation constants”. Στο: *Journal of the American Chemical Society* 56 (1934), σσ. 658–666.
- [18] L. A. Segel. “On the validity of the steady state assumption of enzyme kinetics”. Στο: *Bulletin of Mathematical Biology* 50 (1988), σσ. 579–593.
- [19] L. A. Segel και M. Slemrod. “The quasi-steady-state assumption: a case study in perturbation”. Στο: *SIAM Review* 31 (1989), σσ. 446–477.
- [20] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. Hare, D. J. Jeffrey και D. E. Knuth. “On the Lambert W function”. Στο: *Advances in Computational Mathematics* 5 (1996), σσ. 329–359.
- [21] S. Schnell και C. Mendoza. “Closed form solution for time-dependent enzyme kinetics”. Στο: *Journal of Theoretical Biology* 187 (1997), σσ. 207–212.
- [22] S. Schnell και P. K. Maini. “Enzyme kinetics at high enzyme concentration”. Στο: *Bulletin of Mathematical Biology* 62 (2000), σσ. 483–499.
- [23] J. A. M. Borghans, R. J. De Boer και L. A. Segel. “Extending the quasi-steady state approximation by changing variables”. Στο: *Bulletin of Mathematical Biology* 58 (1996), σσ. 43–63.
- [24] A. Goeke και S. Walcher. “A constructive approach to quasi-steady state reductions”. Στο: *Journal of Mathematical Chemistry* 52 (2014), σσ. 2596–2626.
- [25] A. Goeke, S. Walcher και E. Zerz. “Determining “small parameters” for quasi-steady state”. Στο: *Journal of Differential Equations* 259 (2015), σσ. 1149–1180.
- [26] A. Goeke, S. Walcher και E. Zerz. “Classical quasi-steady state reduction - a mathematical characterization”. Στο: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 345 (2017), σσ. 11–26.

- [27] J. Eilertsen και S. Schnell. “The quasi-steady-state approximations revisited: Timescales, small parameters, singularities, and normal forms in enzyme kinetics”. Στο: *Mathematical Biosciences* 325 (2020), article 108339.
- [28] J. Eilertsen, M. A. Tyczynska και S. Schnell. “Hunting ε : The origin and validity of quasi-steady-state reductions in enzyme kinetics”. Στο: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 20 (2021), σσ. 2450–2481.
- [29] J. Eilertsen, S. Schnell και S. Walcher. “On the anti-quasi-steady-state conditions of enzyme kinetics”. Στο: *Mathematical Biosciences* 350 (2022), article 108870.
- [30] V. Bitsouni, N. Gialelis και I. G. Stratis. “Rigorous analysis of the quasi-steady-state assumption in enzyme kinetics”. Στο: *Mathematics* 10 (2022), article 1086.
- [31] G. I. Barenblatt. *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge University Press, 1996.
- [32] C. M. Bender και S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, 1999.
- [33] M. D. Greenberg. *Foundations of Applied Mathematics*. Courier Corporation, 2013.
- [34] E. J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991.
- [35] M. H. Holmes. *Introduction to Perturbation Methods*. Springer, 2012.
- [36] M. H. Holmes. *Introduction to the Foundations of Applied Mathematics*. Springer, 2nd edition, 2019.
- [37] J. Jost. *Mathematical Methods in Biology and Neurobiology*. Springer, 2014.
- [38] J. P. Keener. *Principles of Applied Mathematics: Transformation and Approximation*. Westview Press, 2nd edition, 2000.
- [39] P. A. Lagerstrom. *Matched Asymptotic Expansions*. Springer, 1988.
- [40] C.-C. Lin και L. A. Segel. *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*. SIAM, 1988.
- [41] J. D. Logan. *Applied Mathematics*. Wiley, 4th edition, 2013.
- [42] J. A. Murdock. *Perturbations: Theory and Methods*. SIAM, 1999.
- [43] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, 2011.
- [44] T. Szirtes. *Applied Dimensional Analysis and Modeling*. Elsevier, 2nd edition, 2007.

■ ΒΙΟΧΗΜΙΚΗ ΚΙΝΗΤΙΚΗ II

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Μοντέλα αυτοκατάλυσης:

- (α) Πρώτος μηχανισμός Lotka
- (β) Μοντέλο Higgins-Sel'kov
- (γ) Μοντέλο Sel'kov

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Ύπαρξη περιοδικών λύσεων με χρήση χωρίων παγίδευσης

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 1-9](#)

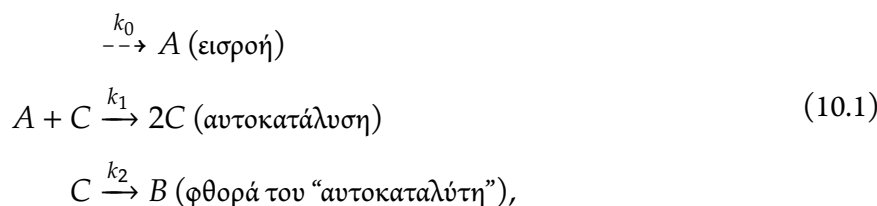
Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Μοντέλα αυτοκατάλυσης. Εδώ μελετάμε μοντέλα αυτοκαταλυόμενων χημικών αντιδράσεων, δηλ. χημικών αντιδράσεων όπου, σε κάποια συνιστώσα χημική αντίδραση του μηχανισμού τους, ένα από τα προϊόντα δρα ως καταλύτης για την ίδια ή διαφορετική συνιστώσα.

Οι αυτοκαταλυόμενες χημικές αντιδράσεις εμφανίζονται συχνά κατά τη μερική/τμηματική μελέτη των μεταβολικών μονοπατιών, είναι καλώς μελετημένες ήδη από το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα και γνωστές για την πολυποίκιλη συμπεριφορά των λύσεών τους και ιδίως για τις *ταλαντώσεις* (*oscillations*) που οι τελευταίες εμφανίζουν, και συγκεκριμένα για την εμφάνιση εστιών, κλειστών τροχιών και οριακών κύκλων στα αντίστοιχα διαγράμματα φάσης. Η ιδέα της διατήρησης ανανεώσιμου μεταβολισμού μέσω της εμφάνισης περιοδικού μοτίβου στις συγκεντρώσεις των υπό μελέτη χημικών ενώσεων είναι που κάνει αυτά τα μοντέλα αξιοσημείωτα. Σημειώνουμε ότι περιοδικά μοτίβα έχουν παρατηρηθεί και στο εργαστήριο, για χημικές αντιδράσεις που δεν άπτονται της Βιοχημείας, όπως για παράδειγμα η Belousov-Zhabotinsky, η Briggs-Rauscher και η Bray-

Liebhafsky.

Πρώτος μηχανισμός Lotka. Όπως ήδη αναφέραμε κατά την εισαγωγή του (PP), το 1910 ο Lotka πρότεινε (για την ακρίβεια, υπονόησε) έναν μηχανισμό, τον αναφερόμενο και ως πρώτο μηχανισμό Lotka, ως ένα απλό βασικό χημικό μοντέλο αυτοκατάλυσης, και συγκεκριμένα τον



για σταθερή εισορή $k_0 > 0$. Αξιοποιώντας τον μηχανισμό (10.1) με τον τρόπο που έχουμε ήδη παρουσιάσει, καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= k_0 - k_1 [A][C] \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1 [A][C] - k_2 [C] \\ \frac{d[B]}{dt} &= k_2 [C], \end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα και απλούστερα, στο σύστημα

$$\frac{d[A]}{dt} = k_0 - k_1 [A][C] \quad (10.2\alpha)$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1 [A][C] - k_2 [C]. \quad (10.2\beta)$$

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Το ΠΑΤ για το παραπάνω μοντέλο είναι το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } [A]_0, [C]_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ & ([A], [C]) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ τέτοια ώστε η } ([A], [C]) \text{ να ικανοποιεί τόσο το (10.2)} \\ & \text{στο } \mathcal{I} \setminus \{0\} \text{ όσο και την αρχική συνθήκη } ([A], [C]) = ([A]_0, [C]_0) \text{ για } t = 0. \end{aligned} \quad (L1)$$

Σημεία ισορροπίας. Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το

$$\left(\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_0}{k_2} \right)$$

είναι το μοναδικό σ.ι. του (L1).

Το αδιάστατο πρόβλημα. Για να διευκολύνουμε την ανάλυση μας, αδιαστατοποιούμε το (L1) έτσι ώστε να μειώσουμε το πλήθος των σταθερών που εμφανίζονται. Το σ.ι. που υπολογίσαμε παραπάνω μας κατευθύνει ως προς τις ποσότητες με τις οποίες θα αδιαστατοποιήσουμε τις εξαρτημένες μεταβλητές. Έτσι, σύμφωνα με τον αντίστοιχο αλγόριθμο αδιαστατοποίησης, επιλέγουμε τις αδιάστατες εξαρτημένες μεταβλητές ως

$$A_\alpha(t_\alpha) := \frac{k_1}{k_2} [A] \left(\frac{t}{t_*} \right) \text{ και } C_\alpha(t_\alpha) := \frac{k_2}{k_0} [C] \left(\frac{t}{t_*} \right),$$

όπου $t_* > 0$ η χρονική κλίμακα, δηλ.

$$t_\alpha := \frac{t}{t_*},$$

η οποία και θα υπολογιστεί με φυσικό τρόπο. Συνεπώς, το (10.2) θα γίνει

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2} \frac{dA_\alpha}{dt} &= \frac{k_0 k_1}{k_2^2} (1 - A_\alpha C_\alpha) \\ \frac{1}{k_2} \frac{dC_\alpha}{dt} &= A_\alpha C_\alpha - C_\alpha, \end{aligned}$$

όποτε θέτοντας

$$t_* := \frac{1}{k_2}$$

και εισάγοντας τη μοναδική πλέον αδιάστατη σταθερά

$$k := \frac{k_0 k_1}{k_2^2} > 0,$$

το (10.2) παίρνει τελικά την αδιάστατη μορφή

$$\frac{dA_\alpha}{dt_\alpha} = k(1 - A_\alpha C_\alpha) \tag{10.3\alpha}$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = A_\alpha C_\alpha - C_\alpha, \tag{10.3\beta}$$

όπως επίσης και το (L1) την ισοδύναμη αδιάστατη μορφή του ως εξής:

$$\begin{aligned} \text{Με δεδομένα } [A]_0, [C]_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και συνάρτηση} \\ (A_\alpha, C_\alpha) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ τέτοια ώστε η } (A_\alpha, C_\alpha) \text{ να ικανοποιεί τόσο το (10.3) στο} \\ \mathcal{I} \setminus \{0\} \text{ όσο και την αρχική συνθήκη } (A_\alpha, C_\alpha) = \left(\frac{k_1}{k_2} [A]_0, \frac{k_2}{k_0} [C]_0 \right) \text{ για } t_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{L1\alpha}$$

Προφανώς, το μοναδικό σ.ι. του (L1α) είναι το

$$(1, 1).$$

Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Κατά τα γνωστά (βλ. Άσκηση 10.1), παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα, θετικά ολικής, και μεγιστικής λύσης του (L1α),

$$(A_\alpha, C_\alpha) : \begin{cases} \text{είτε } \mathbb{R} \\ \text{είτε } [-\varepsilon_1, \infty), \end{cases} \quad \text{όπου } \varepsilon_1 \in [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2,$$

και μάλιστα η αδρή απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (L1α) δίνεται στο σχήμα Σχήμα 10.1.

Προφανώς, καμία μεγιστική λύση δεν εκρήγνυται και οι τροχιές των μεγιστικών λύσεων, οι οποίες έχουν για πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα κλειστό από τα αριστερά, $[-\varepsilon_1, \infty)$, διέρχονται από το σύνολο

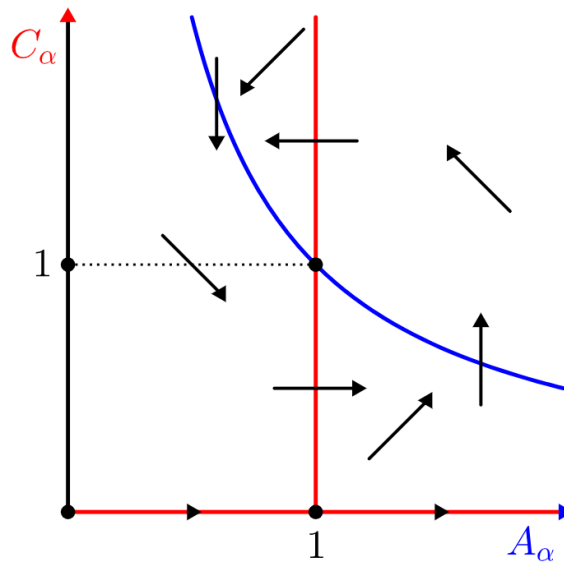
$$\{0\} \times [0, \infty)$$

όταν $t = -\varepsilon_1$.

Ισοδύναμα, παίρνουμε αντίστοιχη λύση και για το (L1),

$$([A], [C]) : \begin{cases} \text{είτε } \mathbb{R} \\ \text{είτε } [-\varepsilon_1, \infty), \end{cases} \quad \text{όπου } \varepsilon_1 \in [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2.$$

Άσκηση 10.1. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της μελέτης Φάσης I του (L1α), αναγνωρίστε τα αναλλοίωτα σύνολά του και ελέγξτε την κατασκευή του Σχήματος 10.1.



Σχήμα 10.1: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(L1\alpha)$. Με μπλε οι A_α -μηδενοκλινείς καμπύλες και με κόκκινο οι C_α -μηδενοκλινείς. Παρατηρούμε άμεσα ότι δεν υπάρχει ενδεχόμενο μια θετική ημιτροχιά να τμήσει κάποτε (στο μέλλον) το σύνολο $\{0\} \times [0, \infty)$, δηλ. τον κάθετο άξονα. Οι μεγιστικές λύσεις με πεδίο ορισμού όχι το \mathbb{R} έχουν τροχιές που διέρχονται από τον κάθετο άξονα όταν $t = -\varepsilon_1$.

Ανάλυση ευστάθειας. Ως προς τη θετική ευστάθεια/αστάθεια του σ.ι. $(1, 1)$ του $(L1\alpha)$, υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi ως

$$J(a, c) = \begin{pmatrix} -kc & -ka \\ c & a - 1 \end{pmatrix},$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του $J(1, 1)$ δίνονται από τον τύπο

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm (\text{tr}^2 - 4\det)^{\frac{1}{2}} \right),$$

όπου

$$\text{tr} = -k < 0 \text{ και } \det = k > 0,$$

δηλ. το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του πίνακα στο σ.ι. είναι αυστηρά αρνητικό, άρα το $(1, 1)$ είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Ειδικότερα,

$$\lambda_{\pm} = \frac{k}{2} \left(-1 \pm \left(1 - \frac{4}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

και έτσι έχουμε ότι το $(1, 1)$ συμπεριφέρεται τοπικά ως θετικά

$$\begin{cases} \text{ευσταθής εστία,} & \text{αν } k < 4 \\ \text{ευσταθής νόθος κόμβος,} & \text{αν } k = 4 \\ \text{ευσταθής κόμβος,} & \text{αν } k > 4. \end{cases}$$

Άσκηση 10.2. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της τοπικής εικόνας του χώρου φάσης του $(L1\alpha)$ γύρω από το σ.ι. $(1, 1)$.

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια; Για το αν είναι το θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. του (L1α) και ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές, θα προσπαθήσουμε να αποφανθούμε μέσω του θεωρήματος Poincaré-Bendixson σε συνδυασμό με το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac. Η ιδιαιτερότητα εδώ είναι ότι, λόγω του μη φραγμένου χώρου φάσης, αναμένουμε την ύπαρξη μη φραγμένων τροχιών, οι οποίες δεν εμπίπτουν στο αποτέλεσμα του θεωρήματος Poincaré-Bendixson.

Αρχικά θα αποκλείσουμε το ενδεχόμενο να υπάρχει ομοκλινής τροχιά, ή κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα ετεροκλινών τροχιών, ή κλειστή τροχιά, εντός του χώρου φάσης. Πράγματι, από τη μία έχουμε ότι (βλ. Άσκηση 10.1) τα σύνολα

$$\Sigma_1 := [0, \infty) \times \{0\} \text{ και } [0, \infty) \times (0, \infty) =: \Sigma_2$$

είναι αναλλοίωτα, άρα αν θα υπήρχε τέτοια τροχιά θα βρισκόταν αναγκαστικά εντός του δεύτερου. Από την άλλη, επιλέγοντας την

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \cup (0, \infty) &\rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ (a, c) &\mapsto \varphi(a, c) := \frac{1}{c}, \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε από το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac ότι δεν υπάρχουν τέτοιες τροχιές ούτε εντός του Σ_2 , καθώς, θέτοντας

$$f_k(a, c) := (k(1 - ac), ac - c), \quad \forall k > 0,$$

θα έχουμε ότι

$$\nabla \cdot (\varphi f_k)(a, c) = -k < 0, \quad \forall (a, c) \in \Sigma_2.$$

Άρα, από το θεώρημα Poincaré-Bendixson καταλήγουμε στο ότι κάθε φραγμένη θετική ημιτροχιά εντός του αναλλοιώτου Σ_2 , δεν μπορεί παρά να τείνει (για θετικούς χρόνους) σε κάποιο σ.ι., το οποίο δεν είναι άλλο από το (1, 1). Έτσι, έπεται η ολικότητα της θετικής ασυμπτωτικής ευστάθειας του σ.ι. αυτού, αλλά μόνο για τις φραγμένες ημιτροχιές.

Από τη μία, το αναλλοίωτο σύνολο Σ_1 αποτελείται από μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές εντός του χώρου φάσης του (L1α). Υπάρχουν όμως, από την άλλη, μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές εντός του Σ_2 ; Από το Σχήμα 10.1, αποκλείεται ένα τέτοιο σενάριο. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει μια τέτοια θετική ημιτροχιά. Από το Σχήμα 10.1 έπεται ότι η θετική αυτή ημιτροχιά θα απομακρύνεται σπειροειδώς από το (1, 1). Τότε, η αντίστοιχη λύση θα είναι αρνητικά ολική, καθώς η τροχιά της δεν θα μπορεί να διέλθει από το

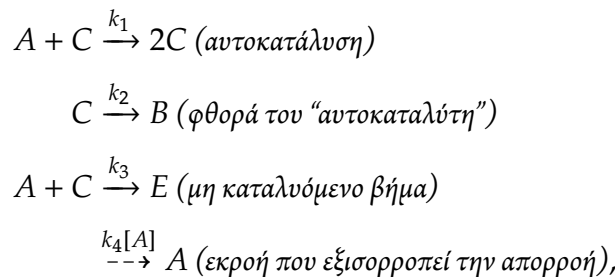
$$\{0\} \times [0, \infty).$$

Μάλιστα, η αντίστοιχη αρνητική ημιτροχιά θα είναι φραγμένη, και άρα, μιας και δεν υπάρχουν οριακοί κύκλοι, από το θεώρημα Poincaré-Bendixson θα πρέπει αυτή να τείνει (για αρνητικούς χρόνους) σπειροειδώς στο (1, 1). Ωστόσο σε αυτή την περίπτωση, το (1, 1) θα είναι θετικά ασταθές, δηλ. άτοπο. Η συλλογιστική του παραπάνω επιχειρήματος αποτυπώνεται γλαφυρά στο Σχήμα 10.2 (βλ. Άσκηση 10.3).

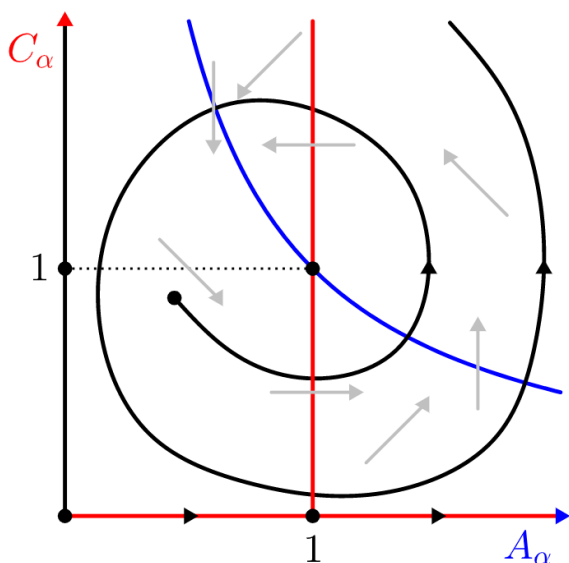
Άρα, τελικά, το (1, 1) είναι ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές εντός του αναλλοιώτου Σ_2 .

Άσκηση 10.3. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες πίσω από το Σχήμα 10.2.

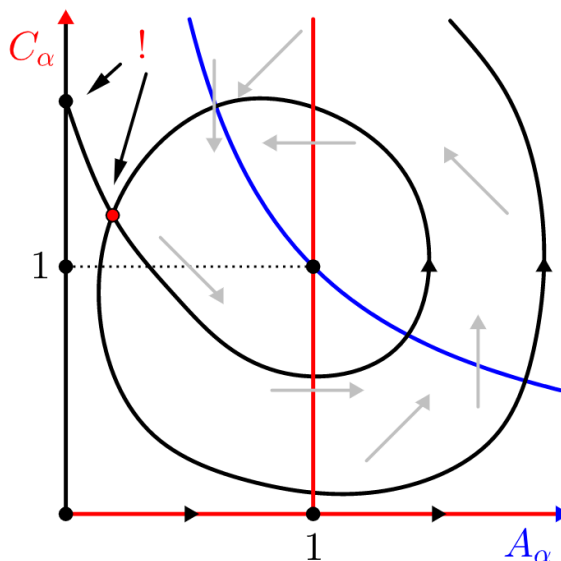
Άσκηση 10.4 (δεύτερος μηχανισμός Lotka). Δεδομένου του μηχανισμού



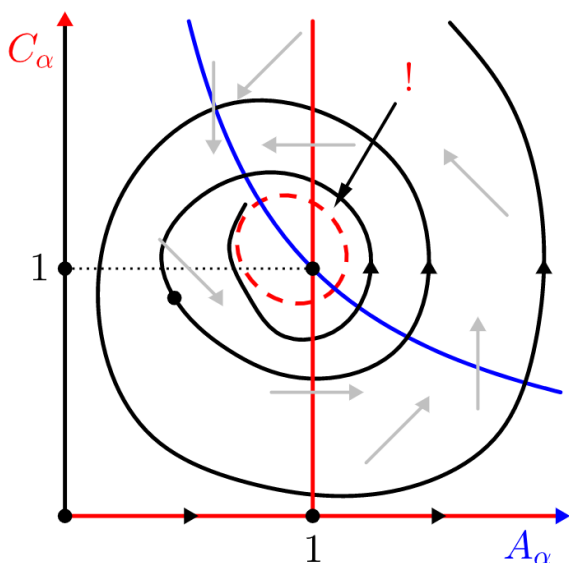
όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές και, επιπλέον, $k_1 > k_3$,



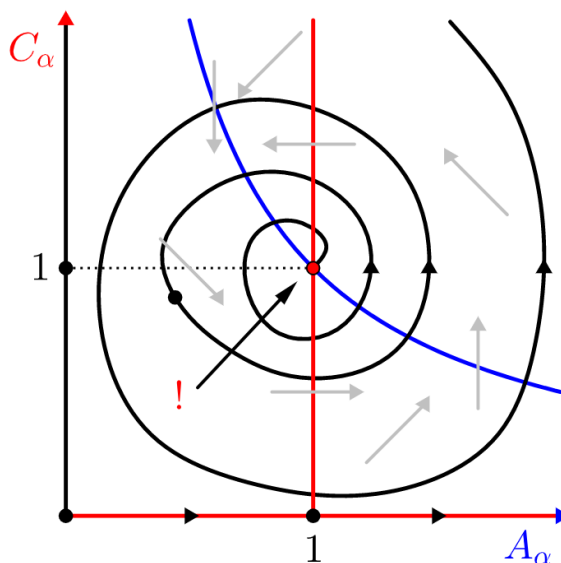
(α) Κάθε μη φραγμένη θετική ημιτροχιά θα πρέπει να απομακρύνεται σπειροειδώς από το σ.ι. χωρίς να τμήσει κάποτε τον κάθετο άξονα (και προφανώς και τον οριζόντιο, ο οποίος δεν ανήκει ούτως ή άλλως στο ίδιο αναλλοίωτο σύνολο).



(β) Καμία τροχιά με μη φραγμένη θετική ημιτροχιά δεν μπορεί να τέμνει κάποτε ούτε στο παρόν ούτε στο μέλλον τον κάθετο άξονα (και προφανώς και τον οριζόντιο), κάτι που θα ήταν αναγκαίο για την ύπαρξη ολικής λύσης, καθώς τότε δεν θα μπορούσε η μη φραγμένη θετική ημιτροχιά να κινηθεί σπειροειδώς απομακρυνόμενη από το σ.ι.. Οπότε όλες οι λύσεις με μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές είναι ολικές και, μάλιστα, με φραγμένες αρνητικές ημιτροχιές.



(γ) Αποκλείσαμε, μέσω του αρνητικού κριτηρίου Bendixson-Dulac, την ύπαρξη ομοκλινούς τροχιάς, ή κλειστού και προσανατολισμένου συμπλέγματος ετεροκλινών τροχιών, ή οριακών κύκλων. Οπότε το α -οριακό σύνολο μιας τροχιάς με μη φραγμένη θετική ημιτροχιά είναι το σ.ι..



(δ) Το σ.ι., ωστόσο, δεν μπορεί να είναι το α -οριακό σύνολο καμιάς τροχιάς, καθώς τότε θα είναι θετικά ασταθές, ενώ γνωρίζουμε τη θετική ευστάθειά του.

Σχήμα 10.2: Η απεικόνιση των βημάτων της συλλογιστικής του επιχειρήματος για τον αποκλεισμό μη φραγμένης θετικής ημιτροχιάς στον χώρο φάσης του $(L1\alpha)$.

1. εξάγετε το αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων,
2. απλοποιήστε το παραπάνω σύστημα σε ένα 2×2 , ως

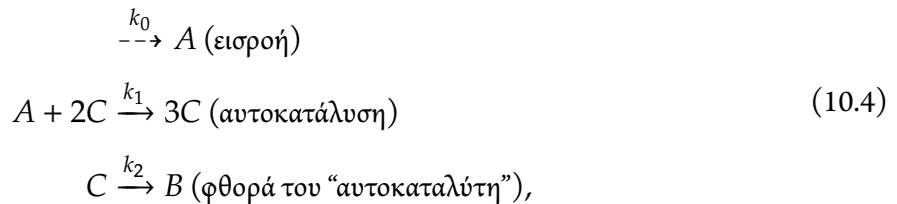
$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -(k_1 + k_3)[A][C] + k_4[A] \\ \frac{d[C]}{dt} &= (k_1 - k_3)[A][C] - k_2[C], \end{aligned}$$

και

3. συγκρίνετε το παραπάνω μοντέλο με το (4.1).

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του προβλήματος, όπως φαίνεται στο [Σχήμα 10.3](#), προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας.

Μοντέλο Higgins-Sel'kov. Βασιζόμενος σε δουλειά του Higgins του 1964, [1], ο Sel'kov, το 1968, [2], [3], κατέληξε σε μια παραλλαγή του πρώτου μηχανισμού Lotka για τη μελέτη ενός κομβικού τμήματος του μεταβολικού μονοπατιού της γλυκόλυσης, και συγκεκριμένα αυτό της μετατροπής της 6-φωσφορικής φρουκτόζης (F6P) και της τριφωσφορικής αδενοσίνης (ATP) σε 1,6-διφωσφορική φρουκτόζη (F1,6BP) και σε διφωσφορική αδενοσίνη (ADP), αντίστοιχα, μέσω του ενζύμου φωσφοφρουκτοκινάση 1 (PFK-1). Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε ο μηχανισμός



για σταθερή εισροή $k_0 > 0$. Από τον μηχανισμό (10.4), καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= k_0 - k_1[A][C]^2 \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1[A][C]^2 - k_2[C] \\ \frac{d[B]}{dt} &= k_2[C], \end{aligned}$$

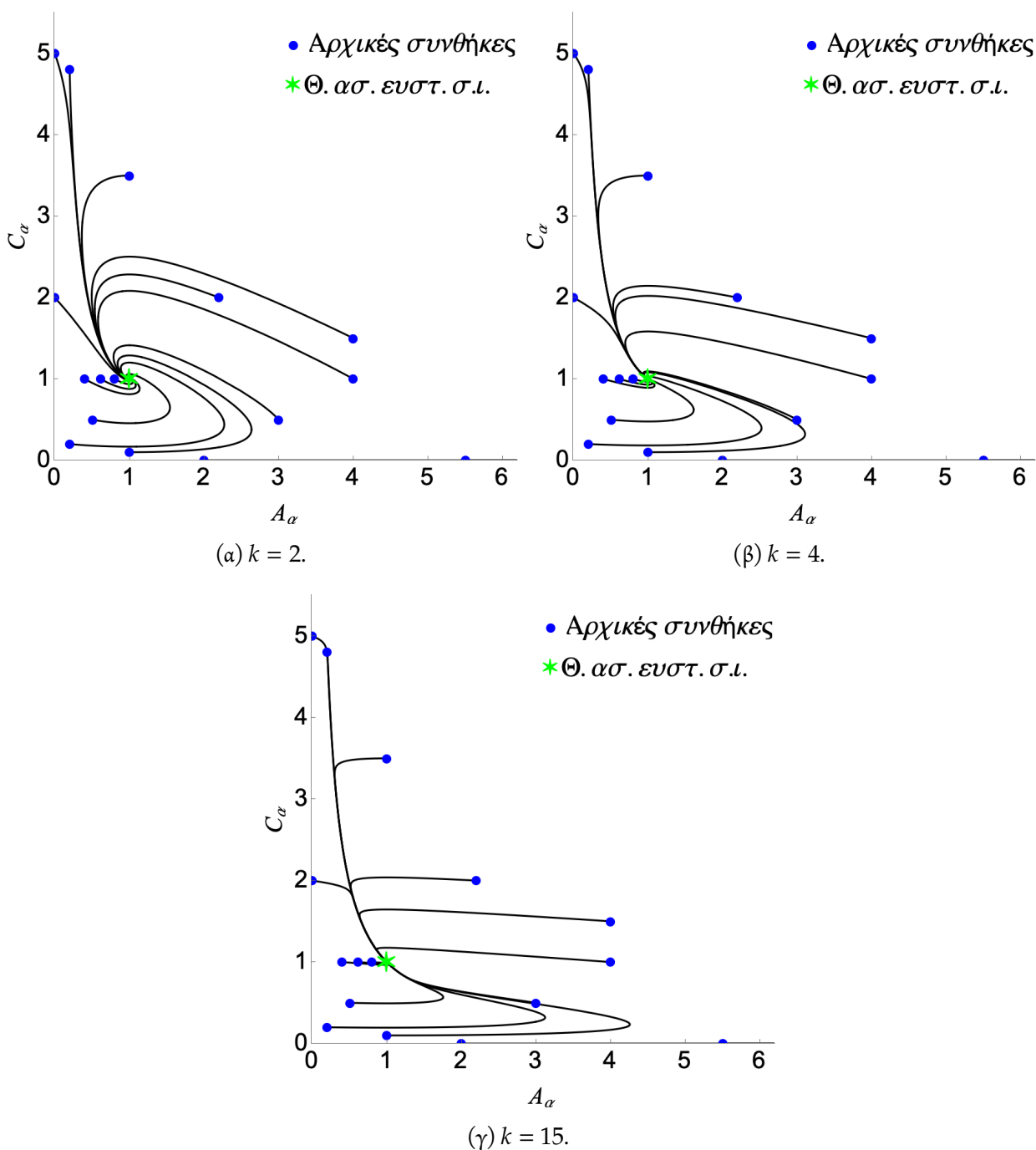
ή, ισοδύναμα και απλούστερα, στο σύστημα

$$\frac{d[A]}{dt} = k_0 - k_1[A][C]^2 \tag{10.5α}$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1[A][C]^2 - k_2[C]. \tag{10.5β}$$

Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Το ΠΑΤ για το παραπάνω μοντέλο είναι το εξής:

Με δεδομένα $[A]_0, [C]_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $([A], [C]) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2$, τέτοια ώστε η $([A], [C])$ να ικανοποιεί τόσο το (10.5) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $([A], [C]) = ([A]_0, [C]_0)$ για $t = 0$. (HS)



Σχήμα 10.3: Αριθμητική επίλυση του $(L1\alpha)$ για θετικούς χρόνους. Συγκεκριμένα, το αντίστοιχο διάγραμμα φάσης για διάφορες αρχικές συνθήκες και τιμές του k .

Σημεία ισορροπίας. Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το

$$\left(\frac{k_2^2}{k_0 k_1}, \frac{k_0}{k_2} \right)$$

είναι το μοναδικό σ.ι. του (HS) .

Το αδιάστατο πρόβλημα. Σύμφωνα με τον αντίστοιχο αλγόριθμο αδιαστατοποίησης, επιλέγουμε τις αδιάστατες εξαρτημένες μεταβλητές του (HS) ως

$$A_\alpha(t_\alpha) := \frac{k_0 k_1}{k_2^2} [A](t_\alpha), \quad C_\alpha(t_\alpha) := \frac{k_2}{k_0} [C](t_\alpha) \text{ και } t_\alpha := \frac{k_0^2 k_1}{k_2^2} t,$$

για να μετατρέψουμε το (10.5) στην αδιάστατη μορφή του

$$\frac{dA_\alpha}{dt_\alpha} = 1 - A_\alpha C_\alpha^2 \tag{10.6\alpha}$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = k (A_\alpha C_\alpha^2 - C_\alpha), \tag{10.6\beta}$$

όπου

$$k := \frac{k_2^3}{k_0^2 k_1} > 0$$

η μοναδική αδιάστατη σταθερά, καθώς επίσης το (HS) στην αντίστοιχη αδιάστατη μορφή του ως εξής:

Με δεδομένα $[A]_0, [C]_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(A_\alpha, C_\alpha) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2$, τέτοια ώστε η (A_α, C_α) να ικανοποιεί τόσο το (10.6) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(A_\alpha, C_\alpha) = \left(\frac{k_0 k_1}{k_2^2} [A]_0, \frac{k_2}{k_0} [C]_0 \right)$ για $t_\alpha = 0$. (HS α)

Το σ.ι. του (HS α) είναι το (1, 1).

Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Κατά τα γνωστά (βλ. Άσκηση 10.5), παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα, θετικά ολικής, και μεγιστικής λύσης του (HS α),

$$(A_\alpha, C_\alpha) : \begin{cases} \text{είτε } \mathbb{R} \\ \text{είτε } [-\varepsilon_1, \infty), \end{cases} \quad \text{όπου } \varepsilon_1 \in [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2,$$

και μάλιστα η αδρή απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (HS α) δίνεται στο σχήμα Σχήμα 10.4.

Άσκηση 10.5. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της μελέτης Φάσης I του (HS α), αναγνωρίστε τα αναλλοίωτα σύνολά του και ελέγξτε την κατασκευή του Σχήματος 10.4.

Ανάλυση ευστάθειας. Ως προς τη θετική ευστάθεια/αστάθεια του σ.ι. του (HS α), υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi ως

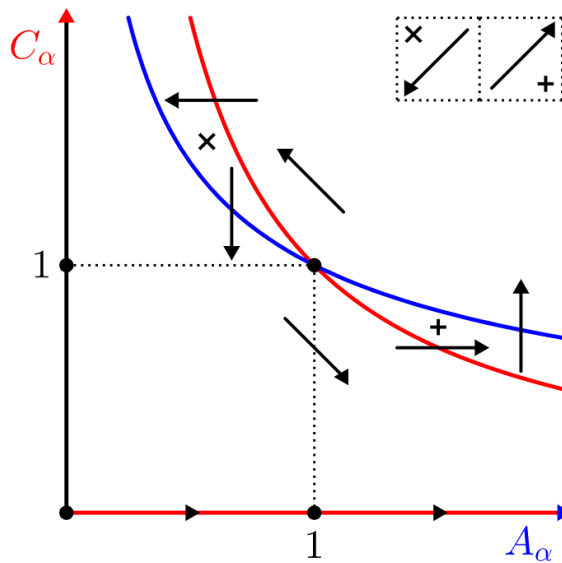
$$J(a, c) = \begin{pmatrix} -c^2 & -2ac \\ kc^2 & k(2ac - 1) \end{pmatrix}$$

και για τις ιδιοτιμές του $J(1, 1)$ ισχύει ότι

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm \left(\text{tr}^2 - 4 \det \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

όπου

$$\text{tr} = k - 1 \text{ και } \det = k > 0.$$



Σχήμα 10.4: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του (HSa) . Με μπλε η A_α -μηδενοκλινή καμπύλη και με κόκκινο οι C_α -μηδενοκλινείς.

Αφού η οριζούσα είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του πίνακα Jacobi στο σ.ι. καθορίζεται από το αντίστοιχο πρόσημο του ίχνους. Έτσι, έχουμε ότι το $(1, 1)$ είναι θετικά

$$\begin{cases} \text{ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{αν } k < 1 \\ \text{ασταθές,} & \text{αν } k > 1. \end{cases}$$

Ειδικότερα,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(k - 1 \pm (k^2 - 6k + 1)^{\frac{1}{2}} \right),$$

και έτσι έχουμε ότι το $(1, 1)$ συμπεριφέρεται τοπικά ως θετικά

$$\begin{cases} \text{ευσταθής κόμβος,} & \text{αν } k \leq 3 - 2(2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{ευσταθής εστία,} & \text{αν } 3 - 2(2)^{\frac{1}{2}} < k < 1 \\ \text{ασταθής εστία,} & \text{αν } 1 < k < 3 + 2(2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{ασταθής κόμβος,} & \text{αν } k \geq 3 + 2(2)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με τη θετική ευστάθεια/αστάθεια του $(1, 1)$ μέσω γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας όταν $k = 1$. Για τη μελέτη του σε αυτή την περίπτωση προσφεύγουμε στη θεωρία διακλάδωσης.

Ανάλυση διακλάδωσης. Έχουμε ότι

$$\lambda_{\pm} = \pm i \det^{\frac{1}{2}}, \text{ όταν } k = 1,$$

καθώς επίσης ότι

$$\text{Re} \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \text{tr}, \text{ όταν } k \text{ εντός μιας περιοχής του } 1,$$

οπότε, κοιτώντας τα $\text{Re}\lambda_{\pm}$ ως συναρτήσεις του k , έπεται ότι

$$\frac{d\text{Re}\lambda_{\pm}}{dk}(k) = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ και ειδικότερα } \frac{d\text{Re}\lambda_{\pm}}{dk}(1) \neq 0.$$

Άρα, για το $(HS\alpha)$, υπάρχει διακλάδωση Hopf από το $(1, 1)$ για $k = 1$.

Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη διακλάδωση αυτή ως υποκρίσιμη, ή υπερκρίσιμη, αποφεύγοντας μακροσκελείς υπολογισμούς; Μπορούμε πράγματι, όπως θα δούμε παρακάτω.

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια; Στην περίπτωση όπου $k < 1$, για το αν είναι το θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι. του $(HS\alpha)$ και ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αρχικά παρατηρούμε ότι (βλ. Άσκηση 10.5) τα σύνολα

$$\Sigma_1 := [0, \infty) \times \{0\} \text{ και } [0, \infty) \times (0, \infty) =: \Sigma_2$$

είναι αναλλοίωτα, άρα αν θα υπήρχε ομοκλινής τροχιά, ή κλειστό και προσανατολισμένο σύμπλεγμα ετεροκλιτών τροχιών, ή κλειστή τροχιά, θα βρισκόταν αναγκαστικά εντός του δεύτερου. Από την άλλη, επιλέγοντας, για κάθε $k > 0$, την

$$\begin{aligned} \varphi_k: \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \cup (0, \infty) &\rightarrow (0, \infty) \\ (a, c) &\mapsto \varphi_k(a, c) := \frac{1}{c^2} e^{-2(ka+c)}, \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε από το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac ότι δεν υπάρχουν τέτοιες τροχιές ούτε εντός του Σ_2 όταν $k \leq 1$, καθώς, σε αυτή την περίπτωση, θέτοντας

$$f_k(a, c) := (1 - ac^2, k(ac^2 - c)) , \forall k > 0,$$

θα έχουμε ότι

$$\nabla \cdot (\varphi_k f_k)(a, c) = -\frac{1}{c^2} e^{-2(ka+c)} (c^2 - 2kc + k) \leq 0, \forall (a, c) \in \Sigma_2,$$

όπου η τιμή 0 λαμβάνεται για $k = 1$ μόνο στο σύνολο $[0, \infty) \times \{1\}$.

Άρα, από το θεώρημα Poincaré-Bendixson καταλήγουμε στο ότι κάθε φραγμένη θετική ημιτροχιά εντός του αναλλοιώτου Σ_2 όταν $k \leq 1$, δεν μπορεί παρά να καταλήγει στο $(1, 1)$. Έτσι, έπεται η ολικότητα της θετικής ασυμπτωτικής ευστάθειας του σ.ι. αυτού όταν $k < 1$, αλλά μόνο για τις φραγμένες τροχιές.

Από τη μία, το αναλλοίωτο σύνολο Σ_1 αποτελείται από μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές εντός του χώρου φάσης του $(HS\alpha)$. Υπάρχουν όμως, από την άλλη, μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές εντός του Σ_2 ; Όπως παρατηρούμε από το Σχήμα 10.5α, δεν μπορεί να αποκλειστεί ένα τέτοιο σενάριο.

Μάλιστα, μπορούμε να βρούμε μια ικανή (όχι αναγκαία, όπως θα διαπιστώσουμε και κατά την αριθμητική επίλυση αργότερα) συνθήκη για την ύπαρξη μη φραγμένων θετικών ημιτροχιών. Πράγματι, παρατηρώντας την (10.6α), έχουμε ότι

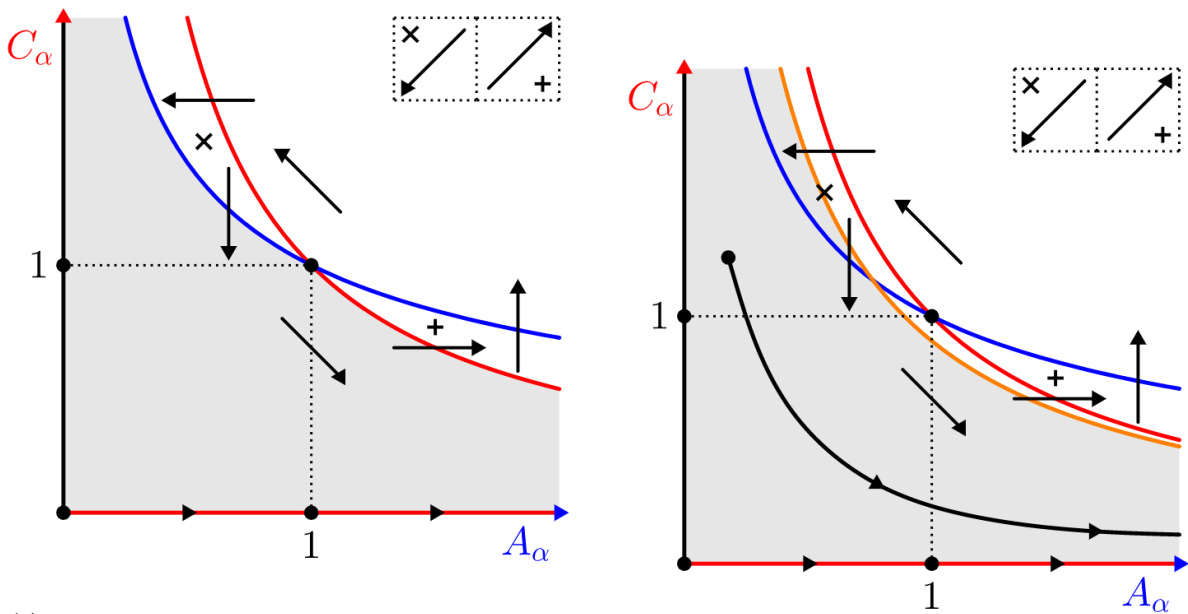
$$\frac{dA_{\alpha}}{dt_{\alpha}} \leq 1,$$

άρα από σύγκριση έχουμε ότι

$$A_{\alpha}(t_{\alpha}) \leq t_{\alpha} + A_{\alpha 0}, \forall t_{\alpha} \geq 0,$$

όπου $A_{\alpha 0} := \frac{k_0 k_1}{k_2^2} [A]_0$. Επιπλέον, από την (10.6β) έχουμε ότι

$$\frac{dC_{\alpha}}{dt_{\alpha}} \leq k \left((t_{\alpha} + A_{\alpha 0}) C_{\alpha}^2 - C_{\alpha} \right), \forall t_{\alpha} \geq 0$$



(α) Παρατηρούμε ότι στη σκιαγραφημένη περιοχή του χώρου φάσης η κατεύθυνση του πεδίου διευθύνσεων “βλέπει” προς το αναλλοίωτο σύνολο Σ_1 , το οποίο αποτελείται από μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές του χώρου φάσης. Ενδεχομένως, δηλ., να υπάρχουν τροχιές που “ακολουθούν” για κάθε $t_\alpha > 0$ αυτές τις θετικές ημιτροχιές (προφανώς δεν τις τέμνουν).

(β) Με πορτοκαλί η καμπύλη $\frac{1}{c} - a - \frac{1}{k} = 0$. Η σκιαγραφημένη περιοχή από κάτω της αποτελεί θετικά αναλλοίωτο σύνολο. Κάθε θετική ημιτροχιά εντός αυτού του θετικά αναλλοίωτου συνόλου είναι μη φραγμένη.

Σχήμα 10.5: Περί μη φραγμένων θετικών ημιτροχιών στον χώρο φάσης του $(HS\alpha)$.

και πάλι από σύγκριση (με μια διαφορική εξίσωση Riccati) συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{C_\alpha(t_\alpha)} \geq \left(\frac{1}{C_{\alpha_0}} - A_{\alpha_0} - \frac{1}{k} \right) e^{kt_\alpha} + t_\alpha + A_{\alpha_0} + \frac{1}{k}, \quad \forall t_\alpha \geq 0,$$

όπου $C_{\alpha_0} := \frac{k_2}{k_0}[C]_0$. Άρα, αν ισχύει ότι

$$K := \frac{1}{C_{\alpha_0}} - A_{\alpha_0} - \frac{1}{k} \geq 0, \tag{10.7}$$

τότε

$$C_\alpha(t_\alpha) \leq \frac{1}{Ke^{kt_\alpha} + t_\alpha + A_{\alpha_0} + \frac{1}{k}}, \quad \forall t_\alpha \geq 0 \Rightarrow \lim_{t_\alpha \rightarrow \infty} C_\alpha(t_\alpha) = 0,$$

δηλ. η θετική ημιτροχιά της λύσης εγκλωβίζεται εντός της σκιαγραφημένης περιοχής στο Σχήμα 10.5β και ακολουθεί για κάθε $t_\alpha > 0$ τις μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές του Σ_1 .

Άρα, το $(1,1)$ δεν είναι ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές εντός του αναλλοιώτου Σ_2 όταν $k < 1$, λόγω ύπαρξης μη φραγμένων θετικών ημιτροχιών.

Άσκηση 10.6. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες πίσω από το Σχήμα 10.5.

Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια). Μια επιπλέον συνέπεια του αποκλεισμού περιοδικών λύσεων του $(HS\alpha)$ για $k \leq 1$, είναι ότι η διακλάδωση Hopf από το $(1,1)$ για $k = 1$ είναι υπερκρίσιμη. Συνεπώς, ο χώρος φάσης έχει τοπικά και γύρω από το σ.ι. την εικόνα θετικά ευσταθούς εστίας όταν $k = 1$.

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια (συνέχεια); Μιας και για $k = 1$ το $(1, 1)$ είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε μπορούμε να δείξουμε όπως και πριν ότι όλες οι φραγμένες θετικές ημιτροχιές καταλήγουν σε αυτό, αλλά δεν είναι ολικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές ούτε στο Σ_2 λόγω ύπαρξης μη φραγμένων θετικών ημιτροχιών εντός αυτού.

Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια). Στη συνέχεια διερωτόμαστε: “Ζει” ο ευσταθής οριακός κύκλος της διακλάδωσης για κάθε $k > 1$; Παρουσιάζουμε ένα αρνητικό αποτέλεσμα, το οποίο περιέχεται στην εργασία [4]. Καταρχάς, υπολογίζουμε

$$\Omega_k := \{(a, c) \in \Sigma_2 \mid \nabla \cdot f_k(a, c) = 0\} = \{(a, c) \in \Sigma_2 \mid g_k(a, c) = 0\},$$

όπου

$$g_k(a, c) := a - \frac{c^2 + k}{2kc}.$$

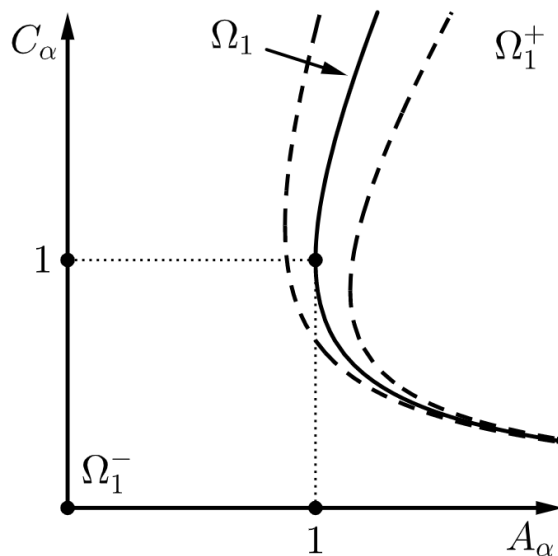
Η καμπύλη Ω_k χωρίζει το $\Sigma_2 \setminus \Omega_k$ σε δύο ξένα 0-συνεκτικά σύνολα Ω_k^\pm , όπου

$$\Omega_k^\pm := \{(a, c) \in \Sigma_2 \mid \nabla \cdot f_k(a, c) \gtrless 0\}.$$

Συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$(1, 1) \in \begin{cases} \Omega_k^-, & \text{για } k < 1 \\ \Omega_k, & \text{για } k = 1 \\ \Omega_k^+, & \text{για } k > 1, \end{cases}$$

όπως φαίνεται στο [Σχήμα 10.6](#). Επιπλέον, υπολογίζουμε το κάθετο διάνυσμα της Ω_k (με κατεύθυνση προς



Σχήμα 10.6: Η γεωμετρία των Ω_k^\pm , και συγκεκριμένα, αυτή της Ω_1 , η οποία και διέρχεται από το $(1, 1)$ για $k = 1$.

το Ω_k^+) ως

$$\nabla g_k(a, c) = \left(1, \frac{k - c^2}{2kc^2} \right).$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$f_k(a, c) \cdot \nabla g_k(a, c) = -\frac{1}{4kc} (3c^4 - 4kc + k^2), \text{ για } (a, c) \in \Omega_k,$$

το οποίο θα έχει το ίδιο πρόσημο με το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ αυτών των δύο διανυσματικών συναρτήσεων επί της Ω_k . Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

$$f_3(a, c) \cdot \nabla g_3(a, c) \begin{cases} = 0, & \text{αν } (a, c) = \left(1, \frac{2}{3}\right) \\ < 0, & \text{αν } (a, c) \in \Omega_3 \setminus \left(1, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

και

$$f_k(a, c) \cdot \nabla g_k(a, c) > 0, \forall (a, c) \in \Omega_k, \text{ όταν } k > 3,$$

καθώς θέτοντας

$$h_k(c) := 3c^4 - 4kc + k^2,$$

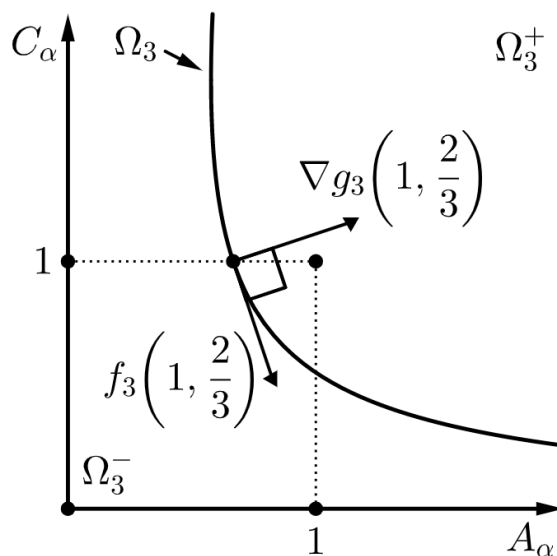
έχουμε ότι

$$\min \{h_k(\cdot)\} = h_k\left(\left(\frac{k}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = k^2 - 3^{\frac{2}{3}}k^{\frac{4}{3}},$$

άρα

$$\min \{h_k(\cdot)\} \begin{cases} < 0, & \text{αν } k \in (0, 3) \\ = 0, & \text{αν } k = 3 \\ > 0, & \text{αν } k \in (3, \infty). \end{cases}$$

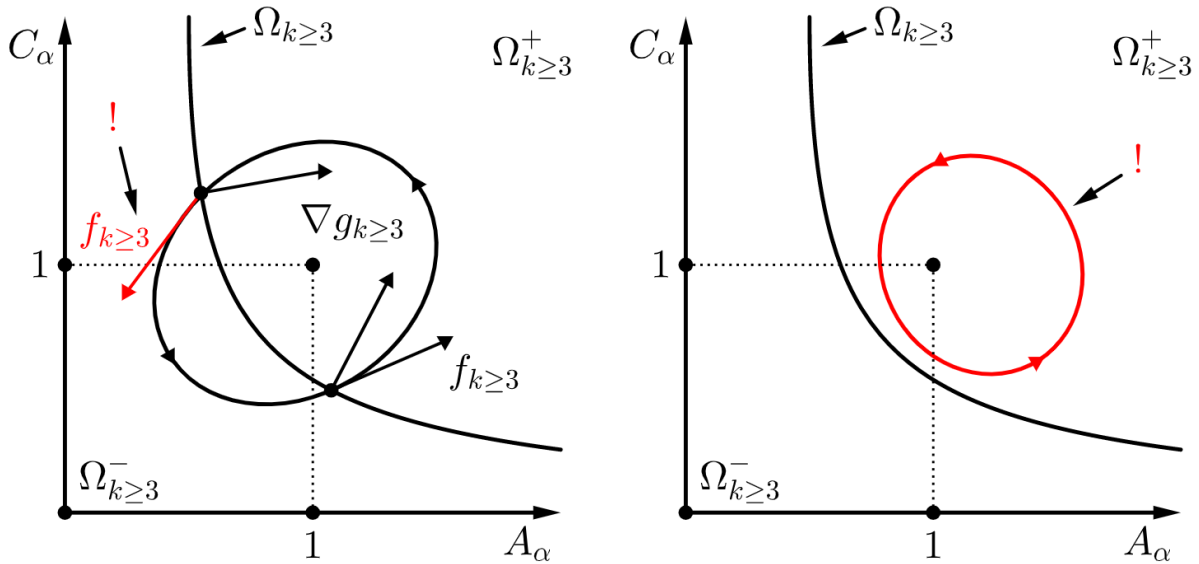
Δηλ., στην οριακή περίπτωση $k = 3$ έχουμε ότι η κατεύθυνση της f_k επί της Ω_k είναι σχεδόν παντού προς το Ω_k^+ , όπως απεικονίζεται και στο [Σχήμα 10.7](#), ενώ για $k > 3$ είναι παντού προς τα εκεί.



Σχήμα 10.7: Στην οριακή περίπτωση $k = 3$ υπάρχει μοναδικό σημείο, το $\left(1, \frac{2}{3}\right)$, όπου η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι ∇g_k και η f_k (επί της Ω_k) δεν είναι οξεία, αλλά ορθή. Για $k < 3$ υπάρχουν και αμβλείες τέτοιες γωνίες, ενώ για $k > 3$ όλες αυτές οι γωνίες είναι οξείες.

Ισχυριζόμαστε, αρχικά, ότι (τουλάχιστον) για $k \geq 3$ είναι αδύνατο να υπάρχει κλειστή τροχιά εκατέρωθεν της Ω_k . Πράγματι, εύκολα συμπεραίνουμε ότι σε αντίθετη περίπτωση θα έπρεπε να υπήρχαν δύο διακεκρι-

μένα σημεία τομής μιας ενδεχόμενης κλειστής τροχιάς με την καμπύλη Ω_k , στα οποία οι τιμές του παραπάνω εσωτερικού γινομένου θα ήταν μη μηδενικές και ετερόσημες¹, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.8α.



(α) Αν υπήρχε κλειστή τροχιά εκατέρωθεν της Ω_k , τότε θα υπήρχε και σημείο της Ω_k στο οποίο η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι ∇g_k και η f_k θα ήταν αμβλεία.

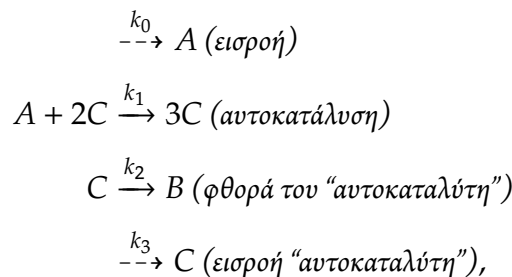
(β) Αν υπήρχε κλειστή τροχιά στο Ω_k^+ (που περιβάλλει αναγκαστικά το σ.ι.), τότε θα είχαμε κλειστή τροχιά σε 0-συνεκτικό σύνολο όπου η $\nabla \cdot f_k$ διατηρεί σχεδόν παντού σταθερό πρόσημο.

Σχήμα 10.8: Είναι αδύνατη η ύπαρξη κλειστής τροχιάς στον χώρο φάσης του $(HS\alpha)$ όταν $k \geq 3$.

Από το αποτέλεσμα αυτό έπεται ότι, για $k \geq 3$, μια ενδεχόμενη περιοδική τροχιά θα υπάρχει σχεδόν εξ ολοκλήρου σε ένα από τα δύο Ω_k^\pm , και συγκεκριμένα, σύμφωνα με το θεώρημα Poincaré, σε εκείνο που περιέχει το σ.ι. $(1, 1)$, καθώς θα το περιβάλλει, δηλ. στο Ω_k^+ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.8β. Ωστόσο, κάτι τέτοιο θα σημαίνει ότι υπάρχει περιοδική λύση σε 0-συνεκτικό σύνολο όπου η $\nabla \cdot f_k$ σχεδόν διατηρεί σταθερό πρόσημο, και μάλιστα θετικό, το οποίο είναι άτοπο από το αρνητικό κριτήριο Bendixson-Dulac.

Άρα ο ευσταθής οριακός κύκλος της διακλάδωσης του $(HS\alpha)$ έχει πάψει να υπάρχει όταν $k \geq 3$.

Άσκηση 10.7 (μοντέλο Schnakenberg). Το 1979, ο Schnakenberg, [5], πρότεινε (για την ακρίβεια υπονόηση), μεταξύ άλλων, μια παραλλαγή του μηχανισμού (10.4), ως



για σταθερή ροή $k_3 > 0$, τέτοια ώστε $k_3 < k_0$. Για τον παραπάνω μηχανισμό

1. εξάγετε το αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων,

¹Εδώ, χρησιμοποιούμε χωρίς να το αναφέρουμε (αλλά και χωρίς να επεκταθούμε περισσότερο), ότι κάθε καμπύλη (για την ακρίβεια κάθε μονοδιάστατη πολλαπλότητα στον \mathbb{R}^n) είναι προσανατολισμένη, δηλ. μπορούμε να βρούμε συνεχή διανυσματική συνάρτηση που θα εκφράζει το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο της καμπύλης.

2. απλοποιήστε το παραπάνω σύστημα σε ένα 2×2 , ως

$$\begin{aligned}\frac{d[A]}{dt} &= k_0 - k_1 [A][C]^2 \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1 [A][C]^2 - k_2 [C] + k_3,\end{aligned}$$

το οποίο μελετήστε, και

3. συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα για το (HS).

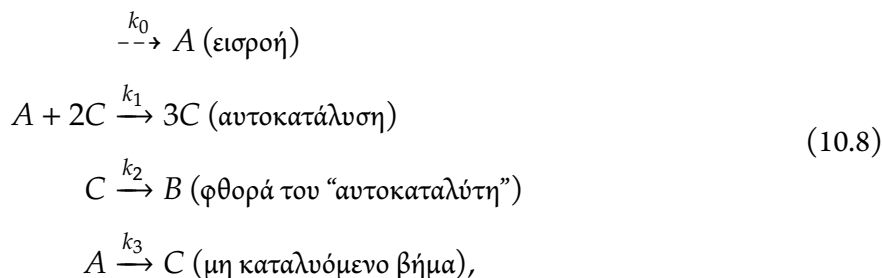
Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του (HSa), όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.9, στο Σχήμα 10.10 και στο Σχήμα 10.11, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων.

Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 10.9 επιβεβαιώνεται η ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του (1, 1), καθώς και η τοπική εικόνα των τροχιών γύρω από αυτό.

Το Σχήμα 10.10 επαληθεύει την ύπαρξη υπερκρίσιμης διακλάδωσης Hopf από το σ.ι. για $k = 1$. Ωστόσο, όπως είχαμε προβλέψει, ο ευσταθής οριακός κύκλος της διακλάδωσης εξαφανίζεται, και μάλιστα νωρίτερα, για κάποιο $k \in (1.23, 1.24)$. Τελικά, για $k > 1.24$, όλες οι τροχιές θα είναι μη φραγμένες και θα ακολουθούν τον οριζόντιο άξονα.

Στο Σχήμα 10.11 επαληθεύεται η ύπαρξη, για αυθαίρετο $k > 0$, μη φραγμένων λύσεων που ικανοποιούν τη συνθήκη (10.7). Το αποτέλεσμα αυτό, είναι ουσιαστικό για $k < 1.23$, όπου υπάρχει ελκυστής στον χώρο φάσης, ο οποίος θα μπορούσε να έλκυε όλες τις τροχιές. Το σενάριο αυτό όμως απορρίπτεται, όπως άλλωστε είχαμε προβλέψει, και έτσι δεν μπορούμε να κάνουμε λόγο για ολική ευστάθεια.

Μοντέλο Sel'kov. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια παραλλαγή του μηχανισμού (10.4), κατά την οποία προστίθεται ένα επιπλέον μη καταλυόμενο στάδιο. Το μοντέλο αυτό έχει καθιερωθεί πλέον στη βιβλιογραφία να αποδίδεται στον Sel'kov, χωρίς ωστόσο αυτό να επιβεβαιώνεται. Συγκεκριμένα, ο μηχανισμός εδώ έχει ως εξής



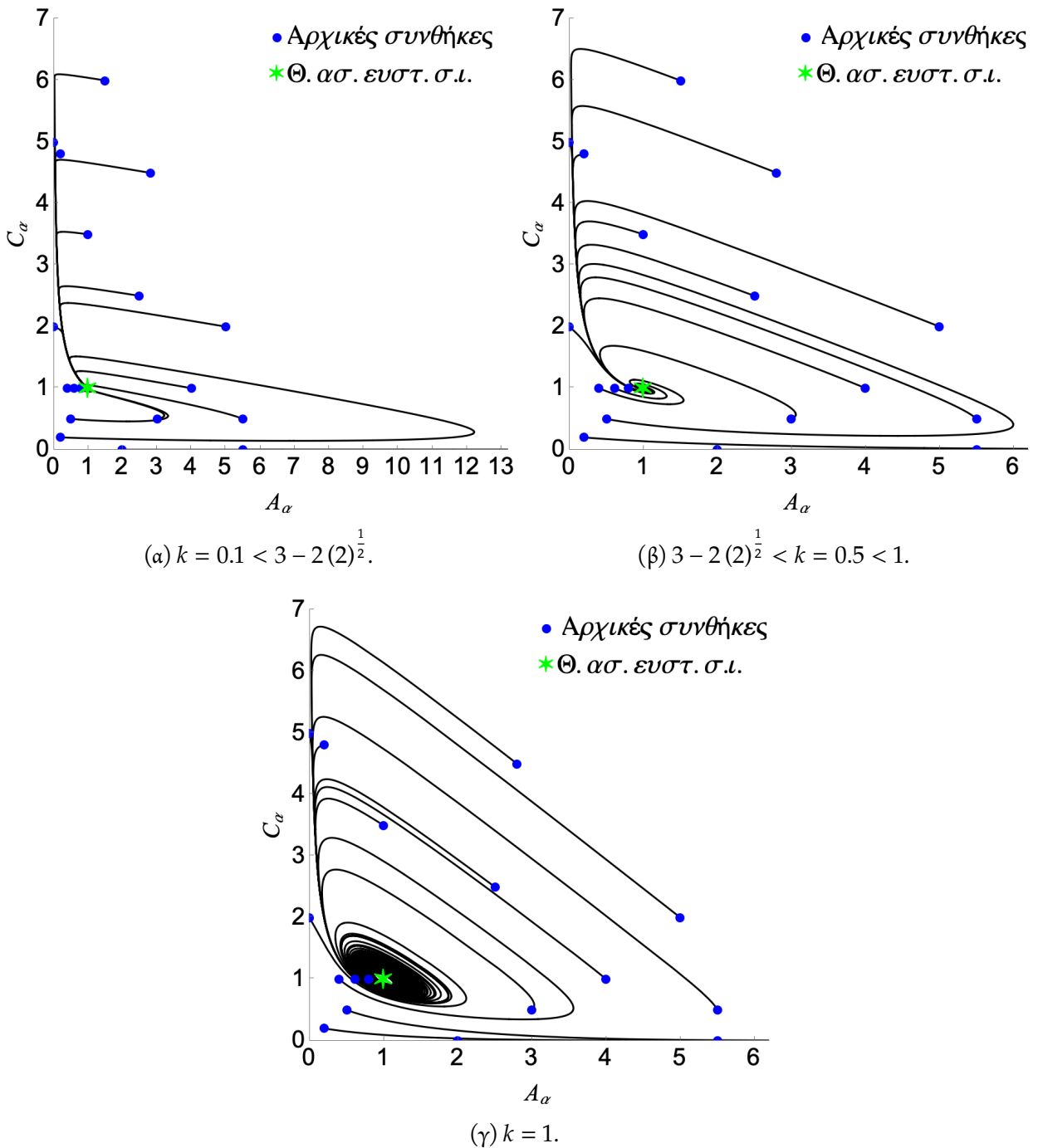
για σταθερή εισροή $k_0 > 0$. Αξιοποιώντας τον μηχανισμό (10.8) κατά τα γνωστά, καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\begin{aligned}\frac{d[A]}{dt} &= k_0 - k_3 [A] - k_1 [A][C]^2 \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_3 [A] + k_1 [A][C]^2 - k_2 [C] \\ \frac{d[B]}{dt} &= k_2 [C],\end{aligned}$$

ή, ισοδύναμα και απλούστερα, στο σύστημα

$$\frac{d[A]}{dt} = k_0 - k_3 [A] - k_1 [A][C]^2 \tag{10.9\alpha}$$

$$\frac{d[C]}{dt} = k_3 [A] + k_1 [A][C]^2 - k_2 [C]. \tag{10.9\beta}$$



Σχήμα 10.9: Αριθμητική κατασκευή, για θετικούς χρόνους, του διαγράμματος φάσης του (HS_α) για διάφορες αρχικές συνθήκες και τιμές $k \leq 1$.

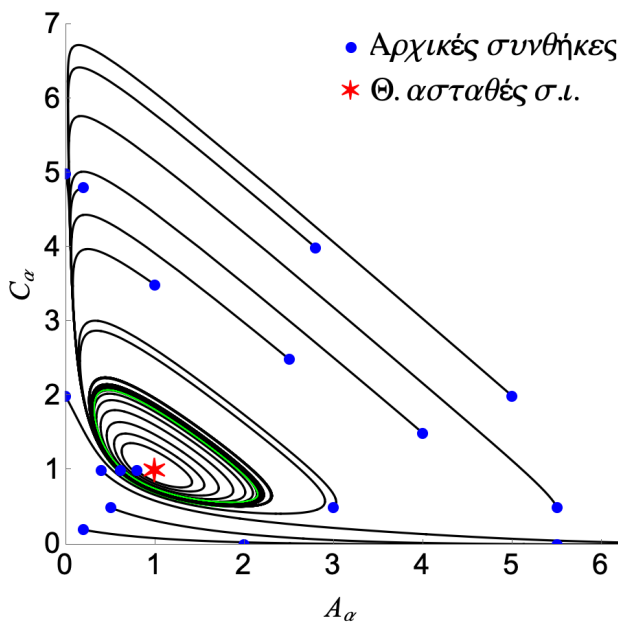
Το αντίστοιχο ΠΑΤ. Το ΠΑΤ για το παραπάνω μοντέλο έχει ως εξής:

Με δεδομένα $[A]_0, [C]_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $([A], [C]) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2$, τέτοια ώστε η $([A], [C])$ να ικανοποιεί τόσο το (10.9) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $([A], [C]) = ([A]_0, [C]_0)$ για $t = 0$. (S)

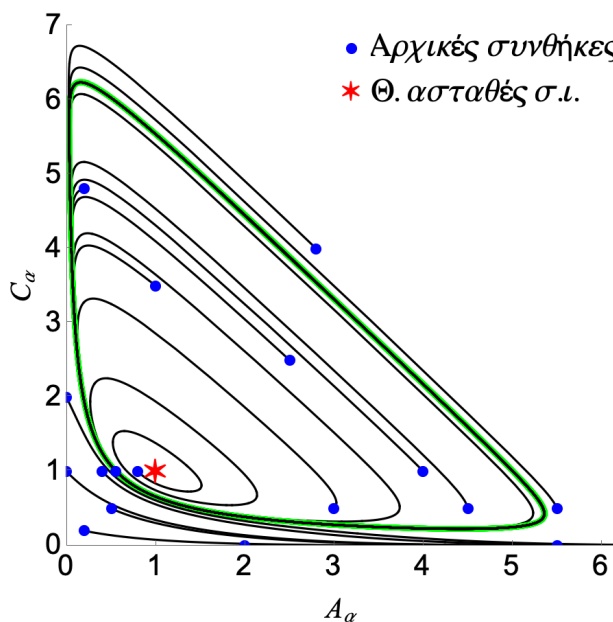
Σημεία ισορροπίας. Εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το

$$\left(\frac{k_0 k_2^2}{k_0^2 k_1 + k_2^2 k_3}, \frac{k_0}{k_2} \right)$$

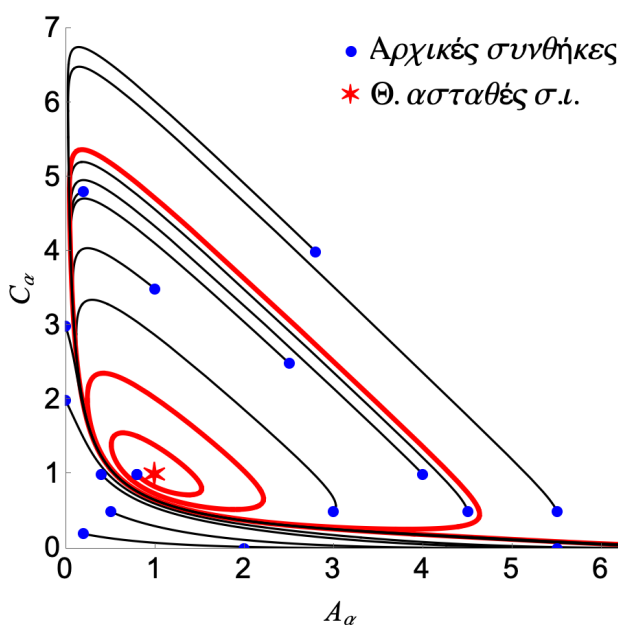
είναι το μοναδικό σ.ι. του (S).



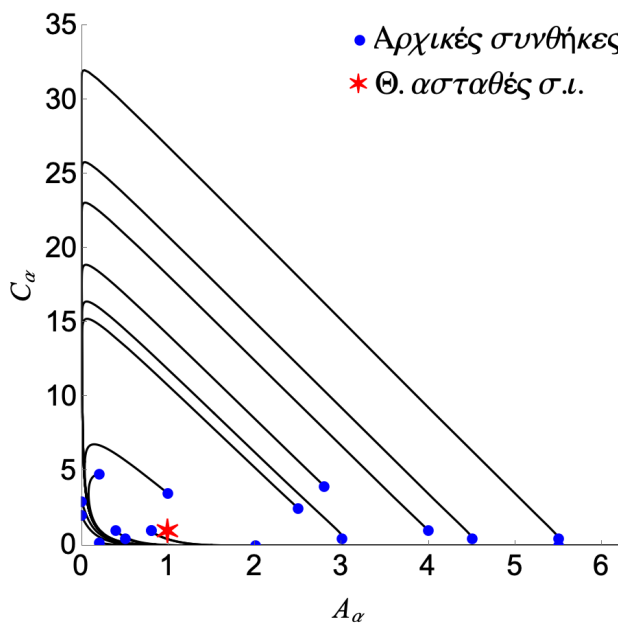
(α) $1 < k = 1.1 < 3 + 2(2)^{\frac{1}{2}}$. Υπαρξη θετικά ευσταθούς οριακού κύκλου γύρω από το θετικά ασταθές σ.ι..



(β) $1 < k = 1.23 < 3 + 2(2)^{\frac{1}{2}}$.

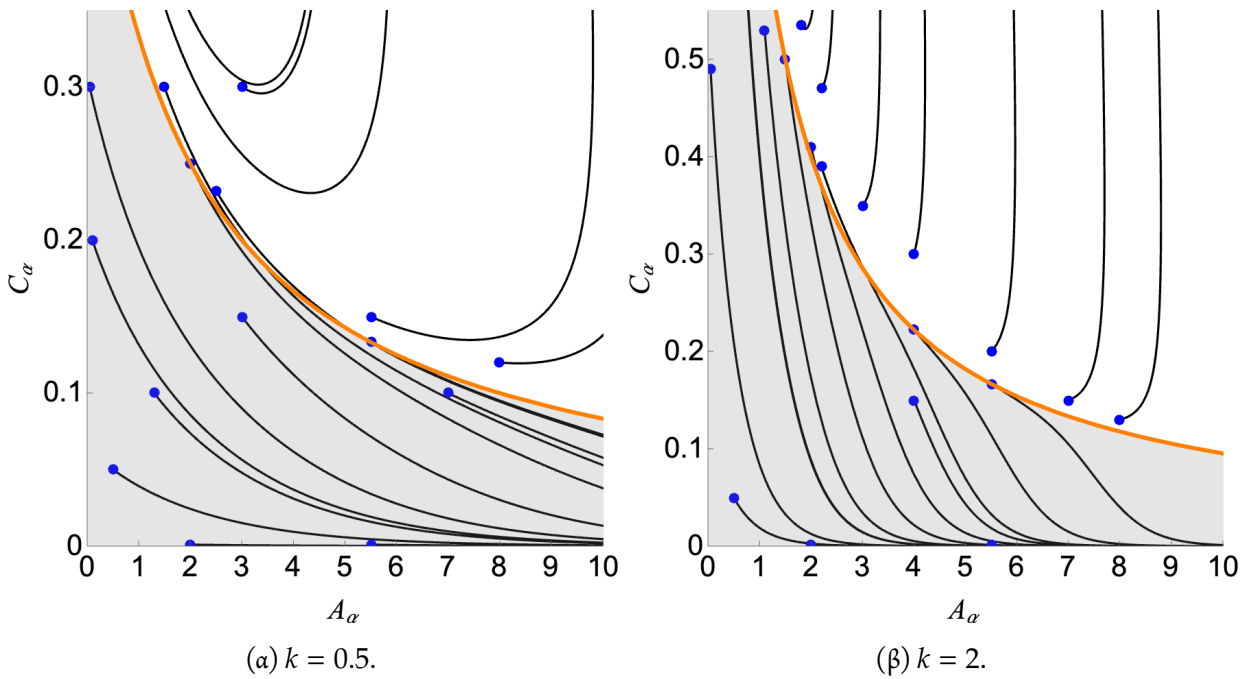


(γ) $1 < k = 1.24 < 3 + 2(2)^{\frac{1}{2}}$. Ο οριακός κύκλος έχει ήδη "σπάσει".



(δ) $k = 6 > 3 + 2(2)^{\frac{1}{2}}$. Όλες οι θετικές ημιτροχιές είναι πλέον μη φραγμένες και ακολουθούν τον οριζόντιο άξονα.

Σχήμα 10.10: Αριθμητική κατασκευή, για θετικούς χρόνους, του διαγράμματος φάσης του (HSα) για διάφορες αρχικές συνθήκες και τιμές $k > 1$.



Σχήμα 10.11: Αριθμητική κατασκευή, για θετικούς χρόνους, του διαγράμματος φάσης του (HS_α) για διάφορες αρχικές συνθήκες και τιμές $k > 0$, υπό την ισχύ της συνθήκης (10.7). Με πορτοκαλί η καμπύλη $\frac{1}{c} - a - \frac{1}{k} = 0$. Παρατηρούμε ότι όντως η συνθήκη είναι ικανή για να παρέχει μη φραγμένες θετικές ημιτροχιές, καθώς η σκιαγραφημένη περιοχή από κάτω της αποτελεί όντως θετικά αναλλοίωτο σύνολο. Παρατηρούμε επίσης ότι η (10.7) είναι μόνο ικανή και όχι αναγκαία.

Το αδιάστατο πρόβλημα. Προς απλοποίηση της ανάλυσής μας, κατά τα γνωστά, επιλέγουμε τις αδιάστατες μεταβλητές ως

$$A_\alpha(t_\alpha) := \left(\frac{k_0 k_1}{k_2^2} + \frac{k_3}{k_0} \right) [A](t_\alpha), \quad C_\alpha(t_\alpha) := \frac{k_2}{k_0} [C](t_\alpha) \text{ και } t_\alpha := \frac{k_0^2 k_1}{k_2^2} t,$$

για να μετατρέψουμε το (10.9) στην αδιάστατη μορφή του

$$\frac{dA_\alpha}{dt_\alpha} = 1 + k_* - k_* A_\alpha - A_\alpha C_\alpha^2 \tag{10.10\alpha}$$

$$\frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} = \frac{k}{1 + k_*} \left(A_\alpha C_\alpha^2 + k_* A_\alpha - (1 + k_*) C_\alpha \right), \tag{10.10\beta}$$

όπου

$$k := \frac{k_2^3}{k_0^2 k_1} > 0 \text{ και } k_* := \frac{k_2^2 k_3}{k_0^2 k_1} > 0$$

οι μοναδικές αδιάστατες σταθερές, καθώς επίσης το (S) στην αντίστοιχη αδιάστατη μορφή του ως εξής:

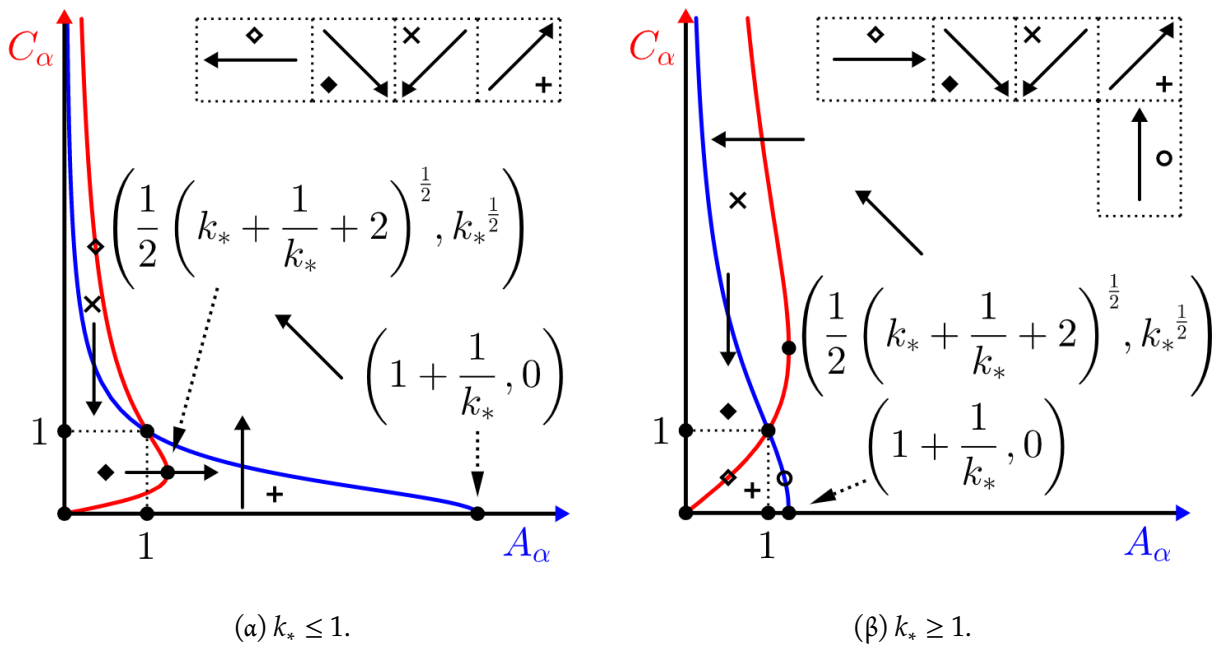
Με δεδομένα $[A]_0, [C]_0 \geq 0$, αναζητούμε διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ με $0 \in \mathcal{I}$ και συνάρτηση $(A_\alpha, C_\alpha) : \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2$, τέτοια ώστε η (A_α, C_α) να ικανοποιεί τόσο το (10.10) στο $\mathcal{I} \setminus \{0\}$ όσο και την αρχική συνθήκη $(A_\alpha, C_\alpha) = \left(\left(\frac{k_0 k_1}{k_2^2} + \frac{k_3}{k_0} \right) [A]_0, \frac{k_2}{k_0} [C]_0 \right)$ για $t_\alpha = 0$. (S α)

Το σ.ι. του (S α) είναι προφανώς το (1, 1).

Ομαλή, θετικά ολική λύση και καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Κατά τα γνωστά (βλ. Άσκηση 10.8), παίρνουμε την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα, θετικά ολικής, και μεγιστικής λύσης του $(S\alpha)$,

$$(A_\alpha, C_\alpha) : \begin{cases} \text{είτε } \mathbb{R} \\ \text{είτε } [-\varepsilon_1, \infty), \end{cases} \quad \text{όπου } \varepsilon_1 \in [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)^2,$$

και μάλιστα η αδρή απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(S\alpha)$ δίνεται στο σχήμα Σχήμα 10.12.



Σχήμα 10.12: Ποιοτική απεικόνιση του πεδίου διευθύνσεων του $(S\alpha)$, για διάφορες τιμές του k_* . Με μπλε η A_α -μηδενοκλινής καμπύλη και με κόκκινο η C_α -μηδενοκλινής.

Άσκηση 10.8. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της μελέτης Φάσης I του $(S\alpha)$, αναγνωρίστε τα αναλλοίωτα σύνολά του και ελέγξτε την κατασκευή του Σχήματος 10.12.

Ανάλυση ευστάθειας. Ως προς την ευστάθεια/αστάθεια του σ.ι. του $(S\alpha)$, υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobi ως

$$J(a, c) = \begin{pmatrix} -(c^2 + k_*) & -2ac \\ \frac{k}{1+k_*} (c^2 + k_*) & \frac{k}{1+k_*} (2ac - (1+k_*)) \end{pmatrix}$$

και για τις ιδιοτιμές του $J(1, 1)$ ισχύει ότι

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \pm (\text{tr}^2 - 4\det)^{\frac{1}{2}} \right),$$

όπου

$$\text{tr} = \frac{k(1-k_*)}{1+k_*} - (1+k_*) \quad \text{και} \quad \det = k(1+k_*) > 0.$$

Αφού η οριζουσα είναι θετική, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο του πραγματικού μέρους των ιδιοτιμών του πίνακα Jacobι στο σ.ι. καθορίζεται από το αντίστοιχο πρόσημο του ίχνους. Διακρίνουμε έτσι τις εξής περιπτώσεις:

1. $k_* < 1$. Θέτοντας

$$\kappa(k_*) := \frac{(1 + k_*)^2}{1 - k_*},$$

τότε έχουμε ότι το $(1, 1)$ είναι θετικά

$$\begin{cases} \text{ασυμπτωτικά ευσταθές,} & \text{αν } k < \kappa(k_*) \\ \text{ασταθές,} & \text{αν } k > \kappa(k_*). \end{cases}$$

Ειδικότερα,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\frac{k(1 - k_*)}{1 + k_*} - (1 + k_*) \pm \left(\frac{k^2(1 - k_*)^2}{(1 + k_*)^2} - 2k(3 + k_*) + (1 + k_*)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

και έτσι, θέτοντας επιπλέον

$$\kappa_{\pm}(k_*) := \frac{\left(3 + k_* \pm 2(2(1 + k_*))^{\frac{1}{2}} \right) (1 + k_*)^2}{(1 - k_*)^2},$$

έχουμε ότι το $(1, 1)$ συμπεριφέρεται τοπικά ως θετικά

$$\begin{cases} \text{ευσταθής κόμβος,} & \text{αν } k \leq \kappa_-(k_*) \\ \text{ευσταθής εστία,} & \text{αν } \kappa_-(k_*) < k < \kappa(k_*) \\ \text{ασταθής εστία,} & \text{αν } \kappa(k_*) < k < \kappa_+(k_*) \\ \text{ασταθής κόμβος,} & \text{αν } k \geq \kappa_+(k_*). \end{cases}$$

Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με τη θετική ευστάθεια/αστάθεια του $(1, 1)$ μέσω γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας όταν $k = \kappa(k_*)$. Για τη μελέτη του σε αυτή την περίπτωση θα καταφύγουμε στη θεωρία διακλάδωσης.

2. $k_* \geq 1$. Τότε έχουμε ότι το $(1, 1)$ είναι τοπικά θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές για κάθε k . Ειδικότερα, έχουμε ότι το $(1, 1)$ συμπεριφέρεται τοπικά ως θετικά

$$\begin{cases} \text{ευσταθής κόμβος,} & \text{αν } k \leq \kappa_-(k_*) \\ \text{ευσταθής εστία,} & \text{αν } \kappa_-(k_*) < k < \kappa_+(k_*) \\ \text{ευσταθής κόμβος,} & \text{αν } k \geq \kappa_+(k_*). \end{cases}$$

Ανάλυση διακλάδωσης. Για $k_* < 1$ έχουμε ότι

$$\lambda_{\pm} = \pm i \det^{\frac{1}{2}}, \text{ όταν } k = \kappa(k_*),$$

καθώς επίσης ότι

$$\operatorname{Re} \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}, \text{ όταν } k \text{ εντός μιας περιοχής του } \kappa(k_*),$$

οπότε, κοιτώντας τα $\operatorname{Re} \lambda_{\pm}$ ως συναρτήσεις του k , έπεται ότι

$$\frac{d \operatorname{Re} \lambda_{\pm}}{dk}(k) = \frac{1 - k_*}{2(1 + k_*)} \neq 0, \text{ και ειδικότερα } \frac{d \operatorname{Re} \lambda_{\pm}}{dk}(\kappa(k_*)) \neq 0.$$

Άρα, για το (Sa) , υπάρχει διακλάδωση Hopf από το $(1, 1)$ για $k = \kappa(k_*)$.

Θα χαρακτηρίσουμε τη διακλάδωση αυτή ως υποκρίσιμη, ή υπερκρίσιμη, με τον τρόπο που κάναμε και για το (HSa) .

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια. Στις περιπτώσεις όπου

1. $k_* < 1$ και $k < \kappa(k_*)$, καθώς επίσης
2. $k_* \geq 1$,

για να δείξουμε ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του θετικά ασυμπτωτικά ευσταθούς σ.ι., $(1, 1)$, του $(S\alpha)$, αρκεί να αποκλείσουμε την ύπαρξη ομοκλινούς τροχιάς, κλειστού και προσανατολισμένου συμπλέγματος ετεροκλινών τροχιών και κλειστής τροχιάς στον χώρο φάσης, καθώς ο αποκλεισμός ύπαρξης μη φραγμένων θετικών ημιτροχιών γίνεται τελείως ανάλογα με τον αντίστοιχο για το $(L1\alpha)$.

Ποια θα είναι τώρα η κατάλληλη συνάρτηση φ του θεωρήματος Bendixson-Dulac; Ως προς αυτό, θα προσπαθήσουμε να τροποποιήσουμε κατάλληλα την αντίστοιχη φ που χρησιμοποιήθηκε για το $(HS\alpha)$. Πρώτα ξαναγράφουμε το (10.10) ως

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+k_*} \frac{dA_\alpha}{dt_\alpha} &= 1 - \frac{1}{1+k_*} A_\alpha (k_* + C_\alpha^2) \\ \frac{dC_\alpha}{dt_\alpha} &= k \left(\frac{1}{1+k_*} A_\alpha (k_* + C_\alpha^2) - C_\alpha \right), \end{aligned}$$

οπότε συγκρίνοντάς το με το (10.6) παρατηρούμε ότι το μοντέλο τροποποιείται όπως φαίνεται στον Πίνακα 10.1.

Πίνακας 10.1: Σύγκριση του (10.6) με το (10.10) .

Higgins-Sel'kov	Sel'kov
A_α	$\frac{1}{1+k_*} A_\alpha$
C_α^2	$k_* + C_\alpha^2$

Έτσι, οδηγούμαστε διαισθητικά στο να θεωρήσουμε τώρα, για κάθε $k, k_* > 0$, την

$$\begin{aligned} \varphi_{k,k_*} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow (0, \infty) \\ (a, c) &\mapsto \varphi_{k,k_*}(a, c) := \frac{1}{k_* + c^2} e^{Q_{k,k_*} \left(\frac{k}{1+k_*} a + c \right)}, \end{aligned}$$

όπου $Q_{k,k_*} \in \mathbb{R}$ μια σταθερά που μένει να προσδιοριστεί. Συγκεκριμένα, για το $(HS\alpha)$ όπου $k_* = 0$, πήραμε $Q_{k,0} = -2$. Θέτουμε, λοιπόν,

$$f_{k,k_*}(a, c) := \left(1 + k_* - a(k_* + c^2), \frac{k}{1+k_*} (a(k_* + c^2) - (1+k_*)c) \right), \quad \forall k, k_* > 0,$$

και θα ισχύει ότι

$$\nabla \cdot (\varphi_{k,k_*} f_{k,k_*})(a, c) = -\frac{1}{k_* + c^2} e^{Q_{k,k_*} \left(\frac{k}{1+k_*} a + c \right)} \underbrace{\left(c^2 + Q_{k,k_*} k c + k \left(\frac{k_* - c^2}{k_* + c^2} - Q_{k,k_*} \right) + k_* \right)}_{=: g_{k,k_*}(c)}. \quad (10.11)$$

1. $k_* < 1$ και $k \leq \kappa(k_*)$. Στην ειδική περίπτωση του (HSα) είχαμε ότι η $g_{1,0}$, για $c > 0$, παρουσίαζε ολικό ελάχιστο όταν $c = 1$ δηλ.

$$\frac{dg_{1,0}}{dc}(1) = 0,$$

και μάλιστα με τιμή $g_{1,0}(1) = 0$. Έτσι, στη γενική περίπτωση, διαισθητικά θα θέλαμε

$$\frac{dg_{\kappa(k_*),k_*}}{dc}(1) = 0, \quad \forall k_* < 1,$$

κάτι το οποίο άμεσα συμπεραίνουμε ότι ισχύει αν θέσουμε

$$Q_{k,k_*} := \frac{2(3k_* - 1)}{(1 + k_*)^2}. \quad (10.12)$$

Μένει, άρα, να επαληθεύσουμε (βλ. Άσκηση 10.9) ότι πράγματι η παραπάνω επιλογή για την φ_{k,k_*} είναι η ενδεδειγμένη, καθώς αν $k_* < 1$ και $k \leq \kappa(k_*)$, τότε

$$\text{sgn} \circ \nabla \cdot (\varphi_{k,k_*} f_{k,k_*})(a, c) = -\text{sgn} \circ g_{k,k_*}(c) \leq 0, \quad \forall (a, c) \in [0, \infty)^2,$$

με την τιμή 0 να λαμβάνεται στην περίπτωση όπου $k_* < 1$ και $k = \kappa(k_*)$, αλλά μόνο στο σύνολο $[0, \infty) \times \{1\}$.

2. $k_* \geq 1$. Αν τώρα θέσουμε

$$Q_{k,k_*} := 1 + \frac{k_*}{k}, \quad (10.13)$$

θα έχουμε (βλ. Άσκηση 10.9) ότι

$$\text{sgn} \circ \nabla \cdot (\varphi_{k,k_*} f_{k,k_*})(a, c) = -\text{sgn} \circ g_{k,k_*}(c) \leq 0, \quad \forall (a, c) \in [0, \infty)^2,$$

με την τιμή 0 να λαμβάνεται για κάθε $k_* \geq 1$ και k αλλά μόνο στο σύνολο $[0, \infty) \times \{0\}$.

Έπεται, συνεπώς, η ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του σ.ι. του (Sα) στις προαναφερθείσες περιπτώσεις.

Άσκηση 10.9. Για τη συνάρτηση g_{k,k_*} στην (10.11), δείξτε ότι

1. αν $k_* < 1$ αυθαίρετο και Q_{k,k_*} όπως στην (10.12), τότε

$$\min \{g_{k,k_*}(c) \mid k \leq \kappa(k_*) \text{ και } c \geq 0\} = g_{\kappa(k_*),k_*}(1) = 0,$$

και

2. αν $k_* \geq 1$ και k αυθαίρετα και Q_{k,k_*} όπως στην (10.13), τότε

$$\min \{g_{k,k_*}(c) \mid c \geq 0\} = g_{k,k_*}(0) = 0.$$

Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια). Λόγω της μη ύπαρξης περιοδικών λύσεων του (Sα) για $k_* < 1$ και $k \leq \kappa(k_*)$, η διακλάδωση Hopf από το $(1, 1)$ για $k_* < 1$ και $k = \kappa(k_*)$ είναι υπερκρίσιμη, και έτσι ο χώρος φάσης έχει τοπικά και γύρω από το σ.ι. την εικόνα θετικά ευσταθούς εστίας όταν $k_* < 1$ και $k = \kappa(k_*)$.

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια (συνέχεια). Μιας και για $k_* < 1$ και $k = \kappa(k_*)$ το $(1, 1)$ είναι θετικά ασυμπτωτικά ευσταθές, τότε με ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα όπως πριν μπορούμε να δείξουμε την ολικότητα της θετικής ασυμπτωτικής ευστάθειάς του.

Ανάλυση διακλάδωσης (συνέχεια). Όπως και για το (HSα), έτσι και εδώ διερωτόμαστε σχετικά με την ύπαρξη για κάθε $k > \kappa(k_*)$ (και $k_* < 1$) του οριακού κύκλου της διακλάδωσης. Σε αντίθεση με το προηγούμενο πρόβλημα, εδώ θα παρουσιάσουμε ένα θετικό αποτέλεσμα, και παράλληλα θα έχουμε βρει έναν εναλλακτικό τρόπο για τον χαρακτηρισμό της διακλάδωσης ως υπερκρίσιμης. Συγκεκριμένα, θα συμπεράνουμε την ύπαρξη εσωτερικά ευσταθούς οριακού κύκλου μέσω της εύρεσης κατάλληλου χωρίου θετικής παγίδευσης.

Πράγματι, κοιτώντας το Σχήμα 10.12, ένα υποψήφιο χωρίο παγίδευσης θα μπορούσε να ήταν ένα τραπέζιο με τρεις από τις κορυφές του τα σημεία

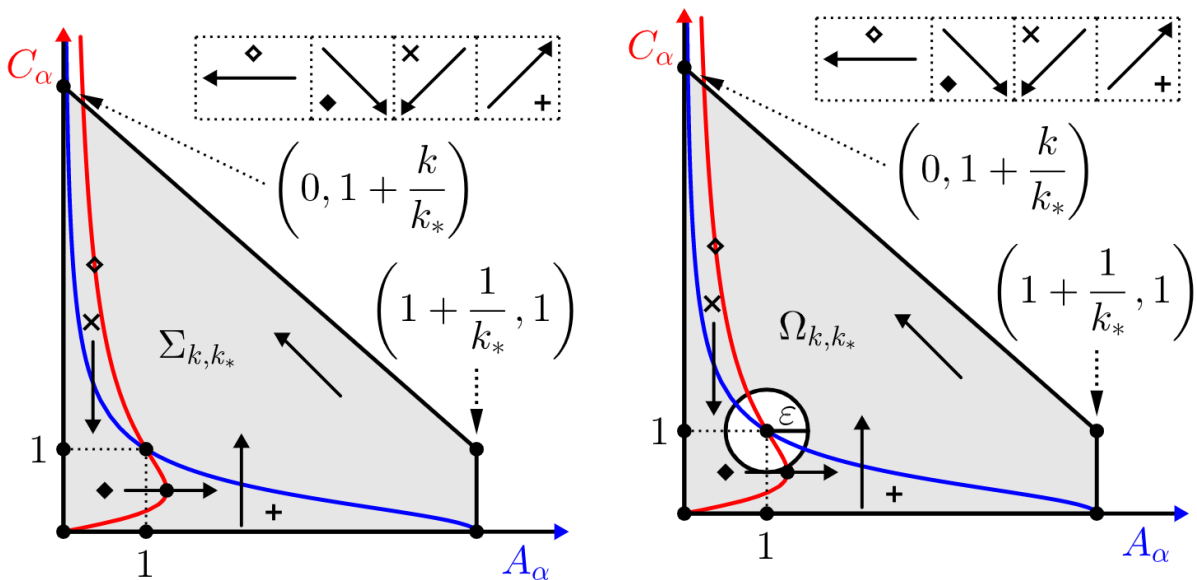
$$(0, 0), \left(1 + \frac{1}{k_*}, 0\right) \text{ και } \left(1 + \frac{1}{k_*}, 1\right)$$

και την τέταρτη ένα κατάλληλο σημείο επί του οριζόντιου άξονα. Έτσι, επιλέγοντας, για κάθε $k, k_* > 0$, το τραπέζιο Σ_{k,k_*} με κορυφές τα σημεία

$$(0, 0), \left(1 + \frac{1}{k_*}, 0\right), \left(1 + \frac{1}{k_*}, 1\right) \text{ και } \left(0, 1 + \frac{k}{k_*}\right),$$

όπως φαίνεται και στο Σχήμα 10.13α, υπολογίζουμε άμεσα (βλ. Άσκηση 10.10) ένα εσωτερικό κάθετο διάνυσμα, v_{k,k_*} , του Σ_{k,k_*} (που ορίζεται σχεδόν παντού) ως

$$v_{k,k_*} = \begin{cases} (0, 1), & \text{στο τμήμα που συνδέει τα } (0, 0) \text{ και } \left(1 + \frac{1}{k_*}, 0\right) \\ (-1, 0), & \text{στο τμήμα που συνδέει τα } \left(1 + \frac{1}{k_*}, 0\right) \text{ και } \left(1 + \frac{1}{k_*}, 1\right) \\ \left(-1, -\frac{1+k_*}{k}\right), & \text{στο τμήμα που συνδέει τα } \left(1 + \frac{1}{k_*}, 1\right) \text{ και } \left(0, 1 + \frac{k}{k_*}\right) \\ (1, 0), & \text{στο τμήμα που συνδέει τα } \left(0, 1 + \frac{k}{k_*}\right) \text{ και } (0, 0). \end{cases}$$



(α) Το Σ_{k,k_*} είναι χωρίο θετικής παγίδευσης για κάθε $k, k_* > 0$.

(β) Το Ω_{k,k_*} είναι χωρίο θετικής παγίδευσης όταν το $(1, 1)$ είναι θετικά ασταθές. Η ουσιαστική διαφορά με το Σ_{k,k_*} είναι ότι δεν περιέχει σ.ι. στο εσωτερικό του.

Σχήμα 10.13: Η γεωμετρία των χωρίων θετικής παγίδευσης για το (Sα).

Υπολογίζουμε εύκολα (βλ. [Άσκηση 10.10](#)) ότι

$$f_{k,k_*}(a, c) \cdot \nu(a, c) > 0, \text{ σχεδόν για κάθε } (a, c) \in \partial \Sigma_{k,k_*}, \forall k, k_* > 0,$$

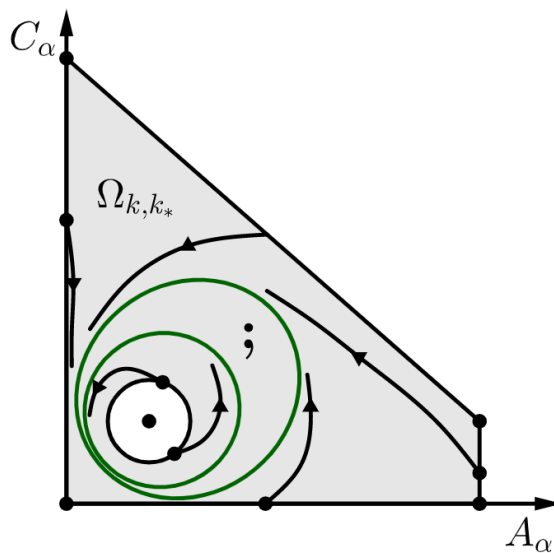
δηλ. το Σ_{k,k_*} είναι όντως θετικά αναλλοίωτο, άρα και χωρίο θετικής παγίδευσης ως συμπαγές και (απλά) συνεκτικό με μη κενό εσωτερικό. Επιπλέον, το Σ_{k,k_*} περιέχει το σ.ι. $(1, 1)$, οπότε αφαιρώντας από το τραπέζιο αυτό έναν οσοδήποτε μικρό κυκλικό δίσκο,

$$B_\varepsilon := B((1, 1), \varepsilon), \text{ με } 0 < \varepsilon \ll 1,$$

θα έχουμε ότι το

$$\Omega_{k,k_*} := \Sigma_{k,k_*} \setminus B_\varepsilon$$

είναι επίσης χωρίο θετικής παγίδευσης όταν $k_* < 1$ και $k > \kappa(k_*)$, λόγω της θετικής αστάθειας του $(1, 1)$ στην περίπτωση αυτή. Η γεωμετρία του 1-συνεκτικού Ω_{k,k_*} αποτυπώνεται στο [Σχήμα 10.13β](#). Ακριβώς επειδή το νέο χωρίο θετικής παγίδευσης δεν περιέχει κάποιο σ.ι., έπεται η ύπαρξη τουλάχιστον ενός εσωτερικά και ενός εξωτερικά θετικά ευσταθών οριακών κύκλων, όπου δεν θα παρεμβάλλεται άλλη κλειστή τροχιά μεταξύ του πρώτου και της “εσωτερικής” συνιστώσας του $\partial \Omega_{k,k_*}$ καθώς και του δεύτερου και “εξωτερικής”, όπως φαίνεται στο [Σχήμα 10.14](#).



Σχήμα 10.14: Υπάρχουν τουλάχιστον ένας εσωτερικά και ένας εξωτερικά θετικά ευσταθείς οριακοί κύκλοι στον χώρο φάσης του (S_α) , στην περίπτωση όπου το σ.ι. είναι θετικά ασταθές.

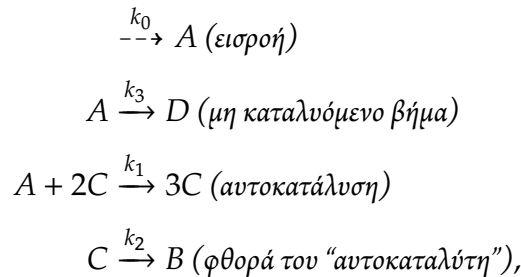
Άρα, ο πρώτος δεν είναι άλλος από τον οριακό κύκλο που “γεννά” η διακλάδωση (και από τη θεωρία διακλαδώσεων αποτελεί όντως έναν θετικά ευσταθή (δηλ. και εσωτερικά και εξωτερικά) οριακό κύκλο, για τιμές του k μεγαλύτερες μεν, κοντά στο $\kappa(k_*)$ δε). Τι υπάρχει όμως μεταξύ των δύο αυτών οριακών κύκλων εντός του Ω_{k,k_*} ; Ενδεχομένως,

1. είτε και άλλες κλειστές τροχιές,
2. είτε καμία άλλη κλειστή τροχιά,
3. είτε οι δύο οριακοί κύκλοι να ταυτίζονται σε έναν θετικά ευσταθή.

Θα επιβεβαιώσουμε το τρίτο σενάριο κατά την αριθμητική επίλυση του (S_α) που ακολουθεί.

Άσκηση 10.10. Δώστε τις λεπτομέρειες του υπολογισμού (εκεί που ορίζεται) του εσωτερικού κάθετου διανύσματος, ν_{k,k_*} , του τραπέζιου Σ_{k,k_*} που ορίστηκε κατά την αναζήτηση χωρίου παγίδευσης για το (Sα), και επαληθεύστε ότι είναι όντως θετικά αναλλοίωτο για κάθε $k, k_* > 0$.

Άσκηση 10.11 (μοντέλο Meyer). Το 1973, ο Meyer, [6], εισήγαγε μια παραλλαγή του μηχανισμού (10.8), ως



για σταθερή εισορή $k_0 > 0$. Για τον παραπάνω μηχανισμό

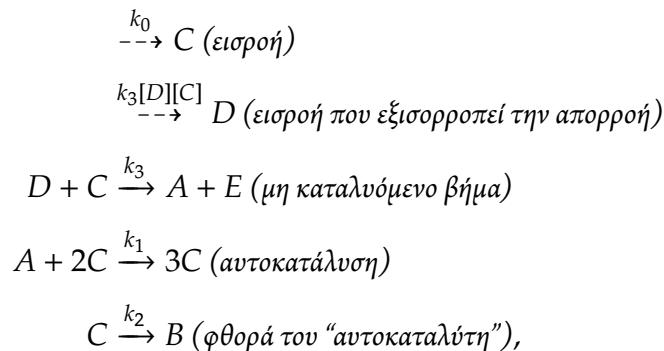
1. εξάγετε το αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων,
2. απλοποιήστε το παραπάνω σύστημα σε ένα 2×2 , ως

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= k_0 - k_3[A] - k_1[A][C]^2 \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1[A][C]^2 - k_2[C]. \end{aligned}$$

το οποίο μελετήστε, και

3. συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα για το (Sα).

Άσκηση 10.12 (μοντέλο Brusselator). Το 1968, οι Prigogine και Lefever, [7], εισήγαγαν και μελέτησαν τον μηχανισμό



για σταθερή εισορή $k_0 > 0$. Για τον παραπάνω μηχανισμό

1. εξάγετε το αντίστοιχο σύστημα διαφορικών εξισώσεων,
2. απλοποιήστε το παραπάνω σύστημα σε ένα 2×2 , ως

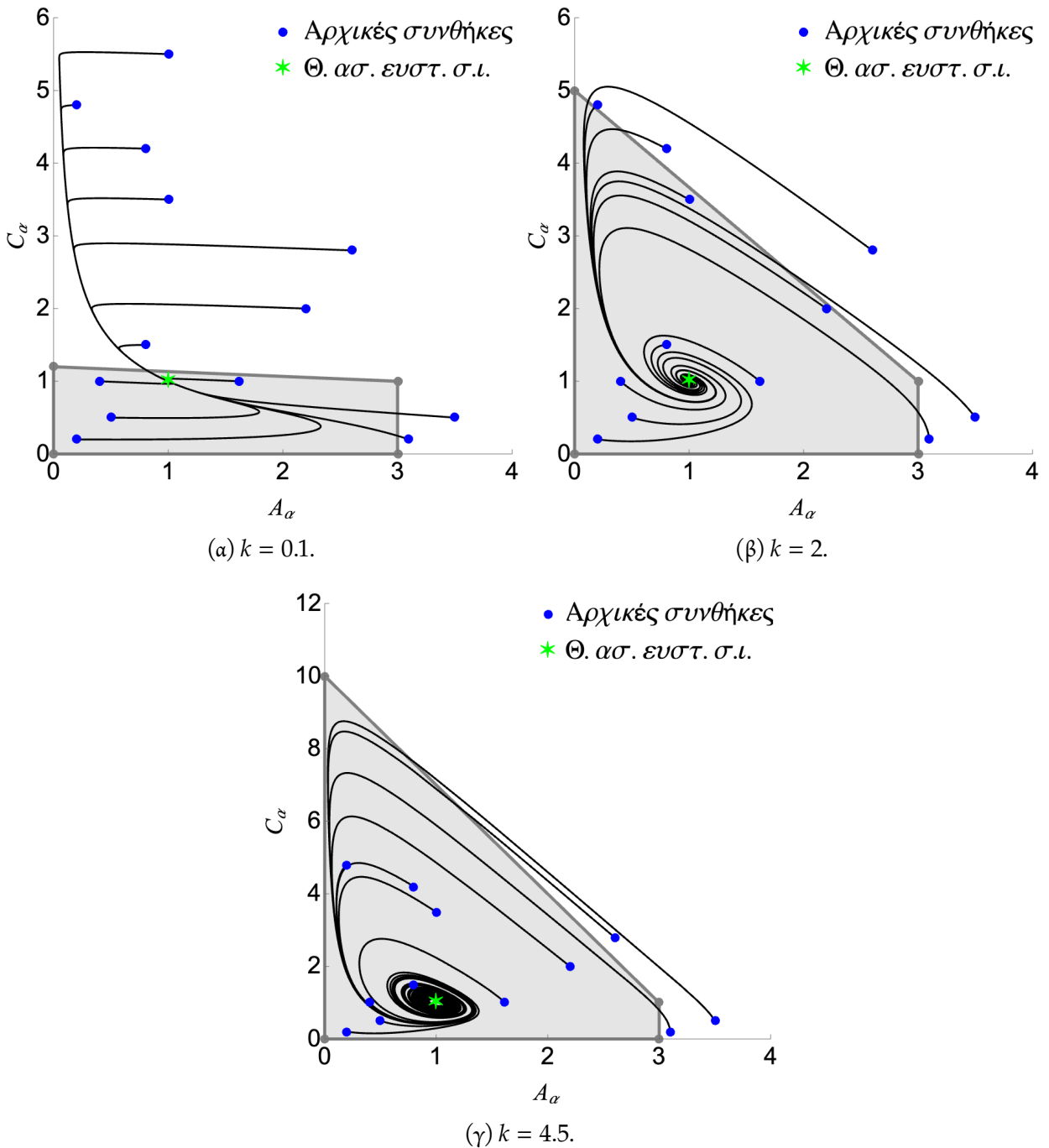
$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= k_3[D]_0[C] - k_1[A][C]^2 \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_0 - (k_2 + k_3[D]_0)[C] + k_1[A][C]^2, \end{aligned}$$

για δεδομένο $[D]_0 \geq 0$, το οποίο μελετήστε, και

3. συγκρίνετε τα αποτελέσματα με τα αντίστοιχα για το $(S\alpha)$.

Το μοντέλο αυτό αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως Brusselator, νεολογισμός που προέρχεται από τη σύνθεση των λέξεων Brussels (εκεί βρίσκεται το Université Libre de Bruxelles (Ελεύθερο Πανεπιστήμιο των Βρυξελλών), όπου ήταν Καθηγητής ο Prigogine) και oscillator (ταλαντωτής).

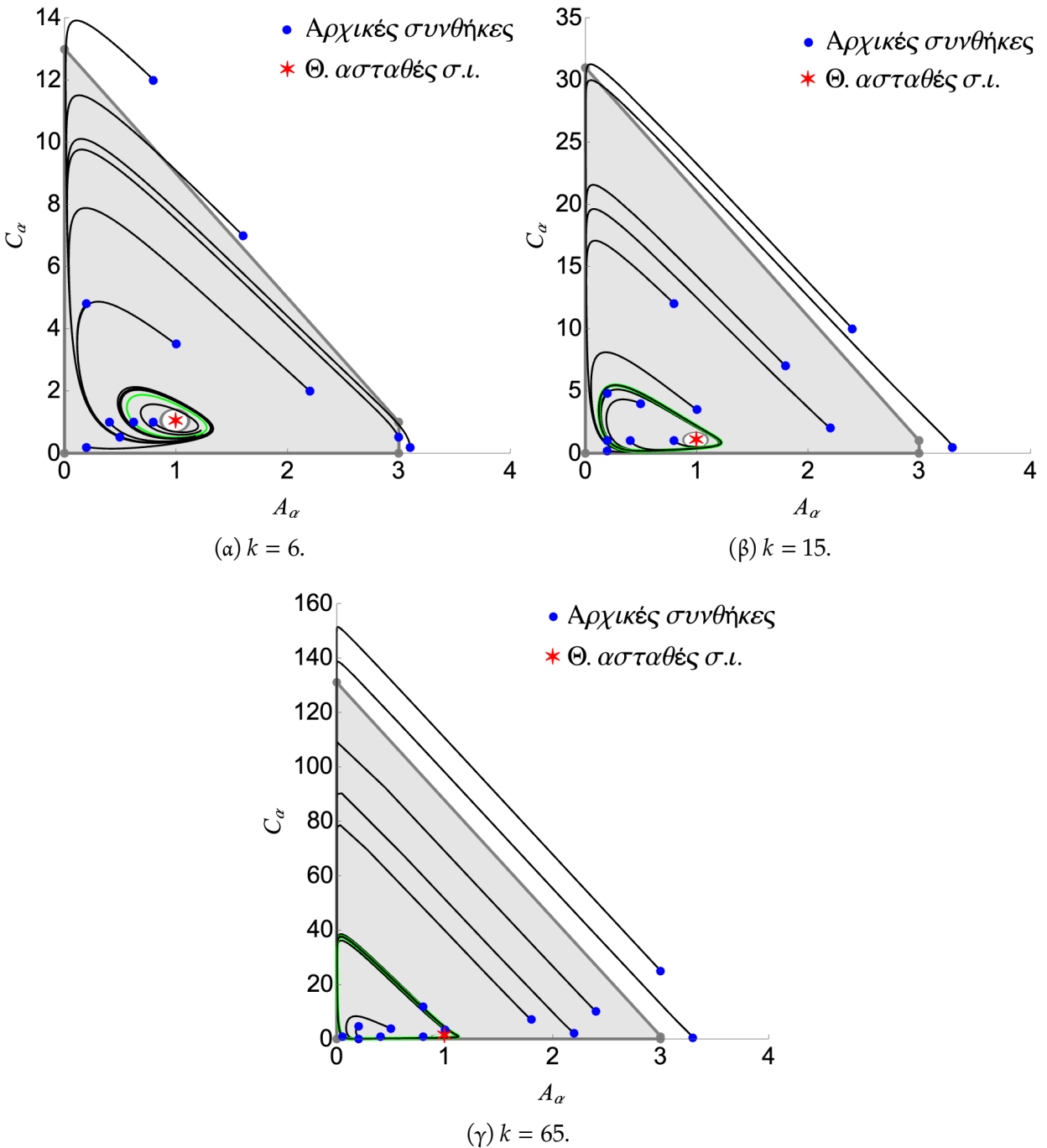
Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του $(S\alpha)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10.15, στο Σχήμα 10.16 και στο Σχήμα 10.17, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας, αλλά και προς απάντηση των ερωτημάτων μας.



Σχήμα 10.15: Αριθμητική επίλυση του $(S\alpha)$ για θετικούς χρόνους και για διάφορες τιμές του $k \leq \kappa(k_*)$, όταν $k_* = 0.5$, και άρα $\kappa(k_*) = 4.5$, $\kappa_-(k_*) \approx 0.32$, $\kappa_+(k_*) \approx 62.68$. Η σκιαγραφημένη περιοχή αντιστοιχεί στο χωρίο θετικής παγίδευσης Σ_{k,k_*} .

Με το Σχήμα 10.15 επαληθεύουμε την ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του $(1, 1)$, την τοπική εικόνα του επιπέδου φάσης γύρω από το σημείο ισορροπίας, καθώς και ότι το Σ_{k,k_*} είναι πράγματι χωρίο θετικής παγίδευσης, όταν $k_* < 1$ και $k \leq \kappa(k_*)$.

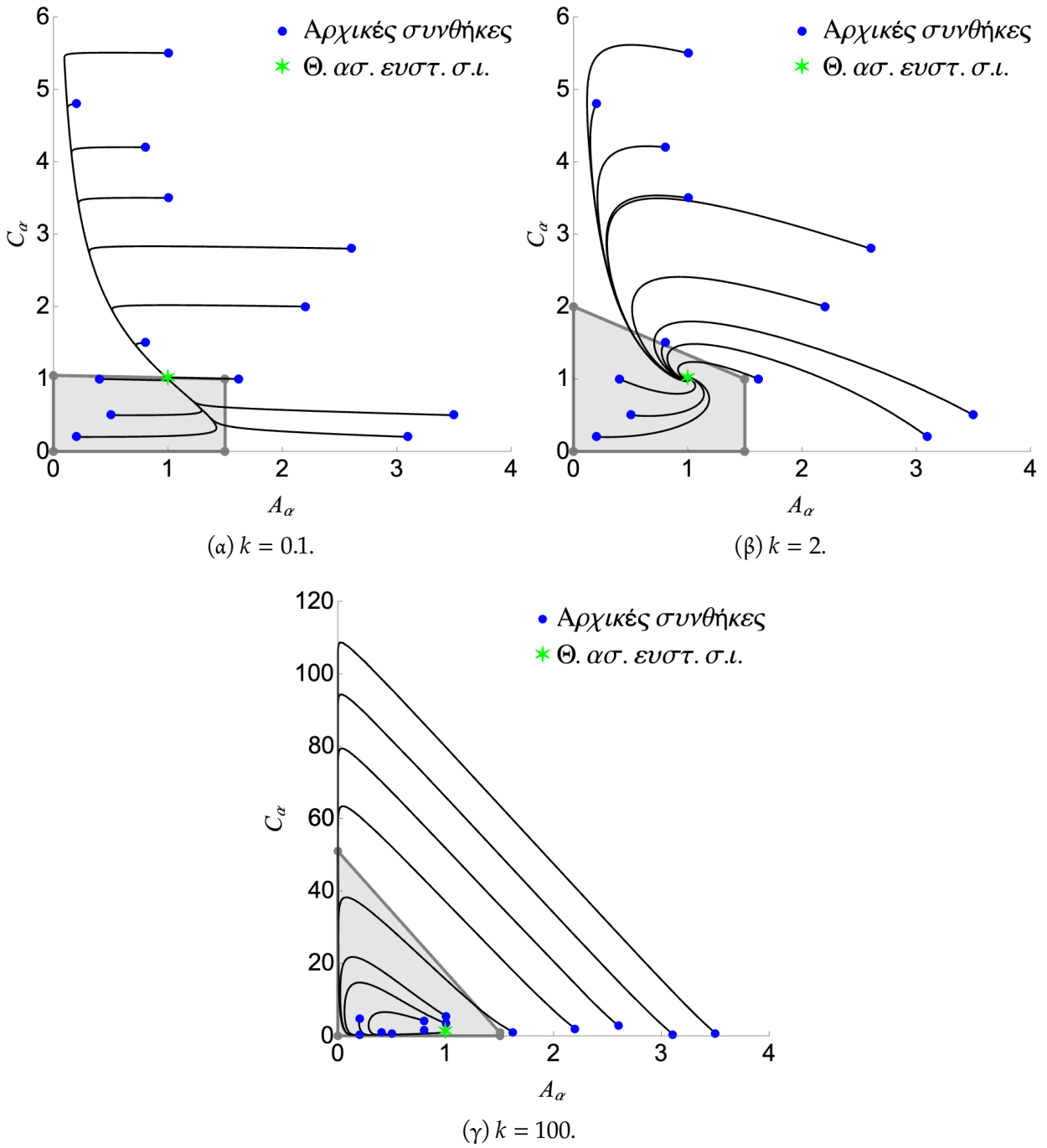
Με το Σχήμα 10.16 επαληθεύουμε τη θετική αστάθεια του $(1, 1)$, ότι το Ω_{k,k_*} είναι πράγματι χωρίο θετικής παγίδευσης, καθώς και την ύπαρξη οριακού κύκλου εντός του χωρίου αυτού, όταν $k_* < 1$ και $k > \kappa(k_*)$. Παρατηρούμε ότι ο οριακός κύκλος αυτός είναι μοναδικός και ευσταθής, κάτι που απαντάει και στην ερώτησή μας σχετικά με τον αριθμό και το είδος των οριακών κύκλων του $(S\alpha)$.



Σχήμα 10.16: Αριθμητική επίλυση του $(S\alpha)$ για θετικούς χρόνους και για διάφορες τιμές του $k > \kappa(k_*)$, όταν $k_* = 0.5$, και άρα $\kappa(k_*) = 4.5$, $\kappa_-(k_*) \approx 0.32$, $\kappa_+(k_*) \approx 62.68$. Η σκιαγραφημένη περιοχή αντιστοιχεί στο χωρίο θετικής παγίδευσης Ω_{k,k_*} .

Τέλος, με το Σχήμα 10.17 επαληθεύουμε την ολική θετική ασυμπτωτική ευστάθεια του $(1, 1)$, την τοπική

εικόνα του επιπέδου φάσης γύρω από το σημείο ισορροπίας, καθώς και ότι το Σ_{k,k_*} είναι πράγματι χωρίο θετικής παγίδευσης, όταν $k_* \geq 1$.



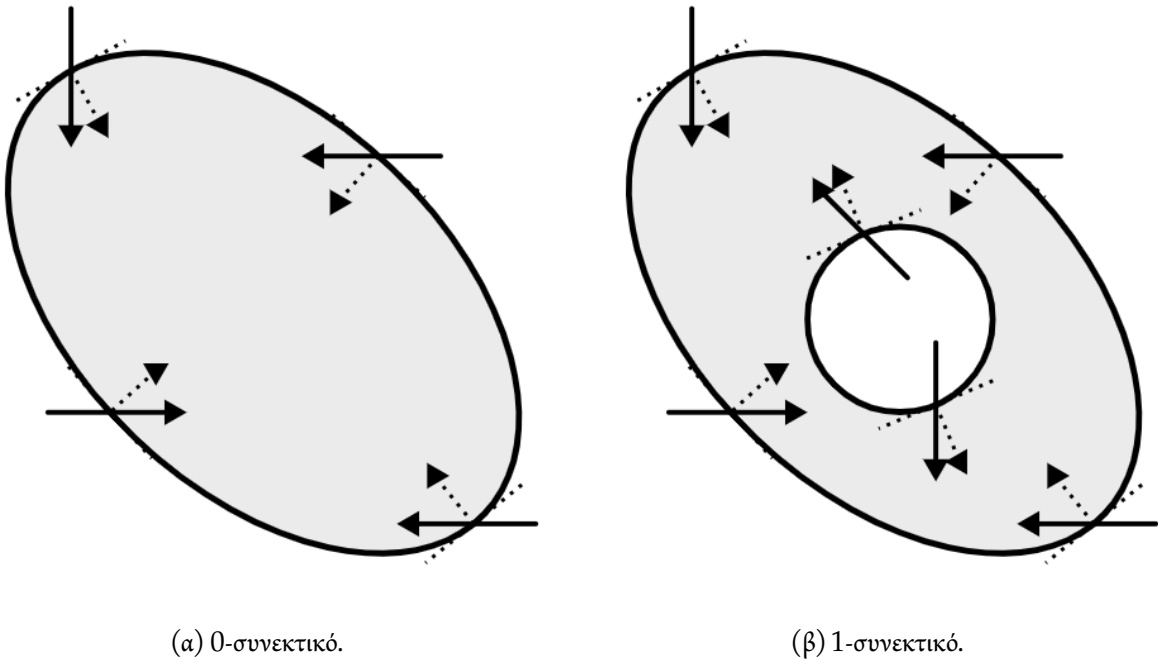
Σχήμα 10.17: Αριθμητική επίλυση του $(S\alpha)$ για θετικούς χρόνους και για διάφορες τιμές του $k > 0$, όταν $k_* = 2$, και άρα $\kappa_-(k_*) \approx 0.9$, $\kappa_+(k_*) \approx 89$. Η σκιαγραφημένη περιοχή αντιστοιχεί στο χωρίο θετικής παγίδευσης Σ_{k,k_*} .

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Χωρία παγίδευσης. Όπως έχουμε αναφέρει, το [Θεώρημα 8.6](#) μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την εξαγωγή ύπαρξης περιοδικής λύσης ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) με τροχιά εντός καθορισμένου υποσυνόλου του χώρου φάσης.

Συγκεκριμένα, έστω $n = 2$ και αυτόνομο (ΠΑΤ) το οποίο για κάθε $y_0 \in S_2$ έχει μοναδική μεγιστική θετικά (αρνητικά) ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$.

1. Κάθε συμπαγές, συνεκτικό και θετικά (αρνητικά) αναλλοίωτο $\Sigma \subseteq S_2$ με $\Sigma^\circ \neq \emptyset$, λέγεται *χωρίο θετικής (αρνητικής) παγίδευσης*. Η γεωμετρία και η χαρακτηριστική ιδιότητα ενός τέτοιου συνόλου απεικονίζονται στο [Σχήμα 10.18](#).



Σχήμα 10.18: Παραδείγματα χωρίων θετικής παγίδευσης στο επίπεδο.

2. Ένας αναλυτικός τρόπος επαλήθευσης του ότι ένα συμπαγές και συνεκτικό $\Sigma \subseteq S_2$ με $\Sigma^\circ \neq \emptyset$ και κατά τμήματα ομαλό σύνορο, $\partial\Sigma$, είναι όντως χωρίο θετικής (αρνητικής) παγίδευσης, αποτελεί το αντίστοιχο κριτήριο για την επαλήθευση των θετικά (αρνητικά) αναλλοιώτων συνόλων, δηλ. η ανισότητα

$$v(x) \cdot f(x) > 0 \quad (v(x) \cdot f(x) < 0), \text{ για κάθε "ομαλό" σημείο } x \in \partial\Sigma,$$

όπου v εσωτερικό κάθετο διάνυσμα του $\partial\Sigma$.

Ισχύει, τώρα, το ακόλουθο αποτέλεσμα, παράδειγμα της γεωμετρίας του οποίου απεικονίζεται στο [Σχήμα 10.19](#).

Θεώρημα 10.13 (χωρίο παγίδευσης). Έστω $n = 2$, αυτόνομο (ΠΑΤ) το οποίο για κάθε $y_0 \in S_2$ έχει μοναδική μεγιστική θετικά (αρνητικά) ολική λύση, $y(\cdot, y_0)$ και χωρίο θετικής (αρνητικής) παγίδευσης $\Sigma \subseteq S_2$. Αν το Σ δεν περιέχει σ.ι. του (ΠΑΤ), τότε

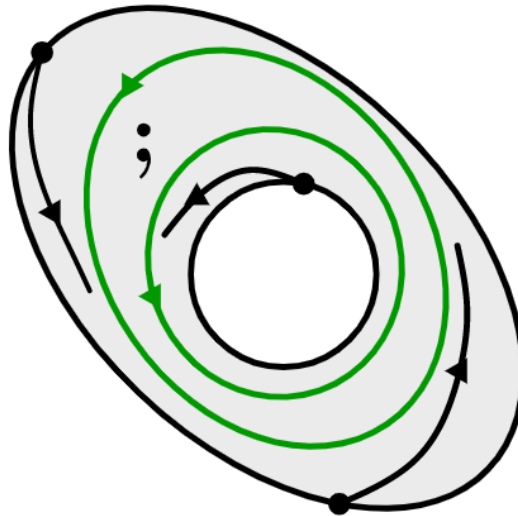
1. το Σ δεν είναι 0-συνεκτικό (δηλ. είναι m -συνεκτικό με $m \in \mathbb{N}$), και
2. υπάρχουν

- i. τουλάχιστον ένας εσωτερικά θετικά (αρνητικά) ευσταθής οριακός κύκλος, και
- ii. τουλάχιστον ένας εξωτερικά θετικά (αρνητικά) ευσταθής οριακός κύκλος

(είναι πιθανό οι δύο παραπάνω οριακοί κύκλοι να ταυτίζονται σε έναν θετικά (αρνητικά) ευσταθή οριακό κύκλο), και αν, συγκεκριμένα, το Σ είναι 1-συνεκτικό, τότε

- i. τόσο μεταξύ του πρώτου και της “εξωτερικής” συνιστώσας του $\partial\Sigma$,
- ii. όσο και μεταξύ του δεύτερου και της “εσωτερικής” συνιστώσας του $\partial\Sigma$,

δεν υπάρχει κλειστή τροχιά.



Σχήμα 10.19: Σύμφωνα με το [Θεώρημα 10.13](#), εντός κάθε 1-συνεκτικού χωρίου θετικής παράγωγης, που δεν περιέχει σ.ι., υπάρχουν τουλάχιστον δύο οριακοί κύκλοι (οι οποίοι μπορεί και να ταυτίζονται), ένας εξωτερικά θετικά ευσταθής, μεταξύ του οποίου και της “εξωτερικής” συνιστώσας του συνόρου δεν παρεμβάλλεται άλλη κλειστή τροχιά, και ένας εσωτερικά θετικά ευσταθής, μεταξύ του οποίου και της “εσωτερικής” συνιστώσας του συνόρου δεν παρεμβάλλεται άλλη κλειστή τροχιά. Ωστόσο, δεν γνωρίζουμε τι γίνεται μεταξύ των δύο αυτών οριακών κύκλων.

Για τις έννοιες και τα αποτελέσματα που αναφέρονται στις ΣΔΕ και στα Δυναμικά Συστήματα, η βιβλιογραφία του παρόντος κεφαλαίου καλύπτεται από εκείνη του [Κεφαλαίου 1](#), ενώ για τα αναφερόμενα στη θεωρία διακλαδώσεων από τη βιβλιογραφία του [Κεφαλαίου 5](#).

Βιβλιογραφία

- [1] J. Higgins. “A chemical mechanism for oscillation of glycolytic intermediates in yeast cells”. Στο: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 51 (1964), σσ. 989–994.
- [2] E. E. Sel’kov. “Self-oscillations in glycolysis 1. A simple kinetic model”. Στο: *European Journal of Biochemistry* 4 (1968), σσ. 79–86.
- [3] E. E. Sel’kov. “Self-oscillations in glycolysis. Simple single-frequency model”. Στο: *Molecular Biology* 2 (1968), σσ. 208–221.

- [4] J. C. Artés, J. Llibre και C. Valls. “Dynamics of the Higgins-Selkov and Selkov systems”. Στο: *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (2018), σσ. 145–150.
- [5] J. Schnakenberg. “Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour”. Στο: *Journal of Theoretical Biology* 81 (1979), σσ. 389–400.
- [6] D. H. Meyer. “Two-dimensional analysis of chemical oscillators”. Στο: *Biological and Biochemical Oscillators*. Επιμέλεια υπό B. Chance, A. K. Ghosh, E. K. Pye και B. Hess. Academic Press, 1973, σσ. 31–40.
- [7] I. R. Prigogine και R. J. Lefever. “Symmetry breaking instabilities in dissipative systems. ΙΙ”. Στο: *Journal of Chemical Physics* 48 (1968), σσ. 1695–1700.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

- (α) Εξαγωγή του μοντέλου διάχυσης
- (β) Ένα γενικό εξελικτικό πρόβλημα διάχυσης

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

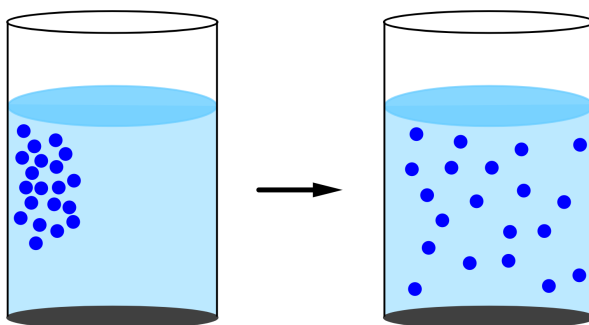
- (α) Ταξινόμηση γραμμικών, δεύτερης τάξης, δύο διαστάσεων, ομογενών ΜΔΕ
- (β) Ταξινόμηση σε αυθαίρετα πολλές διαστάσεις
- (γ) Τύποι συνοριακής συνθήκης για πρόβλημα ΜΔΕ
- (δ) Επέκταση στο ΠΑΣΤ των χαρακτηρισμών που αφορούν το ΠΑΤ
- (ε) Διακριτοποίηση του ΠΑΣΤ

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής και Αριθμητικής Ανάλυσης και Στοχαστικών Διαδικασιών, [Κεφάλαια 1,2](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας: Ο μαθηματικός φορμαλισμός, ως προαπαιτούμενο για την αυστηρή μελέτη ενός φαινομένου, απαιτεί την αναγνώριση του αντίστοιχου προβλήματος με τον καθορισμό των παραμέτρων του. Και αν για το (ΠΑΤ) τα πράγματα ήταν λίγο-πολύ προφανή, για τη μαθηματική περιγραφή ενός φαινομένου *διάχυσης* (*diffusion*) απαιτείται μεγαλύτερη προσπάθεια, καθώς τώρα κάνουμε λόγο για ένα φαινόμενο που εξελίσσεται όχι μόνο χρονικά, αλλά και χωρικά, όπως φαίνεται και στο [Σχήμα 11.1](#). Μαθηματικά, κάτι τέτοιο σημαίνει ότι το μοντέλο μας αναμένεται να είναι μια μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ) παρά μια ΣΔΕ.

Τα φαινόμενα διάχυσης έχουν ένα ευρύ πεδίο εφαρμογών, όπως είναι διάφοροι κλάδοι των φυσικών επιστημών, των επιστημών υγείας και των κοινωνικών επιστημών. Παραδείγματα αποτελούν οι εφαρμογές στη Θερμοδυναμική και τη Στατιστική Μηχανική, στη μελέτη των πορωδών μέσων, στον Στοχαστικό Λογισμό και την κίνηση Brown, στη Χημική και Βιοχημική Κινητική, στην Οικολογία και στη Γενετική, στη Φυσιο-



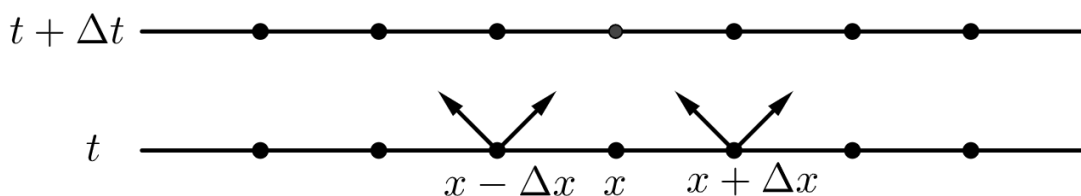
Σχήμα 11.1: Η διάχυση σωματιδίων σε δοχείο νερού αποτελεί φαινόμενο που εξελίσσεται χωροχρονικά.

λογία και στη διάλυση δια μέσου βιολογικών μεμβρανών (τριχοειδή αγγεία, πνεύμονες, νεφροί, περιτοναϊκή κοιλότητα, υπαραχνοειδής χώρος, πλακούντας), καθώς επίσης και στη Χρηματοοικονομική.

Παρακάτω, αφού πρώτα παρουσιάσουμε, με την ελάχιστη μαθηματική αυστηρότητα, φυσικούς τρόπους μέσω των οποίων αναδύεται το μοντέλο διάχυσης, εισάγουμε και σχολιάζουμε μια γενική μορφή του αντίστοιχου προβλήματος.

Εξίσωση διάχυσης μέσω τυχαίου περιπάτου. Η διάχυση μπορεί να θεωρηθεί ως η διαδικασία κατά την οποία η ύλη (ή η ενέργεια) μεταφέρεται από το ένα μέρος ενός συστήματος σε άλλο, λόγω διαβάθμισης της συγκέντρωσής της σε αυτά, ως αποτέλεσμα τυχαίας μοριακής κίνησης. Μέσω αυτής της ακανόνιστης κίνησης, η ύλη μεταφέρεται με τον χρόνο από ένα αρχικό σημείο υψηλής συγκέντρωσης προς ένα χαμηλής. Θα εισάγουμε τη διαφορική εξίσωση διάχυσης μέσω της παραπάνω θεώρησης και συγκεκριμένα μέσω του τυχαίου περιπάτου (*random walk*), στην απλούστερη μονοδιάστατη περίπτωση.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι κάθε σωματίδιο ύλης κινείται τυχαία, αλλά με σταθερή πιθανότητα προς τα αριστερά ή τα δεξιά, κατά μήκος ευθείας γραμμής, έτσι ώστε σε προκαθορισμένο χρονικό διάστημα Δt να έχει διανύσει μια προκαθορισμένη απόσταση Δx , όπως φαίνεται στο [Σχήμα 11.2](#).



Σχήμα 11.2: Μοντέλο μονοδιάστατου τυχαίου περιπάτου.

Έστω $\omega(x, t)$ η πιθανότητα να υπάρχει ένα σωματίδιο στο σημείο x κατά τη χρονική στιγμή t . Έστω R και L η σταθερή πιθανότητα κίνησης προς τα δεξιά και τα αριστερά, αντίστοιχα, κατά ένα χωρικό βήμα Δx , σε ένα χρονικό βήμα Δt . Τότε άμεσα συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα, ω , να υπάρχει ένα σωματίδιο στο x κατά τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ δίνεται από τη σχέση

$$\omega(x, t + \Delta t) = R\omega(x - \Delta x, t) + L\omega(x + \Delta x, t).$$

Θεωρώντας την ω επαρκώς διαφορίσιμη και αναπτύσσοντας σε σειρές Taylor γύρω από το (x, t) παίρνουμε

ότι

$$\begin{aligned} \omega(x, t) + \Delta t \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}(x, t) + o((\Delta t)^2) = & R \left(\omega(x, t) - \Delta x \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, t) \right) + \\ & + L \left(\omega(x, t) + \Delta x \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, t) \right) + \\ & + o((\Delta x)^2) \end{aligned}$$

και από τη σχέση

$$R + L = 1$$

έχουμε ότι

$$\Delta t \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}(x, t) + o((\Delta t)^2) = (L - R) \Delta x \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, t) + o((\Delta x)^2).$$

Για να καταλήξουμε σε μια συνεχή προσέγγιση διαιρούμε με Δt και εισάγοντας τα όρια

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = B \text{ και } \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D \geq 0,$$

οδηγούμαστε στην εξίσωση μεταγωγής (*advection*)-διάχυσης

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) = \underbrace{D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, t)}_{\text{όρος διάχυσης}} + \underbrace{A \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t)}_{\text{όρος μεταγωγής}},$$

μια δεύτερης τάξης, γραμμική, παραβολική διαφορική εξίσωση, όπου $A = B(L - R)$ και D είναι οι σταθερές μεταγωγής και διάχυσης, αντίστοιχα, των σωματιδίων. Μάλιστα, στην περίπτωση που η κίνηση είναι εντελώς τυχαία (αμερόληπτη), έχουμε ότι

$$R = L = \frac{1}{2},$$

δηλ. $A = 0$ και συνεπώς καταλήγουμε στην εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}(x, t).$$

Σημειώνουμε ότι ο περιορισμός

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = D > 0,$$

δηλ. ουσιαστικά ότι θα είναι παρόν το φαινόμενο της διάχυσης, υποδηλώνει ότι, στο συνεχές όριο, τα σωματίδια κινούνται με άπειρη ταχύτητα.

Αν, τώρα, συμβολίσουμε με $y(x, t)$ την πυκνότητα των σωματιδίων στο (x, t) και N τον συνολικό αριθμό των σωματιδίων, και αξιοποιήσουμε την προσέγγιση

$$\omega(x, t) = \frac{1}{N} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} y(s, t) ds \approx \frac{\Delta x}{N} y(x, t), \text{ για μικρό } \Delta x,$$

καταλήγουμε στην εξίσωση μεταγωγής-διάχυσης για την y , δηλ.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + A \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$$

και αντίστοιχα για $A = 0$ στην εξίσωση διάχυσης, δηλ.

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t).$$

Ένα γενικό πλαίσιο. Θεωρούμε ένα αυθαίρετο ανοικτό (συνήθως συνεκτικό) υποσύνολο του m -διάστατου (συνήθως $m \in \{1, 2, 3\}$) ευκλείδειου χώρου, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, και έναν πληθυσμό (για παράδειγμα σωματιδίων, χημικών μορίων, κυττάρων, ζώων κ.τ.λ.) που κινείται μέσα σε αυτό. Συμβολίζουμε με

1. $y(x, t)$ την πυκνότητα, ή τη συγκέντρωση, του πληθυσμού στο $x \in U$ κατά τη χρονική στιγμή t ,
2. $J(x, t)$ τη ροή δια μέσου του κατά τμήματα ομαλού συνόρου ∂U , του αυθαίρετου U , για $x \in \partial U$ και για χρόνο t και
3. $f(x, t, y(x, t), \nabla_x y(x, t))$ την πηγή παραγωγής, ή την καταβόθρα κατανάλωσης, του πληθυσμού στο σημείο $x \in U$ και για χρόνο t .

Όλες οι αυτές οι συναρτήσεις θεωρούνται επαρκώς διαφορίσιμες ώστε να δικαιολογούνται οι παρακάτω μαθηματικοί χειρισμοί.

Δύο είναι οι φυσικοί νόμοι που θα οδηγήσουν στην εξαγωγή του μοντέλου διάχυσης για την u , γνωστού και ως δεύτερου νόμου Fick. Συγκεκριμένα, πρόκειται για

1. τον νόμο διατήρησης της ύλης και
2. τον πρώτο νόμο Fick (ή νόμο Fourier, ή νόμο Ohm, ή νόμο Darcy).

Πράγματι από τον νόμο διατήρησης της ύλης έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_U y(x, t) dx}_{\text{συνολικός πληθυσμός εντός } U} = - \underbrace{\int_{\partial U} J(x, t) \cdot \nu(x) d\sigma(x)}_{\text{συνολική ροή εντός/εκτός } U} + \underbrace{\int_U f(x, t, y(x, t), \nabla_x y(x, t)) dx}_{\text{συνολική παραγωγή/κατανάλωση εντός } U}$$

όπου ν το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂U . Σημειώνουμε ότι ο όρος της συνολικής ροής στην παραπάνω εξίσωση είναι θετικός όταν υπάρχει ροή εκτός του U και αρνητικός όταν υπάρχει ροή εντός αυτού, πράγμα που εξηγεί και το αρνητικό πρόσημο μπροστά από τον συγκεκριμένο όρο. Τώρα, με χρήση του θεωρήματος απόκλισης παίρνουμε ότι

$$\int_U \left(\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \nabla_x \cdot J(x, t) - f(x, t, y(x, t), \nabla_x y(x, t)) \right) dx = 0$$

και αφού η επιλογή του U ήταν αυθαίρετη, έπεται ότι

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = -\nabla_x \cdot J(x, t) + f(x, t, y(x, t), \nabla_x y(x, t)) = 0.$$

Μένει μόνο να εφαρμόσουμε τον πρώτο νόμο του Fick, δηλ. την εξής σχέση

$$J(x, t) = -D \nabla_x y(x, t), \text{ όπου } D \geq 0 \text{ σταθερό}$$

και να πάρουμε έτσι την εξίσωση αντίδρασης (reaction)-διάχυσης

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = \underbrace{D\Delta_x y(x, t)}_{\text{όρος διάχυσης}} + \underbrace{f(x, t, y(x, t), \nabla_x y(x, t))}_{\text{όρος αντίδρασης}}.$$

Η προέλευση του όρου “αντίδραση” οφείλεται στο γεγονός ότι αρχικά η παραπάνω εξίσωση προέκυψε κατά τη μελέτη της κινητικής χημικά ενεργών μορίων, τα οποία εκτός από το να διαχέονται στο περιβάλλοντα χώρο, συμμετέχουν επίσης και σε χημικές αντιδράσεις, είτε ως αντιδρώντα είτε ως προϊόντα.

Μάλιστα, αν έχουμε δύο ροές σε ένα σύστημα, και συγκεκριμένα τη ροή διάχυσης, που όπως είδαμε περιγράφεται από τον πρώτο νόμο Fick, και τη ροή μεταγωγής (advection), που εμφανίζεται όταν υπάρχει κατευθυνόμενη κίνηση του πληθυσμού. Τέτοιου είδους κίνηση μπορεί να οφείλεται, για παράδειγμα, σε κάποια χημική ουσία που οδηγεί έναν πληθυσμό κυττάρων κατά τη διάρκεια του φαινομένου της χημειοταξίας, ή στην “εσωτερική πίεση” εντός του πληθυσμού. Η ροή μεταγωγής είναι το γινόμενο της πυκνότητας/συγκέντρωσης του πληθυσμού με μία διανυσματική συνάρτηση, $-v$, ανεξάρτητη του χρόνου t . Αν J_d και J_a συμβολίζουν τις ροές διάχυσης και μεταγωγής, αντίστοιχα, τότε η συνολική ροή, J_{tot} δίνεται από το άθροισμα αυτών των δύο, δηλ.

$$J_{tot}(x, t) = J_d(x, t) + J_a(x, t) = -D\nabla_x y(x, t) - y(x, t)v(x).$$

Έτσι προκύπτει η εξίσωση αντίδρασης-μεταγωγής-διάχυσης

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) = D\Delta_x y(x, t) + \underbrace{\nabla_x y(x, t) \cdot v(x) + y(x, t) \nabla_x \cdot v(x)}_{\text{όροι μεταγωγής}} + f(x, t, y(x, t), \nabla_x y(x, t)).$$

Ένα γενικό πρόβλημα. Το πρόβλημα διάχυσης αποτελεί ένα πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ). Συγκεκριμένα, για

1. $m, n \in \mathbb{N}$, και
2. $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^n \in [0, 1]^n$,

μπορεί να θεωρηθεί ως η αναζήτηση συνάρτησης¹

$$y = (y_i)_{i=1}^n \in C(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^n) \cap C_1^2(U \times (0, T); \mathbb{R}^n), \text{ αν } \gamma = 1_n$$

και

$$y \in C(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^n) \cap C_0^1\left(\left(\overline{U \cap \bigcup_{x \in \partial U} B(x, \rho)} \setminus \Sigma\right) \times (0, T); \mathbb{R}^n\right) \cap C_1^2(U \times (0, T); \mathbb{R}^n),$$

για κάποιο $\rho > 0$ (οσοδήποτε μικρό), αν $\gamma \neq 1_n$,

όπου

¹Για αυθαίρετο $k \in \mathbb{N}_0$ και ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^m$, υπενθυμίζουμε ότι

$$C^k(\bar{U}) := \{y \in C^k(U) \mid \nabla^i y \text{ ομοιόμορφα συνεχής σε φραγμένα υποσύνολα του } U, \text{ για κάθε } i \in \{0, \dots, k\}\}.$$

Ισχύει ότι αν $y \in C^k(U)$, τότε, για κάθε $i \in \{0, \dots, k\}$, η $\nabla^i y$ επεκτείνεται συνεχώς στο \bar{U} . Άλλωστε αυτή την ιδιότητα την υπονοούμε στη μία διάσταση, χωρίς να την αναφέρουμε, όταν χρησιμοποιούμε τον πλευρικό ορισμό της διαφορίσης στη μία διάσταση.

Αντίστοιχα ορίζονται και οι συναρτησιακοί χώροι $C^k(\bar{U} \setminus \Sigma)$, για κάθε σχετικά κλειστό $\Sigma \subseteq \partial U$ επί της $(m - 1)$ -διάστατης πολλαπλότητας ∂U , να είναι οι χώροι των k -φορών συνεχώς διαφορίσιμων στο U συναρτήσεων, που, τόσο οι ίδιες, όσο και οι διαφορίσεις τους, επεκτείνονται συνεχώς στο $\bar{U} \setminus \Sigma$. Επίσης αντίστοιχα ορίζονται και οι συναρτησιακοί χώροι $C_{k_2}^{k_1}((\bar{U} \setminus \Sigma) \times \mathcal{S})$, για κάθε $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ και διάστημα $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$.

3. $U \subseteq \mathbb{R}^m$ να είναι ανοικτό και συνεκτικό (όχι αναγκαστικά φραγμένο) και, επιπλέον, $\Sigma \subseteq \partial U$, τέτοια ώστε,

i. αν $\gamma = 1_n$, τότε και μόνο τότε

α. δεν απαιτείται περιορισμός για το ∂U , καθώς επίσης $\Sigma = \emptyset$, και

β. δεν απαιτείται να ορίζεται το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, $\nu = (\nu_i)_{i=1}^m$, κάπου στο ∂U ,

ii. αν $\gamma = 1_n$, τότε και μόνο τότε

α. το ∂U να είναι κατά τμήματα ομαλό, καθώς επίσης το Σ να είναι σχετικά κλειστό μηδενό-σύνολο επί της $(m-1)$ -διάστατης πολλαπλότητας ∂U , και

β. το ν να ορίζεται στο $\partial U \setminus \Sigma$,

και

4. $T \in (0, \infty]$,

με

$$(0, T) := \begin{cases} \text{είτε } (0, T), \\ \text{είτε } (0, T], \end{cases} \quad \text{για } T \neq \infty, \quad \text{και αντίστοιχα για τα } [0, T), \langle -T, 0 \rangle \text{ και } \langle -T, 0],$$

και

$$C_{k_2}^{k_1}(U \times \mathcal{I}) := \left\{ y \in C(U \times \mathcal{I}) \mid \nabla_x^{i_1} y, \frac{\partial^{i_2} y}{\partial t^{i_2}} \in C(U \times \mathcal{I}), \forall i_j \in \{0, \dots, k_j\}, j \in \{1, 2\} \right\},$$

για κάθε $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ και διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, και

$$B(\xi, \rho) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x - \xi| < \rho\}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m, \forall \rho > 0,$$

καθώς επίσης $1_n := \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\#n} \right)$, η οποία συνάρτηση ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + L_x(x, t) \odot y(x, t) = f(x, t, y(x, t), \nabla_x y(x, t)), & \forall (x, t) \in U \times (0, T) & (\mu.) \\ y(x, 0) = g(x), & \forall x \in \bar{U} & (\alpha.σ.) \\ \gamma \odot r(x, t) \odot y(x, t) + (1_n - \gamma) \odot \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}}(x, t) \odot y(x, t) = h(x, t), & \forall (x, t) \in (\partial U \setminus \Sigma) \times (0, T) & (\sigma.σ.) \end{cases}$$

(ΠΑΣΤ)

με $\mu.$, $\alpha.σ.$ και $\sigma.σ.$ να σημαίνουν μοντέλο, αρχική συνθήκη και συνοριακή συνθήκη, αντίστοιχα, και \odot να συμβολίζει το γινόμενο κατά Hadamard, όπου

5. $L_x = (L_{x,i})_{i=1}^n$ με τον κάθε γραμμικό, δεύτερης τάξης διαφορικό τελεστή²

$$L_{x,i}(x, t) = -\nabla_x \cdot (a_i(x, t) \nabla_x) + b_i(x, t) \cdot \nabla_x + c_i(x, t) \text{id}, \quad \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T)$$

²Γενικά, ένας τελεστής μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού έναν συναρτησιακό χώρο, δηλ. άλλες συναρτήσεις.

να είναι τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι

$$(a_i)_{i=1}^n \in C_{0,B}^1(\bar{U} \times [0, T]) \text{ και } (b_i)_{i=1}^n, (c_i)_{i=1}^n \in C_B(\bar{U} \times [0, T]),$$

με

$$C_{k_2,B}^{k_1}(\bar{U} \times \mathcal{I}) := \left\{ y \in C_{k_2}^{k_1}(\bar{U} \times \mathcal{I}) \mid \nabla_x^{i_1} y, \frac{\partial^{i_2} y}{\partial t^{i_2}} \text{ φραγμένες, } \forall i_j \in \{0, \dots, k_j\}, j \in \{1, 2\} \right\}$$

για κάθε $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ και διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$, και, επιπλέον, ο κάθε τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L_{x,i}$ να είναι συμμετρικός και ομοιόμορφα παραβολικός στο $\bar{U} \times [0, T]$,

6. $f = (f_i)_{i=1}^n \in C(S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4; \mathbb{R}^n)$, με³

$$\bar{U} \times [0, T] \times y(\bar{U} \times [0, T]) \times \nabla_x y(\bar{U} \times [0, T]) \subseteq S_1 \times S_2 \times S_3 \times S_4 \subseteq \mathbb{R}^{(1+m)(1+n)},$$

7. $g = (g_i)_{i=1}^n \in C(U; \mathbb{R}^n)$, και

8. i. $r = (r_i)_{i=1}^n \in C(\partial U \times [0, T]; (0, \infty)^n)$,

ii. $h = (h_i)_{i=1}^n \in C(\partial U \times [0, T]; \mathbb{R}^n)$, και

iii. αν $\gamma \neq 1_n$, τότε και μόνο τότε ορίζεται ο τελεστής $\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_i} \right)_{i=1}^n$ στο $(\partial U \setminus \Sigma) \times (0, T)$ ως

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_i}(x, t) = \nu(x) \cdot (a_i(x, t) \nabla_x), \quad \forall (x, t) \in (\partial U \setminus \Sigma) \times (0, T).$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση y καλείται *λύση του (ΠΑΣΤ)*⁴.

Η έννοια της γραμμικότητας για το (ΠΑΣΤ) είναι η ίδια με αυτή που εισήχθηκε για το (ΠΑΤ). Παρατηρούμε ότι μόνο η f του δεξιού μέλους του μοντέλου του (ΠΑΣΤ) είναι ικανή να “άρει” τη γραμμικότητά του. Γι’ αυτό τον λόγο, το πρόβλημα αυτό χαρακτηρίζεται ως *ημιγραμμικό*. Όταν η f είναι ταυτοτικά μηδενική, το πρόβλημα (και το μοντέλο) λέγεται *ομογενές*.

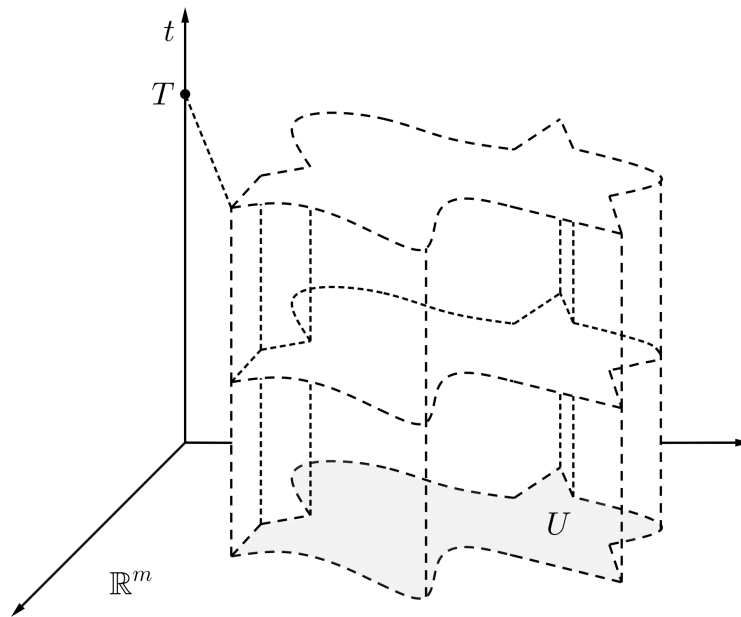
Το σύνολο $U \times (0, T)$ που αφορά το μοντέλο του (ΠΑΣΤ) καλείται *παραβολικό σύνολο*, και παράδειγμα αυτού φαίνεται στο **Σχήμα 11.3**. Σημειώνουμε ότι στη γενική περίπτωση δεν απαιτείται η “κυλινδρική” γεωμετρία του παραβολικού συνόλου που θεωρήθηκε εδώ, δηλ. η ανεξαρτησία χώρου και χρόνου, αλλά κάποιου τύπου κυρτότητα, η οποία ωστόσο δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν σύγγραμμα. Μάλιστα, το σύνολο $(\bar{U} \times [0, T]) \setminus (U \times (0, T))$, δηλ. το $(\bar{U} \times \{0\}) \cup (\partial U \times (0, T))$, καλείται *παραβολικό σύνορο*.

Επίσης, σημειώνουμε ότι η συνοριακή συνθήκη για να έχει νόημα προφανώς θα πρέπει να έχουμε ένα γνήσιο ΠΑΣΤ, δηλ. όταν τουλάχιστον $\partial U \neq \emptyset$ ή, ισοδύναμα, $U \neq \mathbb{R}^m$.

³Κατά τη συνήθη πρακτική και για λόγους απλοποίησης του συμβολισμού, ταυτίζουμε (όποτε κρίνεται σκόπιμο) τους χώρους $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ και $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$, για $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, μιας και $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \cong \mathbb{R}^{m_1+m_2}$. Το ίδιο άλλωστε συμβαίνει και στην περίπτωση των $\mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ και $\mathbb{R}^{m_1 m_2}$.

⁴Η έννοια της λύσης που θεωρούμε στο παρόν σύγγραμμα, δεν είναι ούτε η πιο ειδική, ούτε η πιο γενική. Για παράδειγμα, μια λύση υπό πιο περιοριστική έννοια αποτελεί μια συνάρτηση που ικανοποιεί το (ΠΑΣΤ), αλλά επιπλέον οι διαφορίσεις τις επεκτείνονται συνεχώς ως και το σύνορο. Στον αντίποδα, μια λύση υπό πιο (για την ακρίβεια, την πλέον) γενική έννοια αποτελεί μια ασθενώς διαφορίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τη μεταβολική διατύπωση του (ΠΑΣΤ).

Ως προς το τελευταίο παράδειγμα, σημειώνουμε ότι οι έννοιες της “ασθενούς διαφορίσης” και της “μεταβολικής διατύπωσης” είναι στενά συνδεδεμένες με τη θεωρία των Χώρων Sobolev, η οποία με τη σειρά της είναι στενά συνδεδεμένη με τη θεωρία Κατανομών (βλ., π.χ., [1]). Στο παρόν σύγγραμμα αποφεύγουμε την εκτενή αναφορά στις θεωρίες αυτές, οι οποίες ωστόσο αποτελούν τον θεμέλιο λίθο της σύγχρονης μελέτης των ΜΔΕ.



Σχήμα 11.3: Παράδειγμα της γεωμετρίας φραγμένου παραβολικού συνόλου, η οποία θα μας απασχολήσει στον παρόν σύγγραμμα. Αν $\gamma \neq 1_n$ στη συνοριακή συνθήκη του (ΠΑΣΤ), τότε και μόνο τότε απαιτείται το σύνορο ∂U να είναι κατά τμήματα ομαλό, ενώ αν $\gamma = 1_n$, τότε και μόνο τότε δεν απαιτείται καμία ομαλότητα του συνόρου.

Σκόπιμη είναι η αναζήτηση λύσης που ορίζεται αποκλειστικά για μελλοντικούς χρόνους. Άλλωστε κάτι τέτοιο είναι απόλυτα φυσικό και διαισθητικά ορθό στα φαινόμενα διάχυσης, καθώς αναμένουμε να μην μπορούμε να πάμε πίσω στον χρόνο κατά την περιγραφή τους, κάτι που άλλωστε οφείλεται στον -όπως είδαμε- μικροσκοπικά τυχαίο τρόπο εξέλιξής τους. Μαθηματικά, κάτι τέτοιο έπεται από το γεγονός ότι κατά την αντιστροφή του χρόνου, το μοντέλο στο (ΠΑΣΤ) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial \chi}{\partial s}(x, s) - L_x(x, s) \odot \chi(x, s) = -f(x, s, \chi(x, t), \nabla_x \chi(x, s)), \quad \forall (x, s) \in U \times \langle -T, 0 \rangle,$$

για

$$\chi(x, s) := y(x, -s),$$

η οποία εξίσωση έχει τελικά φανεί ότι δεν είναι δυνατόν να ενταχθεί στο γενικό πλαίσιο μελέτης του προβλήματος διάχυσης λόγω ακριβώς του αρνητικού προσημου μπροστά από τον τελεστή L_x .

Οι φάσεις μελέτης του (ΠΑΣΤ) δεν διαφέρουν από τις αντίστοιχες για το (ΠΑΤ), αν οι έννοιες επεκταθούν κατάλληλα. Ωστόσο, η μελέτη Φάσης I για το (ΠΑΣΤ) κάθε άλλο παρά τετριμμένη είναι στην ολότητα του προβλήματος. Για την εξαγωγή των γνωστών αποτελεσμάτων, τα οποία αφορούν συγκεκριμένες επιλογές των παραμέτρων του, απαιτείται χρήση ευρέος φάσματος αναλυτικών εργαλείων, συχνά διαφορετικών για την εκάστοτε επιλογή. Γι' αυτό τον λόγο, η μελέτη κατά τη φάση αυτή χωρίζεται σε υποπεριπτώσεις.

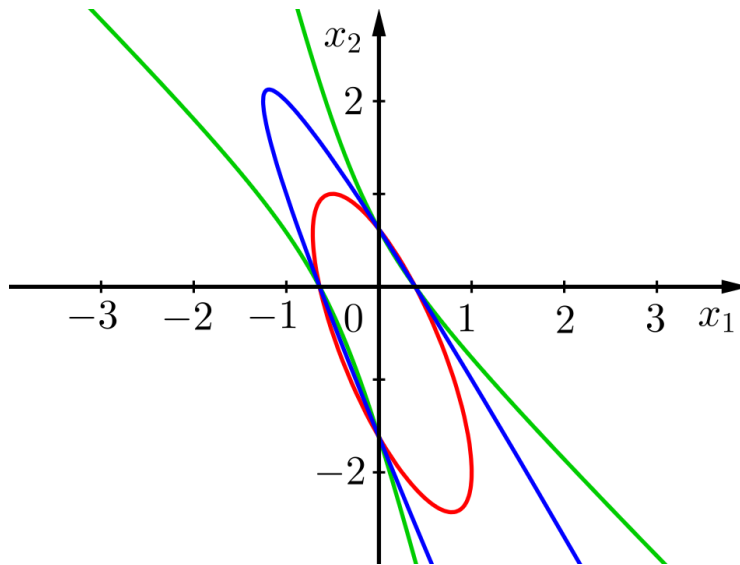
Μαθηματικό Υπόβαθρο: Εδώ παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες για την περιγραφή των προβλημάτων ΜΔΕ.

Ταξινόμηση γραμμικών ομογενών ΜΔΕ δεύτερης τάξης δύο διαστάσεων. Η βασική κατάταξη των ΜΔΕ γίνεται μέσω της αντίστοιχης των γραμμικών, ομογενών ΜΔΕ, δεύτερης τάξης και δύο διαστάσεων. Έστω, λοιπόν, εξαρτημένη μεταβλητή y δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x_1 και x_2 , επαρκώς διαφορίσιμη. Η γενική μορφή της γραμμικής, δεύτερης τάξης, ομογενούς ΜΔΕ για την y είναι η

$$a \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + 2h \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} + b \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + 2f \frac{\partial y}{\partial x_1} + 2g \frac{\partial y}{\partial x_2} + ey = 0, \quad (11.1)$$

όπου οι a, h, b, f, g, e είναι συναρτήσεις των x_1 και x_2 .

Η ταξινόμηση γίνεται σημειακά και σχετίζεται με τη δυνατότητα της αναγωγής της (11.1), μέσω ενός μετασχηματισμού συντεταγμένων, σε μια από τις τρεις κανονικές μορφές, και συγκεκριμένα στην υπερβολική, στην παραβολική ή στην ελλειπτική, οι οποίες και χαρακτηρίζουν αντιστοίχως την ίδια την εξίσωση. Οι ορολογίες αυτές προκύπτουν από την Αναλυτική Γεωμετρία κατά την ταξινόμηση των τετραγωνικών καμπυλών μέσω του προσήμου της διακρίνουσας $ab - h^2$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα του Σχήματος 11.4. Έτσι,



Σχήμα 11.4: Η μορφή της τετραγωνικής καμπύλης $ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2 + 2fx_1 + 2gx_2 + e = 0$ με $a = 4, b = 1, f = g = \frac{1}{2}, e = -1$ και για διάφορες τιμές του h . Συγκεκριμένα, $h = 5$ για την υπερβολή (πράσινη καμπύλη), $h = 4$ για την παραβολή (μπλε καμπύλη) και $h = 3$ για την έλλειψη (κόκκινη καμπύλη).

$$\text{αν } a(x_1, x_2)b(x_1, x_2) - h^2(x_1, x_2) \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} 0, \text{ τότε η (11.1) λέγεται } \begin{cases} \text{υπερβολική} \\ \text{παραβολική} \\ \text{ελλειπτική} \end{cases} \text{ στο } (x_1, x_2).$$

Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$x_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) + 2x_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) + x_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = 0$$

είναι

$$\begin{cases} \text{υπερβολική,} & \text{αν } x_2^2 < x_1^2 \\ \text{παραβολική,} & \text{αν } x_2^2 = x_1^2 \\ \text{ελλειπτική,} & \text{αν } x_2^2 > x_1^2. \end{cases}$$

Έχει φανεί ότι η παραπάνω ταξινόμηση χωρίζει τα προβλήματα σε τρεις γενικούς τύπους με βάση τα παρατηρούμενα φαινόμενα ως εξής:

$$\text{Προβλήματα } \begin{cases} \text{υπερβολικά :} & \text{ταλαντούμενα συστήματα και διάδοση κυμάτων} \\ \text{παραβολικά :} & \text{διαδικασίες διάχυσης} \\ \text{ελλειπτικά :} & \text{φαινόμενα σταθερής κατάστασης.} \end{cases}$$

Γραμμικοί, δεύτερης τάξης, πολλών διαστάσεων διαφορικοί τελεστές. Η ταξινόμηση για τις γραμμικές, δεύτερης τάξης εξισώσεις τριών ή και περισσότερων μεταβλητών ανάγεται στην αντίστοιχη για τις δύο μεταβλητές, όπως θα δούμε παρακάτω. Κεντρικό ρόλο σε αυτή την αναγωγή παίζει ο *συμμετρικός και ομοιόμορφα* (ή, αλλιώς, *αυστηρά, ή ισχυρά*) *ελλειπτικός τελεστής*.

Δοθέντος ανοικτού (και, συνθήως, συνεκτικού, αλλά όχι απαραίτητα) $U \subseteq \mathbb{R}^m$, ο *γραμμικός, m -διάστατος, δεύτερης τάξης διαφορικός τελεστής*, L , στο \bar{U} έχει τη μορφή

$$L(x) := -\nabla \cdot (a(x)\nabla) + b(x) \cdot \nabla + c(x) \text{id}, \forall x \in \bar{U}$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$L(x) = -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \text{id}, \forall x \in \bar{U},$$

όπου

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in C_B^1(\bar{U}; \mathbb{R}^{m \times m}), \quad b = (b_i)_{i=1}^m \in C_B(\bar{U}; \mathbb{R}^m) \quad \text{και} \quad c \in C_B(\bar{U}; \mathbb{R}).$$

Η παραπάνω μορφή του L ονομάζεται *μορφή απόκλισης*. Μια ισοδύναμη μορφή για τον L είναι η *μορφή μη απόκλισης*

$$L(x) := -\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \text{id}, \forall x \in \bar{U},$$

όπου τώρα

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in C_B(\bar{U}; \mathbb{R}^{m \times m}), \quad b = (b_i)_{i=1}^m \in C_B(\bar{U}; \mathbb{R}^m) \quad \text{και} \quad c \in C_B(\bar{U}; \mathbb{R}).$$

Αν για τον L ισχύουν οι εξής δύο συνθήκες

1. $a(x) = a^T(x)$, για κάθε $x \in \bar{U}$, δηλ.

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \quad \forall x \in \bar{U},$$

γνωστή ως *συνθήκη συμμετρίας, ή, αλλιώς, αυτοσυζυγίας*, και

2. υπάρχει σταθερό $\theta > 0$, τέτοιο ώστε $\xi \cdot a(x)\xi \geq \theta |\xi|^2$, για κάθε $x \in \bar{U}$ και $\xi \in \mathbb{R}^n$, δηλ.

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \quad \forall x \in \bar{U}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

γνωστή ως *συνθήκη ομοιόμορφης* (ή, αλλιώς, *αυστηρής, ή ισχυρής*) *ελλειπτικότητας*,

τότε και μόνο τότε ο L καλείται αφενός *συμμετρικός, αφετέρου ομοιόμορφα ελλειπτικός*, στο \bar{U} . Παρατηρούμε ότι, με βάση τα παραπάνω, έπεται ότι η συνάρτηση a , ως πίνακας, είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα υπάρχει σταθερό $\theta_{-1} > 0$, τέτοιο ώστε

$$\xi \cdot a^{-1}(x)\xi \geq \theta_{-1} |\xi|^2, \quad \forall x \in \bar{U}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Συχνά, ένας *συμμετρικός και ομοιόμορφα ελλειπτικός τελεστής* καλείται, απλά, *ελλειπτικός*, όμως σε κάθε περίπτωση η εξίσωση

$$L(x)y(x) = 0$$

καλείται ελλειπτική. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός τέτοιου τελεστή αποτελεί ο αρνητικός τελεστής Laplace, $-\Delta$, καθώς

$$\nabla \cdot (a\nabla) = \Delta, \text{ για } a \equiv \mathbb{I}_n,$$

με την αντίστοιχη m -διάστατη κλασική εξίσωση του Laplace

$$\Delta y(x) = 0.$$

Έτσι, δοθέντος, επιπλέον, ενός $T > 0$, οδηγούμαστε στον ορισμό του υπερβολικού και του παραβολικού τελεστή και των αντίστοιχων εξισώσεων, με το να θεωρήσουμε αρχικά τον χρονικά εξαρτώμενο γραμμικό, $(m + 1)$ -διάστατο, δεύτερης τάξης διαφορικό ως προς τον χώρο τελεστή, L_x , στο $\bar{U} \times [0, T]$, με τη μορφή απόκλισης

$$L_x(x, t) := -\nabla \cdot (a_i(x, t)\nabla) + b_i(x, t) \cdot \nabla + c_i(x, t) \text{id}, \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T]$$

ή, πιο αναλυτικά,

$$L_x(x, t) = -\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t) \text{id}, \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T],$$

όπου

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in C_B^1(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^{m \times m}), b = (b_i)_{i=1}^m \in C_B(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^m) \text{ και } c \in C_B(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}),$$

ή, ισοδύναμα, με τη μορφή μη απόκλισης

$$L_x(x, t) := -\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x, t) \text{id}, \forall (x, t) \in U \times [0, T],$$

όπου σε αυτή την περίπτωση

$$a = (a_{ij})_{i,j=1}^m \in C_B(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^{m \times m}), b = (b_i)_{i=1}^m \in C_B(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^m) \text{ και } c \in C_B(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}).$$

Κατά αναλογία με πριν, αν για τον $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x$ και τον $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ ισχύουν οι εξής δύο συνθήκες,

1. $a(x, t) = a^T(x, t)$, για κάθε $(x, t) \in \bar{U} \times [0, T]$, δηλ.

$$a_{ij}(x, t) = a_{ji}(x, t), \forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T],$$

γνωστή ως συνθήκη συμμετρίας, ή, αλλιώς, αυτοσυζυγίας, και

2. υπάρχει σταθερό $\theta > 0$, τέτοιο ώστε $\xi \cdot a(x, t)\xi \geq \theta|\xi|^2$, για κάθε $(x, t) \in \bar{U} \times [0, T]$ και $\xi \in \mathbb{R}^n$, δηλ.

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \geq \theta \sum_{i=1}^m \xi_i^2, \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T], \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

γνωστή ως συνθήκη ομοιόμορφης (ή, αλλιώς, αυστηρής, ή ισχυρής) υπερβολικότητας/παραβολικότητας,

τότε και μόνο τότε ο $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x$ και ο $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ καλούνται αφενός *συμμετρικοί*, αφετέρου *ομοιόμορφα υπερβολικός* και *ομοιόμορφα παραβολικός*, αντίστοιχα, στο $\bar{U} \times [0, T)$. Όπως και πριν, η συνάρτηση a , ως πίνακας, είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα υπάρχει σταθερό $\theta_{-1} > 0$, τέτοιο ώστε

$$\xi \cdot a^{-1}(x, t)\xi \geq \theta_{-1}|\xi|^2, \quad \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Επίσης, συχνά ένας συμμετρικός και ομοιόμορφα υπερβολικός/παραβολικός τελεστής καλείται, απλά, υπερβολικός/παραβολικός, όμως σε κάθε περίπτωση οι εξισώσεις

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) + L_x(x, t)y(x, t) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + L_x(x, t)y(x, t) = 0$$

καλούνται υπερβολική και παραβολική, αντίστοιχα. Χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων αποτελούν η $(m + 1)$ -διάστατη κλασική κυματική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) - a\Delta_x y(x, t) = 0, \quad \text{για κάποιο σταθερό } a > 0$$

και η $(m + 1)$ -διάστατη κλασική εξίσωση διάχυσης (ή, αλλιώς, θερμότητας)

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) - a\Delta_x y(x, t) = 0, \quad \text{για κάποιο σταθερό } a > 0.$$

Τύποι συνοριακής συνθήκης. Η ορθή σύσταση ενός καλά τοποθετημένου προβλήματος ΜΔΕ έχει φανεί ότι απαιτεί την επιβολή κάποιας συνοριακής συνθήκης και εδώ θα παρουσιάσουμε τέτοιους τύπους. Κάτι τέτοιο για να έχει προφανώς νόημα, πρέπει το (χωρικό) σύνολο στο οποίο θεωρούμε το πρόβλημα να έχει τουλάχιστον μη κενό σύνορο. Σε αυτή την περίπτωση θα καλούμε το αντίστοιχο πρόβλημα *γνήσιο ΠΑΣΤ*, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, δηλ. όταν ο χώρος θεωρείται όλος ο ευκλείδειος χώρος, θα το καλούμε *εκφυλισμένο ΠΑΣΤ* (συχνά, στη βιβλιογραφία, ένα τέτοιο εκφυλισμένο πρόβλημα αναφέρεται ως ΠΑΤ, ένα χαρακτηρισμό τον οποίο δεν θα χρησιμοποιούμε εδώ προς αποφυγή σύγχυσης με τα προβλήματα ΣΔΕ).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, περιορίζουμε την παρουσίαση αποκλειστικά για τα ελλειπτικά γνήσια προβλήματα. Προφανώς, τα ελλειπτικά προβλήματα στερούνται αρχικής συνθήκης, δηλ. κάνουμε λόγο για *προβλήματα συνοριακών τιμών* (ΠΣΤ). Οπότε θεωρούμε ένα ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^m$, άρα $\partial U \neq \emptyset$, έναν τελεστή, $L = (L_i)_{i=1}^n$, στο \bar{U} , όπου κάθε L_i είναι ελλειπτικός στο \bar{U} , καθώς επίσης το αντίστοιχο πρόβλημα,

$$\begin{cases} L(x) \odot y(x) = f(x, y(x), \nabla y(x)), & \forall x \in U & \text{(μοντέλο)} \\ B(x) \odot y(x) = h(x), & \forall x \in \partial U \setminus \Sigma, & \text{(συνοριακή συνθήκη)} \end{cases} \quad (\text{ΠΣΤ})$$

όπου $f \in C(S_1 \times S_2 \times S_3; \mathbb{R}^n)$, με $\bar{U} \times y(\bar{U}) \times \nabla_x y(\bar{U}) \subseteq S_1 \times S_2 \times S_3 \subseteq \mathbb{R}^{m+n+mn}$, $h \in C(\partial U; \mathbb{R}^n)$, Σ να είναι σχετικά κλειστό μηδενικό σύνολο επί της $(m - 1)$ -διάστατης πολλαπλότητας ∂U όταν ∂U θεωρείται κατά τμήματα ομαλό, αλλιώς $\Sigma = \emptyset$, και $B = (B_i)_{i=1}^n$ ο υπό μελέτη συνοριακός τελεστής.

Σταθεροποιούμε, λοιπόν, $i_0 \in \{1, \dots, n\}$.

1. Έχουμε τη *συνοριακή συνθήκη Dirichlet* (ή, αλλιώς, πρώτου είδους) όταν

$$B_{i_0} \equiv \text{id},$$

δηλ.

$$y_{i_0}(x) = h_{i_0}(x), \quad \forall x \in \partial U.$$

Η συνθήκη αυτή δεν απαιτεί ομαλότητα του συνόρου.

2. Υπό την προϋπόθεση ότι το σύνορο είναι κατά τμήματα ομαλό και ορίζεται στο $\partial U \setminus \Sigma$ το εξωτερικό κάθετο διάνυσμά του, $\nu = (\nu_i)_{i=1}^m$, έχουμε τη συνοριακή συνθήκη *Neumann* (ή, αλλιώς, δεύτερου είδους) όταν

$$B_{i_0}(x) = \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_{i_0}}(x) := \nu(x) \cdot (a_{i_0}(x)\nabla), \quad \forall x \in \partial U \setminus \Sigma,$$

δηλ.

$$\sum_{p,q=1}^m a_{i_0,pq}(x)\nu_q(x)\frac{\partial y}{\partial x_p}(x) = h_{i_0}(x), \quad \forall x \in \partial U \setminus \Sigma,$$

όπου $a_{i_0} = (a_{i_0,pq})_{p,q=1}^m$ η συνάρτηση-πίνακας του L_{i_0} . Παρατηρούμε ότι

$$\text{αν } a_{i_0} \equiv \mathbb{I}_n, \text{ τότε } \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_{i_0}}(x) = \frac{\partial}{\partial \nu}(x) := \nu(x) \cdot \nabla, \quad \forall x \in \partial U \setminus \Sigma.$$

3. Υπό την προϋπόθεση του σημείου 2., έχουμε τη συνοριακή συνθήκη *Robin* (ή, αλλιώς, τρίτου είδους, ή μεικτού τύπου) όταν

$$B_{i_0}(x) = r(x)\text{id} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_{i_0}}(x), \quad \forall x \in \partial U \setminus \Sigma,$$

δηλ.

$$r(x) + \sum_{p,q=1}^m a_{i_0,pq}(x)\nu_q(x)\frac{\partial y}{\partial x_p}(x) = h_{i_0}(x), \quad \forall x \in \partial U \setminus \Sigma,$$

όπου $r \in C(\partial U; (0, \infty))$.

Μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τις παραπάνω τρεις συνθήκες σε μία όταν για κάποιο $\gamma_{i_0} \in [0, 1]$ έχουμε

$$B_{i_0}(x) = \gamma_{i_0}r(x)\text{id} + (1 - \gamma_{i_0})\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_{i_0}}(x), \quad \begin{cases} \forall x \in \partial U, & \text{αν } \gamma_{i_0} = 0 \\ \forall x \in \partial U \setminus \Sigma, & \text{αν } \gamma_{i_0} \neq 0. \end{cases}$$

Υπό αυτή τη συνθήκη, μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma \neq 0$ απαιτείται το σύνολο να είναι κατά τμήματα ομαλό, με το Σ να αποτελεί το σχετικά κλειστό μηδενοσύνολο της $(m - 1)$ -διάστατης πολλαπλότητας ∂U , στο οποίο δεν ορίζεται το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, ν .

Τέλος, αναφέρουμε και τη δυνατότητα επιβολής *μεικτής συνοριακής συνθήκης*, η οποία, δηλ., να αποτελεί σύνθεση διαφορετικών τύπων από τους ανωτέρω, σε αντίστοιχα διαφορετικά τμήματα του συνόρου.

Επέκταση στο ΠΑΣΤ των χαρακτηρισμών που αφορούν το ΠΑΤ. Όλοι οι χαρακτηρισμοί τόσο για το (ΠΑΤ), όπως η καλή τοποθέτησή του και η αυτονομία του, όσο και των αντίστοιχων λύσεων, όπως η (αποκλειστικά θετική εδώ) ολικότητά τους, μπορούν να επεκταθούν χωρίς δυσκολία και για το (ΠΑΣΤ) και τις λύσεις του, αντίστοιχα. Παρακάτω παρουσιάζουμε αδρά κάποια παραδείγματα αυτής της επέκτασης:

1. Μία λύση $y: \bar{U} \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$ του (ΠΑΣΤ) καλείται *ολική* αν $[0, T) = [0, \infty)$, ενώ λέμε ότι η y *εκρήγνυται* στο $T < \infty$ όταν $[0, T) = [0, T)$ και υπάρχει $\xi \in \bar{U}$, τέτοιο ώστε

$$\lim_{t \rightarrow T^-} |y(\xi, t)| = \infty,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|y(\cdot, t)\|_{C_B(\bar{U})} = \infty,$$

όπου $\|\cdot\|_{C_B(\bar{U})}$ η νόρμα του χώρου *Banach* (δηλ. του πλήρους διανυσματικού χώρου εφοδιασμένου με νόρμα) $C_B(\bar{U})$ με

$$\|\phi\|_{C_B(\bar{U})} := \sup \{|\phi(x)| \mid x \in \bar{U}\}, \quad \forall \phi \in C_B(\bar{U}).$$

Η έννοια της *μεγιστικής* λύσης είναι πανομοιότυπη με την αντίστοιχη για το (ΠΑΤ).

2. Αξίζει, επίσης, να σημειωθεί και το παράδειγμα της *συνεχούς εξάρτησης* της λύσης από τα δεδομένα (αρχικά, συνοριακά και συντελεστές του παραβολικού τελεστή), όπου η έννοια είναι παρόμοια με την περίπτωση του (ΠΑΤ) με τη μόνη διαφορά ότι η ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$ αντικαθίσταται από τη νόρμα $\|\cdot\|_{C_B(\bar{U})}$.
3. Η *αυτονομία* ενός (ΠΑΣΤ) χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα
 - των δεδομένων του προβλήματος, εκτός της f του δεξιού μέλους του αντίστοιχου μοντέλου, να μην εξαρτώνται από τη χρονική, t , μεταβλητή, και
 - της f να εξαρτάται από το t αποκλειστικά μέσω της λύσης y (ούτε καν μέσω των (χωρικών) παραγώγων της).

Πανομοιότυπα με την αντίστοιχη περίπτωση ενός αυτόνομου (ΠΑΤ) ορίζεται και ο *χώρος φάσης* ενός αυτόνομου (ΠΑΣΤ).

4. Δοθέντος ενός αυτόνομου (ΠΑΣΤ) που επιδέχεται μοναδική ολική λύση, ένα υποσύνολο του χώρου φάσης λέγεται *αναλλοίωτο* αν, για κάθε αρχική και συνοριακή συνθήκη με εικόνα εντός του υποσυνόλου, η εικόνα της λύσης βρίσκεται και αυτή εντός αυτού.
5. Η έννοια της *στάσιμης λύσης* ενός αυτόνομου (ΠΑΣΤ) είναι η αντίστοιχη της έννοιας του σ.ι. ενός αυτόνομου (ΠΑΤ), μόνο που, τώρα, η στάσιμη λύση εξαρτάται (αποκλειστικά) από τη χωρική μεταβλητή, x . Μάλιστα, οι *χαρακτηρισμοί των στάσιμων λύσεων* γίνονται εντελώς ανάλογα, με τη μόνη διαφορά ότι η νόρμα $|\cdot|$ αντικαθίσταται από τη νόρμα $\|\cdot\|_{C_B(\bar{U})}$.

Διακριτοποίηση του ΠΑΣΤ. Η ιδέα πίσω από τη διακριτοποίηση του (ΠΑΣΤ) είναι η ίδια με αυτή για το (ΠΑΤ), με τη διαφορά/γενίκευση ότι τώρα πρέπει να διακριτοποιηθεί, εκτός του χρόνου, και ο χώρος. Κατά τη διακριτοποίηση σε πολλές χωρικές διαστάσεις, τελείται, συνήθως, διαμέριση σε ειδικά κυρτά, εφαιπόμενα μεταξύ τους, μικρά υποσύνολα (προφανώς στη μία χωρική διάσταση αυτά εκφυλίζονται σε διαστήματα), τα οποία μπορεί να περιλαμβάνουν τριγωνικά/πυραμιδοειδή ή παραλληλόγραμμα/παραλληλεπίπεδα σχήματα, ανάλογα με την εκάστοτε γεωμετρία του χώρου και την προτίμηση του μελετητή.

Εδώ, απλά, θα επισημάνουμε μία λεπτομέρεια που αφορά μόνο το (ΠΑΣΤ), και συγκεκριμένα τη διακριτοποίηση των υψηλότερης τάξης διαφορίσεων. Κρατώντας τον ίδιο συμβολισμό, θυμίζουμε ότι κατά τη διακριτοποίηση, μέσω της μεθόδου του Euler, της πρώτης τάξης διαφορίσης στο (ΠΑΤ) χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση

$$\frac{dy}{dt}(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{h}.$$

Για τη διακριτοποίηση της δεύτερης τάξης διαφορίσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις προσεγγίσεις κατά Taylor

$$y_{k+1} \approx y_k + h \frac{dy}{dt}(t_k) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dt^2}(t_k)$$

και

$$y_{k-1} \approx y_k - h \frac{dy}{dt}(t_k) + \frac{h^2}{2} \frac{d^2y}{dt^2}(t_k),$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε τον κανόνα των τριών σημείων,

$$\frac{d^2y}{dt^2}(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}.$$

Αντίστοιχα καταλήγουμε σε προσεγγίσεις για διαφορίσεις υψηλότερης τάξης, μερικές και μη.

Για συστηματική μελέτη, διαφορετικών απαιτήσεων ως προς το μαθηματικό υπόβαθρο, όσον αφορά τις ΜΔΕ οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν στα συγγράμματα [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], ενώ ειδικότερα για φαινόμενα διάχυσης (που θα μελετηθούν στο τέταρτο και τελευταίο μέρος, *Διάχυση*) στα [26], [27], [28], [29] και για ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία περί αυτών στις εργασίες [30], [31].

Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Γιαλελής. *Θεωρία Κατανομών. Σημειώσεις Παραδόσεων*, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2022.
- [2] Γ. Δ. Ακριβής και Ν. Δ. Αλικάκος. *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Σύγχρονη Εκδοτική, 2η έκδοση, 2017.
- [3] Β. Μπιτσούνη. *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I. Σημειώσεις Παραδόσεων*, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2020.
- [4] Σ. Α. Τερεσένοβ. *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους*. Συμμετρία, 1992.
- [5] J. R. Cannon. *The One-Dimensional Heat Equation*. Cambridge University Press, 1984.
- [6] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2nd edition, 2010.
- [7] G. B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 2nd edition, 2020.
- [8] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Dover, 2008.
- [9] A. Friedman. *Partial Differential Equations*. Dover, 2008.
- [10] A. Friedman. “PDE problems arising in Mathematical Biology”. Στο: *Networks and Heterogeneous Media* 7 (2012), σσ. 691–703.
- [11] P. Garabedian. *Partial Differential Equations, revised edition*. Chelsea, 1998.
- [12] D. Gilbarg και Ν. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, corrected 3rd printing, 1998.
- [13] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer, 1981.
- [14] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer, 4th edition, 1982.
- [15] O. A. Ladyzhenskaya και Ν. N. Uraltseva. *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*. Elsevier, 1968.
- [16] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov και Ν. N. Uraltseva. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. AMS, 1968.
- [17] J. D. Logan. *Applied Partial Differential Equations*. Springer, 3rd edition, 2015.
- [18] J. D. Logan. *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. Wiley, 2nd edition, 2008.
- [19] F. Mikhailov. *Partial Differential Equations*. Mir Publishers, 1978.
- [20] I. G. Petrovskii. *Lectures on Partial Differential Equations*. Interscience, 1954.
- [21] J. Rauch. *Partial Differential Equations*. Springer, 1991.
- [22] M. Renardy και R. C. Rogers. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 1993.

- [23] S. Salsa. *Partial Differential Equations in Action*. Springer, 2015.
- [24] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer, 2nd edition, 1994.
- [25] W. A. Strauss. *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley, 2nd edition, 2007.
- [26] R. B. Banks. *Growth and Diffusion Phenomena*. Springer, 1994.
- [27] A. Okubo και S. A. Levin. *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*. Springer, 2001.
- [28] B. Perthame. *Parabolic Equations in Biology*. Springer, 2015.
- [29] V. Volpert. *Elliptic Partial Differential Equations, vol. 2: Reaction-Diffusion Equations*. Birkhäuser, 2014.
- [30] T. N. Narasimhan. “Fourier’s heat conduction equation: History, influence, and connections”. Στο: *Reviews of Geophysics* 37 (1999), σσ. 151–172.
- [31] J. Philibert. “One and a half century of diffusion: Fick, Einstein, before and beyond”. Στο: *Diffusion Fundamentals* 2 (2005), σσ. 1–10.

■ ΔΙΑΧΥΣΗ I

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Εκθετικό μοντέλο με όρο διάχυσης, ή μοντέλο Skellam

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

(α) Γραμμικό εκφυλισμένο ΠΑΣΤ:

i. Καλή τοποθέτηση του προβλήματος

ii. Λύση σε ολοκληρωτική μορφή για το πρόβλημα της κλασικής εξίσωσης διάχυσης

(β) Δείκτης μοτίβου

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 7,11](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας: Όπως έγινε και για τα αμιγώς χρονικά εξαρτώμενα μοντέλα, έτσι για και τα μοντέλα των χωροχρονικών φαινομένων υποτίθεται ότι $\text{Ran}(N) \subseteq [0, \infty)$, όπου N ο (χωροχρονικά, πλέον, μεταβαλλόμενος) υπό μελέτη πληθυσμός.

Εκθετικό μοντέλο με όρο διάχυσης (Skellam, 1951). Έστω $N(x, t)$ ο πληθυσμός ενός είδους στο σημείο $x \in U$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό και συνεκτικό, κατά τη χρονική στιγμή $t \in (0, \infty)$. Σε αντιστοιχία με το αμιγώς χρονικά εξαρτώμενο εκθετικό μοντέλο, το μοντέλο Skellam χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = rN, \quad (12.1)$$

όπου $D > 0$ και $r \in \mathbb{R}$. Εδώ, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $r > 0$, δηλ. κατά την εισβολή (*invasion*) του πληθυσμού στον οικότοπο (*habitat*)/περιβάλλοντα χώρο του.

Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου $U = \mathbb{R}$, δηλ. την περίπτωση άπειρου οικοτόπου, οπότε και θα

θεωρήσουμε ένα εκφυλισμένο ΠΑΣΤ, και στη συνέχεια θα μελετήσουμε την περίπτωση φραγμένου U , δηλ. την περίπτωση πεπερασμένου οικοτόπου, και το αντίστοιχο γνήσιο ΠΑΣΤ.

Το αντίστοιχο εκφυλισμένο ΠΑΣΤ. Το εκφυλισμένο ΠΑΣΤ για το παραπάνω μοντέλο είναι το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένη } N_0 \in C_B(\mathbb{R}; [0, \infty)), \text{ αναζητούμε } T > 0 \text{ και συνάρτηση} \\ N: \mathbb{R} \times [0, T) & \rightarrow [0, \infty), \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (12.1) στο} & (\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1}) \\ & \mathbb{R} \times (0, T) \text{ όσο και την } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ένα ισοδύναμο εκφυλισμένο ΠΑΣΤ. Θα ήταν προτιμότερο να είχαμε τη δυνατότητα να αναγάγουμε το $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$ σε ένα ισοδύναμο ΠΑΣΤ, όπου, αντί της (12.1), να είχαμε για μοντέλο την κλασική εξίσωση διάχυσης

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = 0, \quad (12.2)$$

την οποία και μπορούμε να διαχειριστούμε κομψά. Πράγματι, κάτι τέτοιο είναι εφικτό μέσω του μετασχηματισμού (βλ. Άσκηση 12.1)

$$N(x, t) \mapsto e^{rt} N(x, t), \quad (12.3)$$

και έτσι το προαναφερθέν ισοδύναμο πρόβλημα θα είναι το εξής:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένη } N_0 \in C_B(\mathbb{R}; [0, \infty)), \text{ αναζητούμε } T > 0 \text{ και συνάρτηση} \\ N: \mathbb{R} \times [0, T) & \rightarrow [0, \infty), \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (12.2) στο} & (\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 2}) \\ & \mathbb{R} \times (0, T) \text{ όσο και την } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Τελικά, υπό το πρίσμα του μετασχηματισμού (12.3), αν η N είναι λύση του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 2})$, τότε και μόνο τότε η $e^{rt} N$ είναι λύση του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$.

Άσκηση 12.1. Δείξτε ότι, για $m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $T \in (0, \infty]$, σταθερές $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}^m$ και $c \in \mathbb{R}$, δύο συμμετρικούς και ομοιόμορφα παραβολικούς τελεστές, $\frac{\partial}{\partial t} + L_{x,1}$ και $\frac{\partial}{\partial t} + L_{x,2}$, στο $\bar{U} \times [0, T)$, τέτοιους ώστε

$$L_{1,x}(x, t) := -a\Delta_x + b\nabla_x + c \text{ id και } L_{2,x}(x, t) := -a\Delta_x, \quad \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T),$$

και πολλαπλασιαστικό τελεστή, E , στο $\bar{U} \times [0, T)$, που ορίζεται ως

$$E(x, t) := e^{\frac{1}{2a} b \cdot x - \left(\frac{|b|^2}{4a} + c\right)t} \text{ id}, \quad \forall (x, t) \in \bar{U} \times [0, T),$$

ισχύει ότι

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + L_{x,1}\right) \circ E = \frac{\partial}{\partial t} + L_{x,2}.$$

Καλή τοποθέτηση του προβλήματος, ολικότητα και ομαλότητα της λύσης. Κάνοντας χρήση κλασικών θεωρημάτων (βλ. Άσκηση 12.2) εξάγουμε ύπαρξη και μοναδικότητα ολικής, συνεχώς εξαρτώμενης από τη δεδομένη αρχική συνάρτηση και φραγμένης λύσης του ακόλουθου γενικού προβλήματος:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένη } N_0 \in C_B(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \text{ αναζητούμε } T > 0 \text{ και συνάρτηση} \\ N: \mathbb{R} \times [0, T) & \rightarrow \mathbb{R}, \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (12.2) στο } \mathbb{R} \times (0, T) & (\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 2} \diamond) \\ & \text{όσο και την } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Μάλιστα, η λύση του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 2} \diamond)$ δίνεται, εκτός του $\mathbb{R} \times \{0\}$, από τον τύπο Duhamel

$$N(x, t) = \frac{1}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} N_0(\xi) d\xi, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Ακριβώς από αυτό τον τύπο μπορούμε, επιπλέον, να εξαγάγουμε (βλ. Άσκηση 12.2) και όλες τις επιπλέον “καλές” ιδιότητες που χαρακτηρίζουν τη λύση, οι οποίες δίνονται στην παρακάτω λίστα.

- Ομαλότητα της λύσης στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ¹. Πράγματι, καθώς η συνάρτηση εντός του ολοκληρώματος είναι ομαλή (τόσο ως προς x όσο και ως προς t), κάνοντας χρήση του κλασικού αποτελέσματος που μας επιτρέπει τη διαφορίση εντός του ολοκληρώματος, αρκεί τελικά να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$\mathbb{R} \times (0, \infty) \ni (x, t) \mapsto |x|^k e^{-\frac{Kx^2}{t}} \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}_0, \forall K > 0,$$

είναι φραγμένες από τις αντίστοιχες

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|^k e^{-Kx^2} \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}_0, \forall K > 0,$$

οι οποίες και είναι ολοκληρώσιμες στο \mathbb{R} . Προφανώς, αν η αρχική συνάρτηση N_0 υποτεθεί ομαλή, τότε και η λύση θα είναι ομαλή εντός όλου του $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

- Το σύνολο

$$[0, \infty)$$

είναι αναλλοίωτο για το $(\text{exp}_{\Delta, \mathbb{R}, 2} \diamond)$. Πράγματι, αν $N_0 \equiv 0$, τότε $N \equiv 0$, ενώ αν $N_0(x) \in [0, \infty)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και υπάρχει $\xi_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $N_0(\xi_0) > 0$, τότε $N(\mathbb{R} \times (0, \infty)) \subseteq (0, \infty)$ ². Ως προς το τελευταίο, σημειώνουμε ότι αν υπάρχει τέτοιο ξ_0 , τότε -λόγω συνέχειας της N_0 - θα υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $N_0([\xi_0 - \rho, \xi_0 + \rho]) \subseteq (0, \infty)$, συνεπώς

$$N(x, t) \geq \frac{1}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \int_{\xi_0 - \rho}^{\xi_0 + \rho} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} N_0(\xi) d\xi > 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Άρα, τελικά, θα έχουμε και καλή τοποθέτηση του $(\text{exp}_{\Delta, \mathbb{R}, 2})$, με ολικότητα και ομαλότητα της λύσης του στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Κατά συνέπεια, ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τη λύση του $(\text{exp}_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$, η οποία δίνεται, εκτός του $\mathbb{R} \times \{0\}$, από τον τύπο

$$N(x, t) = \frac{1}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{rt - \frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} N_0(\xi) d\xi, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (12.4)$$

Άσκηση 12.2. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της βασικής (Φάση I) μελέτης του $(\text{exp}_{\Delta, \mathbb{R}, 2})$.

Μια ειδική περίπτωση λύσης του εκφυλισμένου ΠΑΣΤ. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλος ο αρχικός πληθυσμός N_0 έχει συμπυκνωθεί σε ένα μικρό τμήμα του \mathbb{R} (και συγκεκριμένα γύρω από το 0), και αν ναι, ποια μορφή θα έχει η αντίστοιχη λύση;

Καταρχάς, ένα τέτοιο σενάριο αρχικής κατανομής του πληθυσμού είναι φυσικά αποδεκτό. Για παράδειγμα, μια αποικία βακτηρίων εμβολίζεται με έναν στελεό³ με πολύ μικρή (σχεδόν μηδενική) διάμετρο κορυφής εντός πολύ μεγάλου (σχεδόν άπειρου) μήκους και πολύ μικρής (σχεδόν μηδενικής) διαμέτρου κυλινδρικού σωλήνα γεμάτου με θρεπτικό υλικό.

¹ Αυτή η ιδιότητα, δηλ. ότι για συνεχή αρχική δεδομένη συνάρτηση, η αντίστοιχη λύση είναι ομαλή στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, αναφέρεται ως επίδραση εξομάλυνσης (*smoothing effect*) της διάχυσης στη λύση της εξίσωσης διάχυσης.

² Αυτή η τελευταία ιδιότητα, δηλ. ότι για μια θετική τιμή της μη αρνητικής αρχικής συνθήκης του $(\text{exp}_{\Delta, \mathbb{R}, 2} \diamond)$, η αντίστοιχη λύση είναι θετική στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, αναφέρεται ως ότι η εξίσωση διάχυσης επιβάλλει άπειρη ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών (σε αντίθεση, για παράδειγμα, με την κυματική εξίσωση όπου η ταχύτητα αυτή είναι πεπερασμένη).

³ Στελεός: είδος μπατονέτας, που χρησιμοποιείται για τη λήψη δείγματος από βιολογικό υλικό.

Επιλέγουμε, λοιπόν, ενδιάστατες ποσότητες

$$N_{\square} > 0, \text{ με μονάδα μέτρησης άτομα} \cdot [\text{μήκος}]$$

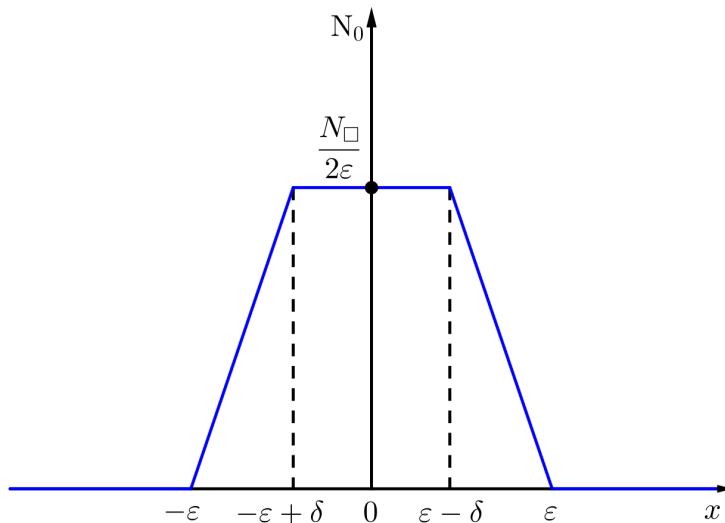
και

$$\delta, \varepsilon \in (0, \infty), \text{ με κοινή μονάδα μέτρησης } [\text{μήκος}], \text{ τέτοιες ώστε } 0 < \delta \ll \varepsilon \ll \frac{1}{2} [\text{μήκος}], \quad (12.5)$$

και ως αρχική συνθήκη του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$ την

$$N_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in (-\infty, -\varepsilon] \\ \frac{N_{\square}}{2\varepsilon\delta} (x + \varepsilon), & \text{αν } x \in [-\varepsilon, -\varepsilon + \delta] \\ \frac{N_{\square}}{2\varepsilon}, & \text{αν } x \in [-\varepsilon + \delta, \varepsilon - \delta] \\ \frac{N_{\square}}{2\varepsilon\delta} (-x + \varepsilon), & \text{αν } x \in [\varepsilon - \delta, \varepsilon] \\ 0, & \text{αν } x \in [\varepsilon, \infty), \end{cases} \quad (12.6)$$

η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο [Σχήμα 12.1](#).



Σχήμα 12.1: Γραφική παράσταση της επιλεγμένης αρχικής συνθήκης, N_0 , όπως στην (12.6). Περιγράφεται σαν να έχει συσσωρευτεί όλος σχεδόν ο πληθυσμός στο διάστημα $[-\varepsilon + \delta, \varepsilon - \delta] \approx [-\varepsilon, \varepsilon]$, ο οποίος έχει σε όλο αυτό το διάστημα την ίδια περίπου τιμή.

Αφού $N_0(x) = 0$, για κάθε $|x| > \varepsilon$, τελικά $N_0(x) \approx 0$, για κάθε $x \neq 0$.

Τώρα, από την (12.4) έχουμε ότι

$$N(x, t) = \frac{N_{\square} e^{rt}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} (I_1(x, t) + I_2(x, t) + I_3(x, t)), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

όπου, για κάθε $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$,

$$I_1(x, t) := \frac{1}{2\varepsilon\delta} \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+\delta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} (\xi + \varepsilon) d\xi,$$

$$I_2(x, t) := \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon+\delta}^{\varepsilon-\delta} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi, \text{ και}$$

$$I_3(x, t) := \frac{1}{2\varepsilon\delta} \int_{\varepsilon-\delta}^{\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} (-\xi + \varepsilon) d\xi.$$

Για κάθε $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, έχουμε για τα I_1 και I_3 ότι $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$, ότι

$$I_1(x, t) \leq \frac{1}{2\varepsilon\delta} \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon+\delta} (\xi + \varepsilon) d\xi = \frac{\delta}{4\varepsilon} \stackrel{\delta \ll 4\varepsilon}{\approx} 0 \text{ και αντίστοιχα } I_3(x, t) \approx 0,$$

ενώ για το I_2 ότι

$$I_2(x, t) \stackrel{\delta \ll \varepsilon}{\approx} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi \stackrel{2\varepsilon \ll 1[\text{μήκος}]}{\approx} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Τελικά⁴

$$N(x, t) \approx \frac{N_{\square}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} e^{rt - \frac{x^2}{4Dt}}, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \tag{12.7}$$

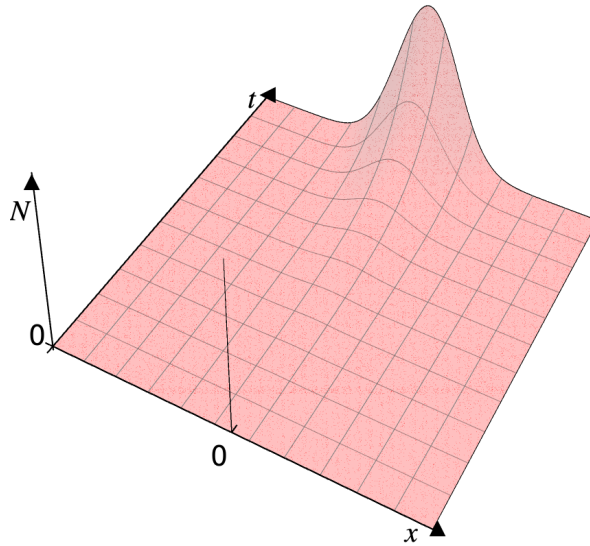
και η γραφική παράσταση ενός παραδείγματος της προσέγγισης αυτής απεικονίζεται στο [Σχήμα 12.2](#).

Σχηματισμός μοτίβου. Μέσω του [Σχήματος 12.2](#) έχουμε μια ιδέα της μορφής της λύσης στον χώρο, καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Ωστόσο, για να διερευνήσουμε αυστηρά την ύπαρξη και το είδος του μοτίβου που τυχόν εμφανίζει η $N(\cdot, t)$, για κάθε $t > 0$, πρέπει να υπολογίσουμε, τουλάχιστον κατά προσέγγιση, τον δείκτη μοτίβου της.

Αρχικά, υπολογίζουμε τη χωρική μέση τιμή, \overline{N}^x , της προσέγγισης της λύσης στην $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$. Έτσι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{N}^x(t) &\approx \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\rho} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{N_{\square}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} e^{rt - \frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi = \frac{N_{\square} e^{rt}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{2\rho} e^{-\frac{\xi^2}{4Dt}} d\xi = \\ &= \frac{N_{\square} e^{rt}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\xi^2}{16\rho^2 Dt}} d\xi = \frac{N_{\square} e^{rt}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 d\xi = \frac{N_{\square} e^{rt}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}}, \forall t > 0, \end{aligned}$$

⁴Η γνήσια ισότητα, αντί της προσεγγιστικής στη σχέση (12.7), θεμελιώνεται αυστηρά μέσω της Θεωρίας Κατανομών (Θεωρίας Γενικευμένων Συναρτήσεων) (βλ., π.χ., [1]). Συγκεκριμένα λαμβάνεται όταν επιλέξουμε ως αρχική συνάρτηση N_0 το γινόμενο του N_{\square} επί τη μονοδιάστατη κατανομή Dirac (η οποία είναι και αυτή ενδιάστατη, με μονάδα μέτρησης $[\text{μήκος}]^{-1}$). Η αυστηρή αυτή διαδικασία, ωστόσο, δεν εντάσσεται στους στόχους του παρόντος συγγράμματος.



Σχήμα 12.2: Γραφική παράσταση της προσέγγισης μιας λύσης, N , του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$, όπως δίνεται στην (12.7), όπου και έχει θεωρηθεί η N_0 της (12.6) ως αρχική δεδομένη συνάρτηση. Γενικά, για μια τέτοια προσέγγιση ισχύει ότι $\lim_{(x,t) \rightarrow (0,0)} N(x,t) = \infty$, κάτι άλλωστε που καταδεικνύεται στο σχήμα.

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής και το αποτέλεσμα που μας επιτρέπει την εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος. Οπότε ο ζητούμενος δείκτης μοτίβου είναι, προσεγγιστικά, ο

$$t_{pat} N(x, t) = \frac{N(x, t)}{N(x, 0)} \approx e^{-\frac{x^2}{4Dt}}, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty). \quad (12.8)$$

Παρατηρούμε, δηλ., ότι, για κάθε $t > 0$, η $N(\cdot, t)$ εμφανίζει μοτίβο που περιγράφεται κατά προσέγγιση από μια συνάρτηση Gauss γύρω από το μηδέν, η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται στο Σχήμα 12.3.

Δυνατότητα παρατήρησης. Αν θεωρήσουμε ότι όλος ο αρχικός πληθυσμός N_0 έχει συμπυκνωθεί γύρω από ένα σημείο (και συγκεκριμένα γύρω από το 0), τότε πόσος χρόνος απαιτείται να παρέλθει μέχρι να γίνει αντιληπτή η ύπαρξη του πληθυσμού σε κάποιο σημείο του \mathbb{R} ; Συγκεκριμένα, πόσος χρόνος, t , χρειάζεται μέχρι να γίνει αντιληπτή η διαφορά $N(x, t) - N_0(x)$, στα σημεία, x , όπου $N_0(x) = 0$, δηλ., προσεγγιστικά, τότε θα γίνει αντιληπτό το $N(x, t)$, γενικά στα σημεία $x \neq 0$;

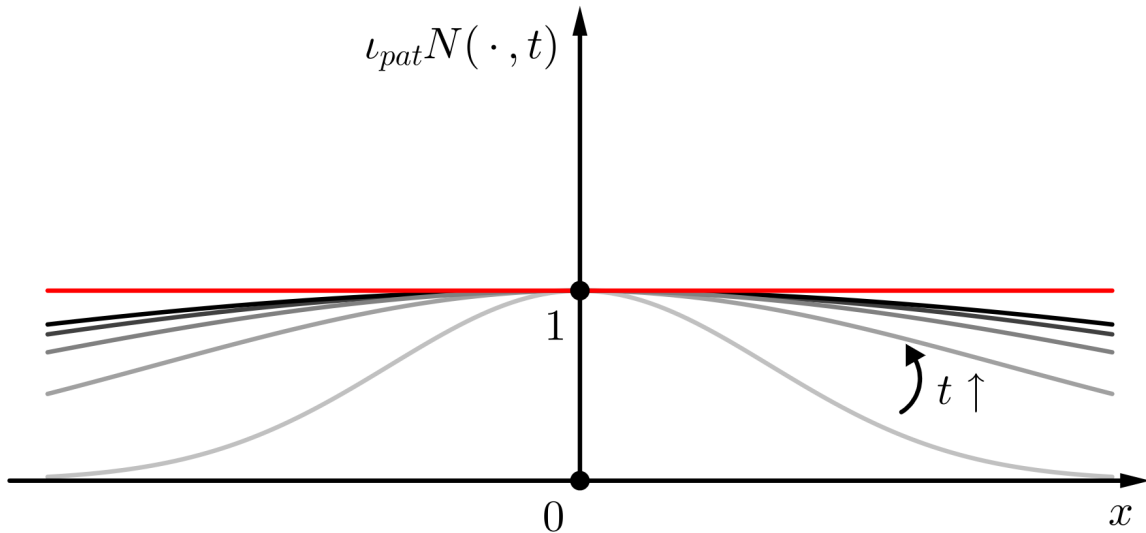
Ας γίνουμε όμως πιο σαφείς ως προς το ερώτημα αυτό. Είναι φυσικά αποδεκτό το σενάριο ότι για να παρατηρηθεί ένας πληθυσμός σε οποιοδήποτε σημείο, x , πρέπει το πλήθος του να ξεπερνάει έναν συγκεκριμένο θετικό ουδό, N_{thr} , δηλ. $N(x, t) \geq N_{thr} > 0$. Ο ουδός αυτός είναι χαρακτηριστικός τόσο του υπό παρατήρηση πληθυσμού, όσο και των χρησιμοποιούμενων μέσων παρατήρησης. Συγκεκριμένα, για πληθυσμούς εύκολα ανιχνεύσιμους, ο ουδός είναι πλησιέστερα στο 0, σε σύγκριση με τον ουδό των δύσκολα ανιχνεύσιμων.

Έτσι, για δεδομένο $N_{thr} > 0$, λύνοντας την

$$N(x_{thr}(t), t) \equiv N_{thr}, \quad \text{για κατάλληλα } t > 0,$$

έχουμε, από την (12.7), ότι

$$x_{thr}(t) \approx \pm \left(4Drt^2 - 2Dt \ln \left(4\pi D \left(\frac{N_{thr}}{N_{\square}} \right)^2 t \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{για κάθε } t > 0, \quad \tau.ω.: N_{thr} < N_{\square} \frac{e^{rt}}{2(\pi Dt)^{\frac{1}{2}}},$$



Σχήμα 12.3: Ο δείκτης μοτίβου της $N(\cdot, t)$ για διάφορα $t > 0$. Για κάθε $t > 0$, ο δείκτης αυτός λαμβάνει τη μέγιστη τιμή 1 στο σημείο $x = 0$.

ή, ισοδύναμα (βλ. Άσκηση 12.3),

$$x_{thr}(t) \approx \pm (4Drt^2 - 2Dt \ln(\theta t))^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall t \in \begin{cases} (0, \infty), & \text{αν } \frac{\theta}{2r} \in (0, e) \\ (0, \infty) \setminus \left\{ \frac{1}{2r} \right\}, & \text{αν } \frac{\theta}{2r} = e \\ \left(0, -\frac{1}{2r} W_0\left(-\frac{2r}{\theta}\right) \right) \cup \left(-\frac{1}{2r} W_{-1}\left(-\frac{2r}{\theta}\right), \infty \right), & \text{αν } \frac{\theta}{2r} \in (e, \infty) \end{cases} \quad \text{όπου } \theta := 4\pi D \left(\frac{N_{thr}}{N_{\square}} \right)^2.$$

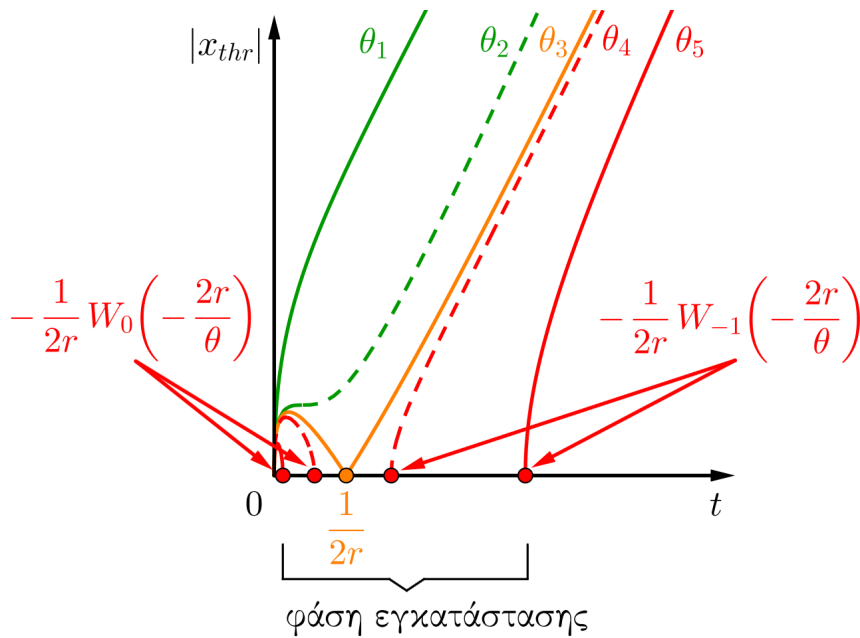
(12.9)

Η συνάρτηση $|x_{thr}|$ καλείται εύρος (*range*) του πληθυσμού, μιας και η συνάρτηση $2|x_{thr}|$ αποτελεί το μήκος (συναρτήσεως του χρόνου) της περιοχής (γύρω από το 0) εντός της οποίας μπορούμε να παρατηρήσουμε την ύπαρξη του πληθυσμού. Από την (12.9) συμπεραίνουμε ότι ενώ για $\frac{\theta}{2r} < e$ ο πληθυσμός είναι πάντα ανιχνεύσιμος, αντιθέτως για $\frac{\theta}{2r} > e$ έχουμε αρχικά μια (ενδεχομένως πολύ) σύντομη περίοδο στην οποία παρατηρείται ο πληθυσμός (άσχετα με το πόσο δύσκολο είναι να ανιχνευθεί⁵), στη συνέχεια ο πληθυσμός εισέρχεται στη φάση εγκατάστασης (*establishment phase*) κατά την οποία δεν είναι ανιχνεύσιμος και, τέλος, ο πληθυσμός παραμένει σε μια κατάσταση στην οποία ανιχνεύεται. Στο Σχήμα 12.4 απεικονίζεται η γραφική παράσταση της προσέγγισης του εύρους του πληθυσμού για διάφορες τιμές του $\frac{\theta}{2r}$ όταν μεταβάλλεται μόνο το θ .

Άσκηση 12.3. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες για την εξαγωγή της (12.9).

Ασυμπτωτική μελέτη. Σχετικά με τυχόν μοτίβο, για μεγάλους χρόνους, t , της λύσης, N , του (12.5) με αρχική δεδομένη συνάρτηση όπως στην (12.6), θα είναι κατά σημείο και κατά προσέγγιση απόν, όπως άλλωστε

⁵Γενικά, κάτι τέτοιο είναι προφανώς αδύνατο, καθώς όσο μεγάλη και αν είναι η ποσότητα $\frac{N_{\square}}{2\epsilon}$, δεν παύει να είναι πεπερασμένη, οπότε σε ακραίες περιπτώσεις όπου το $N_{thr} > \frac{N_{\square}}{2\epsilon}$, ο πληθυσμός δεν θα μπορέσει ούτε για χρόνους πολύ κοντά στο 0 να γίνει αντιληπτός. Ωστόσο, στην πράξη δεν υπάρχει πρόβλημα, καθώς για τις ακραίες αυτές τιμές του N_{thr} , το $-\frac{1}{2r} W_0\left(-\frac{2r}{\theta}\right)$, που οριοθετεί την πρώτη φάση παρατήρησης, είναι σχεδόν ίσο με το 0.



Σχήμα 12.4: Γραφική παράσταση της προσέγγισης του εύρους του πληθυσμού για διάφορες τιμές του $\frac{\theta}{2r}$ με σταθερό r . Οι τιμές των διάφορων θ_i αυξάνονται με την αύξηση των δεικτών τους, $i \in \{1, \dots, 5\}$. Με πράσινο αν $\frac{\theta_i}{2r} \in (0, e)$, με πορτοκαλί αν $\frac{\theta_i}{2r} = e$ και με κόκκινο αν $\frac{\theta_i}{2r} \in (e, \infty)$. Για $\frac{\theta}{2r} > e$, ο πληθυσμός αρχικά παρατηρείται για σύντομο χρονικό διάστημα, ύστερα εισέρχεται σε φάση εγκατάστασης και τέλος γίνεται ανιχνεύσιμος. Επίσης, για μεγάλους χρόνους, t , η κλίση του εύρους είναι περίπου σταθερή.

υπονοείται και στο Σχήμα 12.3, αφού για την $t_{pat}N(\cdot, t)$, η οποία υπολογίστηκε στην (12.8), ισχύει ότι

$$t_{pat}N(x, t) \sim 1, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t_{pat}N(x, t) - 1| = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Σημειώνουμε, ωστόσο, ότι η παραπάνω κατά σημείο σύγκλιση δεν μπορεί να επιτευχθεί ομοιόμορφα, καθώς

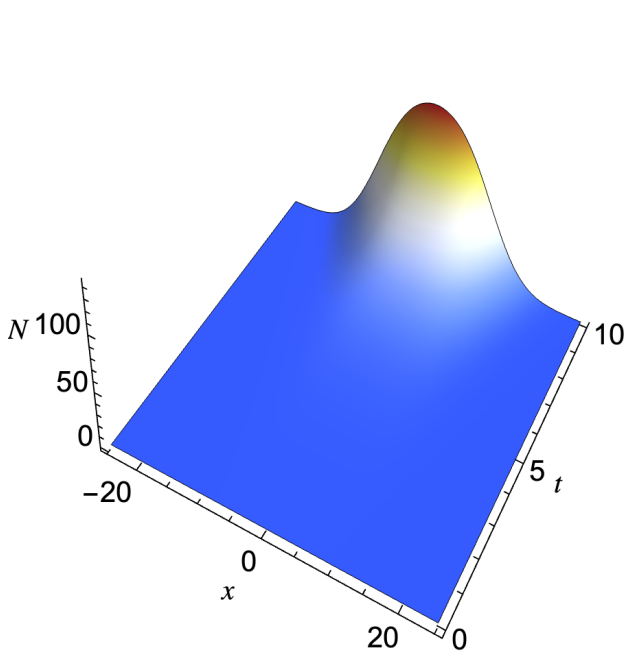
$$\|t_{pat}N(\cdot, t) - 1\|_{C_B(\mathbb{R}; \mathbb{R})} = 1, \forall t > 0.$$

Σχετικά με τη δυνατότητα παρατήρησης του πληθυσμού για μεγάλους χρόνους, τελικά το εύρος αυξάνεται και ο πληθυσμός εξαπλώνεται με ένα κυματικό μέτωπο, x_{thr} , που ταξιδεύει με περίπου σταθερή ταχύτητα, $\pm 2(Dr)^{\frac{1}{2}}$, όπως άλλωστε ποιοτικά διακρίνεται και στο Σχήμα 12.4, αφού

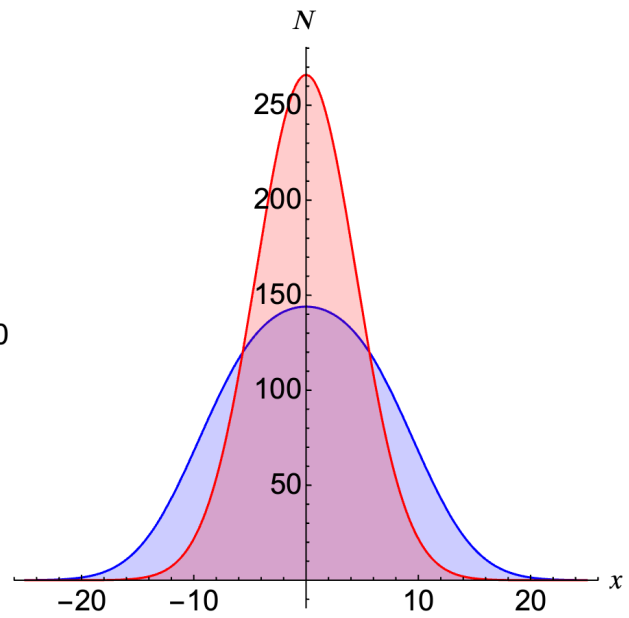
$$x_{thr}(t) \sim \pm 2(Dr)^{\frac{1}{2}}t, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty.$$

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), όπως φαίνεται στο Σχήμα 12.5, στο Σχήμα 12.6 και στο Σχήμα 12.7, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας.

Με το Σχήμα 12.5 επαληθεύουμε αριθμητικά την αναλυτική προσέγγιση (12.7).

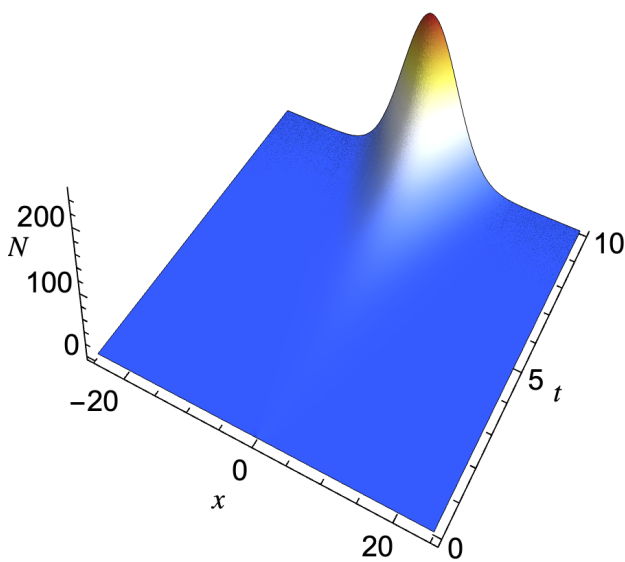


(α) Αριθμητική επίλυση του προβλήματος.

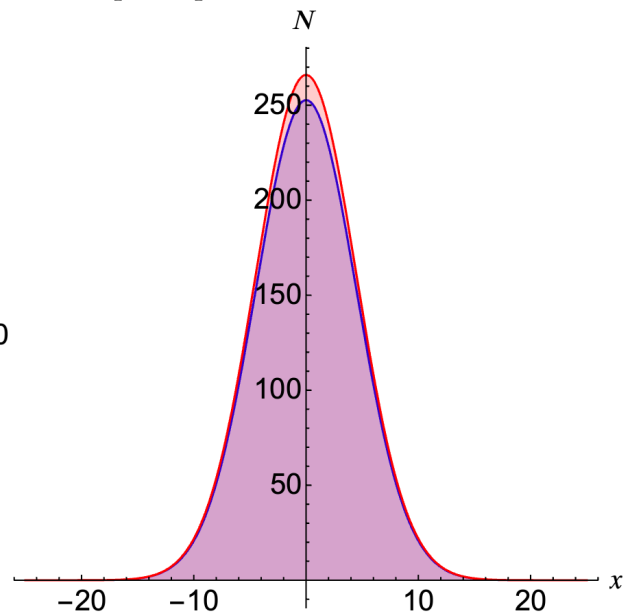


(β) Σύγκριση της λύσης που προκύπτει αριθμητικά (μπλε) και της προσέγγισης (12.7) (κόκκινο), για $t = 10$ [χρόνος].

$$\varepsilon = 10 \text{ [μήκος]} \text{ και } \delta = 1 \text{ [μήκος].}$$



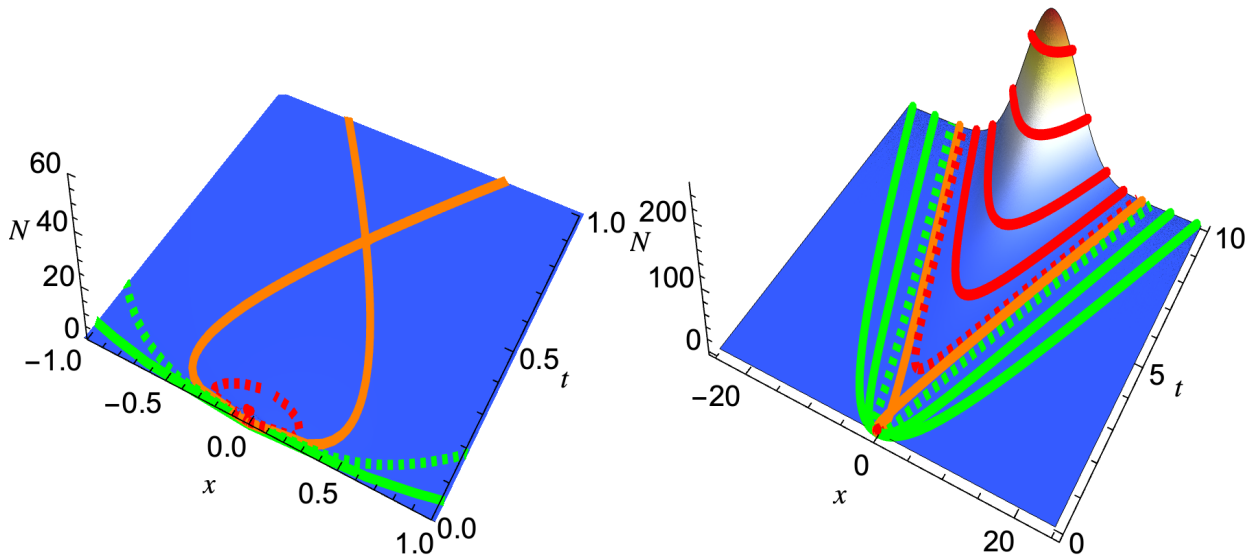
(γ) Αριθμητική επίλυση του προβλήματος.



(δ) Σύγκριση της λύσης που προκύπτει αριθμητικά (μπλε) και της προσέγγισης (12.7) (κόκκινο), για $t = 10$ [χρόνος].

$$\varepsilon = 10^{-2} \text{ [μήκος]} \text{ και } \delta = 10^{-3} \text{ [μήκος].}$$

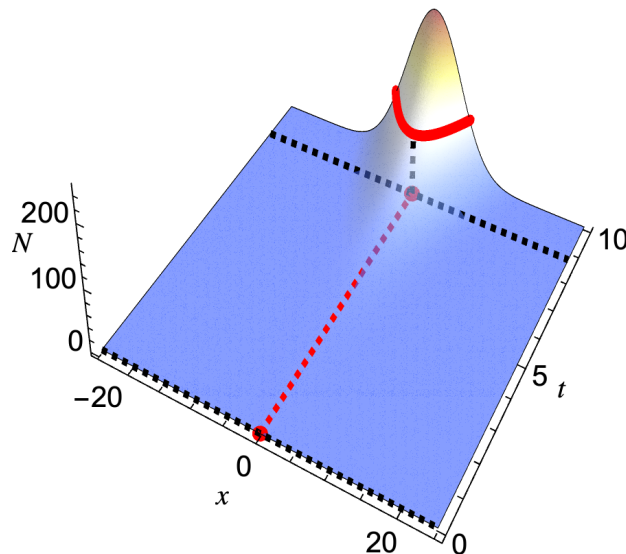
Σχήμα 12.5: Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, R, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ $[\text{μήκος}]^2 \cdot [\text{χρόνος}]^{-1}$, $r = 0.8$ $[\text{χρόνος}]^{-1}$, $N_{\square} = 1$ άτομο \cdot $[\text{μήκος}]$, και για διάφορες τιμές των ε και δ , και σύγκριση της λύσης που προκύπτει αριθμητικά με την προσέγγιση (12.7). Η αναλυτική προσέγγιση (12.7) καταρρέει όταν η συνθήκη (12.5) καταστρατηγείται, ενώ πρόκειται όντως για μια καλή προσέγγιση υπό την ισχύ της συνθήκης αυτής.



(α) $x \in [-1, 1]$ [μήκος] και $t \in [0, 1]$ [χρόνος].

(β) $x \in [-25, 25]$ [μήκος] και $t \in [0, 10]$ [χρόνος].

Σχήμα 12.6: Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, R, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² · [χρόνος]⁻¹, $r = 0.8$ [χρόνος]⁻¹, $N_{\square} = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος], και παράλληλη απεικόνιση των καμπυλών των προσεγγίσεων του εύρους στην (12.9), “υψωμένες” κατά N_{thr} από το οριζόντιο επίπεδο, για διάφορες τιμές του N_{thr} . Με πράσινο αν $\frac{\theta}{2r} \in (0, e)$, με πορτοκαλί αν $\frac{\theta}{2r} = e$ και με κόκκινο αν $\frac{\theta}{2r} \in (e, \infty)$.



Σχήμα 12.7: Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta, R, 1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² · [χρόνος]⁻¹, $r = 0.8$ [χρόνος]⁻¹, $N_{\square} = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος], και παράλληλη απεικόνιση της καμπύλης της προσέγγισης του εύρους στην (12.9), για $N_{thr} = 100$ άτομα, “υψωμένη” κατά N_{thr} από το οριζόντιο επίπεδο. Το μήκος του κόκκινου διακεκομμένου ευθύγραμμου τμήματος αποτελεί τη φάση εγκατάστασης για την παραπάνω τιμή του ουδού στο σημείο $x = 0$.

Παρατηρούμε ότι όταν καταστρατηγείται η (12.5) η προσέγγιση (12.7) δεν είναι καλή, ενώ το αντίθετο συμβαίνει υπό την ισχύ της (12.5).

Στο Σχήμα 12.6 απεικονίζονται, για διάφορες τιμές του N_{thr} , οι καμπύλες των προσεγγίσεων του εύρους στην (12.9), “υψωμένες” κατά N_{thr} από το οριζόντιο επίπεδο.

Οι καμπύλες αυτές αποτελούν ουσιαστικά τις προσεγγίσεις των καμπυλών στάθμης της επιφάνειας της λύσης του $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 1})$ για διάφορες τιμές του N .

Τέλος, στο Σχήμα 12.7 απεικονίζεται η φάση εγκατάστασης στο σημείο $x = 0$, για μια συγκεκριμένη τιμή του N_{thr} .

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Γραμμικό εκφυλισμένο ΠΑΣΤ. Εδώ θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα που αφορούν τη μελέτη της Φάσης I του γραμμικού εκφυλισμένου (ΠΑΣΤ), δηλ. όταν η f είναι ανεξάρτητη του y και του $\nabla_x y$ και επίσης $U = \mathbb{R}^m$. Προφανώς, σε μια τέτοια περίπτωση αρκεί να περιορίσουμε τη μελέτη μας για $n = 1$.

Βασική, γενικά για τη μελέτη του (ΠΑΣΤ), είναι η *συνθήκη Hölder* (ή, αλλιώς, *Hölder συνέχεια*). Έστω $\phi: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση, όπου $S \subseteq \mathbb{R}^m$. Θυμίζουμε πως λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί *συνθήκη Hölder με εκθέτη* $\delta \in (0, 1)$, αν υπάρχει θετική σταθερά $H = H(S)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| \leq H|x_2 - x_1|^\delta, \forall x_1, x_2 \in S,$$

λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί *τοπικά συνθήκη Hölder με εκθέτη* $\delta \in (0, 1)$, αν για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S$ υπάρχει θετική σταθερά $H = H(\Sigma)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| \leq H|x_2 - x_1|^\delta, \forall x_1, x_2 \in \Sigma,$$

καθώς επίσης λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί *ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη* $\delta \in (0, 1)$, αν υπάρχει θετική σταθερά H , τέτοια ώστε, για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S$,

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| \leq H|x_2 - x_1|^\delta, \forall x_1, x_2 \in \Sigma.$$

Γενικεύοντας, έστω $\phi: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση, όπου $S_1 \times S_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$. Λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί *συνθήκη Hölder με εκθέτες* $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ ως προς $x_1 \in S_1$ και $x_2 \in S_2$, αντίστοιχα, αν υπάρχει θετική σταθερά $H = H(S_1 \times S_2)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_{1,1}, x_{2,1}) - \phi(x_{1,2}, x_{2,2})| \leq H \left(|x_{1,1} - x_{1,2}|^{\delta_1} + |x_{2,1} - x_{2,2}|^{\delta_2} \right), \forall (x_{1,1}, x_{2,1}), (x_{1,2}, x_{2,2}) \in S_1 \times S_2,$$

λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί *τοπικά συνθήκη Hölder με εκθέτες* $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ ως προς $x_1 \in S_1$ και $x_2 \in S_2$, αντίστοιχα, αν για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S_1 \times S_2$ υπάρχει θετική σταθερά $H = H(\Sigma)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_{1,1}, x_{2,1}) - \phi(x_{1,2}, x_{2,2})| \leq H \left(|x_{1,1} - x_{1,2}|^{\delta_1} + |x_{2,1} - x_{2,2}|^{\delta_2} \right), \forall (x_{1,1}, x_{2,1}), (x_{1,2}, x_{2,2}) \in \Sigma,$$

καθώς επίσης, λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί *ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες* $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1)$ ως προς $x_1 \in S_1$ και $x_2 \in S_2$, αντίστοιχα, αν υπάρχει θετική σταθερά H , τέτοια ώστε, για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S_1 \times S_2$,

$$|\phi(x_{1,1}, x_{2,1}) - \phi(x_{1,2}, x_{2,2})| \leq H \left(|x_{1,1} - x_{1,2}|^{\delta_1} + |x_{2,1} - x_{2,2}|^{\delta_2} \right), \forall (x_{1,1}, x_{2,1}), (x_{1,2}, x_{2,2}) \in \Sigma.$$

Επιπροσθέτως, λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί *συνθήκη Hölder με εκθέτη* $\delta \in (0, 1)$ ως προς $x_1 \in S_1$, ομοιόμορφα ως προς $x_2 \in S_2$, αν υπάρχει θετική σταθερά $H = H(S_1)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_{1,1}, x_2) - \phi(x_{1,2}, x_2)| \leq H|x_{1,1} - x_{1,2}|^\delta, \forall (x_{1,1}, x_2), (x_{1,2}, x_2) \in S_1 \times S_2,$$

λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Hölder με εκθέτη $\delta \in (0, 1)$ ως προς $x_1 \in S_1$, ομοιόμορφα ως προς $x_2 \in S_2$, ανν για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S_1$ υπάρχει θετική σταθερά $H = H(\Sigma)$, τέτοια ώστε

$$|\phi(x_{1,1}, x_2) - \phi(x_{1,2}, x_2)| \leq H|x_{1,1} - x_{1,2}|^\delta, \forall (x_{1,1}, x_2), (x_{1,2}, x_2) \in \Sigma \times S_2,$$

καθώς επίσης, λέμε ότι η ϕ ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη $\delta \in (0, 1)$ ως προς $x_1 \in S_1$, ομοιόμορφα ως προς $x_2 \in S_2$, ανν υπάρχει θετική σταθερά H , τέτοια ώστε, για κάθε συμπαγές $\Sigma \subseteq S_1$,

$$|\phi(x_{1,1}, x_2) - \phi(x_{1,2}, x_2)| \leq H|x_{1,1} - x_{1,2}|^\delta, \forall (x_{1,1}, x_2), (x_{1,2}, x_2) \in \Sigma \times S_2.$$

Θεώρημα 12.4 (ύπαρξη και μοναδικότητα). Έστω

1. $m \in \mathbb{N}$,
2. $T > 0$,
3. συμμετρικός και ομοιόμορφα παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ στο $\mathbb{R}^m \times [0, T]$, τέτοιος ώστε
 - i. $a \in C_{0,B}^2(\mathbb{R}^m \times [0, T]; \mathbb{R}^{m \times m})$, τέτοια ώστε οι a , $\nabla_x a$ και $\nabla_x^2 a$ να ικανοποιούν ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη $\delta \in (0, 1)$ ως προς $x \in \mathbb{R}^m$, ομοιόμορφα ως προς $t \in [0, T]$, καθώς επίσης η a να ικανοποιεί συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα,
 - ii. $b \in C_{0,B}^1(\mathbb{R}^m \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$, τέτοια ώστε οι b και $\nabla_x b$ να ικανοποιούν ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη δ ως προς x , ομοιόμορφα ως προς t , και
 - iii. $c \in C_B(\mathbb{R}^m \times [0, T]; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη δ ως προς x , ομοιόμορφα ως προς t ,
4. θετικές σταθερές $\theta_0 < \frac{\theta-1}{4T}$ και K ,
5. $f \in C(\mathbb{R}^m \times [0, T]; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Hölder με εκθέτη δ ως προς x , ομοιόμορφα ως προς t , καθώς επίσης να ικανοποιεί το φράγμα

$$|f(x, t)| \leq Ke^{\theta_0|x|^2}, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T],$$

και

6. $g \in C(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί το φράγμα

$$|g(x)| \leq Ke^{\theta_0|x|^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Τότε $\exists!$ λύση, $y: \mathbb{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, του (ΠΑΣΤ), η οποία, μάλιστα, ικανοποιεί το φράγμα

$$|y(x, t)| \leq \tilde{K}e^{k|x|^2}, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T],$$

όπου \tilde{K} και $k = k(\theta_0, \theta_{-1}, T)$ θετικές σταθερές.

Μάλιστα, λόγω της ανεξαρτησίας του T από τα δεδομένα του προβλήματος στο παραπάνω αποτέλεσμα, αν ισχυροποιηθούν οι υποθέσεις του τελευταίου, τότε έπεται και η ολικότητα της λύσης, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 12.5 (καλή τοποθέτηση και ολική λύση για φραγμένες δεδομένες συναρτήσεις). Έστω

1. $m \in \mathbb{N}$,

2. συμμετρικός και ομοιόμορφα παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ στο $\mathbb{R}^m \times [0, \infty)$, τέτοιος ώστε
- i. $a \in C_{0,B}^2(\mathbb{R}^m \times [0, \infty); \mathbb{R}^{m \times m})$, τέτοια ώστε οι a , $\nabla_x a$ και $\nabla_x^2 a$ να ικανοποιούν ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη $\delta \in (0, 1)$ ως προς $x \in \mathbb{R}^m$, ομοιόμορφα ως προς $t \in [0, \infty)$, καθώς επίσης η a να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα,
 - ii. $b \in C_{0,B}^1(\mathbb{R}^m \times [0, \infty); \mathbb{R}^m)$, τέτοια ώστε οι b και $\nabla_x b$ να ικανοποιούν ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη δ ως προς x , ομοιόμορφα ως προς t , και
 - iii. $c \in C_B(\mathbb{R}^m \times [0, \infty); \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτη δ ως προς x , ομοιόμορφα ως προς t ,
3. $f \in C_B(\mathbb{R}^m \times [0, \infty); \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Hölder με εκθέτη δ ως προς x , ομοιόμορφα ως προς t , και
4. $g \in C_B(\mathbb{R}^m; \mathbb{R})$.

Τότε $\exists!$ φραγμένη και ολική λύση, $y: \mathbb{R}^m \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, του (ΠΑΣΤ), η οποία, μάλιστα, εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.

Τώρα, στην περίπτωση της κλασικής εξίσωσης διάχυσης, υπάρχει μια χρήσιμη και κομψή μορφή ολοκληρώματος για τη λύση του **Θεωρήματος 12.4**.

Θεώρημα 12.6 (τύπος Duhamel στον \mathbb{R}^m). Αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του **Θεωρήματος 12.4** με

$$\frac{\partial}{\partial t} + L_x \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a\Delta_x, \text{ για κάποιο σταθερό } a > 0,$$

τότε η μοναδική λύση, $y: \mathbb{R}^m \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, του (ΠΑΣΤ) δίνεται, εκτός του $\mathbb{R}^m \times \{0\}$, από τον τύπο

$$y(x, t) = \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x - \xi, t)g(\xi)d\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \Phi(x - \xi, t - s)f(\xi, s)d\xi ds, \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

όπου $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m \times (0, \infty); (0, \infty))$ με

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{(4\pi at)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4at}}, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^m \times (0, \infty),$$

η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης διάχυσης με σταθερά $a > 0$.

Προφανώς εννοείται ότι, υπό τις υποθέσεις του **Θεωρήματος 12.6**, τα ολοκληρώματα στον τύπο Duhamel έχουν νόημα, και έτσι ο ίδιος ο τύπος μπορεί να θεωρείται σημειακά.

Δείκτης μοτίβου. Δεδομένων $m \in \mathbb{N}$, ανοικτού και συνεκτικού $U \subseteq \mathbb{R}^m$ και $f \in C_B(\bar{U}; (0, \infty))$, αναζητούμε έναν αδιάστατο δείκτη ο οποίος θα μας πληροφορεί “αν και τι είδους μοτίβο σχηματίζει η f ”.

Τι ακριβώς όμως εννοούμε με την “παρουσία μοτίβου”; Είναι λογικό να ισχυριστούμε ότι η απουσία μοτίβου σημαίνει σταθερή f , ή, ισοδύναμα, την ταύτιση του γραφήματος της συνάρτησης με το γράφημα της μέσης τιμής της, \bar{f} . Οπότε, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, η παρουσία μοτίβου αποτελεί τη μη ταύτιση του γραφήματος της f με το γράφημα της \bar{f} .

Τι ακριβώς όμως εννοούμε με το “είδος μοτίβου”; Μία τέτοια έννοια έχει προφανώς ουσία κατά την παρουσία μοτίβου. Είναι, έτσι, λογικό να ισχυριστούμε ότι το είδος του παρόντος μοτίβου αποτελεί η αναγνώριση, σε κάθε σημείο, της θέσης του γραφήματος της f σε σχέση με το γράφημα της \bar{f} .

Ένας τρόπος να ποσοτικοποιήσουμε τις δύο αυτές έννοιες, αποτελεί η εισαγωγή του λόγου της συνάρτησης προς τη μέση τιμή της,

$$\frac{f}{\bar{f}}.$$

Πράγματι, αν οι τιμές του λόγου αυτού σε μια περιοχή είναι

- ίσες με 1, τότε σε αυτή την περιοχή δεν εμφανίζεται μοτίβο,
- διάφορες του 1, τότε σε αυτή την περιοχή εμφανίζεται μοτίβο, και, συγκεκριμένα, όσο μικρότερες/μεγαλύτερες είναι από το 1, τόσο χαμηλότερα/ψηλότερα από το γράφημα της \bar{f} βρίσκεται το γράφημα της f στην περιοχή αυτή.

Μένει να γίνουμε πιο επεξηγηματικοί ως προς την έννοια της μέσης τιμής, \bar{f} . Και αν για την περίπτωση φραγμένου U είναι γνωστή, χρειαζόμαστε τη γενίκευσή της στην περίπτωση μη φραγμένου U . Η γενίκευση αυτή είναι η προφανής, και συγκεκριμένα⁶

$$\bar{f} := \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\int_{U_i} f(\xi) d\xi}{\int_{U_i} 1 d\xi}, \text{ για κάποια ακολουθία } \{U_i\}_{i=1}^{\infty}, \text{ τέτοια ώστε } \begin{cases} U_i \subset\subset U_{i+1} \subset\subset U, \forall i \in \mathbb{N}, \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = U. \end{cases}$$

Σημειώνουμε, σχετικά με την ακολουθία συνόλων, ότι η πρώτη συνθήκη περιγράφει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία εντός του U και η δεύτερη μια καλύπτουσα του U . Ο παραπάνω ορισμός είναι ορθός, καθώς είναι ανεξάρτητος της επιλογής της γνησίως αύξουσας και καλύπτουσας ακολουθίας αυτής. Προφανώς αποτελεί γενίκευση του γνωστού ορισμού για φραγμένο U , καθώς, σε αυτή την περίπτωση, το όριο του αριθμητή και το μη αρνητικό όριο του παρανομαστή υπάρχουν και είναι ίσα με τα αντίστοιχα ολοκληρώματα επί όλου του U . Είναι επίσης προφανές ότι η μέση τιμή μιας τέτοιας συνάρτησης f είναι πάντα θετική.

Έτσι, τελικά, ορίζουμε τελεστή, l_{pat} , ως

$$l_{pat}: C_B(\bar{U}; (0, \infty)) \rightarrow C_B(\bar{U}; (0, \infty))$$

$$f \mapsto l_{pat}f := \frac{f}{\bar{f}},$$

τον οποίο θα καλούμε δείκτη μοτίβου, καθώς επίσης θα καλούμε, για κάθε $f \in C_B(\bar{U}; (0, \infty))$, τη συνάρτηση $l_{pat}f$ ως δείκτη μοτίβου της f . Υπό το πρίσμα της παραπάνω συζήτησης, αν

$$l_{pat}f \equiv 1,$$

τότε θα λέμε ότι η f δεν εμφανίζει μοτίβο, ενώ αν

$$l_{pat}f \not\equiv 1,$$

τότε θα λέμε ότι η f εμφανίζει μοτίβο που περιγράφεται από την $l_{pat}f$.

Η βιβλιογραφία του παρόντος κεφαλαίου καλύπτεται πλήρως από εκείνη του [Κεφαλαίου 11](#), οπότε δεν παρατίθεται και πάλι εδώ.

Βιβλιογραφία

- [1] Ν. Γιαλελής. *Θεωρία Κατανομών. Σημειώσεις Παραδόσεων, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2022.*

⁶Θυμίζουμε ότι, δεδομένων δύο ανοικτών συνόλων $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$, η σχέση $U_1 \subset\subset U_2$ σημαίνει ότι \bar{U}_1 φραγμένο και $\bar{U}_1 \subsetneq U_2$. Σε αυτή την περίπτωση, μάλιστα, λέμε ότι το U_1 περιέχεται συμπαγώς στο U_2 .

■ ΔΙΑΧΥΣΗ II

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Εκθετικό μοντέλο με όρο διάχυσης, ή μοντέλο Skellam (συνέχεια)

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

(α) Γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα:

i. Καλή τοποθέτηση του προβλήματος

(β) Ανάλυση Fourier

(γ) Πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville

(δ) Γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα (συνέχεια):

ii. Λύση σε μορφή σειράς για το πρόβλημα της κλασικής εξίσωσης διάχυσης

(ε) Αρχή μεγίστου/ελαχίστου

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 7,11](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Εκθετικό μοντέλο με όρο διάχυσης (Skellam, 1951, συνέχεια). Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση πεπερασμένου οικοτόπου για τον πληθυσμό, N , ο οποίος ικανοποιεί την (12.1). Συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι¹

$$U = \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right), \text{ για κάποιο } l > 0,$$

¹ Δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο η επιλογή του ίδιου του πεπερασμένου χωρικού διαστήματος, αλλά η επιλογή της διαμέτρου αυτού, καθώς το μοντέλο παραμένει ανεπηρέαστο από τους μετασχηματισμούς μεταφοράς της χωρικής ανεξάρτητης μεταβλητής, x .

και ειδικότερα θα θεωρήσουμε ομογενή συνοριακή συνθήκη, τόσο Dirichlet όσο και Neumann. Βιολογικά, η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε οικότοπο με αφιλόξενο (*inhospitable*) σύνορο (για παράδειγμα, ένα μονοδιάστατο τρυβλίο καλλιέργειας² με σύνορο εμποτισμένο με αντιβιοτική ουσία³), ενώ η δεύτερη σε έναν απομονωμένο (*segregated*) οικότοπο (για παράδειγμα, ένα απλό μονοδιάστατο τρυβλίο καλλιέργειας).

Τα αντίστοιχα γνήσια ΠΑΣΤ. Το γνήσιο ΠΑΣΤ για το προαναφερθέν μοντέλο, με ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet ή Neumann, θεωρείται ως εξής:

Με δεδομένα $\gamma \in \{0, 1\}$ και

$$\begin{cases} N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right), & \text{αν } \gamma = 1 \\ N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right) \cap C^1\left(\left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \rho\right] \cup \left[\frac{l}{2} - \rho, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right), \rho \in \left(0, \frac{l}{2}\right], & \text{αν } \gamma = 0, \end{cases} \quad (\text{exp}_{\Delta, l, 1})$$

τέτοια ώστε $\gamma N_0\left(\pm \frac{l}{2}\right) + (1 - \gamma) \frac{dN_0}{dx}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$, αναζητούμε $T > 0$ και συνάρτηση

$$N: \begin{cases} \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T) \rightarrow [0, \infty), \\ \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T) \end{cases} \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (12.1) στο} \\ \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T) \text{ όσο και τις } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \text{ και} \\ \gamma N\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) + (1 - \gamma) \frac{\partial N}{\partial x}\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) = 0, \text{ για κάθε } t \in (0, T).$$

Για $\gamma = 1$ έχουμε ΠΑΣΤ με συνοριακή συνθήκη Dirichlet, ενώ για $\gamma = 0$ έχουμε ΠΑΣΤ με συνοριακή συνθήκη Neumann.

Ισοδύναμα γνήσια ΠΑΣΤ. Όπως και για το ($\text{exp}_{\Delta, \mathbb{R}, 1}$), έτσι και εδώ θεωρούμε, μέσω του μετασχηματισμού (12.3), το ισοδύναμο πρόβλημα του ($\text{exp}_{\Delta, l, 1}$) ως εξής:

Με δεδομένα $\gamma \in \{0, 1\}$ και

$$\begin{cases} N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right), & \text{αν } \gamma = 1 \\ N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right) \cap C^1\left(\left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \rho\right] \cup \left[\frac{l}{2} - \rho, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right), \rho \in \left(0, \frac{l}{2}\right], & \text{αν } \gamma = 0, \end{cases} \quad (\text{exp}_{\Delta, l, 2})$$

τέτοια ώστε $\gamma N_0\left(\pm \frac{l}{2}\right) + (1 - \gamma) \frac{dN_0}{dx}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$, αναζητούμε $T > 0$ και συνάρτηση

$$N: \begin{cases} \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T) \rightarrow [0, \infty), \\ \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T) \end{cases} \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (12.2) στο} \\ \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T) \text{ όσο και τις } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \text{ και} \\ \gamma N\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) + (1 - \gamma) \frac{\partial N}{\partial x}\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) = 0, \text{ για κάθε } t \in (0, T).$$

²Το τρυβλίο καλλιέργειας Petri, ή απλά τρυβλίο Petri, είναι ένα ρηχό γυάλινο ή πλαστικό κυλινδρικό πιάτο που χρησιμοποιείται από βιολόγους και άλλους βιοεπιστήμονες για την καλλιέργεια μικροοργανισμών. Στα τρυβλία Petri τοποθετείται θρεπτικό υλικό στο οποίο μπορούν να αναπτυχθούν τα κύτταρα που θα καλλιεργηθούν. Ως βάση του θρεπτικού υλικού τοποθετείται υγρό άγαρ (το άγαρ είναι φυσικό υποκατάστατο της ζωικής ζελατίνης προερχόμενο από θαλάσσια φύκια), το οποίο στη συνέχεια στερεοποιείται. Τα δισκία τοποθετούνται σε ειδικούς φούρνους εκκόλαψης και πάνω τους σχηματίζονται αποικίες μικροοργανισμών με μορφή κηλίδων πάνω στο λείο θρεπτικό υλικό. Στη Μικροβιολογία, το τρυβλίο γεμίζεται μερικώς με θερμό υγρό άγαρ που περιέχει και ένα μείγμα συγκεκριμένων συστατικών όπως θρεπτικές ουσίες, άλατα, υδατάνθρακες, χρωστικές, δείκτες, αμινοξέα και αντιβιοτικά. Κατόπιν, καθώς το άγαρ ψύχεται και στερεοποιείται, το τρυβλίο είναι έτοιμο να δεχθεί ένα μικρόβιο (δείγμα). Αυτή η διαδικασία ονομάζεται εμβολιασμός ή επιμετάλλωση.

³Η χρήση αντιβιοτικών εντός τρυβλίου καλλιέργειας είναι βασική στη Μικροβιολογία, όπως κατά την εξαγωγή του αντιβιογράμματος, δηλ. την καταγραφή της ευαισθησίας συγκεκριμένων παθογόνων βακτηριδίων στα αντιβιοτικά.

Όπως και πριν, έτσι και εδώ, αν η N είναι λύση του $(\text{exp}_{\Delta,l,2})$, τότε και μόνο τότε η $e^{rt}N$ είναι λύση του $(\text{exp}_{\Delta,l,1})$.

Καλή τοποθέτηση του προβλήματος, ολικότητα και ομαλότητα της λύσης. Κάνοντας χρήση κλασικών θεωρημάτων (βλ. [Άσκηση 13.1](#)) εξάγουμε ύπαρξη και μοναδικότητα ολικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τη δεδομένη αρχική συνάρτηση, λύσης του εξής γενικού προβλήματος:

Με δεδομένα $\gamma \in \{0, 1\}$ και

$$\begin{cases} N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right), & \text{αν } \gamma = 1 \\ N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right) \cap C^1\left(\left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \rho\right] \cup \left[\frac{l}{2} - \rho, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right), \rho \in \left(0, \frac{l}{2}\right), & \text{αν } \gamma = 0, \end{cases}$$

τέτοια ώστε $\gamma N_0\left(\pm \frac{l}{2}\right) + (1 - \gamma) \frac{dN_0}{dx}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$, αναζητούμε $T > 0$ και συνάρτηση ($\text{exp}_{\Delta,l,2} \diamond$)

$$N: \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (12.2) στο } \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T) \text{ όσο και τις } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \text{ και } \gamma N\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) + (1 - \gamma) \frac{\partial N}{\partial x}\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) = 0, \text{ για κάθε } t \in (0, T).$$

Μάλιστα, η λύση του $(\text{exp}_{\Delta,l,2} \diamond)$ δίνεται, εκτός του $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times \{0\}$, από τον τύπο

$$N(x, t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} N_{1,i} e^{-\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 Dt} \sin\left(\frac{i\pi}{l}\left(x + \frac{l}{2}\right)\right), & \text{αν } \gamma = 1 \\ \frac{N_{2,0}}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} N_{2,i} e^{-\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{i\pi}{l}\left(x + \frac{l}{2}\right)\right), & \text{αν } \gamma = 0, \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \infty),$$

όπου

$$N_{1,i} := \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N_0(\xi) \sin\left(\frac{i\pi}{l}\left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right) d\xi, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ και } N_{2,i} := \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N_0(\xi) \cos\left(\frac{i\pi}{l}\left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right) d\xi, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Όπως με τον αντίστοιχο τύπο για το $(\text{exp}_{\Delta,R,2} \diamond)$, έτσι και με τον παραπάνω μπορούμε να εξαγάγουμε (βλ. [Άσκηση 13.1](#)) την ομαλότητα της λύσης του $(\text{exp}_{\Delta,l,2} \diamond)$ στο $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \infty)^4$. Πράγματι, καθώς η συναρτήσεις εντός της σειράς είναι ομαλές (τόσο ως προς x όσο και ως προς t), κάνοντας χρήση του κλασικού αποτελέσματος που μας επιτρέπει τη διαφορίση εντός της σειράς, αρκεί τελικά να παρατηρήσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$\mathbb{N} \times [\rho, \infty) \ni (i, t) \mapsto i^k e^{-Kt^2} \in \mathbb{R}, \quad \forall \rho > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad \forall K > 0,$$

είναι φραγμένες από τις αντίστοιχες

$$\mathbb{N} \ni i \mapsto i^k e^{-K\rho^2} \in \mathbb{R}, \quad \forall \rho > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad \forall K > 0,$$

⁴Όπως και για το $(\text{exp}_{\Delta,R,2} \diamond)$, έτσι και για το $(\text{exp}_{\Delta,l,2} \diamond)$, παρατηρούμε την ισχύ της επίδρασης εξομάλυνσης, μία ιδιότητα που, γενικά, χαρακτηρίζει την εξίσωση διάχυσης.

οι οποίες και είναι αθροίσιμες στο \mathbb{N} . Προφανώς, αν η αρχική συνάρτηση N_0 υποτεθεί ομαλή, τότε και η λύση θα είναι ομαλή εντός όλου του $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, \infty)$.

Σχετικά με το ότι το σύνολο

$$[0, \infty)$$

είναι αναλλοίωτο για το $(\exp_{\Delta, l, 2}^\diamond)$, προφανώς αν $N_0 \equiv 0$, τότε $N \equiv 0$. Ωστόσο, για να δείξουμε ότι αν υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $N_0(\xi) > 0$, τότε $N\left(\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, \infty)\right) \subseteq (0, \infty)^5$, αναγκαζόμαστε να εργαστούμε (βλ. [Ασκήση 13.1](#)) με διαφορετικό τρόπο από τον άμεσο του ακολουθήσαμε για το $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 2}^\diamond)$, και συγκεκριμένα με χρήση της αρχής ελαχίστου και της σχέσης μεταξύ ελαχίστου και προσήμου διαφόρισης ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί του συνόρου. Θεωρούμε, λοιπόν, ένα τυχόν $t_0 > 0$. Λόγω συνέχειας της N , έπεται ότι η $N|_{\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, t_0]}$ λαμβάνει ελάχιστη τιμή. Αν η ελάχιστη τιμή είναι θετική, τότε το ζητούμενο έπεται, ενώ αν είναι μη θετική, τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν η $N|_{\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, t_0]}$ λαμβάνει ελάχιστη μη θετική τιμή στο $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, t_0]$, τότε από την αρχή ελαχίστου έπεται ότι η $N|_{\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, t_0]}$ είναι σταθερή με μη θετική τιμή, το οποίο είναι άτοπο λόγω της συνέχειας της N και της υπόθεσης ότι $N(\xi, 0) > 0$.
- Αν η $N|_{\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, t_0]}$ λαμβάνει ελάχιστη μη θετική τιμή στο $\left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, t_0]$, τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

– Αν $\gamma = 1$, δηλ. αν

$$N\left(\left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times [0, \infty)\right) = \{0\},$$

τότε η ελάχιστη τιμή είναι αναγκαστικά η μηδενική, οπότε έπεται το ζητούμενο.

– Αν $\gamma = 0$, δηλ. αν

$$\frac{dN}{dx}\left(\left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times [0, \infty)\right) = \{0\},$$

τότε διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- * Αν η N είναι σταθερή, τότε παρόμοια με το πρώτο σημείο καταλήγουμε σε άτοπο.
- * Αν η N δεν είναι σταθερή, τότε η παραπάνω ισότητα έρχεται σε αντίθεση με το αποτέλεσμα για το πρόσημο της διαφόρισης ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην περίπτωση ελάχιστης τιμής, το οποίο απαιτεί

$$\frac{dN}{dx}(x_0, t_0) \begin{cases} > 0, & \text{αν } x_0 = -\frac{l}{2} \\ < 0, & \text{αν } x_0 = \frac{l}{2}, \end{cases}$$

όπου το $(x_0, t_0) \in \left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, T]$ αποτελεί σημείο που λαμβάνεται ελάχιστη τιμή.

- Αν η $N|_{\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, t_0]}$ λαμβάνει ελάχιστη μη θετική τιμή στο $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times \{0\}$, τότε αναγκαστικά η τιμή αυτή θα είναι η μηδενική καθώς $N\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times \{0\}\right) \subseteq [0, \infty)$ από υπόθεση. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

⁵Όπως και για το $(\exp_{\Delta, \mathbb{R}, 2}^\diamond)$, έτσι και για το $(\exp_{\Delta, l, 2}^\diamond)$, παρατηρούμε την ισχύ της άπειρης ταχύτητας διάδοσης των διαταραχών, μία ιδιότητα που, γενικά, χαρακτηρίζει την εξίσωση διάχυσης.

- Αν η ελάχιστη μηδενική τιμή δεν λαμβάνεται και κάπου στο $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, t_0]$, τότε έπεται το ζητούμενο.
- Αν η ελάχιστη μηδενική τιμή λαμβάνεται και κάπου στο $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, t_0]$, τότε από τα σημεία 1. και 2. αναγκαστικά αυτή θα λαμβάνεται αποκλειστικά στο $\left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, t_0]$ στην περίπτωση όπου $\gamma = 1$, οπότε έπεται το ζητούμενο.

Συμπερασματικά, δείξαμε ότι αν $N_0\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right) \subsetneq [0, \infty)$ και, επιπλέον, η N_0 δεν είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, τότε

$$\begin{cases} N\left(\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, \infty)\right) \subsetneq (0, \infty) \text{ και } N\left(\left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, \infty)\right) = \{0\}, & \text{αν } \gamma = 1 \\ N\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \infty)\right) \subsetneq (0, \infty), & \text{αν } \gamma = 0. \end{cases}$$

Άρα, τελικά, θα έχουμε και καλή τοποθέτηση του $(\exp_{\Delta,l,2})$, με ολικότητα και ομαλότητα στο $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \infty)$ της λύσης του.

Κατά συνέπεια, ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τη λύση του $(\exp_{\Delta,l,1})$, η οποία δίνεται, εκτός του $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times \{0\}$, από τον τύπο

$$N(x, t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} N_{1,i} e^{\left(r - \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 D\right)t} \sin\left(\frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right), & \text{αν } \gamma = 1 \\ \frac{N_{2,0}}{2} e^{rt} + \sum_{i=1}^{\infty} N_{2,i} e^{\left(r - \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 D\right)t} \cos\left(\frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right), & \text{αν } \gamma = 0, \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \infty). \tag{13.1}$$

Άσκηση 13.1. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της βασικής (Φάση I) μελέτης του $(\exp_{\Delta,l,2})$.

Ασυμπτωτική μελέτη. Σχετικά με τη συμπεριφορά της (ολικής) λύσης του $(\exp_{\Delta,l,1})$ για μεγάλους χρόνους, t , προφανώς αρκεί να υποθέσουμε ότι η N_0 δεν είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις, ανάλογα με τον τύπο των συνοριακών συνθηκών που θεωρούμε κάθε φορά, και θα δούμε ότι αυτές οι διαφορετικές συνοριακές συνθήκες επιβάλλουν και διαφορετική τελική συμπεριφορά της λύσης.

- Αν $\gamma = 1$, τότε γράφοντας τη λύση στο $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, \infty)$ ως⁶

$$N(x, t) = N_{1,1} e^{\left(r - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D\right)t} \sin\left(\frac{\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right) \left(1 + \underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} \frac{N_{1,i}}{N_{1,1}} e^{-\left(i^2 - 1\right)\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 Dt} \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)}}_{=: f_1(x,t)} \right), \quad \forall (x, t) \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, \infty)$$

⁶Επειδή η N_0 έχει μη αρνητικές τιμές και δεν είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, ο πρώτος γενικευμένος συντελεστής Fourier είναι μη μηδενικός, άρα $N_{1,1} \neq 0$.

και παρατηρώντας ότι $f_1(\cdot, t) \in C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right)$ ⁷, για κάθε $t > 0$, καθώς επίσης ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f_1(\cdot, t)\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right)} = 0,$$

δηλ. η $f_1(\cdot, t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα εντός του $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ στη σταθερή συνάρτηση 0, καθώς $t \rightarrow \infty$, έπεται ότι

$$N(\cdot, t) \sim N_{1,1} e^{\left(r - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D\right)t} \sin\left(\frac{\pi}{l} \left(\cdot + \frac{l}{2}\right)\right), \text{ καθώς } t \rightarrow \infty, \text{ ομοιόμορφα στο } \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]. \quad (13.2)$$

Δηλ. τελικά θα “επιβιώσει” μόνο η πρώτη ιδιοσυνάρτηση.

Τώρα, άμεσα από την (13.2), έπεται ότι ο πληθυσμός

– θα επιβιώσει όταν

$$\frac{rl^2}{D} \geq \pi^2$$

και, μάλιστα,

* θα αυξάνεται όταν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2,$$

* θα καταλήξει κατά προσέγγιση σε στάσιμη συνάρτηση και, συγκεκριμένα, στην

$$N^*(x, t) = N_{1,1} \sin\left(\frac{\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right), \quad \forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$$

όταν

$$\frac{rl^2}{D} = \pi^2,$$

ενώ

– θα εξαφανιστεί όταν

$$\frac{rl^2}{D} < \pi^2.$$

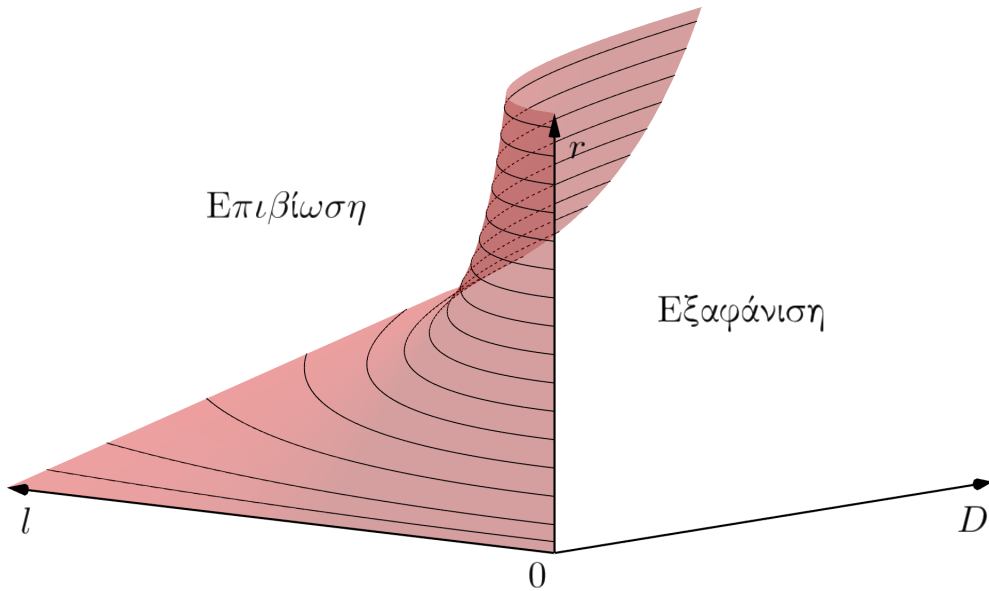
Έχουμε, λοιπόν, τα ακόλουθα.

– Υπάρχει στον (θετικό) παραμετρικό Dlr -χώρο μία κρίσιμη επιφάνεια επιβίωσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.1, τέτοια ώστε οποιαδήποτε επιλογή των παραμέτρων (D, l, r) “πάνω” (“κάτω”) από αυτή οδηγεί στη συνεχή αύξηση (εξαφάνιση) του πληθυσμού, ενώ οποιαδήποτε επιλογή επί αυτής οδηγεί τελικά σε μια στάσιμη κατάσταση επιβίωσης.

⁷Τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{l}{2}} \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)}$ υπάρχουν, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, και μάλιστα

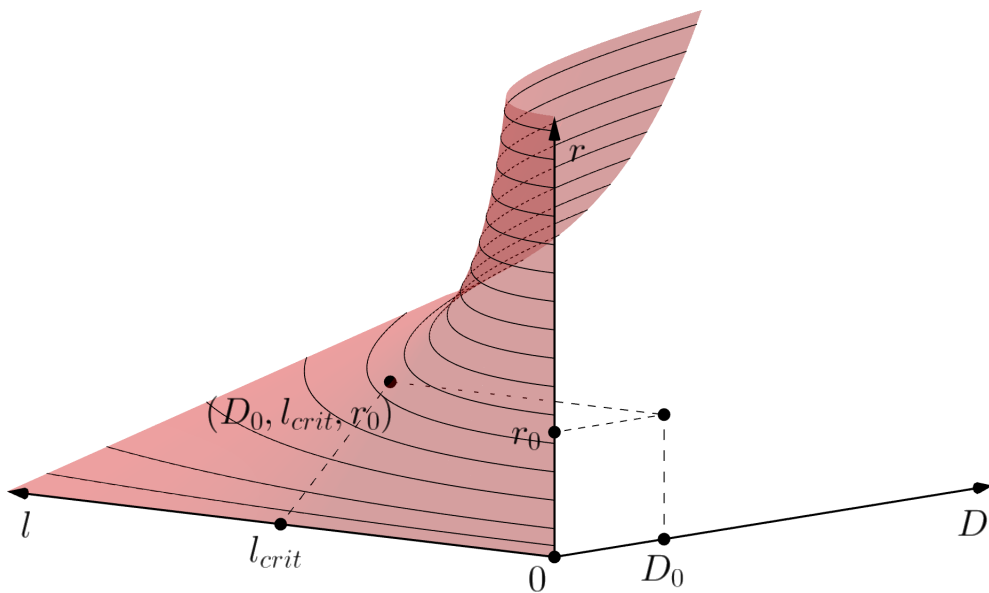
$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{l}{2}} \frac{\sin\left(\frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)} = i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

άρα, για κάθε $t > 0$, η $f_1(\cdot, t)$ επεκτείνεται συνεχώς στο $\left\{\pm \frac{l}{2}\right\}$.



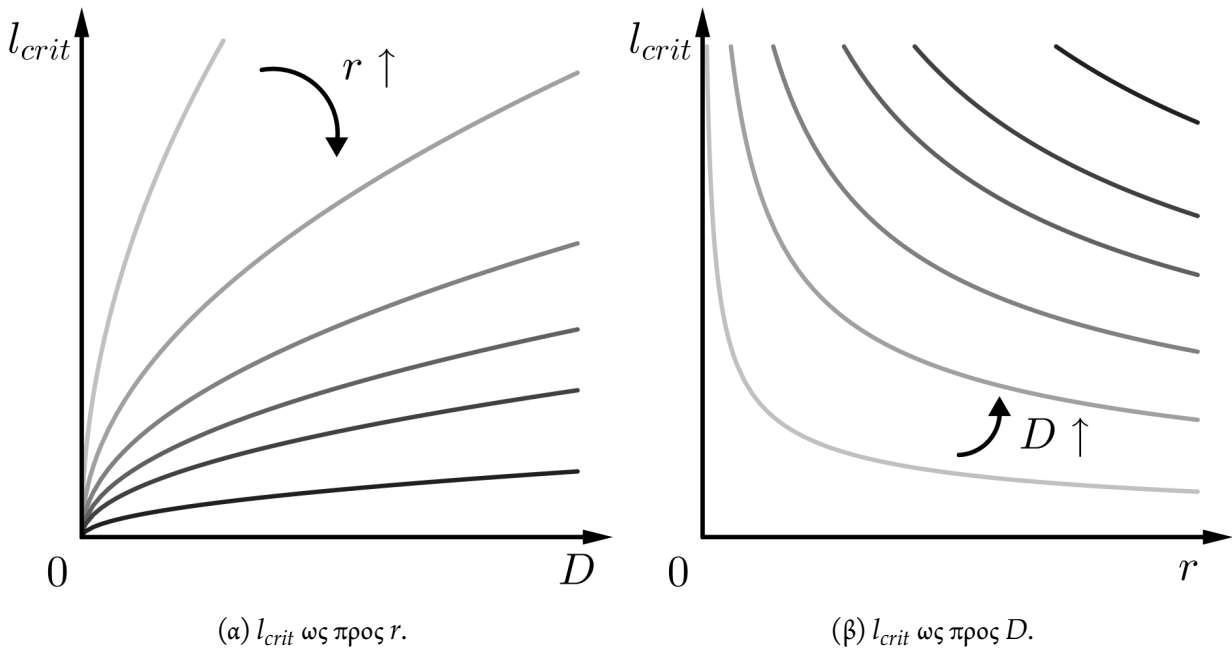
Σχήμα 13.1: Η επιβίωση/εξαφάνιση του πληθυσμού στην περίπτωση αφιλόξενου συνόρου ($\gamma = 1$) εξαρτάται, με συγκεκριμένο τρόπο, από την επιλογή των παραμέτρων D , l και r . Συγκεκριμένα, η επιφάνεια $r = \frac{\pi^2 D}{l^2}$, στον παραμετρικό rDl -χώρο, οριοθετεί την επιβίωση από την εξαφάνιση.

- Για δεδομένες δύο από τις τρεις παραμέτρους D , l και r , υπάρχει μοναδική κρίσιμη τιμή της τρίτης που οριοθετεί την επιβίωση από την εξαφάνιση. Για παράδειγμα, για δεδομένες παραμέτρους D και r υπάρχει μοναδικό κρίσιμο μήκος, $l_{crit} = l_{crit}(D, r)$, τέτοιο ώστε αν $l > l_{crit}$ ($l < l_{crit}$), τότε ο πληθυσμός συνεχώς αυξάνεται (εξαφανίζεται), ενώ αν $l = l_{crit}$ ο πληθυσμός παραμένει τελικά περίπου στάσιμος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.2.



Σχήμα 13.2: Για δεδομένες παραμέτρους $D_0 > 0$ και $r_0 > 0$ υπάρχει μοναδικό κρίσιμο μήκος, $l_{crit} = l_{crit}(D_0, r_0)$, που οριοθετεί την επιβίωση από την εξαφάνιση.

- Για δεδομένο D , το κρίσιμο μήκος, l_{crit} , μειώνεται με την αύξηση του r . Αντιθέτως, για δεδομένο r , το l_{crit} αυξάνεται με την αύξηση του D , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 13.3. Συμπεραίνουμε δηλ. ότι ενώ η σταθερά της εκθετικής αύξησης, r , ευνοεί την επιβίωση, αντίθετα η σταθερά διάχυσης, D , την υπονομεύει. Και ενώ το πρώτο είναι προφανές, για το δεύτερο σημειώνουμε ότι



Σχήμα 13.3: Εξάρτηση του κρίσιμου μήκους, l_{crit} , από τις άλλες δύο παραμέτρους.

ουσιαστικά η αύξηση του D επισπεύδει την κατανομή του πληθυσμού προς το αφιλόξενο σύνορο του διαστήματος.

Επίσης, σχετικά με την ύπαρξη μοτίβου της λύσης για μεγάλους χρόνους, υπολογίζουμε προσεγγιστικά, μέσω της (13.2), την ασυμπτωτική συμπεριφορά, πρώτα της μέσης τιμής ως

$$\bar{N}^x(t) \sim \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N_{1,1} e^{\left(r - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D\right)t} \sin\left(\frac{\pi}{l} \left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right) d\xi = \frac{2N_{1,1}}{\pi} e^{\left(r - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 D\right)t}, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

και έπειτα του δείκτη μοτίβου της λύσης ως

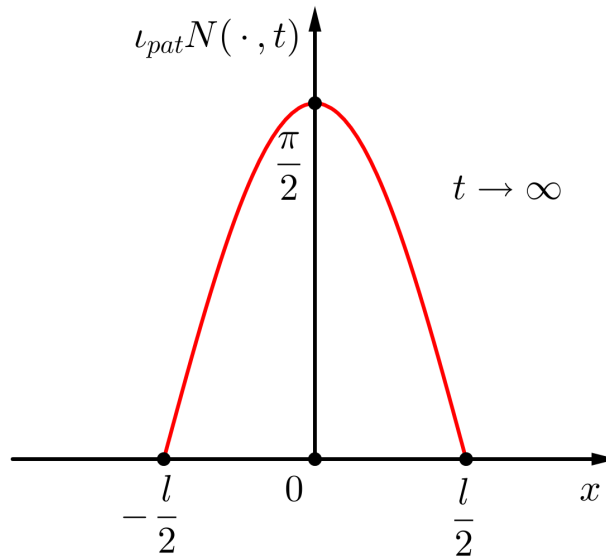
$$l_{pat} N(\cdot, t) \sim \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{l} \left(\cdot + \frac{l}{2}\right)\right), \text{ καθώς } t \rightarrow \infty, \text{ ομοιόμορφα στο } \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right].$$

Παρατηρούμε, δηλ., ότι τελικά η $N(\cdot, t)$ θα εμφανίζει μοτίβο που περιγράφεται κατά προσέγγιση από την πρώτη ιδιοσυνάρτηση, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 13.4.

- Αν $\gamma = 0$, τότε γράφοντας τη λύση ως⁸

$$N(x, t) = \frac{N_{2,0}}{2} e^{rt} \left(1 + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2N_{2,i}}{N_{2,0}} e^{-\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 Dt} \cos\left(\frac{i\pi}{l} \left(x + \frac{l}{2}\right)\right)}_{=: f_2(x,t)} \right), \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \infty),$$

⁸Όπως και για την περίπτωση της συνοριακής συνθήκης Dirichlet, έτσι και εδώ, επειδή η N_0 έχει μη αρνητικές τιμές και δεν είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, ο πρώτος γενικευμένος συντελεστής Fourier είναι μη μηδενικός, άρα $N_{2,0} \neq 0$.



Σχήμα 13.4: Για $\gamma = 1$, η λύση (13.1) ομοιόμορφα θα εμφανίζει τελικά μοτίβο που περιγράφεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση $\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{l}\left(\cdot + \frac{l}{2}\right)\right)$.

και παρατηρώντας ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|f_2(\cdot, t)\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right)} = 0,$$

έπεται ότι

$$N(\cdot, t) \sim \frac{N_{2,0}}{2} e^{rt}, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty, \text{ ομοιόμορφα στο } \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]. \quad (13.3)$$

Δηλ. τελικά θα “επιβιώσει” μόνο η πρώτη (σταθερή εδώ) ιδιοσυνάρτηση.

Τώρα, άμεσα από την (13.3), έπεται ότι ο πληθυσμός πάντα, δηλ. χωρίς περιορισμούς ως προς την επιλογή των παραμέτρων, όχι απλά θα επιβιώνει, αλλά θα αναπτύσσεται συνεχώς.

Επίσης, σχετικά με την ύπαρξη μοτίβου της λύσης για μεγάλους χρόνους, υπολογίζουμε προσεγγιστικά, μέσω της (13.3), την ασυμπτωτική συμπεριφορά, πρώτα της μέσης τιμής ως

$$\bar{N}^x(t) \sim \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{N_{2,0}}{2} e^{rt} d\xi = \frac{N_{2,0}}{2} e^{rt}, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

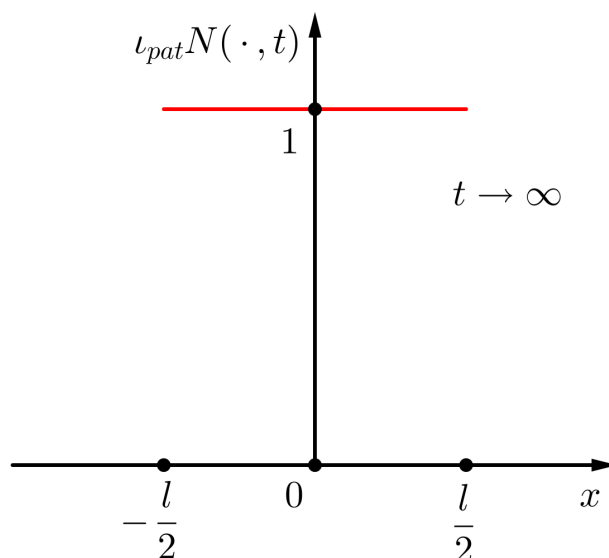
και έπειτα του δείκτη μοτίβου της λύσης ως

$$\iota_{pat}N(\cdot, t) \sim 1, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty, \text{ ομοιόμορφα στο } \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right].$$

Παρατηρούμε, δηλ., ότι τελικά η $N(\cdot, t)$ δεν θα εμφανίζει μοτίβο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.5.

Ποιοτική μελέτη. Χρησιμοποιώντας όρους που ήδη έχουμε εισαγάγει, μπορούμε να εκφράσουμε κομψά μέρος των αποτελεσμάτων μας, λέγοντας ότι αν $N_0 \neq 0$, τότε

- αν $\gamma = 1$, τότε



Σχήμα 13.5: Για $\gamma = 0$, η λύση (13.1) ομοιόμορφα δεν θα εμφανίζει τελικά μοτίβο.

– αν

$$\frac{rl^2}{D} < \pi^2,$$

τότε η στάσιμη λύση

$$N^* \equiv 0$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής,

– αν

$$\frac{rl^2}{D} = \pi^2,$$

τότε η στάσιμη λύση

$$N^*(x, t) = N_{1,1} \sin\left(\frac{\pi}{l}\left(x + \frac{l}{2}\right)\right), \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, \infty),$$

όπου

$$N_{1,1} := \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N_0(\xi) \sin\left(\frac{\pi}{l}\left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right) d\xi,$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθής,

– αν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2,$$

τότε η στάσιμη λύση

$$N^* \equiv 0$$

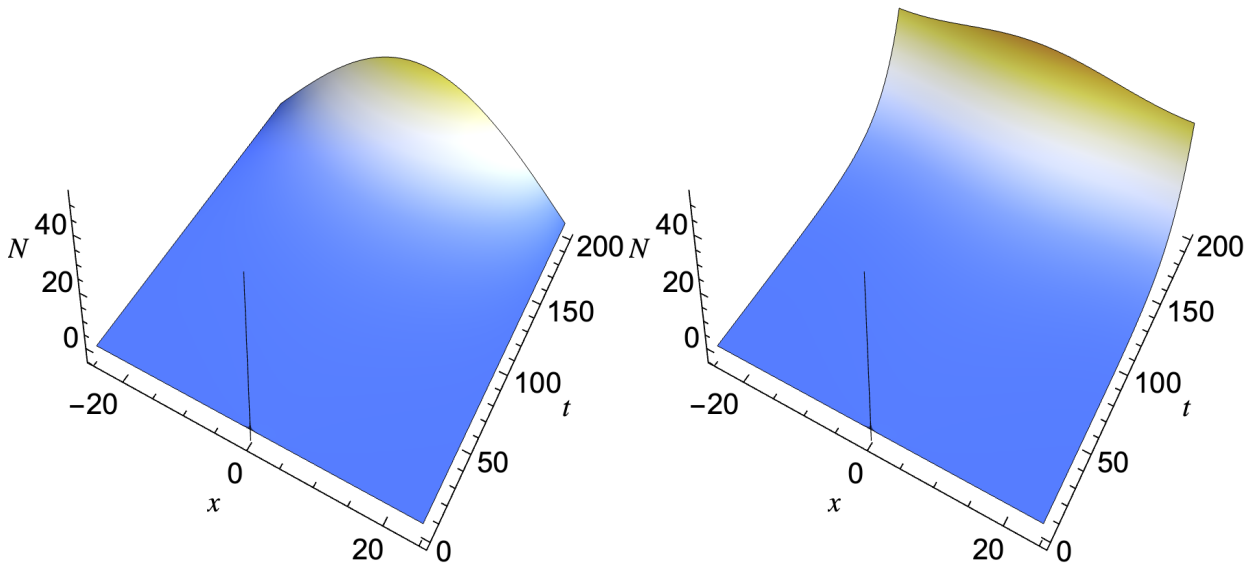
είναι ασταθής,

• αν $\gamma = 0$, τότε η στάσιμη λύση

$$N^* \equiv 0$$

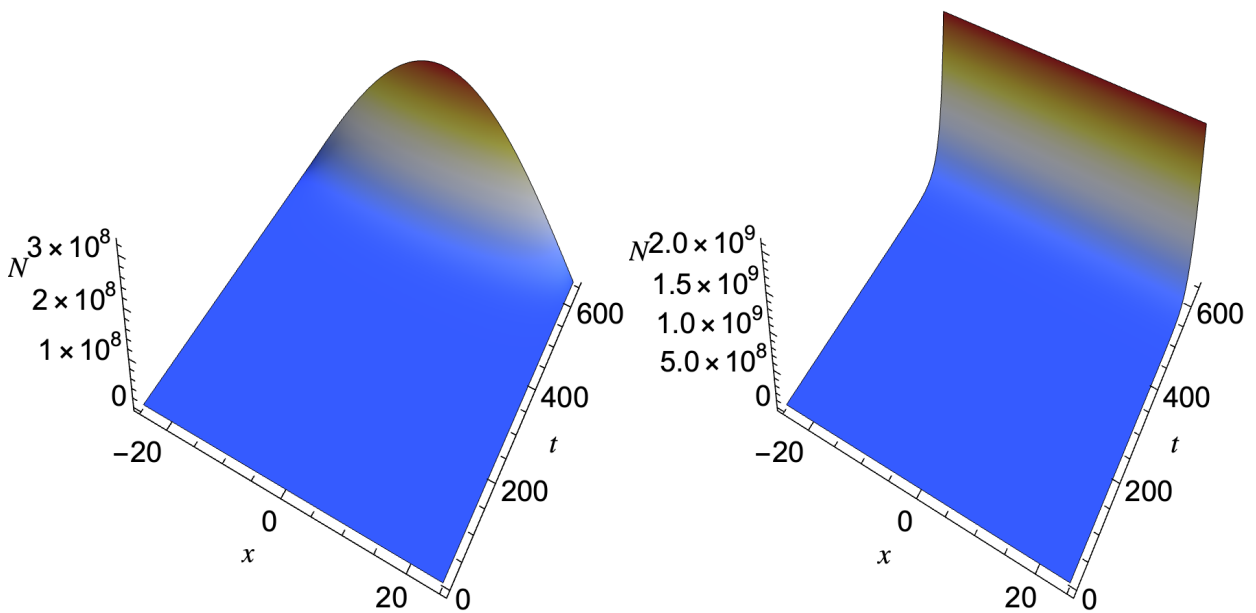
είναι ασταθής.

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta,l,1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την $N_0 \left[\begin{smallmatrix} -l \\ -\frac{l}{2} \end{smallmatrix} \right]$, όπου N_0 όπως στην (12.6) (προφανώς με $\varepsilon < \frac{l}{2}$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.6, στο Σχήμα 13.7 και στο Σχήμα 13.8, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας.



(α) $\gamma = 1$ (συννοριακή συνθήκη Dirichlet) και $t \in [0, 200]$ [χρόνος].

(β) $\gamma = 0$ (συννοριακή συνθήκη Neumann) και $t \in [0, 200]$ [χρόνος].



(γ) $\gamma = 1$ και $t \in [0, 600]$ [χρόνος].

(δ) $\gamma = 0$ και $t \in [0, 600]$ [χρόνος].

Σχήμα 13.6: Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta,l,1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² · [χρόνος]⁻¹, $l = 50$ [μήκος], $r = 10 \cdot \left(\frac{\pi}{50}\right)^2 = 0.04$ [χρόνος]⁻¹, $N_{\square} = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος]. Για $l > l_{crit} = 5\sqrt{10} \approx 15.8$ ο πληθυσμός, όχι μόνο θα επιβιώσει, αλλά τελικά θα αυξάνεται.

Στο Σχήμα 13.6 επιλύεται αριθμητικά το προαναφερθέν πρόβλημα στην περίπτωση όπου

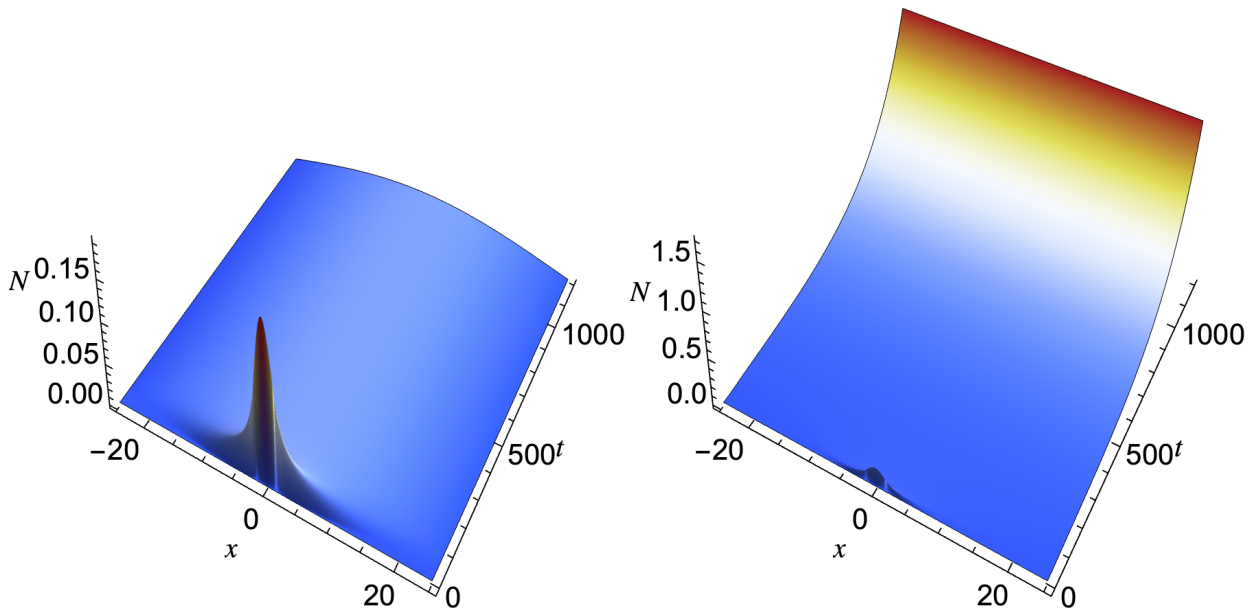
$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2.$$

Επαληθεύουμε ότι όντως ο πληθυσμός τελικά θα αυξάνεται. Μάλιστα, θα υπάρχει τελικά μοτίβο μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma = 1$.

Στο Σχήμα 13.7 επιλύεται το πρόβλημα στην περίπτωση όπου

$$\frac{rl^2}{D} = \pi^2.$$

Επαληθεύουμε ότι ο πληθυσμός θα επιβιώσει, και συγκεκριμένα τείνει προς μια στάσιμη μη τετριμμένη κα-



(α) $\gamma = 1$ και $t \in [0, 1200]$ [χρόνος].

(β) $\gamma = 0$ και $t \in [0, 1200]$ [χρόνος].

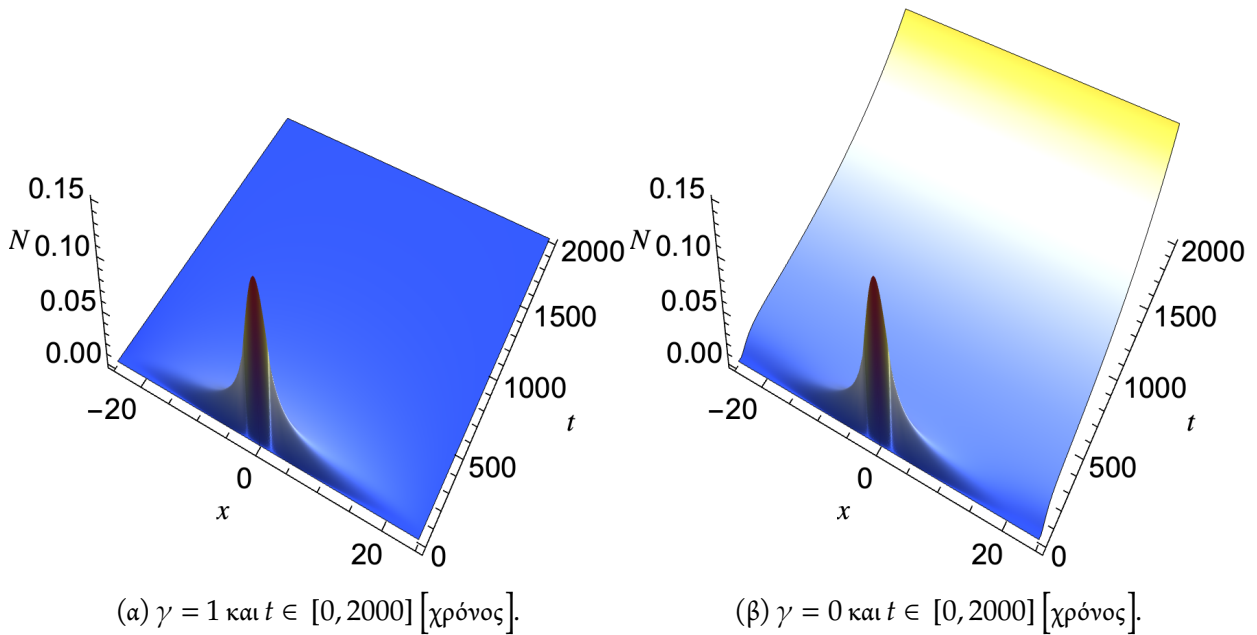
Σχήμα 13.7: Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta,l,1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² · [χρόνος]⁻¹, $l = 50$ [μήκος], $r = \left(\frac{\pi}{50}\right)^2 \approx 0.004$ [χρόνος]⁻¹, $N_{\square} = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος]. Για $l = l_{crit} = 50$ [μήκος] ο πληθυσμός θα οδηγηθεί σε μια στάσιμη κατάσταση επιβίωσης όταν $\gamma = 1$, ενώ τελικά θα αυξάνεται όταν $\gamma = 0$.

τάσταση όταν $\gamma = 1$, ενώ τελικά θα αυξάνεται όταν $\gamma = 0$. Πάλι θα εμφανιστεί μοτίβο μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma = 1$.

Στο Σχήμα 13.8 επιλύεται αριθμητικά το προαναφερθέν πρόβλημα στην περίπτωση όπου

$$\frac{rl^2}{D} < \pi^2.$$

Επαληθεύουμε ότι ο πληθυσμός τείνει προς την εξαφάνιση όταν $\gamma = 1$, ενώ τελικά θα αυξάνεται όταν $\gamma = 0$. Σε καμία περίπτωση δεν θα εμφανιστεί τελικά μοτίβο.



Σχήμα 13.8: Αριθμητική επίλυση του $(\exp_{\Delta,l,1})$ με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² · [χρόνος]⁻¹, $l = 50$ [μήκος], $r = 0.001$ [χρόνος]⁻¹, $N_{\square} = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος]. Για $l < l_{crit} = 10\sqrt{10}\pi \approx 99.35$ [μήκος] ο πληθυσμός τείνει προς εξαφάνιση όταν $\gamma = 1$, ενώ τελικά θα αυξάνεται όταν $\gamma = 0$.

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα. Εδώ θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα που αφορούν τη μελέτη του γραμμικού γνήσιου (ΠΑΣΤ), δηλ. όταν η f είναι ανεξάρτητη του y και του $\nabla_x y$ και επίσης το $\partial U \neq \emptyset$. Για την ακρίβεια, θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στις περιπτώσεις φραγμένου U , οι οποίες είναι και οι πλέον βασικές στις εφαρμογές. Και εδώ, επίσης, αρκεί να περιορίσουμε τη μελέτη μας για $n = 1$.

Θεώρημα 13.2 (καλή τοποθέτηση). Έστω

1. $m \in \mathbb{N}$,
2. ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο $U \subseteq \mathbb{R}^m$, με $\gamma, \partial U, \Sigma$ και ν όπως στις υποθέσεις για το (ΠΑΣΤ),
3. $T > 0$,
4. συμμετρικός και ομοιόμορφα παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ στο $\bar{U} \times [0, T]$, τέτοιος ώστε
 - i. $\bar{a} \in C_0^1(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^{m \times m})$, τέτοια ώστε οι \bar{a} και $\nabla_x \bar{a}$ να ικανοποιούν ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες $\delta \in (0, 1)$ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς $x \in \bar{U}$ και $t \in [0, T]$, αντίστοιχα,
 - ii. $\bar{b} \in C(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R}^m)$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα, και
 - iii. $\bar{c} \in C(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα,

5. $f \in C(\bar{U} \times [0, T]; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα,
6. $g \in C(\bar{U}; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε, μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma \neq 1$, να υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $g \in C^1\left(\overline{U \cap \bigcup_{x \in \partial U} B(x, \rho)} \setminus \Sigma; \mathbb{R}\right)$,
7. $r \in C(\partial U \times [0, T]; (0, \infty))$, καθώς επίσης $h \in C(\partial U \times [0, T]; \mathbb{R})$, και
8. ότι ικανοποιείται η συνθήκη συμβατότητας

$$\gamma r(x)g(x) + (1 - \gamma) \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}}(x) = h(x, 0), \quad \forall x \in \partial U \setminus \Sigma.$$

Τότε $\exists!$ λύση, $\gamma: \bar{U} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, του (ΠΑΣΤ), η οποία, μάλιστα, εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.

Αξίζει να σημειωθεί για το [Θεώρημα 13.2](#), ότι οι συναρτήσεις $a, \nabla_x a, b, c$ και f , δεν είναι απαραίτητο ούτε να επεκτείνονται συνεχώς στο $\partial U \times [0, T]$, ούτε να ικανοποιούν ομοιόμορφα τη συνθήκη Hölder. Απαιτείται να είναι συνεχείς στο $U \times [0, T]$ και να ικανοποιούν τη συνθήκη Hölder τοπικά, όμως, αναφέρουμε απλά ότι, σε αυτή την περίπτωση απαιτείται και μια επιπλέον συνθήκη γι' αυτές τις συναρτήσεις για να "ελεγχθεί" η συμπεριφορά τους κοντά στο $\partial U \times [0, T]$.

Συνεχίζοντας, λόγω της ανεξαρτησίας του T από τα δεδομένα του προβλήματος στο παραπάνω αποτέλεσμα, αν ισχυροποιηθούν οι υποθέσεις του τελευταίου, τότε έπεται και η ολικότητα της λύσης, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 13.3 (καλή τοποθέτηση και ολικότητα λύσης). Έστω

1. $m \in \mathbb{N}$,
2. ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο $U \subseteq \mathbb{R}^m$, με $\gamma, \partial U, \Sigma$ και ν όπως στις υποθέσεις για το (ΠΑΣΤ),
3. συμμετρικός και ομοιόμορφα παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ στο $\bar{U} \times [0, \infty)$, τέτοιος ώστε
 - i. $a \in C_0^1(\bar{U} \times [0, \infty); \mathbb{R}^{m \times m})$, τέτοια ώστε οι a και $\nabla_x a$ να ικανοποιούν ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες $\delta \in (0, 1)$ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς $x \in \bar{U}$ και $t \in [0, \infty)$, αντίστοιχα,
 - ii. $b \in C(\bar{U} \times [0, \infty); \mathbb{R}^m)$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα, και
 - iii. $c \in C(\bar{U} \times [0, \infty); \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα,
4. $f \in C(\bar{U} \times [0, \infty); \mathbb{R})$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί ομοιόμορφα συνθήκη Hölder με εκθέτες δ και $\frac{\delta}{2}$ ως προς x και t , αντίστοιχα,
5. $g \in C(\bar{U}; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε, μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma \neq 1$, να υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $g \in C^1\left(\overline{U \cap \bigcup_{x \in \partial U} B(x, \rho)} \setminus \Sigma; \mathbb{R}\right)$,
6. $r \in C(\partial U \times [0, \infty); (0, \infty))$, καθώς επίσης $h \in C(\partial U \times [0, \infty); \mathbb{R})$, και

7. ότι ικανοποιείται η συνθήκη συμβατότητας

$$\gamma r(x)g(x) + (1 - \gamma) \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}}(x) = h(x, 0), \forall x \in \partial U \setminus \Sigma.$$

Τότε $\exists!$ ολική λύση, $y: \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, του (ΠΑΣΤ), η οποία, μάλιστα, εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.

Τώρα, στην περίπτωση της κλασικής εξίσωσης διάχυσης στη μία χωρική διάσταση, υπάρχει μια χρήσιμη και κομψή μορφή σειράς για τη λύση του **Θεωρήματος 13.2**. Ωστόσο, για την εξαγωγή της μορφής αυτής απαιτείται η γνώση βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων από την Ανάλυση Fourier και τη θεωρία του προβλήματος ιδιοτιμών Sturm–Liouville.

Σειρές Fourier. Δεδομένων $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, (πραγματικής) συνάρτησης, f , με $[x_1, x_2] \subseteq \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_1, x_2]$, και $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε $s_{i,f,x_1,x_2}: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$s_{i,f,x_1,x_2}(x) := \frac{1}{2}a_{0,f,x_1,x_2} + \sum_{j=1}^i a_{j,f,x_1,x_2} \cos\left(\frac{2j\pi}{x_2-x_1}\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) + \sum_{j=1}^i b_{j,f,x_1,x_2} \sin\left(\frac{2j\pi}{x_2-x_1}\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right), \forall x \in [x_1, x_2],$$

για το i -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f εντός του $[x_1, x_2]$, όπου

$$a_{j,f,x_1,x_2} := \frac{2}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) \cos\left(\frac{2j\pi}{x_2-x_1}\left(\xi - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) d\xi, \forall j \in \mathbb{N}_0$$

και

$$b_{j,f,x_1,x_2} := \frac{2}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(\xi) \sin\left(\frac{2j\pi}{x_2-x_1}\left(\xi - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) d\xi, \forall j \in \mathbb{N}$$

οι συντελεστές Fourier της f εντός του $[x_1, x_2]$, και καλούμε το όριο $\lim_{i \rightarrow \infty} s_{i,f,x_1,x_2}$ σειρά Fourier της f εντός του $[x_1, x_2]$ (άσχετα αν υπάρχει ή όχι).

Το γενεσιουργό ερώτημα που αφορά τη σειρά Fourier μιας συνάρτησης είναι το πότε και πώς συγκλίνει στην ίδια τη συνάρτηση. Δεν είναι καθόλου υπερβολή ότι η μελέτη του ερωτήματος αυτού απαιτεί τη χρήση εργαλείων από ολόκληρο το φάσμα της Πραγματικής Ανάλυσης στη μία διάσταση. Αρχικά, και με σειρά διαβάθμισης από την ασθενέστερη έννοια κλασικής σύγκλισης προς την ισχυρότερη, πρώτα παρουσιάζουμε πότε έχουμε σημειακή σύγκλιση, έπειτα πότε ομοιόμορφη και τέλος πότε απόλυτη της σειράς των συντελεστών. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον συναρτησιακό χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων κατά Lebesgue συναρτήσεων, L^2 , καθώς επίσης την έννοια της σύγκλισης στον χώρο αυτόν, και συμπεραίνουμε τη χρησιμότητα της τελευταίας ως προς τη μείωση των απαιτήσεων της σύγκλισης της σειράς Fourier. Φυσικά θα περιορίσουμε την παρουσίασή μας στα πλέον βασικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 13.4 (κριτήριο Dirichlet-Dini για σημειακή σύγκλιση). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και περιοδική συνάρτηση, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με περίοδο $x_2 - x_1$, η οποία να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_1, x_2]$. Αν υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$ και $\rho \in (0, \pi]$, τέτοια ώστε

$$\int_0^\rho \left| \frac{f(x+\xi) - f(x-\xi)}{2} - K \right| \frac{1}{\xi} d\xi < \infty,$$

τότε η σειρά Fourier της f εντός του $[x_1, x_2]$ συγκλίνει σημειακά στο x , δηλ.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |s_{i,f,x_1,x_2}(x) - K| = 0.$$

Μάλιστα, αν, επιπλέον, υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$\lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) \in \mathbb{R} \ni \lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi),$$

τότε, αναγκαστικά,

$$K = \frac{1}{2} \left(\lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) + \lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) \right).$$

Και αν, επιπλέον, η f είναι συνεχής στο x , τότε, αναγκαστικά,

$$K = f(x).$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος αποτελεί το ακόλουθο.

Θεώρημα 13.5 (παραδείγματα σημειακής σύγκλισης). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, περιοδική συνάρτηση, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με περίοδο $x_2 - x_1$, η οποία να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_1, x_2]$, και $x \in \mathbb{R}$. Αν, επιπλέον, η f

1. είτε είναι διαφορίσιμη στο x ,
2. είτε ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[x - \rho, x + \rho]$, για κάποιο $\rho > 0$,
3. είτε ικανοποιεί συνθήκη Hölder με εκθέτη $\delta \in (0, 1)$ στο $[x - \rho, x + \rho]$, για κάποιο $\rho > 0$,

τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |s_{i,f,x_1,x_2}(x) - f(x)| = 0.$$

Με το επόμενο εισέρχεται και η ομοιόμορφη σύγκλιση στη μελέτη μας.

Θεώρημα 13.6 (σημειακή σύγκλιση μέσω ομοιόμορφης σύγκλισης). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και περιοδική συνάρτηση, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με περίοδο $x_2 - x_1$, η οποία να είναι συνεχής στο $\overline{\mathcal{I}}$, για κάποιο ανοικτό $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Αν η σειρά Fourier της f εντός του $[x_1, x_2]$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{\mathcal{I}}$, δηλ.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|s_{i,f,x_1,x_2} - f\|_{C_B(\overline{\mathcal{I}})} = 0,$$

τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |s_{i,f,x_1,x_2}(x) - f(x)| = 0, \forall x \in \overline{\mathcal{I}}.$$

Θεώρημα 13.7 (κριτήριο Dirichlet-Jordan για ομοιόμορφη σύγκλιση). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και περιοδική συνάρτηση, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με περίοδο $x_2 - x_1$, η οποία να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_1, x_2]$. Αν υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, τέτοια ώστε η f να είναι φραγμένης κύμανσης⁹ στο $[x - \rho, x + \rho]$, τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| s_{i,f,x_1,x_2}(x) - \frac{1}{2} \left(\lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) + \lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) \right) \right| = 0.$$

⁹Έστω διάστημα $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει φραγμένη κύμανση (και συμβολίζουμε $f \in BV(\mathcal{I}; \mathbb{R})$) αν η ολική κύμανση της f , $TV(f)$, είναι φραγμένη, δηλ. $TV(f) < \infty$. Σχετικά με την $TV(f)$, αν το \mathcal{I} είναι συμπαγές, δηλ. $\mathcal{I} = [x_1, x_2]$ με $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και $x_1 < x_2$, τότε δεδομένης πεπερασμένης διαμέρισης $P = \{x_1 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = x_2\}$, όπου $n \in \mathbb{N}$ αυθαίρετος, θέτουμε $S_P(f) := \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(y_{i-1})|$ και $TV(f) := \sup \{S_P(f) \mid P \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } [x_1, x_2]\}$,

ενώ αν το \mathcal{I} είναι ανοικτό, τότε $TV(f) := \sup \left\{ TV \left(f|_{[x_1, x_2]} \right) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2 \text{ και } (x_1, x_2) \subset \subset \mathcal{I} \right\}$. Η $TV(f)$ αναπαριστά την ολική κατακόρυφη απόσταση που διανύει ένα σημείο επί του γραφήματος της f . Παράδειγμα συνάρτησης φραγμένης κύμανσης είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz.

Μάλιστα, αν, επιπλέον, η f είναι συνεχής στο x , τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |s_{i,f,x_1,x_2}(x) - f(x)| = 0.$$

Και αν, επιπλέον, η f είναι συνεχής στο $[x - \rho, x + \rho]$, τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|s_{i,f,x_1,x_2} - f\|_{C_B([x-\rho,x+\rho])} = 0.$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω αποτελέσματος αποτελεί το ακόλουθο.

Θεώρημα 13.8 (παραδείγματα ομοιόμορφης σύγκλισης). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, περιοδική συνάρτηση, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με περίοδο $x_2 - x_1$, η οποία να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_1, x_2]$, $x \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$. Αν, επιπλέον, η f

1. είτε είναι συνεχής και κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη,
2. είτε, απλούστερα, ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz,
3. είτε, απλούστερα, είναι απόλυτα συνεχής,
4. είτε, απλούστατα, είναι φραγμένης κύμανσης

στο $[x - \rho, x + \rho]$, τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|s_{i,f,x_1,x_2} - f\|_{C_B([x-\rho,x+\rho])} = 0.$$

Με το επόμενο εισέρχεται και η απόλυτη σύγκλιση στη μελέτη μας.

Θεώρημα 13.9 (ομοιόμορφη σύγκλιση μέσω απόλυτης σύγκλισης της σειράς των συντελεστών). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και περιοδική συνάρτηση, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με περίοδο $x_2 - x_1$, η οποία να είναι συνεχής. Αν η σειρά των συντελεστών Fourier της f εντός του $[x_1, x_2]$ συγκλίνει απόλυτα, δηλ.

$$\sum_{i=1}^{\infty} (|a_{i,f,x_1,x_2}| + |b_{i,f,x_1,x_2}|) < \infty,$$

τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|s_{i,f,x_1,x_2} - f\|_{C_B(\mathbb{R})} = 0.$$

Θεώρημα 13.10 (παραδείγματα απόλυτης σύγκλισης της σειράς των συντελεστών). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και περιοδική συνάρτηση, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με περίοδο $x_2 - x_1$, η οποία να είναι ολοκληρώσιμη στο $[x_1, x_2]$. Αν, επιπλέον, η f

1. είτε είναι συνεχής και κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη,
2. είτε ικανοποιεί συνθήκη Hölder με εκθέτη $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$,

τότε

$$\sum_{i=1}^{\infty} (|a_{i,f,x_1,x_2}| + |b_{i,f,x_1,x_2}|) < \infty.$$

Τώρα, περνάμε στη μελέτη της σύγκλισης των σειρών Fourier υπό την έννοια του χώρου L^2 , ο οποίος αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα χώρου Hilbert. Θυμίζουμε ότι ένας (πραγματικός) χώρος Hilbert, H , είναι ένας διανυσματικός χώρος (επί του σώματος \mathbb{R}^{10}) εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο, $(\cdot, \cdot)_H$, ο οποίος γίνεται χώρος Banach μέσω της νόρμας που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο, $\|\cdot\|_H = (\cdot, \cdot)_H^{\frac{1}{2}}$. Κεντρικής σημασίας είναι η “καλή” δομή ενός χώρου Hilbert, και συγκεκριμένα η ύπαρξη αριθμησίσιμης (άπειρης ή μη) ορθοκανονικής βάσης του χώρου αυτού που να αποτελείται αποκλειστικά από στοιχεία του. Θυμίζουμε ότι ένα σύνολο $\{e_i \mid i \in S \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq H$ καλείται ορθοκανονικό όταν

$$(e_i, e_j)_H = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j, \end{cases}, \forall i, j \in S,$$

ενώ καλείται βάση του H όταν

$$H = \overline{\text{span}\{e_i \mid i \in S \subseteq \mathbb{N}\}},$$

δηλ. όταν η γραμμική θήκη του είναι πυκνή στον H . Μάλιστα, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 13.11. *Αν H χώρος Hilbert και $\{e_i \mid i \in S \subseteq \mathbb{N}\} \subseteq H$ ορθοκανονικό, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

1. Το $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί βάση του H .
2. Αν $x \in H$ και $(x, e_i)_H = 0$, για κάθε $i \in S$, τότε $x \equiv 0$.
3. Αν $x \in H$ τότε

$$x = \sum_{i \in S} (x, e_i)_H e_i,$$

με την έννοια ότι

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{j=1}^i (x, e_j)_H e_j \right\|_H = 0,$$

στην περίπτωση απειροδιάστατου H , δηλ. όταν $S = \mathbb{N}$.

4. Ισχύει η ισότητα Parseval,

$$\sum_{i \in S} |(x, e_i)_H|^2 = \|x\|_H^2.$$

Αυτή ακριβώς η “καλή” δομή τέτοιων χώρων αξιοποιείται τελικά για την υπό μελέτη σύγκλιση.

Και ενώ, ως τώρα, τουλάχιστον δεν χρειάστηκε η χρήση εργαλείων από τη Θεωρία Μέτρου Lebesgue και Ολοκλήρωσης κατά Lebesgue, από εδώ και ύστερα απαιτείται και αυτή. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι για κάποια $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$,

$$R^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) := \{f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^2 \text{ ολοκληρώσιμη (κατά Riemann)}\},$$

τον οποίο χώρο εφοδιάζουμε με το εσωτερικό γινόμενο

$$(\cdot, \cdot)_{R^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})}: (R^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f_1, f_2) \mapsto (f_1, f_2)_{R^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})} := \int_{x_1}^{x_2} f_1(\xi) f_2(\xi) d\xi,$$

¹⁰Προφανώς, ένας μιγαδικός τέτοιος χώρος θεωρείται επί του \mathbb{C} . Σε αυτή την περίπτωση, η όλη ιδέα πίσω από τη θεωρία παραμένει η ίδια, απλά γενικεύονται και τροποποιούνται επουσιωδώς οι ορισμοί και τα αποτελέσματα.

τότε ο χώρος αυτός με την επαγόμενη νόρμα (τα στοιχεία του χώρου που έχουν την ίδια νόρμα τα ταυτίζουμε, ασχέτως αν υπάρχει το ενδεχόμενο να διαφέρουν εντός μηδενοσυνόλου¹¹), δηλ. την

$$\|\cdot\|_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})} : L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$$

$$f \mapsto \|f\|_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})} := \left(\int_{x_1}^{x_2} f^2(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}},$$

δεν είναι πλήρης. Αντιθέτως, ο

$$L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) := \{f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^2 \text{ ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue}\},$$

εφοδιασμένος με το αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο και την αντίστοιχη επαγόμενη νόρμα, είναι πλήρης. Αυτός είναι και ο μοναδικός, αλλά ουσιαστικός, λόγος για τον οποίο απαιτείται η χρήση της μετροθεωρίας Lebesgue.

Για να δείξουμε τη σύγκλιση της σειράς Fourier στον χώρο Hilbert $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, θα χρειαστούμε πρώτα να εισάγουμε τον βοηθητικό διανυσματικό χώρο

$$L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ περιοδική με περίοδο } x_2 - x_1 \text{ και } f|_{[x_1, x_2]} \in L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \right\}.$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο χώρος $L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ είναι ο συνδυαστικός κρίκος με την κλασική θεωρία που παρουσιάστηκε πρώτα. Αν και διαφορετικοί, αυτοί οι δύο χώροι μπορούν να ταυτιστούν μεταξύ τους, καθώς και οι δυο τους μπορούν να ταυτιστούν με τον “ενδιάμεσο” χώρο

$$L^2_{per,2}([x_1, x_2]; \mathbb{R}) := \{f \in L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

Πράγματι, η ταύτιση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ με τον $L^2_{per,2}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ γίνεται στα πλαίσια της ταύτισης των στοιχείων του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ που έχουν την ίδια νόρμα αλλά διαφέρουν σε μηδενοσύνολο. Η ταύτιση του $L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ με τον $L^2_{per,2}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ πραγματοποιείται μέσω μιας $1 - 1$ και επί συνάρτησης μεταξύ τους, και συγκεκριμένα τον τελεστή περιοδικής επέκτασης με περίοδο $x_2 - x_1$,

$$E : L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \rightarrow L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$$

$$f \mapsto Ef \text{ με } Ef(x + i(x_2 - x_1)) := f(x), \forall x \in [x_1, x_2], \forall i \in \mathbb{Z},$$

ο οποίος έχει για αντίστροφό του τον τελεστή περιορισμού,

$$\Pi : L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \rightarrow L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$$

$$f \mapsto \Pi f := f|_{[x_1, x_2]},$$

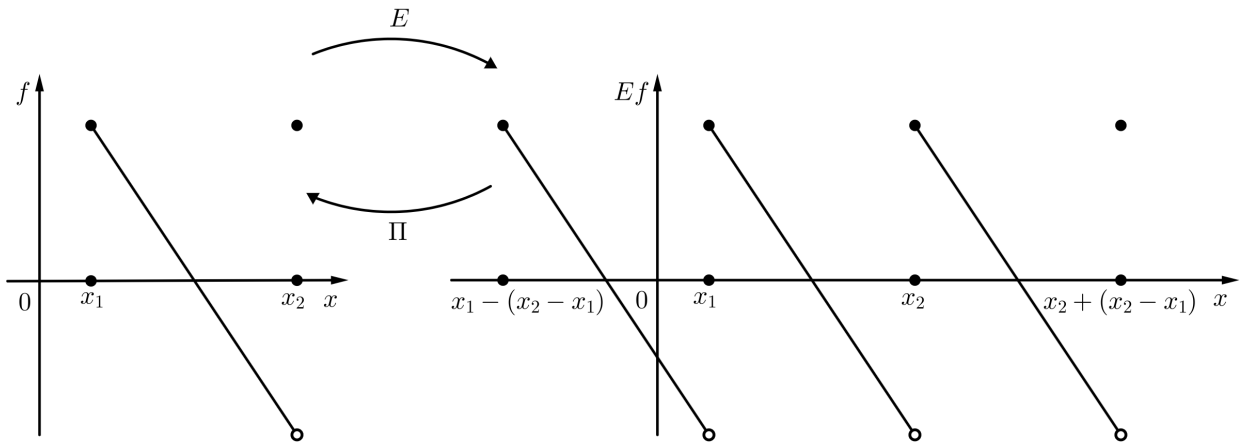
καθώς

$$E \circ \Pi = \text{id}_{L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R})} \text{ και } \Pi \circ E = \text{id}_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})}.$$

Παράδειγμα της δράσης των τελεστών E και Π απεικονίζεται στο [Σχήμα 13.9](#).

¹¹Τυπικά, ένας τέτοιος διανυσματικός χώρος με νόρμα ορίζεται ως ένας κατάλληλος χώρος πηλίκο, κάτι το οποίο επιτρέπει τελικά την ταύτιση των στοιχείων που διαφέρουν σε μηδενοσύνολα.

Σημειώνουμε, με την ευκαιρία και προς αποφυγή παρεξηγήσεων, ότι η έννοια του μηδενοσυνόλου, την οποία και έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει πολλές φορές, αποτελεί εκ των ων ουκ άνευ εργαλείο πρωτίστως του (κατά Riemann) Απειροστικού Λογισμού, άσχετα αν στη μετροθεωρία Lebesgue εισάγεται τελικά η έννοια του μέτρου Lebesgue ενός κατάλληλου συνόλου, το οποίο ενδεχομένως να έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue και να πρόκειται, έτσι, για ένα μηδενοσύνολο.



Σχήμα 13.9: Παράδειγμα της δράσης των τελεστών E και Π .

Οι παραπάνω ταυτίσεις εξασφαλίζουν ότι οι χώροι $L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ και $L^2_{per,2}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ κληρονομούν τη δομή του χώρου Hilbert $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$.

Το κεντρικό αποτέλεσμα, για το οποίο αξιοποιείται το σημείου 2. του [Θεωρήματος 13.11](#), έχει ως ακολούθως.

Θεώρημα 13.12 (σύγκλιση στον L^2). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ και $f \in L^2_{per,1}([x_1, x_2])$. Τότε

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|s_{i,f,x_1,x_2} - f\|_{L^2([x_1,x_2];\mathbb{R})} = 0.$$

Σε σχέση με τα προηγούμενα αποτελέσματα σύγκλισης, το τελευταίο αν και μειώνει τις απαιτήσεις ως προς τις αποδεκτές συναρτήσεις, τις σειρές Fourier των οποίων εξετάζουμε (καθώς, για παράδειγμα, έχουμε ότι μια τοπικά συνεχής συνάρτηση είναι και τοπικά τετραγωνικά Lebesgue ολοκληρώσιμη), μειώνει ωστόσο ταυτόχρονα και την ισχύ της σύγκλισης. Ένα τέτοιο τίμημα, παρόλα αυτά, είναι διαχειρίσιμο στις εφαρμογές.

Τέλος, με βάση τη συζήτηση που προηγήθηκε, το [Θεώρημα 13.12](#) γράφεται ισοδύναμα στην παρακάτω μορφή.

Θεώρημα 13.13 (κοινή βάση των L^2 και $L^2_{per,1}$). Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε το σύνολο συναρτήσεων

$$\left\{ \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{2i\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right), \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{2i\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$$

αποτελεί κοινή ορθοκανονική βάση των $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ και $L^2_{per,1}([x_1, x_2]; \mathbb{R})$.

Παρατηρούμε ότι η βάση στο παραπάνω αποτέλεσμα αποτελεί υποσύνολο και του

$$\{f \in C^\infty([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \mid f(x_1) = f(x_2)\},$$

ο οποίος δείχνει ελκυστικός για τις εφαρμογές. Άραγε υπάρχουν και άλλες τέτοιου τύπου “ομαλές” βάσεις του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, και αν ναι, υπάρχει συστηματικός τρόπος να τις εντοπίσουμε; Η απάντηση στο πρώτο είναι καταφατική και η απάντηση στο δεύτερο περνάει μέσα από τη μελέτη του προβλήματος ιδιοτιμών Sturm–Liouville.

Πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm–Liouville. Η θεωρία του προβλήματος ιδιοτιμών Sturm–Liouville αποτελεί τη γενίκευση της Ανάλυσης Fourier, καθώς παράγει επιπλέον βάσεις του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ εκτός της κλασικής των περιοδικών συναρτήσεων που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η θεωρία αυτή δεν είναι τίποτα άλλο από τη μελέτη μιας ειδικής γραμμικής περίπτωσης του (ΠΣΤ) για $m, n = 1$ και $U = (x_1, x_2)$, για συγκεκριμένες κάθε φορά συνοριακές συνθήκες. Σε κάθε τέτοια επιλογή συνοριακής συνθήκης αντιστοιχεί και μια βάση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, αποτελούμενη από λύσεις της ειδικής αυτής περίπτωσης του (ΠΣΤ). Η ουσία σε όλη αυτή τη διαδικασία είναι ότι σε κάθε άλλη περίπτωση του (ΠΣΤ) με την ίδια επιλογή συνοριακής συνθήκης, είναι εφικτή η αναζήτηση λύσης, y , ως σειρά

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} (y, e_i)_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})} e_i,$$

δηλ. αρκεί ο καθορισμός των συντελεστών

$$(y, e_i)_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})}, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

για την εύρεση λύσης. Η παραπάνω σειρά καλείται *γενικευμένη σειρά Fourier της y εντός του $[x_1, x_2]$* και οι αντίστοιχοι συντελεστές καλούνται *γενικευμένοι συντελεστές Fourier της y εντός του $[x_1, x_2]$* .

Μίας και, όπως αναφέραμε, θα ενδιαφερθούμε για λύσεις ενός (ειδικού) (ΠΣΤ), αξίζει πρώτα ένα γενικό σχόλιο σχετικά με την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων τέτοιων προβλημάτων. Συγκεκριμένα, αντίθετα με την περίπτωση ενός προβλήματος αρχικών τιμών με ΣΔΕ δεύτερης τάξης, το οποίο έχει πάντα λύση και μάλιστα μοναδική (θυμίζουμε ότι μπορούμε να μετατρέψουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με ΣΔΕ n -οστής τάξης σε ένα (ΠΑΤ), δηλ. σε ένα αντίστοιχο με ΣΔΕ πρώτης τάξης), δεν ισχύει το αντίστοιχο για ένα (ΠΣΤ), καθώς, π.χ., άμεσα επαληθεύεται ότι το

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + \pi^2 y(x) = 0, & \forall x \in (0, 1) \\ y(0) = 0 = y(1) \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις, τις $y_a(x) = a \sin(\pi x)$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ενώ το

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + \pi^2 y(x) = 1, & \forall x \in (0, 1) \\ y(0) + \frac{dy}{dx}(0) = 0 = y(1) + \frac{dy}{dx}(1) \end{cases}$$

δεν έχει λύση.

Τώρα η προαναφερόμενη ειδική περίπτωση του (ΠΣΤ) έχει τη μορφή

$$\begin{cases} L(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), & \forall x \in (x_1, x_2) \\ \gamma_i r(x_i)y(x_i) + (-1)^i (1 - \gamma_i) a(x_i) \frac{dy}{dx}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\} \end{cases} \quad (SL1)$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, $w \in C([x_1, x_2]; (0, \infty))$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in [0, 1]^2$, $r(\{x_1, x_2\}) \subseteq (0, \infty)$ και ο L είναι ελλειπτικός στο (x_1, x_2) , δηλ.

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{dy}{dx}(x) \right) + b(x) \frac{dy}{dx}(x) + c(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), & \forall x \in (x_1, x_2) \\ \gamma_i r(x_i)y(x_i) + (-1)^i (1 - \gamma_i) a(x_i) \frac{dy}{dx}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\}, \end{cases}$$

όπου $a \in C([x_1, x_2]; (0, \infty)) \cap C^1([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ και $b, c \in C([x_1, x_2]; \mathbb{R})$. Σημειώνουμε σχετικά με τη συνοριακή συνθήκη του (SL1), ότι

1. εδώ (δηλ. για την περίπτωση του μονοδιάστατου φραγμένου ανοικτού και συνεκτικού συνόλου $U = (x_1, x_2)$)

$$v(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } x = x_1 \\ 1, & \text{αν } x = x_2, \end{cases}$$

άρα

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}}(x) = \begin{cases} -a(x) \frac{d}{dx}, & \text{αν } x = x_1, \\ a(x) \frac{d}{dx}, & \text{αν } x = x_2 \end{cases}$$

και

2. πρόκειται για ομογενή συνοριακή συνθήκη (δηλ., με μηδενικό δεξιό μέλος) και, μάλιστα, για την πλέον γενική περίπτωση ομογενούς συνοριακής συνθήκης που έχουμε αναφέρει, καθώς είναι και μεικτή όταν $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (ακριβώς γι' αυτό τον λόγο στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως "χωριζόμενη" συνοριακή συνθήκη).

Η μελέτη του (SL1) έγκειται στην αναζήτηση και τον χαρακτηρισμό λύσεων του. Έχει, μάλιστα, φανεί (και θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια) ότι η παραπάνω αναζήτηση είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου λ , από την οποία επιλογή εξαρτάται και η αντίστοιχη λύση, y . Έτσι, αναδιατυπώνοντας, η μελέτη του (SL1) έγκειται στην αναζήτηση και τον χαρακτηρισμό ζευγών (λ, y) τα οποία να ικανοποιούν το πρόβλημα. Παρατηρούμε, όμως, ότι το ζεύγος $(\lambda, 0)$ ικανοποιεί πάντα το (SL1), για κάθε τιμή του λ , οπότε τα μόνα ενδιαφέροντα ζεύγη (λ, y) είναι εκείνα όπου $y \neq 0$. Οι τιμές του λ για τις οποίες υπάρχουν μη (ταυτοτικά) μηδενικές λύσεις καλούνται *ιδιοτιμές* και οι αντίστοιχες λύσεις καλούνται *ιδιοσυναρτήσεις* του (SL1). Άρα, αναδιατυπώνοντας εκ νέου, η μελέτη του (SL1) έγκειται στην αναζήτηση και τον χαρακτηρισμό ζευγών ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του προβλήματος. Η μελέτη αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με εργαλεία, είτε αμιγώς του Απειροστικού Λογισμού και των ΣΔΕ, είτε της Συναρτησιακής Ανάλυσης και συγκεκριμένα με τη γενίκευση του κλασικού φασματικού θεωρήματος σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert.

Σε κάθε περίπτωση, για τη γενική διατύπωσή του κεντρικού αποτελέσματος απαιτείται η εισαγωγή των L^2 χώρων με βάρος, w όπως παραπάνω, οι οποίοι γενικεύουν τον L^2 . Έτσι, θέτουμε

$$L^2_w([x_1, x_2]; \mathbb{R}) := \left\{ f : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^2 w \text{ είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue} \right\},$$

ο οποίος χώρος εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_{L^2_w([x_1, x_2]; \mathbb{R})} &: \left(L^2_w([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \right)^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (f_1, f_2) &\mapsto (f_1, f_2)_{L^2_w([x_1, x_2]; \mathbb{R})} := \int_{x_1}^{x_2} f_1(\xi) f_2(\xi) w(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

άρα και με την επαγόμενη νόρμα

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^2_w([x_1, x_2]; \mathbb{R})} &: L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty) \\ f &\mapsto \|f\|_{L^2_w([x_1, x_2]; \mathbb{R})} := \left(\int_{x_1}^{x_2} f^2(\xi) w(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

αποτελεί χώρο Hilbert. Επίσης, απαιτείται η γραφή του (SL1) στην απλούστερη μεν, ισοδύναμη δε, μορφή

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy}{dx}(x)\right) + c(x)y(x) = \lambda w(x)y(x), & \forall x \in (x_1, x_2) \\ \gamma_i r(x_i)y(x_i) + (-1)^i (1 - \gamma_i) a(x_i)\frac{dy}{dx}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\}, \end{cases} \quad (SL2)$$

κάτι που άλλωστε είναι εφικτό μέσω του μετασχηματισμού

$$(a, c, w, r) \mapsto e^{-\int_{x_1}^{\cdot} \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi} (a, c, w, r),$$

ο οποίος τονίζεται ότι αφήνει ανεπηρέαστο το ζεύγος (λ, y) .

Θεώρημα 13.14 (βάσεις του L_w^2 αποτελούμενες από ιδιοσυναρτήσεις ΠΣΤ). Υπάρχει ακολουθία ζευγών ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων, $((\lambda_i, y_i))_{i=1}^{\infty}$, του (SL2), τέτοια ώστε

1. η ακολουθία των ιδιοτιμών, $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$, είναι κάτω φραγμένη, γνησίως αύξουσα, αλλά όχι άνω φραγμένη, δηλ.

$$-\infty < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_i < \lambda_{i+1} < \dots \text{ και } \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty,$$

2. αν $c([x_1, x_2]) \not\subseteq [0, \infty)$, τότε¹² $\lambda_1 > 0$ (άρα $\lambda_i > 0$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$),
3. για κάθε $i \in \mathbb{N}$, η i -οστή ιδιοσυνάρτηση, y_i , έχει ακριβώς $i - 1$ στο πλήθος σημεία μηδενισμού εντός του (x_1, x_2) ,
4. το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων, $\{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$,

i. είναι υποσύνολο του

$$\left\{ f \in C^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \mid \gamma_i r(x_i)f(x_i) + (-1)^i (1 - \gamma_i) a(x_i)\frac{df}{dx}(x_i) = 0, \forall i \in \{1, 2\} \right\}$$

και μάλιστα, αν τα δεδομένα του προβλήματος είναι ομαλά, δηλ. αν $a, b, c, w \in C^\infty$, τότε είναι υποσύνολο του

$$\left\{ f \in C^\infty([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \mid \gamma_i r(x_i)f(x_i) + (-1)^i (1 - \gamma_i) a(x_i)\frac{df}{dx}(x_i) = 0, \forall i \in \{1, 2\} \right\},$$

και

- ii. αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L_w^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, και

5. αν $a, w \in C([x_1, x_2]; (0, \infty)) \cap C^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, τότε

i. ισχύει η ασυμπτωτική σχέση

$$\lambda_i \sim \left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1} \right)^2, \text{ καθώς } i \rightarrow \infty,$$

¹²Η λ_1 καλείται πρώτη ιδιοτιμή. Αντίστοιχα η y_1 καλείται πρώτη ιδιοσυνάρτηση.

ii. η ακολουθία των ιδιοσυναρτήσεων, $(y_i)_{i=1}^{\infty}$, είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον $C_B([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, δηλ. $\exists K > 0$, τέτοιο ώστε

$$\|y_i\|_{C_B([x_1, x_2]; \mathbb{R})} \leq K, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

και

iii. $y_1((x_1, x_2)) \subseteq (0, \infty)$.

Ας δούμε κάποια βασικά παραδείγματα “ομαλών” ορθοκανονικών βάσεων του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ αποτελούμενων από ιδιοσυναρτήσεις του εκάστοτε (SL2) με $a, w \equiv 1$ και $c \equiv 0$, δηλ. για το εκάστοτε πρόβλημα

$$\begin{cases} -\frac{d^2 y}{dx^2}(x) = \lambda y(x), & \forall x \in (x_1, x_2) \\ \gamma_i r(x_i) y(x_i) + (-1)^i (1 - \gamma_i) \frac{dy}{dx}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\}. \end{cases} \quad (13.4)$$

1. Η περίπτωση όπου

$$\gamma_i, r(x_i) = 1, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

δηλ. συνοριακής συνθήκης Dirichlet. Το σύνολο

$$\left\{ \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right) \mid i \in \mathbb{N} \right\}, \quad (13.5)$$

το οποίο είναι υποσύνολο του

$$\{f \in C^\infty([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \mid f(x_1) = 0 = f(x_2)\},$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$. Πράγματι, μιας και η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης στο (13.4) είναι η

$$-\rho^2 = \lambda \rho, \quad \forall \rho \in \mathbb{R},$$

οι μη μηδενικές λύσεις του (13.4) θα έχουν τη μορφή

$$y(x) = K_1 e^{(-\lambda)^{\frac{1}{2}} x} + K_2 e^{-(\lambda)^{\frac{1}{2}} x}, \quad \forall x \in [x_1, x_2],$$

για σταθερές $K_{1,2} \in \mathbb{C}$ με $|K_1| + |K_2| > 0$. Από τη συνοριακή συνθήκη του προβλήματος,

$$y(x_1) = 0 = y(x_2),$$

έπεται ότι η μόνη περίπτωση μη μηδενικών λύσεων είναι αυτή για $\lambda > 0$, όπου οι λύσεις θα έχουν τη μορφή

$$y(x) = \tilde{K}_1 \cos \left(\lambda^{\frac{1}{2}} x \right) + \tilde{K}_2 \sin \left(\lambda^{\frac{1}{2}} x \right), \quad \forall x \in [x_1, x_2],$$

για σταθερές $\tilde{K}_{1,2} \in \mathbb{R}$ με $|\tilde{K}_1| + |\tilde{K}_2| > 0$ και

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 \cos \left(\lambda^{\frac{1}{2}} x_1 \right) + \tilde{K}_2 \sin \left(\lambda^{\frac{1}{2}} x_1 \right) &= 0 \\ \tilde{K}_1 \cos \left(\lambda^{\frac{1}{2}} x_2 \right) + \tilde{K}_2 \sin \left(\lambda^{\frac{1}{2}} x_2 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Οπότε, απαιτείται η ορίζουσα του πίνακα του παραπάνω συστήματος να είναι μηδενική, δηλ.

$$\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x_1\right)\sin\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x_2\right) - \sin\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x_1\right)\cos\left(\lambda^{\frac{1}{2}}x_2\right) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sin\left(\lambda^{\frac{1}{2}}(x_2 - x_1)\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1}\right)^2, \forall i \in \mathbb{Z},$$

άρα τα αντίστοιχα ζεύγη ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων που αποτελούν ορθοκανονική βάση είναι τα

$$(\lambda_i, y_i) = \left(\left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1} \right)^2, \frac{1}{C_i} \sin\left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right) \right), \forall i \in \mathbb{N},$$

όπου

$$C_i = \left\| \sin\left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right) \right\|_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})} = \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall i \in \mathbb{N},$$

και έτσι έπεται το ζητούμενο.

2. Η περίπτωση όπου

$$\gamma_i = 0, \forall i \in \{1, 2\},$$

δηλ. συνοριακής συνθήκης Neumann. Αντίστοιχα με πριν, το σύνολο

$$\left\{ \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right) \mid i \in \mathbb{N} \right\}, \quad (13.6)$$

το οποίο είναι υποσύνολο του

$$\left\{ f \in C^\infty([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \mid \frac{df}{dx}(x_1) = 0 = \frac{df}{dx}(x_2) \right\},$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$.

3. Η περίπτωση όπου

$$\gamma_1, r(x_1) = 1 \text{ και } \gamma_2 = 0,$$

δηλ. μεικτής συνοριακής συνθήκης Dirichlet και Neumann, αντίστοιχα. Το σύνολο

$$\left\{ \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{2(x_2 - x_1)} (x - x_1) \right) \mid i \in \mathbb{N} \right\},$$

το οποίο είναι υποσύνολο του

$$\left\{ f \in C^\infty([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \mid f(x_1) = 0 = \frac{df}{dx}(x_2) \right\},$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$.

4. Η περίπτωση όπου

$$\gamma_1 = 0 \text{ και } \gamma_2, r(x_2) = 1,$$

δηλ. μεικτής συνοριακής συνθήκης Neumann και Dirichlet, αντίστοιχα. Το σύνολο

$$\left\{ \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{(2i-1)\pi}{2(x_2 - x_1)} (x - x_1) \right) \middle| i \in \mathbb{N} \right\},$$

το οποίο είναι υποσύνολο του

$$\left\{ f \in C^\infty([x_1, x_2]; \mathbb{R}) \middle| \frac{df}{dx}(x_1) = 0 = f(x_2) \right\},$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$.

5. Στην περίπτωση όπου

$$\gamma_i \notin \{0, 1\}, \forall i \in \{1, 2\},$$

δηλ. μεικτής συνοριακής συνθήκης Robin, αναφέρουμε απλά ότι παρόλο που η ύπαρξη των αντίστοιχων ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων, άρα και της αντίστοιχης βάσης του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, είναι εξασφαλισμένη, η εύρεση τους σε κλειστή μορφή είναι δυσχερής.

Τώρα, επανερχόμαστε στην αφετηρία, και διερωτόμαστε αν όντως αποτελεί η παραπάνω θεωρία γενίκευση της αντίστοιχης των σειρών Fourier. Δηλ. μένει να συμπεράνουμε, με χρήση αποκλειστικά της παραπάνω εργαλειοθήκης, ότι και το σύνολο

$$\left\{ \left(\frac{1}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{2i\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right), \left(\frac{2}{x_2 - x_1} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{2i\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right) \middle| i \in \mathbb{N} \right\}$$

αποτελεί, επίσης, ορθοκανονική βάση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ ¹³, ή, ισοδύναμα, ότι

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|s_{i,f,x_1,x_2} - f\|_{L^2([x_1,x_2];\mathbb{R})} = 0, \forall f \in L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}).$$

Πράγματι, για αυθαίρετη $f \in L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ αρκεί να ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα.

¹³Σε μια τέτοια περίπτωση, παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\left\{ \left(\frac{i\pi}{x_2 - x_1} \right)^2 \middle| \forall i \in \mathbb{N} \right\},$$

το οποίο περιλαμβάνει (όλες, στην περίπτωση συνοριακής συνθήκης Dirichlet, αλλά όλες πλην μιας, και συγκεκριμένα της μηδενικής για $i = 0$, στην περίπτωση συνοριακής συνθήκης Neumann) ιδιοτιμές του (13.4), τόσο για συνοριακή συνθήκη Dirichlet όσο και για Neumann, εμφανίζεται δύο φορές στην παραπάνω βάση, μία σε ιδιοσυναρτήση συνημίτονου και μία σε ημιτόνου. Γι' αυτό τον λόγο, οι ιδιοτιμές αυτές χαρακτηρίζονται συχνά στη βιβλιογραφία ως διπλές για το “περιοδικό” πρόβλημα Sturm-Liouville. Ένα τέτοιο “πρόβλημα” εμφανίζεται στη βιβλιογραφία με συνοριακή συνθήκη

$$y(x_1) = y(x_2) \text{ και } \frac{dy}{dx}(x_1) = \frac{dy}{dx}(x_2),$$

η οποία δεν είναι συμβατή με καμία από τις περιπτώσεις που έχουμε εισάγει στο παρόν σύγγραμμα. Ωστόσο ο formalισμός μας δεν υστερεί, καθώς η θεώρηση και η μελέτη ενός τέτοιου “προβλήματος” είναι περιττή, όπως άλλωστε καταδεικνύεται και παρακάτω.

1. Έχουμε ότι

$$f_{1,even} + f_{1,odd} = \begin{cases} 2f, & \text{στο } \left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right] \\ 0, & \text{στο } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right] \end{cases}$$

και

$$f_{2,even} + f_{2,odd} = \begin{cases} 0, & \text{στο } \left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right] \\ 2f, & \text{στο } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right], \end{cases}$$

όπου $f_{1,even}$ και $f_{1,odd}$ η άρτια και (σχεδόν) περιττή, αντίστοιχα, επέκταση της $f|_{\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right]}$ εκατέρωθεν του $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, καθώς επίσης $f_{2,even}$ και $f_{2,odd}$ η άρτια και (σχεδόν) περιττή, αντίστοιχα, επέκταση της $f|_{\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right]}$ εκατέρωθεν του $x = \frac{x_1+x_2}{2}$. Συγκεκριμένα,

$$f_{1,even} := \begin{cases} f, & \text{στο } \left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right] \\ f(x_1 + x_2 - \cdot), & \text{στο } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right] \end{cases}$$

και

$$f_{1,odd} := \begin{cases} f, & \text{στο } \left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right] \\ -f(x_1 + x_2 - \cdot), & \text{στο } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right], \end{cases}$$

καθώς επίσης

$$f_{2,even} := \begin{cases} f(x_1 + x_2 - \cdot), & \text{στο } \left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right] \\ f, & \text{στο } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right] \end{cases}$$

και

$$f_{2,odd} := \begin{cases} -f(x_1 + x_2 - \cdot), & \text{στο } \left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right] \\ f, & \text{στο } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right]. \end{cases}$$

Παράδειγμα των συναρτήσεων αυτών απεικονίζεται στο [Σχήμα 13.10](#).

Συνεπώς, μας και

$$s_{i, \frac{1}{2}}(f_{j,even} + f_{j,odd}), x_1, x_2 = \frac{1}{2} \left(s_{i, f_{j,even}, x_1, x_2} + s_{i, f_{j,odd}, x_1, x_2} \right), \forall i \in \mathbb{N}, \forall j \in \{1, 2\},$$

το ερώτημα μας είναι ισοδύναμο με τις ισότητες

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2} \left(s_{i, f_{1,even}, x_1, x_2} + s_{i, f_{1,odd}, x_1, x_2} \right) - f \right\|_{L^2 \left(\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2} \right]; \mathbb{R} \right)} = 0$$

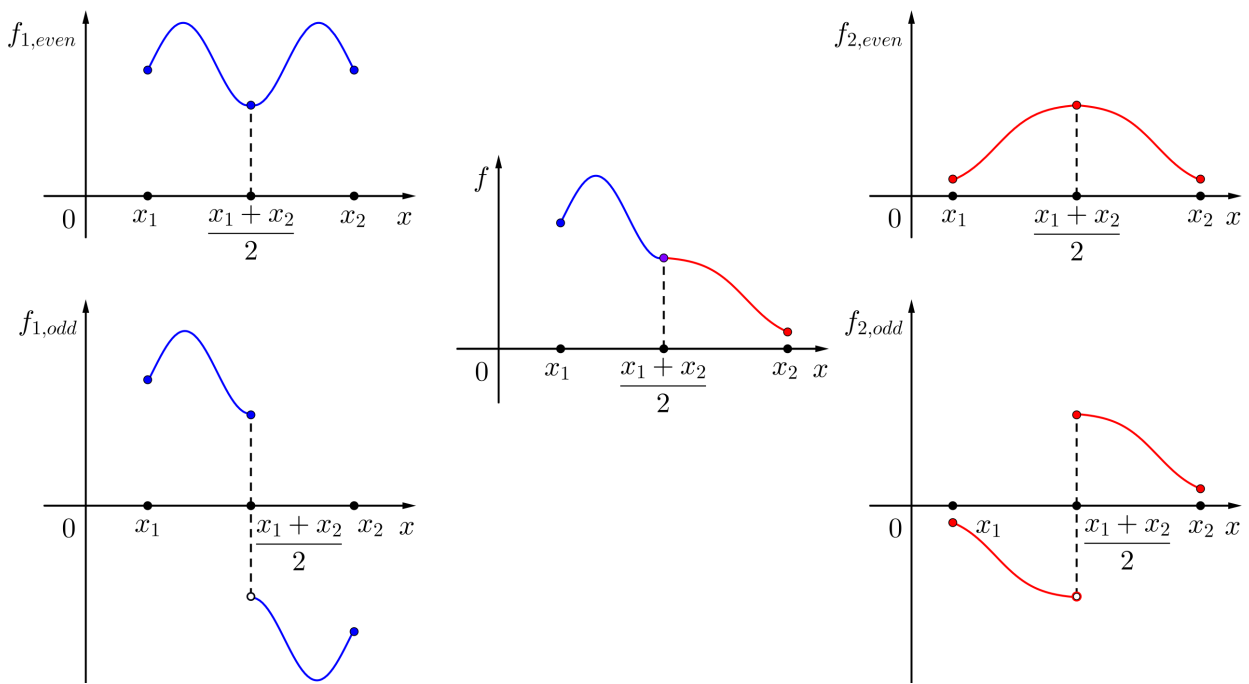
και

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2} \left(s_{i, f_{2,even}, x_1, x_2} + s_{i, f_{2,odd}, x_1, x_2} \right) - f \right\|_{L^2 \left(\left(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2 \right]; \mathbb{R} \right)} = 0.$$

Θα δειχθεί μόνο η πρώτη, καθώς αντίστοιχα έπεται και η δεύτερη.

2. Προφανώς οι $f_{1,even}$ και $f_{1,odd}$ ανήκουν στον $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$ και υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier τους. Ας δούμε, για παράδειγμα, τον $a_{i, f_{1,even}, x_1, x_2}$, για κάποιο $i \in \mathbb{N}_0$,

$$a_{i, f_{1,even}, x_1, x_2} = \frac{2}{x_2 - x_1} \left(\underbrace{\int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} \dots d\xi}_{=: A_1} + \underbrace{\int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} \dots d\xi}_{=: A_2} \right),$$



Σχήμα 13.10: Παράδειγμα των συναρτήσεων $f_{j,even/odd}$, για $j \in \{1, 2\}$. Οι άρτιες επεκτάσεις αποτελούν ανακλάσεις εκατέρωθεν της κάθετης στον οριζόντιο άξονα ευθείας που διέρχεται από τη μέση τιμή του διαστήματος, ενώ οι (σχεδόν) περιττές αποτελούν ανακλάσεις εκατέρωθεν του οριζόντιου άξονα των άρτιων ανακλαστικών τμημάτων.

όπου έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 A_2 &= \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_2} f(x_1+x_2-\xi) \cos\left(\frac{2i\pi}{x_2-x_1}\left(\xi - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) d\xi = \\
 &= - \int_{\frac{x_1+x_2}{2}}^{x_1} f(\xi) \cos\left(\frac{2i\pi}{x_2-x_1}\left(\frac{x_1+x_2}{2} - \xi\right)\right) d\xi = \\
 &= \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} f(\xi) \cos\left(\frac{2i\pi}{x_2-x_1}\left(\xi - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) d\xi = A_1,
 \end{aligned}$$

δηλ.

$$a_{i,f_{1,even},x_1,x_2} = \frac{4}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} f(\xi) \cos\left(\frac{2i\pi}{x_2-x_1}\left(\xi - \frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) d\xi.$$

Αντίστοιχα υπολογίζονται και οι υπόλοιποι, οπότε έχουμε τελικά ότι

$$a_{i,f_{1,odd},x_1,x_2} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \text{και} \quad b_{i,f_{1,even},x_1,x_2} = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

και

$$b_{i,f_{1,odd},x_1,x_2} = \frac{4}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{\frac{x_1+x_2}{2}} f(\xi) \sin\left(\frac{2i\pi}{x_2 - x_1} \left(\xi - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) d\xi, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Άρα, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} s_{i,f_{1,even},x_1,x_2} + s_{i,f_{1,odd},x_1,x_2} &= \frac{1}{2} a_{0,f_{1,even},x_1,x_2} + \\ &+ \sum_{j=1}^i a_{j,f_{1,even},x_1,x_2} \cos\left(\frac{2j\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) + \\ &+ \sum_{j=1}^i b_{j,f_{1,odd},x_1,x_2} \sin\left(\frac{2j\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

3. Υπό το πρίσμα του παραπάνω υπολογισμού των συντελεστών Fourier των $f_{1,even}$ και $f_{2,odd}$, αναπτύσσουμε την $f|_{\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]}$ τόσο ως προς τη βάση (13.5) όσο και ως προς την (13.6) και παίρνουμε ότι

$$f|_{\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]} = \frac{1}{2} a_{0,f_{1,even},x_1,x_2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,f_{1,even},x_1,x_2} \cos\left(\frac{2j\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right)$$

και

$$f|_{\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]} = \sum_{j=1}^{\infty} b_{j,f_{1,odd},x_1,x_2} \sin\left(\frac{2j\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right),$$

αντίστοιχα, δηλ.

$$\begin{aligned} 2 f|_{\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]} &= \frac{1}{2} a_{0,f_{1,even},x_1,x_2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,f_{1,even},x_1,x_2} \cos\left(\frac{2j\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} b_{j,f_{1,odd},x_1,x_2} \sin\left(\frac{2j\pi}{x_2 - x_1} \left(\cdot - \frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Έπεται έτσι το ζητούμενο.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι και άλλες ορθοκανονικές βάσεις, οι οποίες δεν αποτελούνται από ιδιοσυναρτήσεις του (SL2), μπορούν να κατασκευαστούν από ορθοκανονικές βάσεις αποτελούμενες από τέτοιες ιδιοσυναρτήσεις.

Εκτός του τυπικού (SL2) που είδαμε μέχρι τώρα, το οποίο συνήθως και καλείται κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville, υπάρχουν και εκδοχές αυτού που ξεφεύγουν από το ανωτέρω πλαίσιο και αποτελούν τα λεγόμενα *ιδιάζοντα* αντίστοιχα προβλήματα. Τέτοιες εκδοχές αφορούν, για παράδειγμα, περιπτώσεις όπου

- είτε $a(x_i) = 0$ και δεν υπάρχει συνοριακή συνθήκη στο $x = x_i$, για κάποιο $i \in \{1, 2\}$ (ενδεχομένως και για τα δύο),
- είτε το U είναι μη φραγμένο.

Κάποια από τα προβλήματα αυτά συμπεριφέρονται όπως τα κανονικά, για κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης βάρους, w . Ωστόσο, άλλα έχουν πολύ διαφορετική συμπεριφορά, καθώς μπορεί το σύνολο των ιδιοτιμών τους να μην είναι αριθμήσιμα άπειρο, αλλά συνεχώς άπειρο, όπως διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν περισσότερα από 50 επώνυμα (άρα και ουσιαστικού ενδιαφέροντος) προβλήματα ιδιοτιμών Sturm-Liouville (για παράδειγμα, το πρόβλημα για τη διαφορική εξίσωση του Legendre, το πρόβλημα για τη διαφορική εξίσωση του Bessel, το πρόβλημα για τη διαφορική εξίσωση του Hermite, κ.ά.), κανονικά και ιδιάζοντα, τα οποία είναι καλά μελετημένα.

Κλείνοντας την παρούσα παράγραφο, σημειώνουμε ότι στην περίπτωση “ορθογώνιων γεωμετριών” στον \mathbb{R}^m , δηλ. εντός κλειστού και φραγμένου m -διάστατου διαστήματος,

$$\prod_{i=1}^m [x_{i,1}, x_{i,2}],$$

μπορούμε εύκολα να βρούμε βάσεις “χωριζομένων μεταβλητών” του $L^2\left(\prod_{i=1}^m [x_{i,1}, x_{i,2}]; \mathbb{R}\right)$, μέσω της πολλαπλασιαστικής αρχής. Συγκεκριμένα, αν, για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$, το σύνολο $\{e_{i,j} \mid j \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([x_{i,1}, x_{i,2}]; \mathbb{R})$, τότε το $\{e_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2\left(\prod_{i=1}^m [x_{i,1}, x_{i,2}]; \mathbb{R}\right)$, όπου

$$e_j(x) := \prod_{i=1}^m e_{i,j}(x_i), \quad \forall x = (x_i)_{i=1}^m \in \prod_{i=1}^m [x_{i,1}, x_{i,2}], \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα (συνέχεια). Υπό το πρίσμα των δύο προηγούμενων παραγράφων, παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο για την αποτύπωση σε μορφή σειράς της λύσης του γραμμικού γνήσιου (ΠΑΣΤ) σε φραγμένο (μονοδιάστατο) διάστημα U .

Στην ουσία, ο αλγόριθμος αυτός περιγράφει την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος ως προς τον χώρο σε ολοένα και αυξανόμενο, αλλά πάντα πεπερασμένης διάστασης, υπόχωρο του $L^2(\bar{U}; \mathbb{R})$. Ο ολοένα και αυξανόμενος υπόχωρος αυτός αποτελείται από ολοένα και περισσότερα, αλλά πάντα πεπερασμένα στο πλήθος, στοιχεία της βάσης του $L^2(\bar{U}; \mathbb{R})$ που προκύπτει από τη λύση του αντίστοιχου προβλήματος ιδιοτιμών Sturm-Liouville. Οι προσεγγιστικές λύσεις του (ΠΑΣΤ) που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο καλούνται προσεγγίσεις *Faedo-Galerkin* και η όλη διαδικασία καλείται μέθοδος *Faedo-Galerkin*.

ΜΕΘΟΔΟΣ FAEDO-GALERKIN

Έστω $m, n = 1$, $U = (x_1, x_2)$, όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, $T > 0$ και ένα αντίστοιχο (ΠΑΣΤ), του οποίου

- α. ο παραβολικός τελεστής και η συνοριακή συνθήκη είναι ανεξάρτητα του χρόνου, t , δηλ. οι συναρτήσεις a, b, c, r και h είναι ανεξάρτητες του t , και επιπλέον, $a \in C([x_2, x_1]; (0, \infty)) \cap C^2([x_2, x_1]; \mathbb{R})$ και $b \in C^1([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, και
- β. η συνοριακή συνθήκη είναι ομογενής, δηλ. $h \equiv 0$.

Ο αλγόριθμος αποτύπωσης της λύσης του παραπάνω προβλήματος, όπως αυτή προκύπτει από το [Θεώρημα 13.2](#), σε μορφή σειράς έχει ως εξής:

1. Αναγνώριση του αντίστοιχου (SL1), το οποίο, δηλ., έχει

- i. για ελλειπτικό τελεστή, L , τον L_x του παραβολικού τελεστή που εμφανίζεται στο μοντέλο του (ΠΑΣΤ),
 - ii. για εξίσωση της συνοριακής του συνθήκης την ίδια με αυτή του (ΠΑΣΤ), και
 - iii. $w \equiv 1$ (μιας και η επιλογή του βάρους παίζει ουσιαστικό ρόλο μόνο στα ιδιάζοντα προβλήματα).
2. Εύρεση της ακολουθίας των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων, $(\lambda_i, e_i)_{i=1}^{\infty}$, του παραπάνω (SL1), τέτοια ώστε το σύνολο $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ να αποτελεί ορθοκανονική βάση του $L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})$.
3. Προσέγγιση των δεδομένων, g και $f(\cdot, t)$, για κάθε $t \in [0, T]$, του (ΠΑΣΤ) μέσω γραμμικών συνδυασμών από πεπερασμένα, μα ολοένα και περισσότερα, στο πλήθος στοιχεία της βάσης $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, δηλ. μέσω των

$$g_n := \sum_{i=1}^n G_i e_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{όπου } G_i := (g, e_i)_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})}, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

και

$$f_n(\cdot, t) := \sum_{i=1}^n F_i(t) e_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{όπου } F_i(t) := (f(\cdot, t), e_i)_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R})}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, T],$$

αντίστοιχα.

4. Κατασκευή των (ολοένα και πιο “αξιόπιστων”) προσεγγίσεων Faedo-Galerkin

$$y_n(x, t) := e^{-\lambda_i t} g_n(x) + \int_0^t e^{-\lambda_i(t-s)} f_n(s, x) ds, \quad \forall (x, t) \in [x_1, x_2] \times [0, T], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

5. Σύγκλιση της ακολουθίας των προσεγγίσεων Faedo-Galerkin, $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, στη λύση του (ΠΑΣΤ), η οποία τελικά αποτυπώνεται μέσω του τύπου Duhamel στο $[x_1, x_2]$ ως

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i e^{-\lambda_i t} e_i(x) + \int_0^t \sum_{i=1}^{\infty} F_i(s) e^{-\lambda_i(t-s)} e_i(x) ds, \quad \forall (x, t) \in [x_1, x_2] \times [0, T].$$

Προφανώς εννοείται ότι, υπό τις υποθέσεις του **Θεωρήματος 13.2**, το ολοκλήρωμα και οι σειρές στον τύπο Duhamel στο βήμα 5. του αλγόριθμου, έχουν νόημα με τη συνήθη κατά σημείο έννοια, τόσο ως προς τη χωρική, x , όσο και ως προς τη χρονική, t , μεταβλητή, και έτσι ο ίδιος ο τύπος μπορεί να θεωρείται σημειακά. Επαληθεύουμε, μάλιστα, ότι για $t = 0$ ο παραπάνω τύπος δίνει

$$y(\cdot, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i e_i = g,$$

δηλ. την αρχική συνθήκη.

Σημειώνεται, τέλος, ότι η μέθοδος Faedo-Galerkin αποτελεί το μαθηματικά αυστηρό ανάλογο της (ιστορικής αξίας) μεθόδου χωριζομένων μεταβλητών.

Αρχή μεγίστου/ελαχίστου. Ένα σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη, σε κάθε φάση, τόσο του γραμμικού, όσο και του μη γραμμικού γνήσιου (ΠΑΣΤ) σε φραγμένο U αποτελεί η αρχή μεγίστου. Υπάρχουν πολλές εκδοχές αυτού του αποτελέσματος και για πολλές γεωμετρίες του παραβολικού συνόλου, φραγμένου και μη, οι οποίες σχετίζονται μεταξύ τους. Μάλιστα, μπορούν να εξαχθούν και τα, τρόπων τινά, συμμετρικά αποτελέσματα που αφορούν ελάχιστες τιμές αντί για μέγιστες, οπότε τότε γίνεται λόγος για την αρχή μεγίστου/ελαχίστου. Εδώ παρουσιάζουμε μια εκδοχή της λεγόμενης ισχυρής αρχής μεγίστου/ελαχίστου για φραγμένα U .

Θεώρημα 13.15 (ισχυρή αρχή μεγίστου/ελαχίστου). Έστω

a. $m \in \mathbb{N}$,

β. ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο $U \subseteq \mathbb{R}^m$,

γ. $T > 0$,

δ. συμμετρικός και ομοιόμορφα παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ στο $\bar{U} \times [0, T]$ και

ε. $y \in C_1^2(U \times (0, T]; \mathbb{R})$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. Αν

$$c(x, t) \underset{(\geq)}{=} 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T]$$

και

i. αν

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + L_x(x, t)y(x, t) \leq 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T]$$

και η y λαμβάνει (μη αρνητική) μέγιστη τιμή σε κάποιο $(x_0, t_0) \in U \times (0, T]$, τότε η y είναι σταθερή στο $U \times (0, t_0]$, ενώ

ii. αν

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + L_x(x, t)y(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T]$$

και η y λαμβάνει (μη θετική) ελάχιστη τιμή σε κάποιο $(x_0, t_0) \in U \times (0, T]$, τότε η y είναι σταθερή στο $U \times (0, t_0]$.

2. Αν στο σημείο 1. η μέγιστη/ελάχιστη τιμή της y είναι ίση με το μηδέν, τότε η αρχική υπόθεση,

$$c(x, t) \underset{(\geq)}{=} 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T],$$

δεν απαιτείται.

Ισχύει, επίσης, και ένα αποτέλεσμα της αντίστοιχης φιλοσοφίας με αυτή της αρχής μεγίστου/ελαχίστου, που αφορά το πρόσημο της διαφόρισης ως προς τα εξωτερικά κάθετα διανύσματα επί του παραβολικού συνόλου, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 13.16 (μέγιστο/ελάχιστο και πρόσημο διαφόρισης ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί συνόλου). Έστω

a. $m \in \mathbb{N}$,

β. ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο $U \subseteq \mathbb{R}^m$, τέτοιο ώστε το ∂U να είναι κατά τμήματα ομαλό και το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, ν , να ορίζεται στο $\partial U \setminus \Sigma$, όπου $\Sigma \subseteq \partial U$ κάποιο σχετικά κλειστό μηδενοσύνολο επί της πολλαπλότητας ∂U ,

γ. $T > 0$,

δ. συμμετρικός και ομοιόμορφα παραβολικός τελεστής $\frac{\partial}{\partial t} + L_x$ στο $\bar{U} \times [0, T]$ και

ε. συνάρτηση

$$y \in C(\bar{U} \times (0, T]; \mathbb{R}^n) \cap C^1\left(\left(\overline{U \cap \bigcup_{x \in \partial U} B(x, \rho)} \setminus \Sigma\right) \times (0, T]; \mathbb{R}^n\right) \cap C_1^2(U \times (0, T]; \mathbb{R}^n),$$

για κάποιο $\rho > 0$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

1. Αν

$$c(x, t) \underset{(\geq)}{=} 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T]$$

και

i. αν

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + L_x(x, t)y(x, t) \leq 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T]$$

και η y είναι μη σταθερή και λαμβάνει (μη αρνητική) μέγιστη τιμή σε κάποιο $(x_0, t_0) \in (\partial U \setminus \Sigma) \times (0, T]$, τότε

$$\frac{\partial y}{\partial \mathcal{N}}(x_0, t_0) > 0,$$

ενώ

ii. αν

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + L_x(x, t)y(x, t) \geq 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T]$$

και η y είναι μη σταθερή και λαμβάνει (μη θετική) ελάχιστη τιμή σε κάποιο $(x_0, t_0) \in (\partial U \setminus \Sigma) \times (0, T]$, τότε

$$\frac{\partial y}{\partial \mathcal{N}}(x_0, t_0) < 0.$$

2. Αν στο σημείο 1. η μέγιστη/ελάχιστη τιμή της y είναι ίση με το μηδέν, τότε η αρχική υπόθεση,

$$c(x, t) \underset{(\geq)}{=} 0, \forall (x, t) \in U \times (0, T],$$

δεν απαιτείται.

Η σημαντικότητα των παραπάνω αποτελεσμάτων έγκειται στη δυνατότητα που μας παρέχει η κατάλληλη αξιοποίησή τους, ως προς τη χρήσιμη σύγκριση, κατάλληλα επιλεγμένων κάθε φορά, λύσεων του (ΠΑΣΤ).

Όσον αφορά τη βασική Πραγματική Ανάλυση που απαιτείται στο παρόν κεφάλαιο, οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες παραπέμπονται ενδεικτικά στα συγγράμματα [1] και [2]. Για τις σειρές Fourier και τη σχετική θεωρία βλ., π.χ., [3], [4], για τα προβλήματα Sturm-Liouville βλ., π.χ., τα [4], [5], [6], [7], [8] και για την αρχή μεγίστου, π.χ., τα [9], [10].

Βιβλιογραφία

- [1] E. M. Stein και R. Shakarchi. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2009.
- [2] K. R. Stromberg. *An Introduction to Classical Real Analysis*. AMS, 2015.
- [3] E. M. Stein και R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2011.
- [4] A. N. Karapetyants και V. V. Kravchenko. *Methods of Mathematical Physics*. Birkhäuser, 2022.
- [5] W. O. Amrein, A. M. Hinz και D. B. Pearson. *Sturm-Liouville Theory: Past and Present*. Springer, 2005.
- [6] C. T. Fulton και S. A. Pruess. “Eigenvalue and eigenfunction asymptotics for regular Sturm-Liouville problems”. Στο: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 188 (1994), σσ. 297–340.
- [7] R. B. Guenther και J. W. Lee. *Sturm-Liouville Problems, Theory and Numerical Implementation*. CRC Press, 2018.
- [8] A. Zettl. *Sturm-Liouville Theory*. AMS, 2012.
- [9] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2nd edition, 2010.
- [10] M. H. Protter και H. F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer, 1984.

■ ΔΙΑΧΥΣΗ ΙΙΙ

Σύνοψη

1. Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Λογιστικό μοντέλο με όρο διάχυσης, ή μοντέλο Fisher ή/και Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov

2. Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Μη γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα ($m = n = 1$):

- (α) Καλή τοποθέτηση του προβλήματος
- (β) Επεκτασιμότητα της λύσης και μεγιστική λύση του προβλήματος
- (γ) Ποιοτική μελέτη αυτόνομου προβλήματος

Προαπαιτούμενη γνώση (βλ. [Εισαγωγή](#) για σχετικές βασικές βιβλιογραφικές αναφορές)

Στοιχεία Μαθηματικής Ανάλυσης, [Κεφάλαια 2-5,7,11-13](#)

Στοιχεία Μαθηματικής Βιολογίας:

Λογιστικό μοντέλο με όρο διάχυσης (Fisher και Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov, ανεξάρτητα μεταξύ τους, 1937). Το λογιστικό μοντέλο με όρο διάχυσης χρησιμοποιήθηκε ως μοντέλο της Οικολογίας, και συγκεκριμένα της Γενετικής Θεωρίας της Φυσικής Επιλογής από τον Fisher, [1]. Η παρουσίαση του μοντέλου εδώ, ωστόσο, θα παραμείνει στα πλαίσια της Πληθυσμιακής Οικολογίας, για λόγους συνέχειας της μέχρι τώρα ακολουθούμενης πρακτικής. Πριν προχωρήσουμε, όμως, αξίζει να σημειώσουμε ότι την ίδια χρονιά και ανεξάρτητα από τον Fisher, οι Kolmogorov, Petrovskii και Piskunov, [2] (στα Ρώσικα, μετάφραση στα Αγγλικά: [3]), θεώρησαν και μελέτησαν μια γενίκευση του παραπάνω μοντέλου και συγκεκριμένα μια γενίκευση που αφορά τον μη γραμμικό του όρο. Καθοριστική όμως υπήρξε, περισσότερο από τέσσερις δεκαετίες αργότερα, η συνεισφορά των Aronson, Weinberger και Ludwig, [4], [5], [6], στην ασυμπτωτική μελέτη της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος (και όχι μόνο).

Τώρα, θεωρούμε $N(x, t)$ τον πληθυσμό ενός είδους στο σημείο $x \in U$, όπου $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό, κατά τη χρονική στιγμή $t \in (0, \infty)$. Σε αντιστοιχία με το αμιγώς χρονικά εξαρτώμενο εκθετικό μοντέλο, το (μη γραμμικό, και για την ακρίβεια, ημιγραμμικό) μοντέλο Fisher χαρακτηρίζεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = rN \left(1 - \frac{1}{k}N\right), \quad (14.1)$$

όπου $D > 0$, $r \in \mathbb{R}$ και $k > 0$. Όπως και πριν, θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $r > 0$. Επίσης θεωρούμε ότι

$$U = \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \text{ για κάποιο } l > 0$$

και ειδικότερα θα θεωρήσουμε ομογενή συνοριακή συνθήκη, τόσο Dirichlet όσο και Neumann.

Τέλος, για να κρατήσουμε την παρουσίαση όσο το δυνατόν πιο συμπαγή, θέτουμε $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ως

$$f(w) := rw \left(1 - \frac{1}{k}w\right), \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

έτσι ώστε η (14.1) να γράφεται ως

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = f(N).$$

Τα αντίστοιχα γνήσια ΠΑΣΤ. Το γνήσιο ΠΑΣΤ για το προαναφερθέν μοντέλο, με ομογενή Dirichlet ή Neumann συνοριακή συνθήκη, θεωρείται ως εξής:

Με δεδομένα $\gamma \in \{0, 1\}$ και

$$\begin{cases} N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right), & \text{αν } \gamma = 1, \\ N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right) \cap C^1\left(\left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \rho\right] \cup \left[\frac{l}{2} - \rho, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right), \rho \in \left(0, \frac{l}{2}\right), & \text{αν } \gamma = 0, \end{cases} \quad (\ell_\Delta)$$

τέτοια ώστε $\gamma N_0\left(\pm \frac{l}{2}\right) + (1 - \gamma) \frac{dN_0}{dx}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$, αναζητούμε $T > 0$ και συνάρτηση

$$N: \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T) \rightarrow [0, \infty), \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (14.1) στο } \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T) \text{ όσο και τις } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \text{ και } \gamma N\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) + (1 - \gamma) \frac{\partial N}{\partial x}\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) = 0, \text{ για κάθε } t \in (0, T).$$

Για $\gamma = 1$ έχουμε ΠΑΣΤ με συνοριακή συνθήκη Dirichlet, ενώ για $\gamma = 0$ έχουμε ΠΑΣΤ με συνοριακή συνθήκη Neumann.

Καλή τοποθέτηση του γενικού προβλήματος με μεγιστική και ομαλή λύση. Κάνοντας χρήση κλασικών θεωρημάτων (βλ. Άσκηση 14.1) εξάγουμε ύπαρξη και μοναδικότητα μεγιστικής, ομαλής και συνεχώς

εξαρτώμενης από τη δεδομένη αρχική συνάρτηση λύσης του εξής γενικού προβλήματος:

Με δεδομένα $\gamma \in \{0, 1\}$ και

$$\begin{cases} N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right), & \text{αν } \gamma = 1, \\ N_0 \in C\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; [0, \infty)\right) \cap C^1\left(\left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \rho\right] \cup \left[\frac{l}{2} - \rho, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right), \rho \in \left(0, \frac{l}{2}\right], & \text{αν } \gamma = 0, \end{cases} \quad (\ell_\Delta^\diamond)$$

τέτοια ώστε $\gamma N_0\left(\pm \frac{l}{2}\right) + (1 - \gamma) \frac{dN_0}{dx}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$, αναζητούμε $T > 0$ και συνάρτηση

$$N: \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ τέτοια ώστε η } N \text{ να ικανοποιεί τόσο την (14.1) στο } \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T) \text{ όσο και τις } N(x, 0) = N_0(x), \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \text{ και}$$

$$\gamma N\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) + (1 - \gamma) \frac{\partial N}{\partial x}\left(\pm \frac{l}{2}, t\right) = 0, \text{ για κάθε } t \in (0, T).$$

Συγκεκριμένα, υπάρχει $T \in (0, \infty]$, τέτοιο ώστε για τη λύση

$$N: \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

να ισχύει ότι

1. είτε $T = \infty$ (ολικότητα της λύσης),
2. είτε

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|N(\cdot, t)\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right)} = \infty \text{ (έκρηξη της λύσης στο } T).$$

Παρακάτω, με την αξιοποίηση της αρχής ελαχίστου και της σχέσης μεταξύ ελαχίστου και προσήμου διαφορίας ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί του συνόρου, δείχνουμε ότι η παραπάνω μεγιστική λύση λαμβάνει αποκλειστικά μη αρνητικές τιμές και ότι είναι ολική.

Αναλλοίωτο σύνολο του γενικού προβλήματος και ολικότητα της λύσης του. Η κεντρική ιδέα, πίσω από τη διαδικασία που θα ακολουθηθεί εδώ, αποτελεί τη σύγκριση κατάλληλα επιλεγμένων λύσεων του (ℓ_Δ^\diamond) . Η σύγκριση αυτή θα γίνει, ουσιαστικά, μέσω μετατροπής της μη γραμμικής εξίσωσης σε μια γραμμική. Στην περίπτωση των γραμμικών εξισώσεων, όπως αυτή στο $(\text{exp}_{\Delta, 2}^\diamond)$, αυτό το βήμα είναι φυσικά περιττό.

Θεωρούμε, λοιπόν, δύο σταθερές, $\gamma_1, \gamma_2 \in \{0, 1\}$, δύο αρχικές δεδομένες συναρτήσεις, $N_{0,1}$ και $N_{0,2}$, που ικανοποιούν τις υποθέσεις του (ℓ_Δ^\diamond) , καθώς επίσης τις αντίστοιχες δύο μεγιστικές λύσεις, N_1 και N_2 , του (ℓ_Δ^\diamond) , οι οποίες ορίζονται στο $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T_1)$ και στο $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T_2)$, αντίστοιχα. Θέτοντας

$$N_-(x, t) := N_1(x, t) - N_2(x, t), \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T), \text{ όπου } T := \min\{T_1, T_2\},$$

έπεται ότι

$$\begin{cases} \frac{\partial N_-}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N_-}{\partial x^2} = f(N_1) - f(N_2), & \forall (x, t) \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T), \\ N_-(x, 0) = N_{0,1}(x) - N_{0,2}(x), & \forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \\ \gamma_1 N_1(x, t) + (1 - \gamma_1) \frac{\partial N_1}{\partial x}(x, t) = \gamma_2 N_2(x, t) + (1 - \gamma_2) \frac{\partial N_2}{\partial x}(x, t), & \forall (x, t) \in \left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, T). \end{cases}$$

Με χρήση του δεύτερου θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού και του κανόνα αλυσίδας, γράφουμε το παραπάνω σύστημα στην *ισοδύναμη* μορφή (βλ. [Άσκηση 14.1](#))

$$\begin{cases} \frac{\partial N_-}{\partial t} - D \frac{\partial^2 N_-}{\partial x^2} + cN_- = 0, & \forall (x, t) \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, T), \\ N_-(x, 0) = N_{0,1}(x) - N_{0,2}(x), & \forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \\ \gamma_1 N_1(x, t) + (1 - \gamma_1) \frac{\partial N_1}{\partial x}(x, t) = \gamma_2 N_2(x, t) + (1 - \gamma_2) \frac{\partial N_2}{\partial x}(x, t), & \forall (x, t) \in \left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, T), \end{cases}$$

όπου

$$c(x, t) := - \int_0^1 \frac{df}{dw} (sN_1(x, t) + (1 - s)N_2(x, t)) ds, \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T].$$

Με χρήση του αποτελέσματος που μας επιτρέπει την εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος, έπεται ότι η συνάρτηση c είναι συνεχής (βλ. [Άσκηση 14.1](#)), άρα, για κάθε $\tilde{T} \in (0, T)$, υπάρχει το

$$\|c\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, \tilde{T}]\right)} =: K(\tilde{T})$$

και θέτουμε

$$\begin{cases} \tilde{N}_i(x, t) := e^{k(\tilde{T})t} N_i(x, t), \quad \forall i \in \{1, 2\}, \\ \tilde{N}(x, t) := e^{k(\tilde{T})t} N_-(x, t), \\ \tilde{c}(x, t) := K(\tilde{T}) + c(x, t), \end{cases} \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, \tilde{T}].$$

Παρατηρούμε ότι (βλ. [Άσκηση 14.1](#))

$$N_-\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, \tilde{T}]\right) \subseteq [0, \infty) \Leftrightarrow \tilde{N}\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, \tilde{T}]\right) \subseteq [0, \infty), \quad \forall \tilde{T} \in (0, T)$$

και

$$\tilde{c}\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, \tilde{T}]\right) \subseteq [0, \infty), \quad \forall \tilde{T} \in (0, T),$$

όπως επίσης ότι

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x^2} + \tilde{c}\tilde{N} = 0, & \forall (x, t) \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, \tilde{T}), \\ \tilde{N}(x, 0) = N_{0,1}(x) - N_{0,2}(x), & \forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \\ \gamma_1 \tilde{N}_1(x, t) + (1 - \gamma_1) \frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial x}(x, t) = \gamma_2 \tilde{N}_2(x, t) + (1 - \gamma_2) \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial x}(x, t), & \forall (x, t) \in \left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, \tilde{T}), \end{cases} \quad (14.2)$$

για κάθε $\tilde{T} \in (0, T)$.

Τα παραπάνω μας επιτρέπουν να βγάλουμε συμπέρασμα για τη μη αρνητικότητα της N_- μέσω της μη αρνητικότητας της \tilde{N} , για την οποία όμως μπορούμε να αξιοποιήσουμε την αρχή ελαχίστου σε συνδυασμό με τη σχέση μεταξύ ελαχίστου και προσήμου διαφορίσης ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί του συνόρου, όπως άλλωστε κάναμε και κατά τη μελέτη του ($\exp_{\Delta, 1, 2}^\diamond$), για να αποφανθούμε σχετικά με το αν

1. το σύνολο

$$[0, \infty)$$

είναι αναλλοίωτο για το (ℓ_Δ^\diamond),

2. η μεγιστική λύση, N , είναι ολική.

Μέχρι τότε, όμως, θα πρέπει να κάνουμε τις κατάλληλες επιλογές των δεδομένων $\gamma_1, \gamma_2, N_{0,1}$ και $N_{0,2}$. Ως προς αυτό, σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις επιλέγουμε τα δεδομένα αυτά ως ακολούθως.

1. Για το αναλλοίωτο, δεν επιβάλλουμε περιορισμό στην επιλογή των γ_1 και γ_2 , ενώ αντίθετα επιλέγουμε

$$N_{0,1}\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right) \subseteq [0, \infty) \text{ και } N_{0,2} \equiv 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση έπεται ότι (βλ. [Άσκηση 14.1](#))

$$N_2 \equiv 0,$$

άρα ισχύουν τα

$$T_2 = \infty, T = T_1 \text{ και } N_- = N_1.$$

Οπότε, για κάθε $\tilde{T} \in (0, T_1)$, το (14.2) παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x^2} + c\tilde{N} = 0, & \forall (x, t) \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, \tilde{T}], \\ \tilde{N}(x, 0) = N_{0,1}(x), & \forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \\ \gamma_1 \tilde{N}(x, t) + (1 - \gamma_1) \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, \tilde{T}] \end{cases}$$

και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\tilde{N}\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \tilde{T})\right) \subseteq [0, \infty), \forall \tilde{T} \in (0, T_1),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι

$$N_1\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, T_1)\right) \subseteq [0, \infty).$$

Αν $N_{0,1} \equiv 0$, τότε $\tilde{N} \equiv 0$, οπότε έπεται το ζητούμενο. Αν υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $N_{0,1}(\xi) > 0$, τότε αξιοποιώντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων και την αρχή ελαχίστου σε συνδυασμό με τη σχέση μεταξύ ελαχίστου και προσήμου διαφορίσης ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί του συνόρου, έπεται το ζητούμενο (βλ. [Άσκηση 14.1](#)).

2. Για την ολικότητα, δεν επιβάλλουμε περιορισμό στην επιλογή του γ_2 , ενώ αντίθετα επιλέγουμε

$$\gamma_1 = 0,$$

καθώς επίσης

$$N_{0,2}\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right) \subseteq [0, \infty) \text{ και } N_{0,1} \equiv \|N_{0,2}\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right)}.$$

Σε αυτή την περίπτωση έπεται ότι (βλ. [Άσκηση 14.1](#))

$$N_1(x, t) = N_\ell(t), \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T),$$

όπου N_ℓ είναι η (τουλάχιστον) θετικά ολική λύση του αντίστοιχου (ℓ) , με αρχική συνθήκη

$$N_\ell(0) = \|N_{0,2}\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right)},$$

άρα ισχύουν τα

$$T_1 = \infty \text{ και } T = T_2,$$

καθώς επίσης και

$$N_-(x, t) = N_\ell(t) - N_2(x, t), \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times [0, T_2).$$

Οπότε, για κάθε $\tilde{T} \in (0, T)$, το (14.2) παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \tilde{N}}{\partial x^2} + \tilde{c}\tilde{N} = 0, & \forall (x, t) \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \times (0, \tilde{T}], \\ \tilde{N}(x, 0) = \|N_{0,2}\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]\right)} - N_{0,2}(x), & \forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], \\ \gamma_2 \tilde{N}(x, t) + (1 - \gamma_2) \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}(x, t) = \gamma_2 N_\ell(t), & \forall (x, t) \in \left\{\pm \frac{l}{2}\right\} \times (0, \tilde{T}] \end{cases}$$

και αρκεί να δείξουμε ότι

$$\tilde{N}\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, \tilde{T}]\right) \subseteq [0, \infty), \quad \forall \tilde{T} \in (0, T_2),$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι

$$N_2(x, t) \leq N_\ell(t), \quad \forall (x, t) \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right] \times (0, T_2),$$

συνεπώς η N_2 δεν εκρήγνυται, δηλ. είναι ολική. Το ζητούμενο, λοιπόν, έπεται διακρίνοντας περιπτώσεις όπου, είτε $N_{0,2} \equiv 0$, είτε υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $N_{0,1}(\xi) > 0$, καθώς επίσης αξιοποιώντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων και την αρχή ελαχίστου σε συνδυασμό με τη σχέση μεταξύ ελαχίστου και προσήμου διαφοράρισης ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί του συνόρου (βλ. Άσκηση 14.1).

Παρατηρούμε επίσης κάτι σημαντικό που επιπλέον προκύπτει από την παραπάνω διαδικασία και συγκεκριμένα ότι η λύση του (ℓ_Δ^\diamond) , όχι μόνο είναι μη αρνητική και ολική, αλλά ειδικότερα είναι και φραγμένη, καθώς μια λύση του (ℓ) , N_ℓ , η οποία αποτελεί άνω φράγμα της λύσης μας, είναι πάντοτε φραγμένη για θετικούς χρόνους.

Καλή τοποθέτηση του αρχικού προβλήματος με ομαλότητα της φραγμένης λύσης του. Από τα συμπεράσματα μας από τη μελέτη του γενικού προβλήματος (ℓ_Δ^\diamond) , οδηγούμαστε (βλ. Άσκηση 14.1) και στην καλή τοποθέτηση του (ℓ_Δ) , με ολικότητα και ομαλότητα της φραγμένης λύσης του.

Έχοντας εξάγει την ολικότητα της λύσης του (ℓ_Δ) , στη συνέχεια μελετάμε τη συμπεριφορά της καθώς $t \rightarrow \infty$.

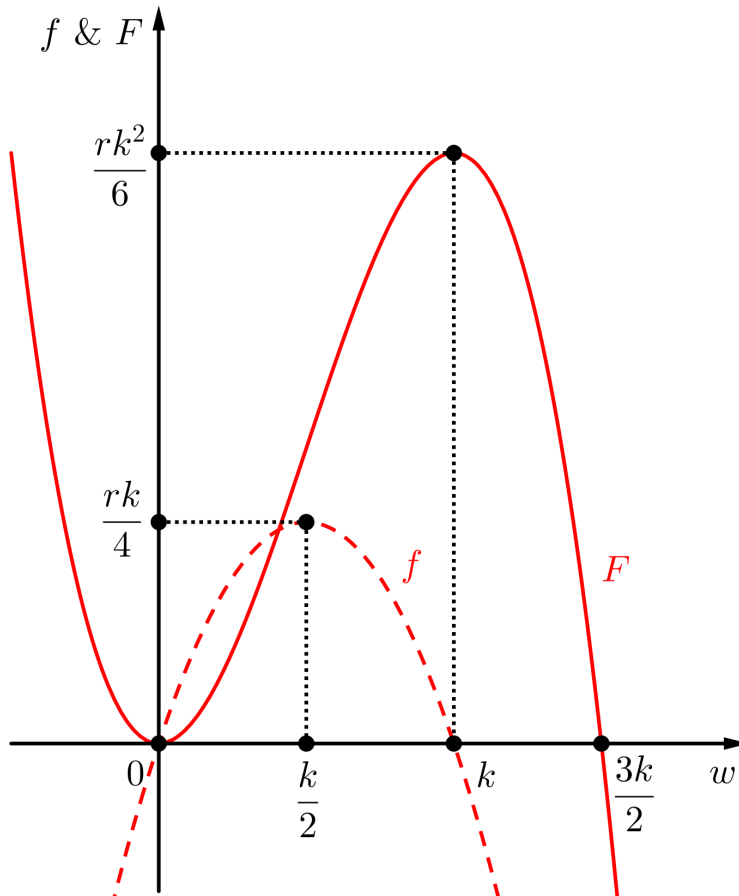
Άσκηση 14.1. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της βασικής (Φάση I) μελέτης του (ℓ_Δ) .

Στάσιμες λύσεις. Η ποιοτική μελέτη ξεκινά με την εύρεση στάσιμων λύσεων, N^* , του προβλήματος. Γι' αυτό τον σκοπό ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα.

1. Επιλέγουμε μία (οποιαδήποτε) παράγουσα της $f, F \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})^1$, για παράδειγμα αυτή που ορίζεται ως

$$F(w) := rw^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3k}w \right), \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

το γράφημα της οποίας απεικονίζεται στο [Σχήμα 14.1](#).



Σχήμα 14.1: Γραφήματα των f και F . Παρατηρούμε ότι στο $[0, k]$ η F είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο $\left[k, \frac{3k}{2} \right]$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2. Ισχύει ότι

$$M := \|N^*\|_{C_B\left(\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right)} \in [0, k],$$

ένας περιορισμός που αποτελεί συνέπεια αποκλειστικά της γνωστής αναγκαίας συνθήκης

$$F(N^*(x)) \leq F(M), \quad \forall x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right].$$

Πράγματι, μιας και $N^*(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, και $F(0) = 0$, έπεται ότι θα πρέπει

$$0 \leq F(M),$$

¹Δεν παίζει ρόλο η επιλογή μεταξύ των άπειρων παραγωγών, F , της f , καθώς ουσιαστικά κοιτάμε πάντα διαφορές της μορφής $F(w_1) - F(w_2)$, με $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$.

δηλ. ότι

$$M \in \left[0, \frac{3k}{2}\right].$$

Επίσης, αφού η F λαμβάνει μέγιστη τιμή εντός του παραπάνω συνόλου στο $w = k$, έπεται ότι

$$F(M) \leq F(k),$$

άρα έπεται ότι, τελικά, θα πρέπει

$$M \leq k,$$

καθώς σε διαφορετική περίπτωση, λόγω συνέχειας της N^* , θα υπήρχε $\xi \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, τέτοιο ώστε

$$N^*(\xi) \in [k, M),$$

και άρα από τη μονοτονία της $F|_{\left[0, \frac{3k}{2}\right]}$ θα είχαμε ότι

$$F(N^*(\xi)) > F(M),$$

το οποίο είναι άτοπο.

3. Ψάχνουμε σταθερές στάσιμες λύσεις, N^* , δηλ. λύσεις που ικανοποιούν την

$$f(N^*) = 0.$$

Τέτοιες είναι μόνο οι

$$N^* \equiv 0 \text{ και } N^* \equiv k$$

και προφανώς η δεύτερη είναι αποδεκτή όταν $\gamma = 0$.

4. Ψάχνουμε μη σταθερές στάσιμες λύσεις, N^* . Προχωράμε σε βήματα όπως ακολούθως.

i. Ισχύει ότι

$$M \in (0, k].$$

Πράγματι, αν γενικά μια στάσιμη λύση, N^* , ικανοποιεί την

$$M = 0,$$

τότε θα πρέπει να είναι στάσιμη με

$$N^* \equiv 0.$$

ii. Ισχύει ότι

$$M \in (0, k).$$

Πράγματι, αν γενικά μια στάσιμη λύση, N^* , ικανοποιεί την

$$M = k,$$

τότε, σε κάθε περίπτωση, ικανοποιεί επίσης και το σύστημα

$$\begin{cases} \frac{d^2 N^*}{dx^2}(x) + f(N^*(x)) = 0, \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \\ N^*(\xi) = k, \\ \frac{dN^*}{dx}(\xi) = 0, \end{cases} \quad \text{για κάποιο } \xi \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right].$$

Θέτοντας

$$(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2) := \left(N^*, \frac{dN^*}{dx} \right),$$

το παραπάνω σύστημα παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\tilde{N}_1(x), \tilde{N}_2(x)) = (\tilde{N}_2(x), -f(\tilde{N}_1(x))), \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \\ (\tilde{N}_1(x_0), \tilde{N}_2(x_0)) = (k, 0), \end{cases}$$

οπότε, θεωρώντας το αντίστοιχο ΠΑΤ, έπεται ότι η μοναδική λύση αυτού είναι η σταθερή με

$$(\tilde{N}_1, \tilde{N}_2) = (k, 0),$$

δηλ. θα πρέπει να ισχύει ότι η N^* είναι σταθερή με

$$N^* = k.$$

iii. Ισχύει ότι

$$N^*(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right).$$

Πράγματι, αφού $N^*(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, αρκεί να δείξουμε ότι δεν υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$N^*(\xi) = 0,$$

δηλ. η N^* να λαμβάνει ελάχιστη τιμή στο ξ και άρα

$$\frac{dN^*}{dx}(\xi) = 0.$$

Σε αντίθετη περίπτωση όμως, λόγω της γνωστής αναγκαίας συνθήκης

$$F(N^*(\xi)) = F(M),$$

δηλ. της

$$0 = F(M),$$

έπεται από τη μονοτονία της $F|_{[0,k]}$ ότι

$$M = 0 \Leftrightarrow N^* \equiv 0,$$

δηλ. θα πρέπει η N^* να είναι η σταθερή μηδενική.

iv. Αν $\gamma = 0$, τότε δεν υπάρχει μη σταθερή στάσιμη λύση. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\frac{dN^*}{dx} \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0,$$

άρα υπάρχει $\xi \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$\frac{d^2N^*}{dx^2}(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(N^*(\xi)) = 0,$$

άρα θα πρέπει

$$N^*(\xi) \in \{0, k\}.$$

Δεν υπάρχουν όμως τέτοιες μη σταθερές στάσιμες λύσεις.

v. Αν $\gamma = 1$, τότε υπάρχει μοναδική μη σταθερή στάσιμη λύση ότανν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2.$$

Για την επαλήθευση του ισχυρισμού εργαζόμαστε σε βήματα ως ακολούθως.

α. Υπάρχει $x_0 \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, τέτοιο ώστε

$$N^*(x_0) = M.$$

Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

$$N^*\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0,$$

και αφού $N^*(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$, έπεται, λόγω της συνέχειας της N^* , ότι αναγκαστικά μια μη σταθερή N^* λαμβάνει μέγιστη τιμή εντός του $\left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$.

β. Το παραπάνω x_0 είναι μοναδικό. Πράγματι, έχουμε ότι

$$M \in (0, k),$$

άρα, αφού $N^*(x) > 0$, για κάθε $x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, έπεται ότι

$$N^*(x) \in (0, k), \quad \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),$$

άρα²

$$f(N^*(x)) > 0, \quad \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right).$$

Οπότε

$$\frac{d^2 N^*}{dx^2}(x) < 0, \quad \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),$$

δηλ. η N^* είναι γνησίως κυρτή, άρα έπεται το ζητούμενο.

γ. Ισχύει ότι

$$F(N^*(x)) < F(M), \quad \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right) \setminus \{x_0\},$$

το οποίο είναι άμεσο από τη μονοτονία της $F|_{[0,k]}$.

δ. Ένα πρώτο γνωστό αποτέλεσμα που συνεπάγεται από τα παραπάνω συμπεράσματα είναι το ότι

$$x_0 = 0.$$

ε. Θεωρούμε την καλά ορισμένη, λόγω μονοτονίας της $F|_{[0,k]}$, συνάρτηση

$$h: (0, k) \rightarrow (0, \infty),$$

$$w \mapsto h(w) := 2^{\frac{1}{2}} \int_0^w (F(w) - F(s))^{-\frac{1}{2}} ds,$$

²Για την ακρίβεια $f(N^*(x)) \in \left(0, \frac{k}{2}\right]$, για κάθε $x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$, αλλά δεν μας απασχολεί αυτή η λεπτομέρεια.

ή, ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} h(w) &= 2^{\frac{1}{2}} \int_0^1 w(F(w) - F(sw))^{-\frac{1}{2}} ds = \\ &= 2 \left(\frac{3k}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (3k(1-s^2) - 2w(1-s^3))^{-\frac{1}{2}} ds, \quad \forall w \in (0, k). \end{aligned}$$

Από την τελευταία ισότητα άμεσα συμπεραίνουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης, με χρήση του κλασικού αποτελέσματος που μας επιτρέπει την εναλλαγή ορίου και ολοκληρώματος, υπολογίζουμε ότι

$$\lim_{w \rightarrow 0^+} h(w) = 2 \left(\frac{3k}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (3k(1-s^2))^{-\frac{1}{2}} ds = 2r^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-s^2)^{-\frac{1}{2}} ds = \pi r^{-\frac{1}{2}}.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$h(w) \geq 2^{\frac{1}{2}} \int_0^w (F(k) - F(s))^{-\frac{1}{2}} ds, \quad \forall w \in (0, k),$$

λόγω της μονοτονίας της $F|_{[0,k]}$, καθώς επίσης ότι υπάρχει $\tilde{h} \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, \infty))$ με μοναδική ρίζα στο $w = 0$, τέτοια ώστε

$$F(k) - F(w) = (k-w)^2 \tilde{h}(w), \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

λόγω του ότι

$$F(k) - F(k) = 0 = -f(k) = \frac{d(F(k) - F(w))}{dw}(k).$$

Άρα, για κάθε $w \in (0, k)$, ισχύει ότι

$$2^{-\frac{1}{2}} h(w) \geq \int_0^w (k-s)^{-1} (\tilde{h}(s))^{-\frac{1}{2}} ds \geq \left(\max \{ \tilde{h}(w) \mid w \in [0, k] \} \right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^w (k-s)^{-1} ds,$$

και έτσι έπεται ότι

$$\lim_{w \rightarrow 1^-} h(w) = \infty.$$

Συνοψίζοντας, η h είναι γνησίως αύξουσα με

$$\text{Ran}(h) = \left(\pi r^{-\frac{1}{2}}, \infty \right).$$

στ. Με βάση όλα τα παραπάνω, έπεται το ζητούμενο από ένα ακόμα γνωστό αποτέλεσμα, και συγκεκριμένα ότι, για κάθε

$$ID^{-\frac{1}{2}} > \pi r^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{rI^2}{D} > \pi^2,$$

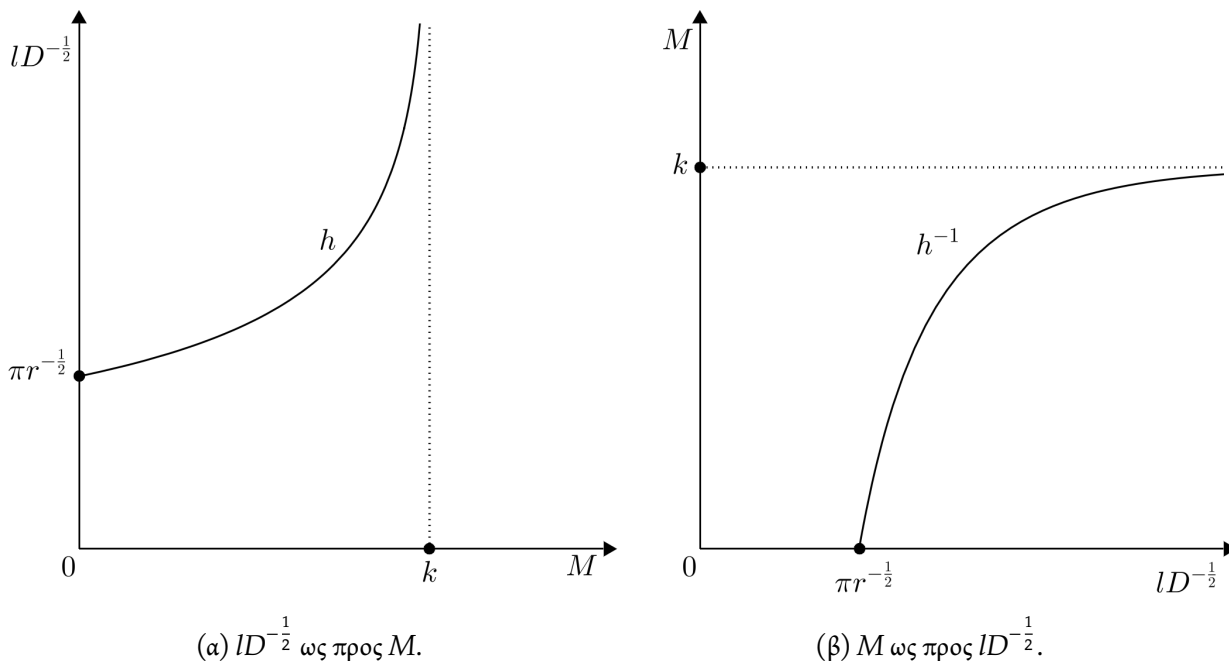
υπάρχει μοναδική μη σταθερή στάσιμη λύση, N^* , για την οποία μάλιστα ισχύει ότι

$$M = h^{-1} \left(ID^{-\frac{1}{2}} \right), \quad \forall ID^{-\frac{1}{2}} > \pi r^{-\frac{1}{2}}.$$

ζ. Μπορούμε, μάλιστα, να πάμε ένα βήμα παραπέρα και να χρησιμοποιήσουμε το κλασικό αποτέλεσμα που μας επιτρέπει την εναλλαγή διαφόρισης και ολοκληρώματος, έτσι ώστε να πάρουμε ότι

$$\frac{dh}{dw}(w) = 2 \left(\frac{3k}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (1-s^3) (3k(1-s^2) - 2w(1-s^3))^{-\frac{3}{2}} ds > 0, \quad \forall w \in (0, k),$$

δηλ. ότι η h είναι γνησίως κυρτή με ασύμπτωτη τη θετική ημιευθεία $x = k$, οπότε μπορούμε να σχεδιάσουμε ποιοτικά μεν, χωρίς να χάνουμε πληροφορία δε, τη γραφική παράσταση της M συναρτήσεως της ποσότητας $lD^{-\frac{1}{2}}$, όπως άλλωστε φαίνεται και στο Σχήμα 14.2.



Σχήμα 14.2: Περίπτωση $\gamma = 1$. Γραφήματα των συναρτήσεων h και h^{-1} , συναρτήσεως της μέγιστης τιμής της στάσιμης λύσης και των παραμέτρων του προβλήματος, αντίστοιχα.

Συμπερασματικά, έχουμε τα ακόλουθα για τις στάσιμες λύσεις του (ℓ_Δ) .

- Αν $\gamma = 0$, τότε οι μόνες στάσιμες λύσεις είναι οι σταθερές

$$N^* \equiv 0 \text{ και } N^* \equiv k.$$

- Αν $\gamma = 1$, τότε η μόνη σταθερή στάσιμη λύση είναι η

$$N^* \equiv 0,$$

ενώ υπάρχει και μια μοναδική μη σταθερή στάσιμη λύση όταν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2,$$

η οποία μη σταθερή στάσιμη λύση είναι (όταν υπάρχει προφανώς) κυρτή με μέγιστη τιμή στο $x = 0$, η οποία μέγιστη τιμή είναι αυστηρά μικρότερη του k αλλά τείνει προς αυτό καθώς $l(2D)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$.

Στην συνέχεια προχωράμε στον χαρακτηρισμό της ευστάθειας των λύσεων αυτών.

Χαρακτηρισμός ευστάθειας στάσιμων λύσεων μέσω γραμμικοποίησης. Ο πλέον τυποποιημένος τρόπος για την εξαγωγή της ευστάθειας/αστάθειας των στάσιμων λύσεων, N^* , που εντοπίσαμε, είναι μέσω της μεθόδου της γραμμικοποίησης. Για κάθε N^* , το αντίστοιχο (“γραμμικοποιημένο”) πρόβλημα ιδιοτιμών είναι το

$$\begin{cases} -D \frac{d^2 y}{dx^2}(x) - r \left(1 - \frac{2}{k} N^*(x)\right) y(x) = \lambda y(x), & \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \\ \gamma y\left(\pm \frac{l}{2}\right) + (1 - \gamma) \frac{\partial y}{\partial x}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0, \end{cases} \text{ με } \gamma \in \{0, 1\},$$

και ενδιαφερόμαστε για το πρόσημο της πρώτης ιδιοτιμής του, λ_1 . Διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν $\gamma = 0$, τότε μελετάμε ξεχωριστά τις παρακάτω υποπεριπτώσεις.

- Για τη σταθερή στάσιμη λύση $N^* \equiv 0$, το παραπάνω πρόβλημα γίνεται

$$\begin{cases} -D \frac{d^2 y}{dx^2}(x) - r y(x) = \lambda y(x), & \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \\ \frac{dN}{dx}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\lambda_1 = r > 0,$$

άρα η N^* είναι ασταθής.

- Για τη μη σταθερή στάσιμη λύση $N^* \equiv k$, το παραπάνω πρόβλημα γίνεται

$$\begin{cases} -D \frac{d^2 y}{dx^2}(x) + r y(x) = \lambda y(x), & \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \\ \frac{dN}{dx}\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\lambda_1 = -r < 0$$

άρα η λύση είναι ευσταθής.

- Αν $\gamma = 1$, τότε διακρίνουμε υποπεριπτώσεις.

- Για τη σταθερή στάσιμη λύση $N^* \equiv 0$, το παραπάνω πρόβλημα γίνεται

$$\begin{cases} -D \frac{d^2 y}{dx^2}(x) - r y(x) = \lambda y(x), & \forall x \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right), \\ N\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\lambda_1 = r - \frac{D\pi^2}{l^2} \begin{cases} < 0, & \text{αν } \frac{rl^2}{D} < \pi^2, \\ > 0, & \text{αν } \frac{rl^2}{D} > \pi^2, \end{cases}$$

άρα η N^* είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ασυμπτωτικά ευσταθής} \\ \text{ασταθής} \end{array} \right\} \text{ όταν } \left\{ \begin{array}{l} \frac{rl^2}{D} < \pi^2 \\ \frac{rl^2}{D} > \pi^2 \end{array} \right\}.$$

- Δεν μπορούμε άμεσα να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της γραμμικοποίησης για τη μη σταθερή στάσιμη λύση, η οποία αν και υπάρχει όταν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2,$$

ωστόσο δεν έχουμε εντοπίσει τον τύπο της.

Και αν για την ανάλυση της ευστάθειας/αστάθειας των στάσιμων λύσεων στην περίπτωση όπου $\gamma = 0$ η γραμμικοποίηση πρόσφερε τα μέγιστα, αντίθετα για την περίπτωση όπου $\gamma = 1$ άφησε αναπάντητα ερωτήματα, και συγκεκριμένα τι συμβαίνει

1. όταν

$$N^* \equiv 0 \text{ και } \frac{rl^2}{D} = \pi^2,$$

και

2. όταν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2 \text{ και } N^* \text{ είναι η μοναδική μη σταθερή στάσιμη λύση.}$$

Αυτά τα ερωτήματα, μαζί με το άλλο που αφορά την ολικότητα της ασυμπτωτικής ευστάθειας, απαντώνται από κοινού στην επόμενη παράγραφο.

Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια. Έχοντας εξαγάγει ότι κάθε λύση του (\mathcal{L}_Δ) είναι φραγμένη, έπεται από γνωστό αποτέλεσμα ότι τείνει ομοιόμορφα σε μια στάσιμη λύση, καθώς $t \rightarrow \infty$. Οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν $\gamma = 0$, τότε αναγκαστικά η σταθερή στάσιμη λύση $N^* \equiv k$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής, καθώς έχουμε δείξει ότι η $N^* \equiv 0$ είναι ασταθής (ενώ η $N^* \equiv k$ ευσταθής).
- Αν $\gamma = 1$, τότε διακρίνουμε υποπεριπτώσεις.

- Αν

$$\frac{rl^2}{D} < \pi^2,$$

τότε υπάρχει μοναδική στάσιμη λύση, η ασυμπτωτικά ευσταθής $N^* \equiv 0$, η οποία αναγκαστικά είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

- Αν

$$\frac{rl^2}{D} = \pi^2,$$

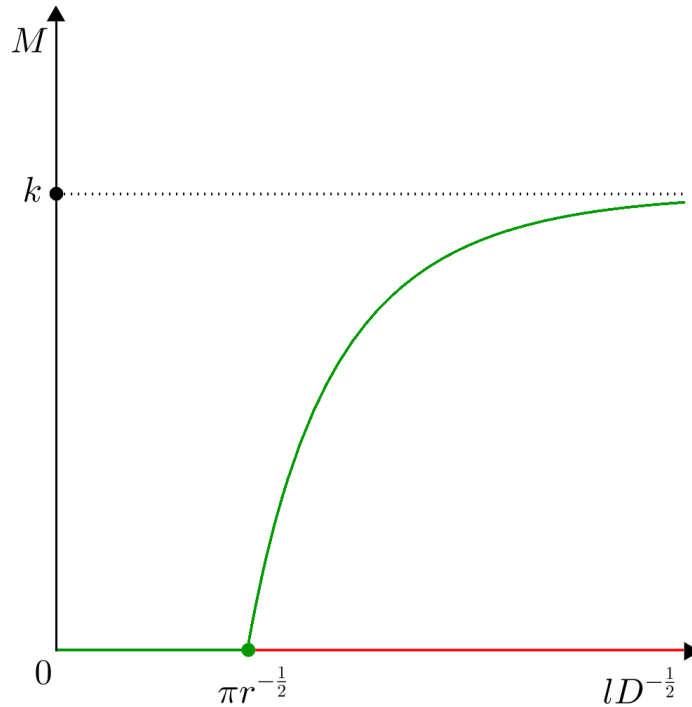
τότε υπάρχει μοναδική στάσιμη λύση, η άγνωστης -ως τώρα- ευστάθειας/αστάθειας $N^* \equiv 0$, η οποία αναγκαστικά είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής.

- Αν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2,$$

τότε αναγκαστικά η μη σταθερή στάσιμη λύση είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής, καθώς έχουμε δείξει ότι η $N^* \equiv 0$ είναι ασταθής.

Μπορούμε μάλιστα να αποτυπώσουμε περιεκτικά την πληροφορία της ευστάθειας/αστάθειας των στάσιμων λύσεων στην περίπτωση $\gamma = 1$ με ένα διάγραμμα διακλάδωσης τύπου σταθερής κατάστασης όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.3, αντίστοιχο των διαγραμμάτων διακρίσιμων διακλαδώσεων των (ΠΑΤ), με τη μόνη ιδιαιτερότητα ότι πλέον θα αποτυπώνεται στον κατακόρυφο άξονα η μέγιστη τιμή (ως προς τη χωρική παράμετρο) M της στάσιμης λύσης.



Σχήμα 14.3: Περίπτωση $\gamma = 1$. Διάγραμμα διακλάδωσης, τύπου σταθερής κατάστασης, των στάσιμων λύσεων του (ℓ_Δ) . Με πράσινο απεικονίζεται η θετική ασυμπτωτική ευστάθεια, ενώ με κόκκινο η θετική αστάθεια.

Συμπερασματικά, ο πληθυσμός, N , επιβιώνει πάντα σε έναν απομονωμένο οικότοπο ($\gamma = 0$) και, μάλιστα, τείνει ομοιόμορφα προς τη φέρουσα ικανότητα k , οπότε προφανώς η $N(\cdot, t)$ δεν θα εμφανίζει τελικά μοτίβο. Αντιθέτως, τα πράγματα είναι πιο σύνθετα στην περίπτωση ενός οικότοπου με αφιλόξενο σύνορο ($\gamma = 1$). Συγκεκριμένα, ο πληθυσμός τείνει ομοιόμορφα προς εξαφάνιση όταν

$$\frac{rl^2}{D} \leq \pi^2,$$

ενώ επιβιώνει όταν

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2,$$

οπότε και τείνει ομοιόμορφα προς μια μη σταθερή στάσιμη κατάσταση, δηλ. η $N(\cdot, t)$ θα εμφανίζει τελικά μοτίβο. Μάλιστα, για δεδομένες παραμέτρους D και r υπάρχει μοναδικό κρίσιμο μήκος, $l_{crit} = l_{crit}(D, r)$, τέτοιο ώστε αν $l > l_{crit}$ ($l \leq l_{crit}$), τότε ο πληθυσμός δεν εξαφανίζεται (εξαφανίζεται) τείνοντας προς μια σταθερή κατάσταση.

Άσκηση 14.2. Μελετήστε το αντίστοιχο πρόβλημα διάχυσης που σχετίζεται με το μοντέλο ισχυρής επίδρασης Allee και συγκεκριμένα για την περίπτωση όπου

$$f(w) := -r \left(1 - \frac{1}{k_1}w\right) \left(1 - \frac{1}{k_2}w\right), \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

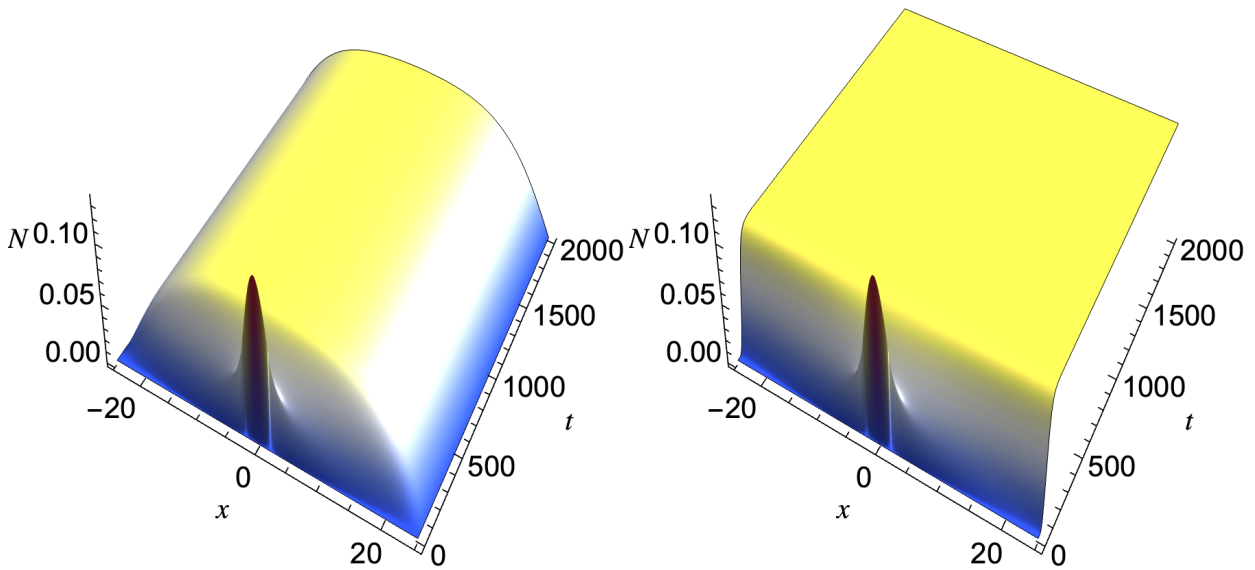
με $r > 0$ και $0 < k_1 < k_2$. Ειδικότερα, ποιο συμπέρασμα βγάζετε για την ύπαρξη και το πλήθος των μη σταθερών στάσιμων λύσεων;

Αριθμητική επίλυση. Προχωράμε στην αριθμητική επίλυση του (ℓ_Δ) με αρχική δεδομένη συνάρτηση την $N_0 \left| \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right] \right|$, όπου N_0 όπως στην (12.6) (προφανώς με $\varepsilon < \frac{l}{2}$), όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.4, στο Σχήμα 14.5 και στο Σχήμα 14.6, προς επαλήθευση των συμπερασμάτων μας.

Στο Σχήμα 14.4 επιλύεται αριθμητικά το προαναφερθέν πρόβλημα στην περίπτωση όπου

$$\frac{rl^2}{D} > \pi^2.$$

Στην περίπτωση όπου $\gamma = 0$ παρατηρούμε ότι η λύση τείνει για μεγάλους (θετικούς) χρόνους στη στάσιμη λύση $N^* \equiv k$, ενώ στην περίπτωση όπου $\gamma = 1$ τείνει σε κοίλη στάσιμη λύση, N^* , με μοναδική μέγιστη τιμή στο κέντρο του διαστήματος.



(α) $\gamma = 1$ (συνοριακή συνθήκη Dirichlet) και $t \in [0, 2000]$ [χρόνος].

(β) $\gamma = 0$ (συνοριακή συνθήκη Neumann) και $t \in [0, 2000]$ [χρόνος].

Σχήμα 14.4: Αριθμητική επίλυση του (ℓ_Δ) με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² [χρόνος]⁻¹, $l = 50$ [μήκος], $r = 10 \cdot \left(\frac{\pi}{50}\right)^2 \approx 0.04$, $k = 0.1$ άτομο, $N_\square = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος]. Για $l > l_{crit} = 5\sqrt{10} \approx 15.8$ [μήκος] ο πληθυσμός θα επιβιώσει και συγκεκριμένα θα οδηγηθεί σε μια στάσιμη κατάσταση.

Στο Σχήμα 14.5 επιλύεται το πρόβλημα στην περίπτωση όπου

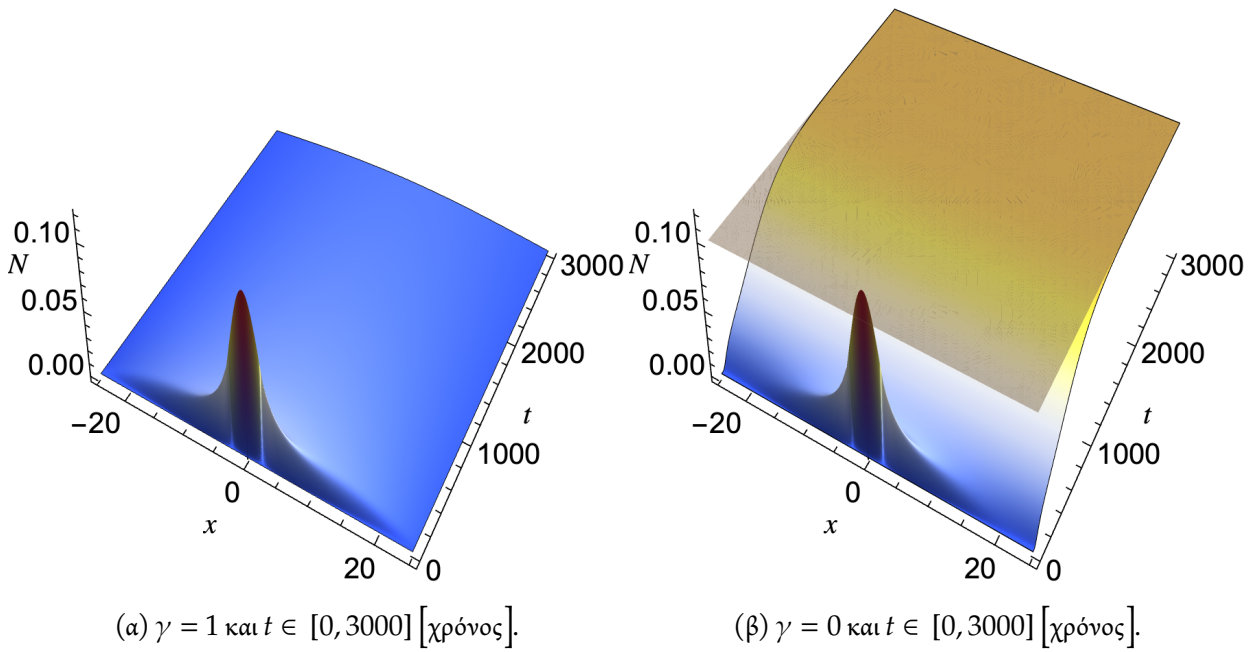
$$\frac{rl^2}{D} = \pi^2.$$

Επαληθεύεται ότι ενώ για $\gamma = 0$ η λύση έχει την ίδια συμπεριφορά με την προηγούμενη περίπτωση, για $\gamma = 1$ τείνει προς την τετριμμένη στάσιμη λύση.

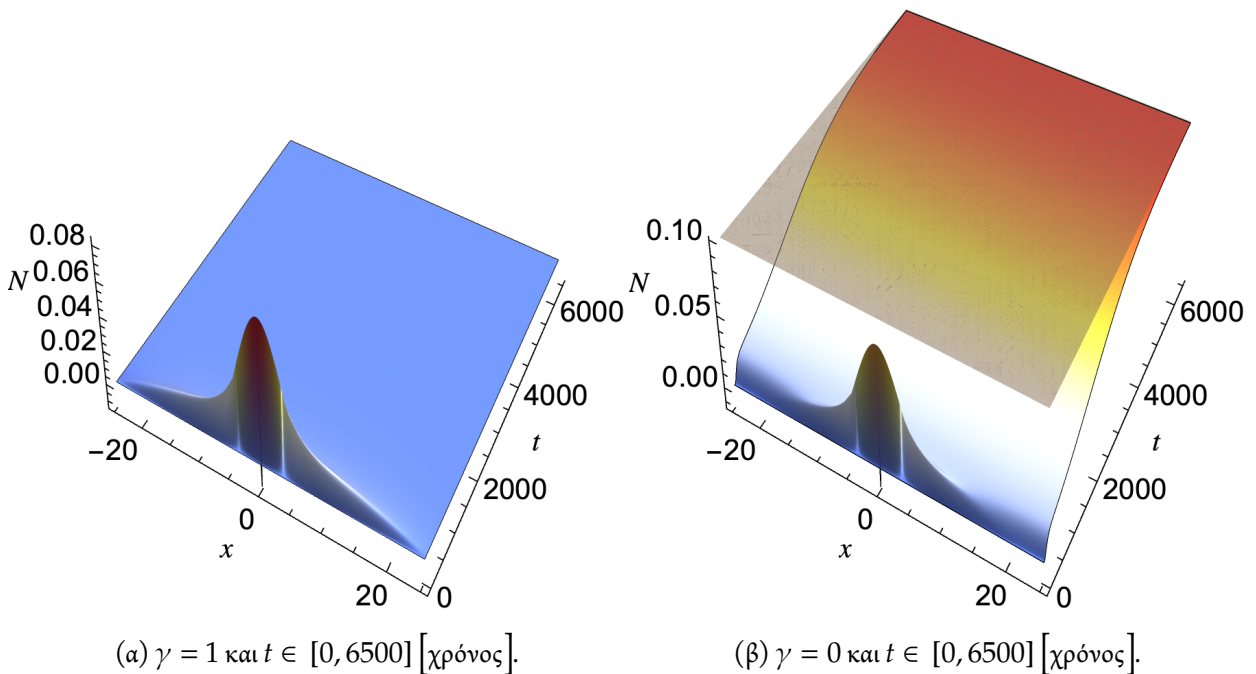
Στο Σχήμα 14.6 επιλύεται αριθμητικά το προαναφερθέν πρόβλημα στην περίπτωση όπου

$$\frac{rl^2}{D} < \pi^2.$$

Επαληθεύεται ότι η λύση έχει την ίδια συμπεριφορά με την προηγούμενη περίπτωση.



Σχήμα 14.5: Αριθμητική επίλυση του (ℓ_Δ) με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² · [χρόνος]⁻¹, $l = 50$ [μήκος], $r = \left(\frac{\pi}{50}\right)^2 \approx 0.004$ [χρόνος]⁻¹, $k = 0.1$ άτομο, $N_\square = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος]. Για $l = l_{crit} = 50$ [μήκος] ο πληθυσμός θα επιβιώσει μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma = 0$, ενώ και στις δύο περιπτώσεις θα οδηγηθεί σε μια στάσιμη κατάσταση.



Σχήμα 14.6: Αριθμητική επίλυση του (ℓ_Δ) με αρχική δεδομένη συνάρτηση την (12.6), για $D = 1$ [μήκος]² · [χρόνος]⁻¹, $l = 50$ [μήκος], $r = 0.001$ [χρόνος]⁻¹, $k = 0.1$ άτομο, $N_\square = 1$ άτομο · [μήκος], $\varepsilon = 10^{-2}$ [μήκος] και $\delta = 10^{-3}$ [μήκος]. Για $l < l_{crit} = 10\sqrt{10}\pi \approx 99.35$ ο πληθυσμός θα επιβιώσει μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma = 0$, ενώ και στις δύο περιπτώσεις θα οδηγηθεί σε μια στάσιμη κατάσταση.

Μαθηματικό Υπόβαθρο:

Μη γραμμικό γνήσιο ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα ($m = n = 1$). Εδώ θα περιορίσουμε την παρουσίαση των αποτελεσμάτων που αφορούν τη μελέτη μη γραμμικών (για την ακρίβεια, ημιγραμμικών) γνήσιων (ΠΑΣΤ) σε φραγμένο U , στην περίπτωση όπου το πρόβλημα είναι αυτόνομο. Σημειώνουμε ότι η αυτονομία του (ΠΑΣΤ) αξιοποιείται κατά την ποιοτική μελέτη του προβλήματος, στην οποία θα αναγκαστούμε τελικά να καταφύγουμε λόγω της εν γένει αδυναμίας μας προς εύρεση λύσης -σε κάποιου είδους αξιοποιήσιμη μορφή- των μη γραμμικών προβλημάτων. Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας για $n = 1$.

Μάλιστα, για να πετύχουμε μια ουσιαστική μεν, μη εκτενή δε, παρουσίαση, θα περιοριστούμε στη μελέτη του αντιπροσωπευτικού μη γραμμικού γνήσιου ΠΑΣΤ για $m = 1$ σε φραγμένο ανοικτό (χωρικό) διάστημα που σχετίζεται με το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) - a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) = f(y(x, t)), & \forall (x, t) \in (x_1, x_2) \times (0, T), \\ y(x, 0) = g(x), & \forall x \in [x_1, x_2], \\ \gamma y(x_i, t) + (1 - \gamma) \frac{\partial y}{\partial x}(x_i, t) = 0, & \forall (i, t) \in \{1, 2\} \times (0, T), \end{cases} \quad \text{με } \gamma \in \{0, 1\}, \quad (\text{NL1})$$

όπου $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, $T \in (0, \infty]$, $a > 0$ και $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Θεώρημα 14.3 (τοπικά καλή τοποθέτηση). Αν

i. $f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, η οποία να ικανοποιεί τοπικά συνθήκη Hölder με εκθέτη $\delta \in (0, 1)$, και

ii. $g \in C([x_1, x_2]; \mathbb{R})$, τέτοια ώστε,

a. μόνο στην περίπτωση όπου $\gamma \neq 1$, να υπάρχει $\rho \in \left(0, \frac{l}{2}\right]$, τέτοιο ώστε

$$g \in C^1\left(\left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + \rho\right] \cup \left[\frac{l}{2} - \rho, \frac{l}{2}\right]; \mathbb{R}\right),$$

και

β. να ικανοποιείται η συνθήκη συμβατότητας

$$\gamma g(x_i) + (1 - \gamma) \frac{dg}{dx}(x_i) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

τότε $\exists T > 0$, που εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος, τέτοιο ώστε να $\exists!$ λύση, $y: [x_1, x_2] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, του προβλήματος που σχετίζεται με το σύστημα (NL1), η οποία, μάλιστα, εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα του προβλήματος.

Η λύση που μας παρέχει το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να επεκταθεί μέχρι κάποιο μέγιστο δυνατό χρόνο, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 14.4 (μεγιστική λύση). Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 14.3, $\exists T \in (0, \infty]$, τέτοιο ώστε να $\exists!$ μεγιστική λύση, $y: [x_1, x_2] \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, του (ΠΑΣΤ), δηλ. αν $T < \infty$, τότε

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \|y(\cdot, t)\|_{C_B([x_1, x_2]; \mathbb{R})} = \infty.$$

Προφανώς οι ιδιότητες της λύσης στα σημεία 2. έως και 5. του Θεωρήματος 14.3 ισχύουν και για τη μεγιστική λύση του Θεωρήματος 14.4 για όλους τους χρόνους αυστηρά μικρότερους του μέγιστου T .

Επίσης, ισχύει και η επίδραση εξομάλυνσης.

Θεώρημα 14.5 (επίδραση εξομάλυνσης). Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 14.3, αν, επιπλέον, ισχύει ότι η f είναι ομαλή, τότε η μεγιστική λύση του Θεωρήματος 14.4 είναι επίσης ομαλή εντός του $[x_1, x_2] \times (0, T)$.

Ποιοτική μελέτη αυτόνομου γνήσιου ΠΑΣΤ σε φραγμένα σύνολα ($m = n = 1$). Εδώ περιγράφουμε τη γενική διαδικασία που ακολουθείται για την ποιοτική μελέτη του προβλήματος που σχετίζεται με το (NL1). Τα βήματα της διαδικασίας είναι τα ίδια με την αντίστοιχη για την ποιοτική μελέτη αυτόνομου (ΠΑΤ) και, συγκεκριμένα,

1. η εύρεση των στάσιμων λύσεών του, και
2. ο χαρακτηρισμός της ευστάθειάς τους, τόσο τοπικά όσο και ολικά.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι το παραπάνω πρόβλημα

- είναι καλά τοποθετημένο και, συγκεκριμένα, ισχύουν οι υποθέσεις του **Θεωρήματος 14.3**, και
- η λύση του είναι ολική,

υποθέσεις οι οποίες είναι προφανώς απαραίτητες για να έχει νόημα η συζήτηση περί συμπεριφοράς της μοναδικής λύσης για μεγάλους χρόνους, και προχωράμε στην παρουσίαση της διαδικασίας.

Στάσιμες λύσεις και εξάρτησή τους από τις παραμέτρους. Οι στάσιμες λύσεις, y^* , του παραπάνω προβλήματος, που σχετίζεται με το (NL1), ικανοποιούν το σύστημα³

$$\begin{cases} a \frac{d^2 y^*}{dx^2}(x) + f(y^*(x)) = 0, & \forall x \in (x_1, x_2), \\ \gamma y^*(x_i) + (1 - \gamma) \frac{\partial y^*}{\partial x}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\}, \end{cases} \quad \text{με } \gamma \in \{0, 1\}. \quad (14.3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του παραπάνω συστήματος επί $\frac{dy^*}{dx}$ και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας, προκύπτει το

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \left(\frac{dy^*}{dx}(x) \right)^2 + F(y^*(x)) = K, & \forall x \in (x_1, x_2), \\ \gamma y^*(x_i) + (1 - \gamma) \frac{\partial y^*}{\partial x}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\}, \end{cases} \quad \text{με } \gamma \in \{0, 1\},$$

όπου $F \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ μια αυθαίρετη παράγουσα της f και $K \in \mathbb{R}$ σταθερά. Λόγω της συνέχειας της y^* , υπάρχει το

$$\|y^*\|_{C_B([x_1, x_2]; \mathbb{R})} =: M$$

και μάλιστα λαμβάνεται σε τουλάχιστον ένα σημείο $x_0 \in [x_1, x_2]$, για το οποίο ισχύει ότι

$$\frac{dy^*}{dx}(x_0) = 0, \quad (14.4)$$

όποτε το παραπάνω σύστημα παίρνει τη μορφή

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \left(\frac{dy^*}{dx}(x) \right)^2 + F(y^*(x)) = F(M), & \forall x \in (x_1, x_2), \\ \gamma y^*(x_i) + (1 - \gamma) \frac{\partial y^*}{\partial x}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\}, \end{cases} \quad \text{με } \gamma \in \{0, 1\}. \quad (14.5)$$

Άρα, άμεσα από τα παραπάνω έπονται τρεις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τις στάσιμες λύσεις, y^* .

³Για απλούστευση του συμβολισμού, θεωρούμε ότι κάθε y^* είναι συνάρτηση μόνο της χωρικής μεταβλητής, x .

- A1. Από την πρώτη εξίσωση του (14.5), άμεσα έπεται ότι κάθε στάσιμη λύση αναγκαστικά ικανοποιεί την ανισότητα

$$F(y^*(x)) \leq F(M), \quad \forall x \in [x_1, x_2].$$

Αυτή η συνθήκη γεννά περιορισμό ως προς το εύρος του M , ο οποίος σχετίζεται με τα χαρακτηριστικά της F (για παράδειγμα, τη μονοτονία της) και, συγκεκριμένα, υπάρχει διάστημα $\mathcal{S}_1 \subseteq [0, \infty)$, τέτοιο ώστε αναγκαστικά $M \in \mathcal{S}_1$.

- A2. Από την πρώτη εξίσωση του (14.3), άμεσα έπεται ότι κάθε σταθερή στάσιμη λύση αναγκαστικά ικανοποιεί την ταυτότητα⁴

$$f(y^*) \equiv 0.$$

- A3. Από την πρώτη εξίσωση του (14.5), άμεσα έπεται ότι για όλα τα σημεία $x_0 \in (x_1, x_2)$ τα οποία ικανοποιούν την (14.4) αναγκαστικά ισχύει ότι

$$F(y^*(x_0)) = F(M). \quad (14.6)$$

Τώρα, συνεχίζουμε τη μελέτη μας με μία ειδική περίπτωση, όπου ικανοποιούνται επιπλέον τρεις υποθέσεις, όπως παρακάτω.

- Υ1. Ισχύει ότι

$$\gamma = 1.$$

- Υ2. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (x_1, x_2)$ που ικανοποιεί την (14.4), ή, ισοδύναμα, που ικανοποιεί την (14.6).

- Υ3. Ισχύει η ανισότητα

$$F(y^*(x)) < F(M), \quad \forall x \in (x_1, x_2) \setminus \{x_0\}.$$

Υπό αυτές τις υποθέσεις, για να βρούμε κάποια μη σταθερή στάσιμη λύση, y^* , συνεχίζουμε την ανάλυση μας, γράφοντας την πρώτη εξίσωση του (14.5) ως

$$\frac{dy^*}{dx}(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{a} (F(M) - F(y^*(x))) \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{αν } x \in (x_1, x_0), \\ -\left(\frac{2}{a} (F(M) - F(y^*(x))) \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{αν } x \in (x_0, x_2), \end{cases}$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών, οπότε

- α. αν $x \in (x_1, x_0)$, τότε ολοκληρώνοντας έπεται ότι

$$\int_x^{x_0} \left(2 (F(M) - F(y^*(\xi))) \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dy^*}{dx}(\xi) d\xi = a^{-\frac{1}{2}} \int_x^{x_0} 1 d\xi,$$

όποτε με αλλαγή μεταβλητής έχουμε ότι

$$\int_{y^*(x)}^M \left(2 (F(M) - F(s)) \right)^{-\frac{1}{2}} ds = (x_0 - x) a^{-\frac{1}{2}}, \quad (14.7)$$

⁴Μάλιστα, αυτή η ταυτότητα χαρακτηρίζει πλήρως τις σταθερές στάσιμες λύσεις.

β. αν $x \in (x_0, x_2)$, τότε αντίστοιχα παίρνουμε ότι

$$\int_{y^*(x)}^M (2(F(M) - F(s)))^{-\frac{1}{2}} ds = (x - x_0) a^{-\frac{1}{2}}. \quad (14.8)$$

Παίρνοντας $x \rightarrow x_1^+$ και $x \rightarrow x_2^-$ στις (14.7) και (14.8), αντίστοιχα, και αξιοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη του (14.5), έπεται ότι

$$\int_0^M (2(F(M) - F(s)))^{-\frac{1}{2}} ds = (x_0 - x_1) a^{-\frac{1}{2}} = (x_2 - x_0) a^{-\frac{1}{2}},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι αναγκαστικά

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

και

$$2^{\frac{1}{2}} \int_0^M (F(M) - F(s))^{-\frac{1}{2}} ds = (x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}}, \text{ για κάθε μη σταθερή } y^*. \quad (14.9)$$

Μάλιστα, ενδεχομένως η (14.9) να χαρακτηρίζει μοναδικά την ποσότητα M συναρτήσει της ποσότητας $(x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}}$. Πράγματι, κάνουμε, επιπλέον, μια τέταρτη υπόθεση.

Υ4. Υπάρχει διάστημα $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{S}_1 \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε, όχι μόνο να ορίζεται η

$$h: \mathcal{S}_2 \rightarrow (0, \infty),$$

$$w \mapsto h(w) := 2^{\frac{1}{2}} \int_0^w (F(w) - F(s))^{-\frac{1}{2}} ds,$$

αλλά και να είναι 1-1 συνάρτηση.

Υπό την υπόθεση αυτή, συνεπάγεται από την (14.9) ότι

$$M = h^{-1}\left((x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}}\right), \forall (x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}} \in h(\mathcal{S}_2).$$

Μέσω της παραπάνω σχέσης, η M μπορεί να ορισθεί ως συνάρτηση της ποσότητας $(x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}}$.

Συμπερασματικά, υπό τις παραπάνω υποθέσεις, **Υ1.**, **Υ2.**, **Υ3.** και **Υ4.**, αν

$$(x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}} \in h(\mathcal{S}_2),$$

τότε υπάρχει μοναδική μη σταθερή στάσιμη λύση, y^* , η οποία δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή ως

$$\int_{y^*(x)}^{h^{-1}\left((x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}}\right)} \left(2\left(F\left(h^{-1}\left((x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}}\right)\right) - F(s)\right)\right)^{-\frac{1}{2}} ds = a^{-\frac{1}{2}} \left|x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right|, \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (14.10)$$

Προφανώς, επιλέγοντας τα “μέγιστα” δυνατά \mathcal{S}_1 και \mathcal{S}_2 , βρίσκουμε και το μέγιστο εύρος της ποσότητας $(x_2 - x_1) a^{-\frac{1}{2}}$ για το οποίο υπάρχει στάσιμη λύση όπως στην (14.10).

Σημειώνουμε, τέλος, ότι έχει φανεί στην πράξη ότι οι παραπάνω υποθέσεις δεν είναι, τελικά, ιδιαίτερα περιοριστικές για τις εφαρμογές.

Γραμμικοποίηση. Σε αντιστοιχία με την περίπτωση της ποιοτικής μελέτης του (ΠΑΤ), έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 14.6 (γραμμικοποίηση). Έστω y^* μεμονωμένη στάσιμη λύση του προβλήματος που σχετίζεται με το (NL1), καθώς επίσης $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ όπου $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό σύνολο, τέτοιο ώστε $\text{Ran}(y^*) \subseteq U$. Έστω, επίσης, το πρόβλημα ιδιοτιμών Sturm-Liouville

$$\begin{cases} -a \frac{d^2 y}{dx^2}(x) - \frac{df}{dw}(y^*(x))y(x) = \lambda y(x), & \forall x \in (x_1, x_2), \\ \gamma y(x_i) + (1 - \gamma) \frac{\partial y}{\partial x}(x_i) = 0, & \forall i \in \{1, 2\}, \end{cases} \quad \text{με } \gamma \in \{0, 1\}$$

και $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ η πρώτη ιδιοτιμή του.

1. Αν $\lambda_1 < 0$, τότε η y^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.
2. Αν $\lambda_1 > 0$, τότε η y^* είναι ασταθής.
3. Αν $\lambda_1 = 0$, τότε αυτή η πληροφορία δεν αρκεί για να αποφανθούμε σχετικά με την ευστάθεια/αστάθεια της y^* .

Ολική συμπεριφορά της λύσης για μεγάλους χρόνους. Εκτός από την ποιοτική μελέτη του (ΠΑΤ), η εύρεση μιας συνάρτησης Lyapunov, κατάλληλα ορισμένης, έχει θέση και στην αντίστοιχη μελέτη του (ΠΑΣΤ) και συγκεκριμένα του προβλήματος που σχετίζεται με το (NL1) και μας ενδιαφέρει. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του τελευταίου αυτού προβλήματος είναι ότι διαθέτει πάντα μια συνάρτηση Lyapunov και, μάλιστα, μέσω της οποίας μπορεί να εξαχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 14.7 (ολική ασυμπτωτική ευστάθεια). Κάθε φραγμένη λύση του προβλήματος που σχετίζεται με το (NL1), τείνει ομοιόμορφα σε μια στάσιμη λύση, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Για τη μαθηματική μελέτη προβλημάτων εξισώσεων αντίδρασης-διάχυσης, όπως το σύστημα (NL1), βλ., π.χ., τα συγγράμματα [7], [8].

Βιβλιογραφία

- [1] R. A. Fisher. “The wave of advance of advantageous genes”. Στο: *Annals of Eugenics* 7 (1937), σσ. 355–369.
- [2] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii και N. S. Piskunov. “A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance and its application to a biological problem (στα Ρώσικα)”. Στο: *Bulletin of Moscow University, Series I: Mathematics. Mechanics* 1 (1937), σσ. 1–26.
- [3] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii και N. S. Piskunov. “A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance and its application to a biological problem”. Στο: *Selected Works of A. N. Kolmogorov, vol. I: Mathematics and Mechanics*. Επιμέλεια υπό V. M. Tikhomirov. Springer, 1991, σσ. 242–270.
- [4] D. G. Aronson και H. F. Weinberger. “Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation”. Στο: *Partial Differential Equations and Related Topics*. Επιμέλεια υπό J. A. Goldstein. Springer, 1975, σσ. 5–49.
- [5] D. G. Aronson και H. F. Weinberger. “Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics”. Στο: *Advances in Mathematics* 30 (1978), σσ. 33–76.

- [6] D. Ludwig, D. G. Aronson και H. F. Weinberger. “Spatial patterning of the spruce budworm”. Στο: *Journal of Mathematical Biology* 8 (1979), σσ. 217–258.
- [7] P. C. Fife. *Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems*. Springer, 1979.
- [8] R. S. Cantrell και C. Cosner. *Spatial Ecology via Reaction-Diffusion Equations*. Wiley, 2004.

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

Σύνοψη

Επιγραμματική παρουσίαση θεματικών εννοιών:

- (α) Διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση
- (β) Οδεύοντα και επίπεδα κύματα
- (γ) Συστήματα διάχυσης
- (δ) Αστάθεια Turing και σχηματισμός μοτίβων
- (ε) Μη τοπικά μοντέλα

Προαπαιτούμενη γνώση

Κεφάλαια 1-14

Το συνοπτικό περιεχόμενο του παρόντος επιλογικού κεφαλαίου προτείνεται ως πλάνο για τη συνέχιση της μελέτης των μεθόδων των Διαφορικών Εξισώσεων, Δυναμικών Συστημάτων και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών που αξιοποιούνται για την περιγραφή και την ανάλυση βιολογικών φαινομένων.

Επιγραμματική παρουσίαση θεματικών εννοιών:

Διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση. Οι διαφορικές εξισώσεις με υστέρηση (ΔΕΥ, *delay differential equations*) αποτελούν ένα τύπο διαφορικών εξισώσεων όπου, σε κάθε χρονική στιγμή, η τιμή της ανώτερης τάξης διαφορίσης της άγνωστης συνάρτησης εξαρτάται από την τιμή της συνάρτησης (και των κατώτερης τάξης διαφορίσεων, αν εμφανίζονται τέτοιες) σε μια συγκεκριμένη προηγούμενη στιγμή. Η χρονική διάρκεια μεταξύ των δύο αυτών χρονικών στιγμών ονομάζεται υστέρηση.

Γενικά, τα προβλήματα των ΔΕΥ παρουσιάζουν δύο σημαντικές διαφοροποιήσεις ως προς τα αντίστοιχα των ΣΔΕ. Η πρώτη σχετίζεται με τη δομή τους: ενώ τα (ΠΑΤ) απαιτούν τη γνώση της ζητούμενης συνάρτησης σε μία (αρχική) χρονική στιγμή, η αντίστοιχη αρχική συνθήκη για τα προβλήματα των ΔΕΥ περιλαμβάνει τη γνώση της ζητούμενης συνάρτησης εντός ενός (αρχικού) χρονικού διαστήματος διάρκειας ίσης με την υστέρηση. Η δεύτερη σχετίζεται με τη συμπεριφορά των λύσεων τους: σε αντίθεση με το τι συμβαίνει

στα (ΠΑΤ), στα προβλήματα των ΔΕΥ ενδέχεται να εμφανιστούν διακλαδώσεις Hopf ακόμα και στη μία διάσταση, μιας και η χαρακτηριστική εξίσωσή τους είναι υπερβατική (οι λύσεις της οποίας μπορούν να εκφραστούν μέσω της συνάρτησης Lambert) και όχι πολυωνυμική.

Οι εφαρμογές των ΔΕΥ συναντώνται σε πολλές περιοχές της Βιολογίας, π.χ., στην Οικολογία, στην Επιδημιολογία και στη Φυσιολογία (αναπνευστικό σύστημα, αιμοποιητικό σύστημα κ.ά.).

Για τη γενική θεωρία των ΔΕΥ, αλλά και για ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών τους, παραπέμπουμε στα συγγράμματα [1], [2], [3], [4], [5], [6].

Οδεύοντα και επίπεδα κύματα. Συναρτήσεις της μορφής οδεύοντος κύματος (*travelling wave*) στη μία διάσταση, καθώς επίσης και της μορφής *επίπεδου κύματος* (*plane wave*), δηλ. του πολυδιάστατου ανάλογου του οδεύοντος κύματος, ήταν γνωστές ως λύσεις της (γραμμικής) κυματικής εξίσωσης ήδη από τον 18ο αιώνα. Χαρακτηριστικό των λύσεων αυτών αποτελεί η ύπαρξη ενός κυματικού μετώπου που μεταδίδεται στον χώρο με συγκεκριμένη ταχύτητα. Εντούτοις, η μελέτη τους στο πλαίσιο των μη γραμμικών εξισώσεων, και συγκεκριμένα των μη γραμμικών εξισώσεων αντίδρασης-διάχυσης, χρονολογείται δύο αιώνες αργότερα. Θεμελιώδης εργασία σε αυτό το πλαίσιο αποτέλεσε αυτή των Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (1937), [7] (στα Ρώσικα, μετάφραση στα Αγγλικά: [8]), οι οποίοι βρήκαν και μελέτησαν τέτοιου είδους λύσεις για πρόβλημα που σχετίζεται με το λογιστικό μοντέλο με όρο διάχυσης. Έκτοτε, τέτοιες λύσεις έχουν βρεθεί και μελετηθεί για διάφορα προβλήματα αντίδρασης-διάχυσης, Οικολογίας, Επιδημιολογίας και Φυσιολογίας (διάδοση ηλεκτρικού σήματος στους νευρώνες, επούλωση τραυμάτων, κυτταρική επικοινωνία και μετάδοση σήματος κ.ά.).

Για παραδείγματα τέτοιων λύσεων καθώς και για τη μαθηματική μελέτη τους παραπέμπουμε, π.χ., στο [9]. Μια βασική αναφορά για θέματα ευστάθειας οδεύοντων κυμάτων είναι η εργασία [10]. Η βιβλιογραφία για τα οδεύοντα και επίπεδα κύματα και την εμφάνισή τους σε διάφορες περιοχές της Μαθηματικής Βιολογίας είναι ευρύτατη. Ενδεικτικά μόνο αναφέρουμε τα συγγράμματα [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17].

Συστήματα διάχυσης. Όπως διαπιστώσαμε στο τέταρτο και τελευταίο μέρος, *Διάχυση*, κομβικό ρόλο κατά τη μελέτη του (ΠΑΣΤ) για $n = 1$ παίζει η αρχή μεγίστου/ελαχίστου καθώς και το αποτέλεσμα για τη μέγιστη/ελάχιστη τιμή και το πρόσημο της διαφοράς ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα επί του συνόρου. Για τη μελέτη των συστημάτων τύπου (ΠΑΣΤ), δηλ. όταν $n > 1$, τον ρόλο αυτό αναλαμβάνουν τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τα ασθενώς διασυνδεδεμένα (*weakly coupled*) παραβολικά συστήματα ανισώσεων. Τα αποτελέσματα αυτά προφανώς αποτελούν γενίκευση των αντίστοιχων για $n = 1$. Για λεπτομέρειες σχετικά παραπέμπουμε στο [18, Chapter 3 Section 8].

Αστάθεια Turing και σχηματισμός μοτίβων. Κατά τη μελέτη της ευστάθειας/αστάθειας της ολικής λύσης ενός καλά τοποθετημένου (ΠΑΣΤ) ενδέχεται να παρουσιαστεί ένα ενδιαφέρον φαινόμενο: μία ενδεχομένως ασυμπτωτικά ευσταθής λύση του (ΠΑΤ) με μοντέλο την αντίστοιχη ΣΔΕ στην οποία λείπει ο όρος διάχυσης, δεν αντιστοιχεί απαραίτητα σε μια ασυμπτωτικά ευσταθή λύση του (ΠΑΣΤ). Μάλιστα, η τελευταία μπορεί να είναι και ασταθής.

Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως *αστάθεια Turing* (*Turing instability*), προς τιμήν του Turing ο οποίος το παρατήρησε για πρώτη φορά το 1952, [19], κατά τη μελέτη ενός προβλήματος αντίδρασης-διάχυσης. Έκανε δε ένα σημαντικό βήμα μπροστά, όταν υπέθεσε ότι αυτού του είδους η αστάθεια, γνωστή επίσης και ως *αστάθεια λόγω διάχυσης* (*diffusion-driven instability*), είναι υπεύθυνη για τον σχηματισμό μοτίβων που εμφανίζονται στη Βιολογία, όπως, π.χ., στην Εμβρυολογία.

Συγκεκριμένα υπέθεσε ότι τα μοτίβα, τα οποία παρατηρούνται κατά την εμβρυϊκή ανάπτυξη, προκύπτουν ως απάντηση σε μία χωρική κατανομή κατάλληλων βιοχημικών παραγόντων σηματοδότησης. Στη συνέχεια, τα κύτταρα και οι ιστοί θα ανταποκριθούν σε αυτή την κατανομή και θα διαφοροποιηθούν με τρόπο που εξαρτάται από κάποιον ουδό, δηλ. τα μοτίβα που παρατηρούμε στη Βιολογία, όπως η μελάγχρωση του δέρματος και του τριχώματος των θηλαστικών, η διακλάδωση στα δέντρα και οι σκελετικές δομές, είναι αντανάκλασεις ανομοιογενειών στην υποκείμενη βιοχημική σηματοδότηση. Θεώρησε δε υπεύθυνη για αυτές τις ανομοιογένειες

νειες τη φυσική διαδικασία της διάχυσης διαφόρων παραγόντων σηματοδότησης.

Το μοντέλο Turing και οι επεκτάσεις του, έχουν εφαρμοστεί στον σχηματισμό μοτίβων στις ύδρες, στο μπίβο μελάγχρωσης στα ψάρια, στα σημάδια των κελυφών των οστράκων και στη σκελετική ανάπτυξη των άκρων, για να αναφέρουμε μόνο μερικά παραδείγματα. Μετά τη δημοσίευση της εργασίας του Turing, ακολούθησε εκτεταμένη ερευνητική δραστηριότητα σχετικά με την αστάθεια λόγω διάχυσης σε συστήματα αντίδρασης-διάχυσης και τις σχέσεις τους με τον σχηματισμό μοτίβων σε μια μεγάλη ποικιλία εφαρμογών στις φυσικές επιστήμες.

Για λεπτομέρειες σχετικά με τον σχηματισμό μοτίβων παραπέμπουμε στα συγγράμματα [16], [20], [21], [22] και ενδεικτικά στις εργασίες [23], [24], [25], [26], [24], [27], [28].

Μη τοπικά μοντέλα. Οι κλασικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, που προκύπτουν κατά τη μοντελοποίηση διαφόρων φυσικών και βιολογικών φαινομένων, λαμβάνουν υπόψη μόνο τοπικές χωρικές, ή χρονικές, μεταβλητές, αγνοώντας κάθε πιθανή χωρική εξάρτηση από τα γειτονικά σημεία και παραβλέποντας τυχόν φαινόμενα μνήμης. Αντίθετα, τα μη τοπικά μοντέλα εξετάζουν ενδεχόμενη εξάρτηση των εμπλεκόμενων φυσικών μεγεθών στην εξέλιξη της μελετώμενης διαδικασίας απ' όλα τα κοντινά χωρικά σημεία, ή/και εξάρτηση από προηγούμενους χρόνους. Μια τέτοια μη τοπική εξάρτηση συνήθως πηγάζει από εξ αποστάσεως αλληλεπιδράσεις, ή από διάφορους νόμους διατήρησης. Τυπικά παραδείγματα μη τοπικών μοντέλων της Μαθηματικής Βιολογίας, εμφανίζονται στη δυναμική πληθυσμών, [29], στη μοντελοποίηση συσσωμάτωσης κυττάρων λόγω χημειοταξίας, [30], στην κυτταρική πόλωση ετερογενών πληθυσμών καρκινικών κυττάρων, [31], κ.λπ.. Σε πολλές βιολογικές περιοχές, όπως η εμβρυολογική ανάπτυξη, οι πυκνότητες των εμπλεκόμενων κυττάρων δεν είναι μικρές και μια τοπική, ή μικρής εμβέλειας, ροή διάχυσης ανάλογη με τη διαβάθμιση δεν είναι επαρκώς ακριβής.

Γενικά, τα μη τοπικά μοντέλα παρέχουν πιο ακριβείς προβλέψεις σε σύγκριση με τα αντίστοιχα τοπικά, καθώς χρησιμοποιούν όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες σχετικά με την εξέλιξη της μελετώμενης διαδικασίας. Από την άλλη πλευρά, η παρουσία μη τοπικών όρων μπορεί να ευθύνεται για την έλλειψη ορισμένων θεμελιωδών χαρακτηριστικών που ισχύουν για τα αντίστοιχα τοπικά προβλήματα, όπως π.χ. η αρχή μεγίστου. Επιπλέον, τα περισσότερα από τα μη τοπικά προβλήματα παρουσιάζουν αρκετά πλούσια δυναμική, η οποία είναι συνήθως πιο περίπλοκη από τη δυναμική των τοπικών αναλόγων τους. Ένα άλλο πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο που οφείλεται μεν στην παρουσία μη γραμμικότητας, αλλά του οποίου ο αντίκτυπος αυξάνεται όταν υπάρχει επίσης ένας μη τοπικός όρος, είναι η εμφάνιση πεπερασμένου χρόνου έκρηξης, ή πεπερασμένου χρόνου απόσβεσης, των λύσεων. Η έκρηξη και η απόσβεση αντιμάχονται στην καλή τοποθέτηση των μη γραμμικών εξελκτικών εξισώσεων, αφού -και οι δύο- υπό ορισμένες συνθήκες, αποκλείουν την ύπαρξη ολικών ως προς τον χρόνο λύσεων. Πρόσφατα έχει διαπιστωθεί ότι πολλά ρεαλιστικά μοντέλα περιγράφονται με ημιγραμμικές εξισώσεις με μη τοπικούς όρους και πολλά από αυτά εμφανίζουν τα φαινόμενα έκρηξης και απόσβεσης σε πεπερασμένο χρόνο.

Για λεπτομέρειες σχετικά με τα μη τοπικά μοντέλα παραπέμπουμε στα συγγράμματα [32], [33], [34] και ενδεικτικά στις εργασίες [35], [36], [37], [38].

Βιβλιογραφία

- [1] T. Erneux. *Applied Delay Differential Equations*. Springer, 2009.
- [2] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel και H.-O. Walther. *Delay Equations*. Springer, 1995.
- [3] R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer, 1997.
- [4] J. K. Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer, 1977.
- [5] Y. Kuang. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press, 1993.

- [6] H. Smith. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer, 2011.
- [7] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii και N. S. Piskunov. “A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance and its application to a biological problem (στα Ρώσικα)”. Στο: *Bulletin of Moscow University, Series I: Mathematics. Mechanics* 1 (1937), σσ. 1–26.
- [8] A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii και N. S. Piskunov. “A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance and its application to a biological problem”. Στο: *Selected Works of A. N. Kolmogorov, vol. I: Mathematics and Mechanics*. Επιμέλεια υπό V. M. Tikhomirov. Springer, 1991, σσ. 242–270.
- [9] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. AMS, 2nd edition, 2010.
- [10] B. Sandstede. “Stability of travelling waves”. Στο: *Handbook of Dynamical Systems, vol. 2*. Επιμέλεια υπό B. Fiedler. Elsevier, 2002, σσ. 983–1055.
- [11] M. Iannelli. *Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics*. Giardini, 1994.
- [12] N. F. Britton. *Essential Mathematical Biology*. Springer, 2003.
- [13] J. P. Keener και J. Sneyd. *Mathematical Physiology I: Cellular Physiology*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [14] J. P. Keener και J. Sneyd. *Mathematical Physiology II: Systems Physiology*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [15] J. D. Murray. *Mathematical Biology. I: An Introduction*. Springer, 3rd edition, 2011.
- [16] J. D. Murray. *Mathematical Biology. II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer, 3rd edition, 2011.
- [17] A. I. Volpert, Vi. A. Volpert και Vl. A. Volpert. *Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems*. AMS, 1994.
- [18] M. H. Protter και H. F. Weinberger. *Maximum Principles in Differential Equations*. Springer, 1984.
- [19] A. M. Turing. “The chemical basis of morphogenesis”. Στο: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences* 237 (1952), σσ. 37–72.
- [20] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. SIAM, 2005.
- [21] R. Hoyle. *Pattern Formation: An Introduction to Methods*. Cambridge University Press, 2006.
- [22] H. Meinhardt. *Models of Biological Pattern Formation*. Academic Press, 1982.
- [23] J. D. Murray. “Parameter space for Turing instability in reaction diffusion mechanisms: a comparison of models”. Στο: *Journal of Theoretical Biology* 98 (1982), σσ. 143–163.
- [24] P. K. Maini, K. J. Painter και H. N. P. Chau. “Spatial pattern formation in chemical and biological systems”. Στο: *Journal of the Chemical Society, Faraday Transactions* 93 (1997), σσ. 3601–3610.
- [25] M. R. Ricard και S. Mischler. “Turing instabilities at Hopf bifurcation”. Στο: *Journal of Nonlinear Science* 19 (2009), σσ. 467–496.
- [26] V. K. Vanag και I. R. Epstein. “Pattern formation mechanisms in reaction-diffusion systems”. Στο: *International Journal of Developmental Biology* 53 (2009), σσ. 673–681.
- [27] W. Jiang, X. Cao και C. Wang. “Turing instability and pattern formations for reaction-diffusion systems on 2d bounded domain”. Στο: *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B* 27 (2022), σσ. 1163–1178.
- [28] D. M. Umulis και H. G. Othmer. “The role of mathematical models in understanding pattern formation in developmental biology”. Στο: *Bulletin of Mathematical Biology* 77 (2015), σσ. 817–845.

- [29] J. Furter και M. Grinfeld. “Local vs. non-local interactions in population dynamics”. Στο: *Journal of Mathematical Biology* 27 (1989), σσ. 65–80.
- [30] G. Wolansky. “A critical parabolic estimate and application to nonlocal equations arising in chemotaxis”. Στο: *Applicable Analysis* 66 (1997), σσ. 291–321.
- [31] V. Bitsouni και R. Eftimie. “Non-local parabolic and hyperbolic models for cell polarisation in heterogeneous cancer cell populations”. Στο: *Bulletin of Mathematical Biology* 80 (2018), σσ. 2600–2632.
- [32] F. Andreu-Vaillou, J. M. Mazón, J. D. Rossi και J. J. Toledo-Melero. *Nonlocal Diffusion Problems*. AMS, 2010.
- [33] Q. Du. *Nonlocal Modeling, Analysis, and Computation*. SIAM, 2019.
- [34] N. Kavallaris και T. Suzuki. *Non-Local Partial Differential Equations for Engineering and Biology*. Springer, 2018.
- [35] L. Chen, K. Painter, C. Surulescu και A. Zhigun. “Mathematical models for cell migration: a non-local perspective”. Στο: *Philosophical Transactions of the Royal Society B* 375 (2020), article 20190379.
- [36] C. R. Laing και W. C. Troy. “PDE methods for nonlocal models”. Στο: *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* 2 (2003), σσ. 487–516.
- [37] C. T. Lee κ.ά. “Non-local concepts and models in biology”. Στο: *Journal of Theoretical Biology* 210 (2001), σσ. 201–219.
- [38] C. M. Topaz, A. L. Bertozzi και M. A. Lewis. “A nonlocal continuum model for biological aggregation”. Στο: *Bulletin of Mathematical Biology* 68 (2006), σσ. 1601–1623.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

- Άγαρ, 230
- Αδιαστατοποίηση, xxi, 107, 108, 115–117, 125, 147, 148, 153, 154, 157, 168, 169, 175, 185
- αλγόριθμος, 116, 168, 175
- Ακολουθία
- Fibonacci, xix
- ιδιοσυναρτήσεων, 251, 259
- ομοιόμορφα φραγμένη, 252
- ιδιοτιμών, 251, 259
- γνησίως αύξουσα, 251
- κάτω φραγμένη, 251
- συνόλων
- γνησίως αύξουσα, 228
- καλύπτουσα, 228
- Αλγόριθμος
- αδιαστατοποίησης, 97, 115, 116, 168, 175
- μεθόδου Faedo-Galerkin (ή αποτύπωσης της λύσης σε μορφή σειράς), 258, 259
- συναρμογής, 163, 164
- υποβιβασμού διάστασης, 75–77, 94, 96
- υπολογισμού του Γ της συνθήκης μη εκφυλισμού, 91
- Αλλαγή μεταβλητής, 75, 76, 91, 93–95, 220, 282
- ανεξάρτητης, 74, 75
- εξαρτημένης, 74, 75
- Αλληλεπίδραση, 33
- Holling
- γενικευμένη, 38
- τύπου I, 35, 36, 38, 44, 50, 100, 136
- τύπου II, 37, 38
- τύπου III, 37, 38
- τύπου IV, 38
- βιοτική, 33, 35, 36
- ζημία, 33, 34
- όφελος, 33, 34
- πληθυσμών, xxi, 27, 33, 43
- ρυθμός, 35
- συνεισφορά, 33
- χωρίς επίδραση, 33
- Αλληλοπάθεια, 35
- Αμοιβαιότητα, 34
- Ανάπτυγμα Taylor, 39, 109, 110
- Ανάκλαση, 256
- Ανάλυση
- Fourier, 229, 243, 249
- Αριθμητική, xxii
- ασυμπτωτική, 2, 97, 111
- αυτόνομου ΠΑΤ, 23
- Γεωμετρική, 59
- διακλάδωσης, 65, 70, 78, 82, 122, 176, 178, 179, 187, 189, 190
- ευστάθειας, xxi, 2, 47, 50, 63, 81, 104, 121, 145, 170, 175, 186
- ασυμπτωτικής, 18
- αυτόνομου ΠΑΤ, 11, 27, 38, 43
- γραμμική, 64, 81, 83, 104, 122, 187
- Εφαρμοσμένη, 160
- Μαθηματική, xxii
- Μιγαδική, 59
- ολική ασυμπτωτική, 2
- ποιοτική, 19, 31, 80
- Πραγματική, 243, 261
- Συναρτησιακή, 250
- Αναρρώσας/διαγραμμένος, 98, 100, 119
- Ανισότητα Gronwall, 4, 6

- Ανιχνεύσιμος πληθυσμός, 220–222
- Ανοσία, 98
- ατελής, 98
 - ισόβια, 100
 - παθητική
 - βρεφική, 98
- Ανταγωνισμός, 34
- διαειδικός, 35
 - ενδογενής, 29
 - ενδοειδικός, 35
 - κατανάλωσης, 34
 - με δράση ουσιών (χημικός), 34
 - με επαφή, 34
 - παρεμβολής, 34
 - υπεραύξησης, 34
 - χωροκρατικός, 34
- Ανταγωνιστικός αποκλεισμός (ή νόμος Gause), 34
- Αντιβιόγραμμα, 230
- Αντίδραση, 203
- βιοχημική (βλ. “Βιοχημική αντίδραση”), 134
 - ενζυμική (βλ. “Ενζυμική αντίδραση”), 37, 134
 - χημική (βλ. “Χημική αντίδραση”), 36
 - χημική (βλ. “Χημική αντίδραση”), xxii
- Αντιδρών, 133–136, 139, 203
- Αντιστροφή χρόνου (βλ. “Χρόνος: αντιστροφή”), 4
- Απλοποίηση Lyapunov-Schmidt, 65, 71, 75, 90, 94, 122
- Απόκριση
- ανοσολογική, 98, 99
 - συναρτησιακή (βλ. “Συναρτησιακή απόκριση”), 35
- Απορροή, 171, 192
- Απόσβεση, 125, 289
- Αριθμητική
- επίλυση, 51, 69, 83–88, 111, 116, 126, 158, 160, 173, 174, 177, 182, 191, 193–195, 222–224, 239–241, 258, 278, 279
 - κατασκευή, 183–185
- Αριθμός αναπαραγωγής
- βασικός (\mathcal{R}_0), 108
 - δραστικός/ενεργός/αποτελεσματικός (\mathcal{R}_e), 109, 126
- Αρχή
- Volterra, 51
 - αναλλοιώτου (βλ. “Θεώρημα LaSalle”), 58, 66
 - ελαχίστου, xxii, 229, 232, 260, 265–268, 288
 - ισχυρή, 260
 - επαλληλίας, 2
 - μεγίστου, xxii, 229, 260, 261, 288, 289
 - ισχυρή, 260
 - πολλαπλασιαστική, 258
- Ασθενώς διασυνδεδεμένα
- παραβολικά συστήματα ανισώσεων, 288
- Αστάθεια
- Turing, 288
 - ασυμπτωτική
 - λύσης ΠΑΣΤ, 288
 - λόγω διάχυσης (βλ. “Turing”), 288
 - ολικής λύσης ΠΑΣΤ, 288
 - σημείου ισορροπίας (σ.ι.), 18, 25, 27, 32, 39, 47, 58, 64, 65, 82–84, 104, 106, 107, 122, 123, 170, 175, 176, 186, 187, 191, 194
- Ασύμπτωτη, 274
- Αύξηση
- βακτηριακή, 37
 - εκθετική, xix, 12, 13, 235
 - μηχανισμός, 14
 - πληθυσμού, 13, 234, 237, 239–241
- Αυτοκατάλυση, 167, 168, 171, 173, 181, 182, 192
- Αυτοκαταλύτης
- εισροή, 181
 - φθορά, 168, 171, 173, 181, 182, 192
- Βάση, 249, 251, 254, 257, 258
- ορθοκανονική, 246, 251–254, 257–259
 - άπειρη, 246
 - αριθμίσμη, 246
 - κοινή, 248
 - ομαλή, 252
 - χωριζομένων μεταβλητών, 258
- Βήμα
- χημικής αντίδρασης (βλ. “Χημική αντίδραση: στάδιο”)
 - μη καταλυόμενο, 171, 182, 192
 - χημικής αντίδρασης (βλ. “Χημική αντίδραση: στάδιο”), 136
 - αργό, 139
 - γρήγορο, 139
 - μη καταλυόμενο, 182
 - χρονικό, 200
 - χωρικό, 200
- Βιοθέση, 34

- Βιοκατάλυση, 141
- Βιοκαταλύτης, 134, 135
- Βιοχημική
αντίδραση, 134
 βασικό μοντέλο ενζυμικής κατάλυσης, 141
 βιοκαταλύτης, 134, 135
 ενζυμική (βλ. “Ενζυμική αντίδραση”), 37
 ένζυμο, 134, 141, 143, 146
 μηχανισμός, 138, 141, 143
 στάδιο, 141
 σταθερά Michaelis-Menten, 142
 σταθερά Van Slyke-Cullen, 142
 σταθερά διάστασης συμπλόκου, 141
 σύμπλοκο υποστρώματος-ενζύμου, 141, 143
 υπόστρωμα, 37, 134, 141, 143, 152, 155
 χρονική κλίμακα, 141
- εξίσωση
 προσέγγιση ελεύθερου υποστρώματος, 152, 155
 προσέγγιση ολικού υποστρώματος, 152, 155
- κινητική, 199
- ουσία
 διάλυμα, 134
 διαλύτης, 134
- Γεωμετρία
 μορφοκλασματική, 24
 ορθογώνια, 258
 παραβολικού συνόλου, 260
- Γινόμενο
 εσωτερικό, 179, 181, 246, 247, 250
 κατά Hadamard, 204
- Γραμμή φάσης, 18
- Γραμμικοποίηση, xxi, 27, 38–40, 47, 50, 55, 63, 64, 81, 82, 121, 122, 275, 276, 284
- Διάγραμμα
 διακλάδωσης, 18, 65, 70, 72–74, 76, 84, 90–92, 122, 123, 125, 277
 ροών, 44, 50, 51, 101, 120
 φάσης, 18, 48, 52, 55, 57, 69, 85–88, 104, 105, 107, 112, 167, 174, 183–185
- Διαγραμμένος/αναρρώσας, 98, 100, 119
- Διαγωνιοποίηση
 πραγματική (“κατά blocks”) πίνακα Jacobi, 65, 75, 92, 94, 122
- Διακλάδωση, xxi, 70–72, 75–77, 82, 89, 90, 94, 96, 122, 179, 181, 191, 288
 Andronov-Hopf (βλ. “Hopf”), 89
 Hopf, xxi, 70, 79, 83, 84, 89, 91, 93, 96, 177, 187, 288
 κατάλογος, 90
 τυποποιημένη, 90, 93
 υπερκρίσιμη, 90, 178, 182, 187, 189
 υποκρίσιμη, 96, 187
 Poincaré-Andronov-Hopf (βλ. “Hopf”), 89
 από κλειστή τροχιά, 70
 από σημείο ισορροπίας (σ.ι.), 61, 70, 79
 γένεσης οριακού κύκλου (βλ. “Hopf”), 89
 διακρίσιμη, 65, 73–75, 122, 277
 δικρανική, 72, 73, 75
 κλάδος, 74, 75
 πτυχή, 72, 74, 75
 σταθερής κατάστασης, 61, 64, 65, 70, 71, 74, 75, 77, 78, 84, 89, 90, 122, 277
 ύπαρξη, 71, 72, 74–78
 τοπική (βλ. “από σημείο ισορροπίας”), 70
 τυποποιημένη, 70, 72, 74, 84, 89, 90
 υπερκρίσιμη, 70, 74, 83, 84, 90, 94, 96, 177, 190
 υποκρίσιμη, 70, 74, 83, 90, 94, 177
- Διακρίνουσα, 207
- Διακριτοποίηση, xxi, 212
- ΠΑΣΤ, 199, 212
- ΠΑΤ, 212
 μέσω της μεθόδου Euler, 11, 22, 212
 διαφορικής εξίσωσης, 22
 υψηλότερης τάξης διαφορίσεων, 212
- Διάλυμα, 134
- Διαλύτης, 134
- Διαμέριση, 212, 244
- Διάνυσμα
 εφαπτόμενο, 181
 κάθετο, 24, 179
 εξωτερικό, 24, 202, 204, 211, 232, 260, 261, 265–268, 288
 εσωτερικό, 24, 190, 192, 196
- Διάρκεια μολυσματική/νοσήματος, 100, 120, 125
- Διάστημα, 2, 3, 5–7, 11–13, 15, 16, 20, 30, 36, 45, 62, 80, 101, 102, 108, 115, 116, 120, 134, 135, 143–145, 148, 154, 168, 169, 173, 175, 183, 185, 200, 203–205, 218, 222, 282, 283
 ανοικτό, xxii, 5, 6, 244, 280
 αξιοπιστίας, 13
 εμπιστοσύνης, xx
 ένωση, 258
 κλειστό, 258

- από τα αριστερά, 103, 104, 169
 συμπαγές, 244
 ύπαρξης λύσης, 5
 φραγμένο, xxii, 244, 258, 280
- Διαταραχή, 18, 70, 149
- Διαφορικό, 39
 γραμμικό, 209
- Διαφορισμότητα λύσης, 9
- Διάχυση, xxii, 199–201, 206, 207, 213, 288
 ροή, 203, 289
- Διαχωρισμός οικοθέσης, 34
- Διεύθυνση ροής, 18
- Δυναμική πολλών πληθυσμών, xxi, 33, 289
- Εισβολή, 215
- Εισροή, 138, 168, 173, 181, 182, 192
- Εκμετάλλευση, 34
- Έκρηξη λύσης, 6, 16, 17, 20, 22, 32, 62, 63, 80,
 265, 268, 289
- Εκροή, 138, 171
- Εκτεθειμένος, 98
- Εκτίμηση
 Kermack-McKendrick, 109
 δεύτερη, 111
 πρώτη, 109–111
 αναλυτική, 115
 αριθμητική, 115
- Ελκυστής, 18, 84, 182
- Έλλειψη, 207
- Ενέργεια
 κινητική, 135
 ολική, 55
- Ενδημικότητα, 119, 124
- Ενζυμική
 αντίδραση, 134, 141, 142, 147, 152
 κινητική (βλ. “Κινητική ενζυμικής
 αντίδρασης”), 141
 ταχύτητα, 141, 152
 κατάλυση, xxii, 133, 141
- Ενζυμική αντίδραση
 ρυθμός, 37
- Ένζυμο, 134, 141, 143, 146
- Εξάρτηση
 βασικών παραμέτρων από ηλικία ατόμων, 98
 χωρική, 289
- Εξάρτηση λύσης
 διαφορίσιμη
 από παράμετρο, 69, 70
 από τα αρχικά δεδομένα, 4, 70
 από την f , 70
- ομαλή
 από παράμετρο, 71, 89, 90, 149
 από τα αρχικά δεδομένα, 45
 από την εξίσωση, 9
- στάσιμης
 από παράμετρο, xxii
- συνεχής
 από παράμετρο, 2, 61, 64, 69, 70, 149, 281
 από τα αρχικά δεδομένα, xxi, 2, 4, 8, 16,
 22, 30, 33, 45, 46, 62, 70, 80, 102, 104,
 121, 145, 169, 175, 186, 211, 212, 231,
 242, 265
 από τα δεδομένα, 227, 280
 από τα συνοριακά δεδομένα, 212
 από την f , 8, 70
 από την αρχική συνάρτηση, 216, 217, 231,
 233, 243, 264, 268
 από το t_0 , 8
 από το y_0 , 8
 από τους συντελεστές του παραβολικού
 τελεστή, 212
- Εξαφάνιση πληθυσμού, 67, 234, 235, 237, 240,
 241, 277
- Εξέλιξη, 35, 97–99
- Εξίσωση
 Laplace, 209
 Verhulst (βλ. “λογιστική”), 15, 43
 αντίδρασης-διάχυσης, 203, 284
 μη γραμμική, 288
 αντίδρασης-μεταγωγής-διάχυσης, 203
 διαταραγμένη, 70
 διαφορική, 252
 Bessel, 258
 Hermite, 258
 Legendre, 258
 με υστέρηση (ΔΕΥ), 287, 288
 μη ομογενής, 70
- διαφορών, 23
- διάχυσης (κλασική), 201, 202, 210, 216,
 227, 229, 243
 άπειρη ταχύτητα διάδοσης διαταραχών,
 217, 232
 επίδραση εξομάλυνσης, 217, 231, 280
 ημιγραμμική, xxii
 θεμελιώδης λύση, 227
 λύση σε μορφή σειράς, 229
 λύση σε ολοκληρωτική μορφή, 215
- θερμότητας (βλ. “Εξίσωση διάχυσης”), 210
- κυματική, 210

- γραμμική, 288
- λογιστική, 14, 15, 18, 19, 30, 43, 61
- με επίδραση Allee, 30, 79
- με όρο διάχυσης, 263
- μερική διαφορική (ΜΔΕ) (βλ. “Μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ)”), 199
- μεταγωγής-διάχυσης, 201, 202
- μη γραμμική εξελικτική καλή τοποθέτηση, 289
- συνήθης διαφορική (ΣΔΕ), 1, 3, 12, 20, 23, 33, 78, 134, 138, 141, 144, 152, 197, 199, 210, 287, 288
- Bernoulli, 15
- Riccati, 178
- αυτόνομη, 17, 23
- βαθμωτή, xxi, 17
- διανυσματική, xxi, 4
- λύση, 3
- προσεγγιστική, 150, 151, 154, 155
- τάξη, 17, 249, 250, 287
- χωριζομένων μεταβλητών, 15, 30, 151, 282
- χαρακτηριστική, 40, 52, 252
- πολυωνυμική, 288
- υπερβατική, 288
- χημική (βλ. “Χημική εξίσωση”), 133
- Εξωτερική προσέγγιση (βλ. “Προσέγγιση: εξωτερική”), 162
- Επέκταση, 5
- άρτια, 255, 256
- λύσης
- μεγιστική, 5
- περιοδική
- τελεστής, 247
- συνεχής, 242
- (σχεδόν) περιττή, 255, 256
- Επεκτασιμότητα λύσης, xxi, 1, 2, 4, 5, 45, 102, 104, 121, 169, 175, 186, 211, 263, 264
- Επιβίωση πληθυσμού, 235, 239, 277
- κρίσιμη επιφάνεια, 234
- παράμετροι, 234, 235
- κρίσιμη τιμή, 235
- κρίσιμο μήκος (βλ. “Μήκος κρίσιμο”), 235
- στάσιμη κατάσταση, 234, 240, 277–279
- Επίδημία, 97–100, 107–113, 119
- Επίδραση, 33
- Allee, xxi, 27, 29, 79
- ασθενής, 29, 33
- ισχυρή, 29, 277
- εξομάλυνσης, 217, 231, 280
- Επίπεδο
- κορεσμού (βλ. “Φέρουσα ικανότητα”), 15
- φάσης, 18, 126–129, 194, 195
- Επίπτωση, 100
- Εστία, 55, 56, 64, 83, 125, 167, 170, 176, 178, 187, 189
- ασταθής, 55, 56
- ευσταθής, 55, 56
- Εσωτερική
- πίεση, 203
- προσέγγιση (βλ. “Προσέγγιση: εσωτερική”), 162
- Εσωτερικό
- γινόμενο (βλ. “Τινόμενο: εσωτερικό”), 179
- συνόλου, 131
- Ευάλωτος, 98, 100, 107–109, 119, 136
- Εύρος, 162, 222, 224, 225, 282
- κλίση, 222
- μέγιστο, 283
- πληθυσμού, 221, 222
- Ευστάθεια
- λύσης
- ασυμπτωτική, 288
- ολική ασυμπτωτική, 276, 284
- ολικής ΠΑΣΤ, 288
- στάσιμης, xxii
- οδεύοντος κύματος, 288
- σημείου ισορροπίας (σ.ι.), 18, 24, 25, 27, 32, 39, 47, 48, 55, 58, 63–65, 81–84, 104, 106, 107, 122, 123, 131, 145, 170, 171, 175, 176, 179, 182, 186–188, 194
- ασυμπτωτική, 25, 48, 55, 66, 67, 123, 124, 129, 131, 187
- ολική ασυμπτωτική, 66, 67, 124, 129, 131, 146, 171, 177, 179, 182, 188, 189, 194
- Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, xxii
- Ημιτροχιά
- αρνητική, 24
- φραγμένη, 127, 171, 172
- θετική, 24, 123, 126–129, 170–172, 178
- μη φραγμένη, 171, 172, 177–179, 184, 185, 188
- φραγμένη, 127, 171, 177, 179
- φραγμένη, 171
- Θεμελιώδης λύση της εξίσωσης διάχυσης, 227
- Θεώρημα
- Barbashin-Krasovskii-LaSalle (βλ. “LaSalle”), 58

- Bendixson-Dulac, 132, 188
 Cauchy-Lipschitz, 4, 7
 Četaev, 58, 107
 Green, 132
 Hartman-Grobman, 40
 LaSalle, 58, 66
 Lyapunov, 58
 Lyapunov-Poincaré, 39
 Nagumo, 4, 8
 Osgood, 4, 7, 8
 Peano, 4, 5
 Picard-Lindelöf, 4, 7
 Poincaré, 129, 181
 Poincaré-Bendixson, 123, 124, 127, 146, 171, 177
 Stokes, 132
 αλλαγής μεταβλητής, 220
 αντίστροφης απεικόνισης, 39
 αντιστροφής χρόνου, 4
 απόκλισης, 202
 δεύτερο θεμελιώδες του Απειροστικού Λογισμού, 266
 εξάρτησης λύσης
 από παράμετρο, 70
 από τα αρχικά δεδομένα, 8
 από την f , 8
 από την εξίσωση, 9
 από το t_0 , 8
 επεκτασιμότητας, 4
 μοναδικότητας, 4
 ολικότητας, 4
 ουδού της Επιδημιολογίας, 107, 109
 πεπλεγμένης συνάρτησης, 3, 70, 71, 76, 89
 τοπικής ύπαρξης, 4
 φασματικό
 γενίκευση κλασικού σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, 250
 χωρίου παγίδευσης, 196
- Θεωρία
 Poincaré-Bendixson, xxii, 89, 119, 126
 Γενικευμένων Συναρτήσεων, 219
 ΔΕΥ, 288
 διακλάδωσης, 82, 176, 187, 191, 197
 Hopf, 89
 σταθερής κατάστασης, 64
 Επιλογής
 Τεχνητής, xx
 Φυσικής, xx, 263
 Κατανομών, 205, 219
- Μέτρου Lebesgue, 246, 247
 Ολοκλήρωσης κατά Lebesgue, 246
 Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Διαδικασιών, xxii
 προβλήματος ιδιοτιμών Sturm–Liouville, 249
 ΣΔΕ, 20
 συγκρούσεων, 134
 αποτελεσματικών, 136
 χημικών αντιδράσεων, xxii
 χώρων Sobolev, 205
- Θήκη
 γραμμική πυκνή, 246
- Θήραμα, 29, 34–37, 43–45, 50–52, 67, 79, 136
 Θήρευση, 34, 36, 37
 Θηρευτής, 29, 34–37, 43–45, 50–52, 67, 79, 136
- Ιδιοδιάνυσμα, 54, 65, 75, 94, 122
 μιγαδικό, 92
 μοναδιαίο, 53
 πραγματικό, 95
- Ιδιοσυνάρτηση, 250–254, 257, 259
 ημιτόνου, 254
 πρώτη, 234, 236, 237, 251
 συνημιτόνου, 254
- Ιδιοτιμή, 39, 47, 52, 53, 55, 63, 65, 92, 104, 121, 124, 175, 186, 250, 251, 253, 254, 275
 απλή, 71, 77, 78
 διπλή, 254
 μη μηδενική, 94, 96
 μηδενική, 71, 75, 77, 78, 254
 μιγαδική, 94
 πραγματική, 71, 94, 95
 πρώτη, 251, 275, 284
 φανταστική, 89, 93, 96
- Ισότητα Parseval, 246
- Ίχνος τετραγωνικού πίνακα, 52, 55, 57, 64, 82, 124
- Καλή τοποθέτηση κατά Hadamard, 1, 2, 4, 30, 45, 121, 211, 215–217, 226, 229, 231, 233, 241–243, 263, 264, 268, 280, 281
 μη γραμμικής εξελικτικής εξίσωσης, 289
- Καμπύλη
 C^1 , 59
 C^k , 59
 Jordan, 59
 επιδημιολογική, 110, 111
 κλειστή, 48, 59
 απλή, 59

- κοίλη, 48
- κυρτή, 48
- κυρτοειδής, 36
- μηδενοκλινής, 67, 68, 80, 103, 146, 170, 176, 186
- προσανατολισίμη, 181
- σιγμοειδής, 17, 37
- στάθμης, 48, 51, 104, 105, 225
- τετραγωνική, 207
- Κανόνας
 - αλυσίδας, 9, 47, 58, 76, 266
 - των τριών σημείων, 213
- Κανονικοποίηση, 115, 125
- Καταβόθρα κατανάλωσης πληθυσμού, 202
- Κατάλογος
 - γνωστών διακλαδώσεων
 - Horf, 90
 - σταθερής κατάστασης, 72
- Κατάλυτης, 134
- Κατανομή
 - Dirac, 219
 - Maxwell-Boltzmann, 135
 - πληθυσμού, 217, 236
 - χωρική, 288
- Κατάταξη σημείων ισορροπίας (σ.ι.), 52
- Κατώφλι (βλ. “Ουδός”), 29, 107
- Κέντρο, 47, 55, 56
- Κίνηση
 - Brown, 199
 - ακανόνιστη, 200
 - κατευθυνόμενη, 203
 - μοριακή, 200
 - τυχαία (αμερόληπτη), 201
- Κινητική
 - Michaelis-Menten, 142
 - ενέργεια, 135
 - ενζυμικής αντίδρασης, 141, 142
 - χημικής αντίδρασης, 36, 37, 133, 140, 142, 156, 157, 199, 203
- Κλάδος, 161
 - ασταθής, 90, 122
 - ασυμπτωτικά ευσταθής, 90
 - επιφάνεια, 90
 - ευθύγραμμος, 90
- Κλάση, 100, 107, 120, 125
 - ατόμων, 97
 - ισοδυναμίας, 97, 99
- Κλειστότητα, 24
 - τροχιάς, 48, 59, 130
- Κλίμακα
 - μεγέθους, 114
 - χρόνου, 116, 141–143, 147, 151–153, 162, 163, 168
 - εγγενής, 99, 115, 116
 - ενδιάμεση, 163
- Κόμβος, 64, 83, 170, 176, 187
 - ασταθής, 53
 - αστεροειδής, 54
 - ασταθής, 54
 - ευσταθής, 54
 - εκφυλισμένος (βλ. “νόθος”), 54
 - ευσταθής, 53
 - νόθος, 55, 170
 - ασταθής, 54, 55
 - ευσταθής, 54, 55
- Κορεσμός, 36
- Κριτήριο
 - Dirichlet-Dini, 243
 - Dirichlet-Jordan, 244
 - Koch, 98
 - αρνητικό Bendixson-Dulac, 119, 123, 129, 131, 132, 146, 171, 172, 177, 181
- Κρούσμα, 12
- Κύμα
 - επίπεδο, 288
 - οδεύον, 288
 - ευστάθεια, 288
- Κύμανση
 - ολική, 244
 - φραγμένη, 244
- Κυματικό μέτωπο
 - εξάπλωσης πληθυσμού, 222
 - ταχύτητα, 288
- Λογισμός
 - Απειροστικός, xix
 - Στοχαστικός, 199
- Λόγος συνάρτησης προς τη μέση τιμή της, 228
- Λοίμωξη
 - ενεργή, 98
 - κλινική, 98
 - λανθάνουσα, 98
 - μεταδοτική, 98
 - μολυσματική, 98
 - οξεία, 98
 - υποκλινική, 98
 - υποξεία, 98
 - χρονοδιάγραμμα, 99
 - χρόνια, 98

Λύση

ασταθής, 288
 ασυμπτωτικά ευσταθής, 288
 διαφορίσιμη, 9
 ειδική, 13
 εκρηγνύομενη, 6, 16, 17, 20, 22, 32, 63, 80, 265, 268
 θεμελιώδης της εξίσωσης διάχυσης, 227
 ισορροπίας (σ.ι.), 18, 24
 κυματικής εξίσωσης, 288
 μεγιστική, *xxi*, 1, 2, 5, 6, 16, 20, 22, 23, 30, 33, 45, 46, 48, 62, 80, 84, 102–104, 121, 127, 145, 162, 163, 169, 170, 175, 186, 196, 211, 212, 263–265, 267, 280
 μη αρνητική, 2, 63, 268
 μη επεκτάσιμη (βλ. “Λύση: μεγιστική”), 5
 μη φραγμένη, 182
 μοναδική, *xxi*, 2, 4–9, 12, 16, 20–23, 30, 33, 45, 46, 62, 84, 102, 104, 121, 128–130, 145, 162, 163, 169, 175, 186, 196, 211, 212, 216, 217, 226, 227, 231, 233, 243, 249, 264, 268, 271–274, 276, 280, 281, 283
 μόνιμης κατάστασης, 24
 ολική, *xxi*, 1, 2, 4, 5, 12, 20, 32, 46, 48, 59, 62, 102–104, 121, 128, 131, 169, 175, 186, 212, 216, 217, 226, 227, 231, 233, 242, 243, 265, 267, 268, 276, 281, 284, 289
 αρνητικά, 5, 24, 62, 127, 129, 130, 171, 172, 196
 ασταθής, 288
 ευσταθής, 288
 θετικά, 2, 5, 20, 24, 32, 62, 80, 104, 121, 127, 129, 130, 145, 162, 163, 169, 175, 186, 196, 211, 268
 ομαλή, *xxi*, 1, 9, 12, 20, 22, 30, 33, 45, 46, 62, 102–104, 121, 145, 169, 175, 186, 216, 217, 231–233, 243, 264, 268, 280
 περιοδική, *xxi*, *xxii*, 43, 48, 50, 59, 70, 84, 132, 167, 178, 181, 189, 196
 γραμμικού συστήματος, 55
 προσεγγιστική, 116, 125, 152, 155, 164, 258
 συναρμογή, 163
 τοπικά, *xxii*, 133, 162, 163
 ΣΔΕ, 3
 σε μορφή
 κλειστή, 2, 16, 18, 20, 22, 30, 47
 ολοκληρωτική, 215

πεπλεγμένη, 47, 62, 104, 283

σειράς, 229, 258

σταθερή, 12, 16, 66

στάσιμη, 212, 269, 270, 274–277, 281–284

αναγκαία συνθήκη, 281

ασταθής, 238, 275–277, 284

ασυμπτωτικά ευσταθής, 238, 275, 276, 284

ευσταθής, *xxii*, 275–277, 281, 284

κοίλη, 278

κυρτή, 274

μεμονωμένη, 284

μη σταθερή, 270–277, 282, 283

ολικά ασυμπτωτικά ευσταθής, 276

σταθερή, 270, 274, 275, 282

τετριμμένη, 278

χαρακτηρισμός ευστάθειας, 275

τοπική, 5

φραγμένη, 47, 48, 62, 216, 227, 268, 276, 284

Μέθοδος

Euler, 11, 22, 212

Faedo-Galerkin, 258, 259

άμεση ή δεύτερη Lyapunov, 47, 50, 55, 58, 124

διαταραχών, 70, 142

ιστού της αράχνης, 14, 15, 22

προσεγγιστικής επίλυσης εξισώσεων, 70

πρώτη Lyapunov (βλ. “Γραμμικοποίηση”), 55

σύγκρισης, 7, 62, 63

χωριζομένων μεταβλητών, 259

Μείωση

εκθετική, 12

μηχανισμός, 14

Μελέτη

ασυμπτωτική, 221, 233, 263

ποιοτική, 30, 31, 237

ΠΑΣΤ, 263, 269, 280, 281, 284

ΠΑΤ, 281, 284

Μέλλον (βλ. “Χρόνος: θετικός”), 4

Μερική διαφορική εξίσωση (ΜΔΕ), 199, 205, 206, 210, 213

γραμμική, 201

γραμμική ομογενής δεύτερης τάξης ταξινόμηση (δύο διαστάσεων), 199, 206, 207

ταξινόμηση (πολλών διαστάσεων), 199, 208

- ελλειπτική, 207, 209
 παραβολική, 201, 207, 210
 τάξη, xxii, 201, 206
 υπερβολική, 207, 210
- Μέση
 τιμή, 50, 51, 227, 228, 256
 ασυμπτωτική συμπεριφορά, 236, 237
 χωρική, 219
- Μέσος
 αριθμός απογόνων, 14
 όρος παραγωγής νέων οργανισμών, 14
- Μεταβλητή, 3, 13, 36, 208, 212, 281
 αδιάστατη, 107, 108, 115, 116, 126, 147, 168, 175, 185
 αλλαγή, 75, 76, 91, 93–95, 220, 282
 ανεξάρτητης, 74, 75
 εξαρτημένης, 74, 75
 ανεξάρτητη, 74, 75, 94, 108, 115–117, 206, 212, 229
 διακριτή, 23
 εξαρτημένη, 33, 67, 74, 75, 89, 94, 101, 107, 116, 117, 147, 152, 159, 168, 175
 διαφορίσιμη, 206
 φράγμα, 144, 145, 147
 πολυδιάστατη, 7
 πυκνότητας, 36
 συγκέντρωσης, 36
 σύγκριση, 114
 χρονική, 259
 τοπική, 289
 χωρική, 259
 τοπική, 289
- Μεταβολικό μονοπάτι, 138, 167, 173
- Μεταβολισμός, 134, 167
- Μεταγωγή, 201, 203
 ροή, 203
- Μετασχηματισμός
 αντιστροφής χρόνου, 4, 13, 22, 33
 μεταφοράς, 39, 229
 χρόνου, 20, 23
 συντεταγμένων, 207
- Μέτρο Lebesgue, 247
- Μηδενοσύνολο, 24, 58, 247
 πολλαπλότητας, 24
 σχετικά κλειστό, 204, 210, 211, 261
- Μήκος κρίσιμο, 235, 236, 277
- Μηχανισμός
 Lotka (χημικός)
 δεύτερος, 44, 171
 πρώτος, 44, 167, 168
 βιοχημικής αντίδρασης (βλ. “Βιοχημική αντίδραση: μηχανισμός”), 138
 εκθετικής
 αύξησης, 14
 μείωσης, 14
 χημικής αντίδρασης (βλ. “Χημική αντίδραση: μηχανισμός”), 138
- Μολυσμένος/μολυσματικός, 98, 100, 107–110, 119, 120, 136
- Μοναδικότητα λύσης, xxii, 2, 4–9, 12, 16, 20–23, 30, 33, 45, 46, 62, 80, 84, 102, 104, 121, 127–130, 145, 162, 163, 169, 175, 186, 196, 211, 212, 216, 217, 226, 227, 231, 233, 243, 249, 264, 268, 271–274, 276, 280, 281, 283
- Μονοπαραμετρική οικογένεια
 αυτόνομων ΠΑΤ, 70–72, 74–78, 89–91, 93, 94, 96
 τυποποιημένη, 71, 72, 74, 89, 90
 υποβιβασμένη, 71, 72, 76, 77, 90, 96
 εξισώσεων, 75, 90
 λύσεων, 76, 95
- Μοντέλο, 1, 2, 12, 13, 33, 51, 168, 204, 210
 Brusselator, 192, 193
 Fisher ή/και
 Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (βλ. “λογιστικό με όρο διάχυσης”), 263
 ημιγραμμικό, 264
 Higgins-Sel’kov, 167, 173
 Kermack-McKendrick, 98
 Lotka-Volterra, 43
 βασικό, xxii, 43
 λογιστική παραλλαγή του βασικού, xxii, 61
 λογιστική παραλλαγή του βασικού με επίδραση Allee, xxii, 79
- Malthus (βλ. “εκθετικό”), 11
- Meyer, 192
- Schnakenberg, 181
- Sel’kov, 167, 182
- SIR
 βασικό, xxii, 97, 98, 100, 119
 βασικό με δημογραφικούς όρους, 119, 124
 παραλλαγές, 98
- Skellam (βλ. “εκθετικό με όρο διάχυσης”), 215, 229
- Turing, 289
- Verhulst (βλ. “λογιστικό”), 11, 27
 αλληλεπίδρασης πληθυσμών, 43

- αυτοκατάλυσης, xxii, 167, 168
 γραμμικό, 2, 27
 διακριτό, 23
 Malthus (βλ. “εκθετικό διακριτό”), xxi
 Verhulst (βλ. “λογιστικό διακριτό”), xxi
 διάχυσης, 199, 200
 δομημένο ως προς την ηλικία, 98
 δυναμικό
 ενός πληθυσμού, 11, 27
 πολλών πληθυσμών, xxi, 27, 33, 43, 79
 εκθετικό, 11, 13, 17, 215, 264
 αύξης, xix, 13
 διακριτό, xxi, 13–15
 με όρο διάχυσης, xxii, 215, 229
 συνεχές, xxi, 12
 ενδημικό, 98
 ενζυμικής κατάλυσης
 βασικό, xxii, 133, 141
 επιδημικό, 98
 επιδημιολογικό, xxi, 97, 98, 119
 επίδρασης Allee, xxi
 ασθενούς, 29, 33
 ισχυρής, 29, 277
 ευλογιάς, xix
 θηρευτή-θηράματος, 43
 κλάσεων, xxi, 97, 98, 119
 κλειδαριάς και κλειδιού, 141
 λογιστικό, xix, xxi, 11, 13, 17, 27, 30
 διακριτό, 22
 με επίδραση Allee, 29
 με όρο διάχυσης, xxii, 263, 288
 μη γραμμικό, 2
 μη τοπικό, 289
 πολλών πληθυσμών, xxi, 61
 χημικό
 αυτοκατάλυσης, 43
- Μορφή**
 αδιάστατη, 169
 απόκλισης διαφορικού τελεστή, 208, 209
 κανονική, 207
 Poincaré, 71, 89
 ελλειπτική, 207
 πίνακα Jacobi, 90, 91
 παραβολική, 207
 υπερβολική, 207
 κλειστή
 λύσης, 2, 16, 18, 20, 22, 30, 47
 μη απόκλισης διαφορικού τελεστή, 208, 209
 πεπλεγμένη
 λύσης, 47, 62, 104, 283
- ΣΔΕ**
 γενική, 3
 λυμένη, 3
 σειράς Taylor, 70
- Μοτίβο, 288**
 απουσία, 221, 227, 228, 237, 238, 240, 277
 δείκτης, xxii, 215, 219–221, 227, 228
 αδιάστατος, 227
 ασυμπτωτική συμπεριφορά, 236, 237
 είδος, 219, 227
 μελάγχρωσης, 289
 παρουσία, 219, 220, 227, 228, 236, 237,
 240, 277, 288
 περιοδικό, 167
- Νόμος**
 Fick
 δεύτερος, 202
 πρώτος, 202, 203
 Fourier, 202
 Gause (ανταγωνιστικός αποκλεισμός), 34
 Malthus, 12, 14
 Ohm, 202
 Volterra, 50
 δεύτερος, 50
 πρώτος, 50
 τρίτος, 51
 διατήρησης της ύλης (μάζας), 133, 135,
 139, 202
 δράσης της μάζας, 36, 100, 136, 139
 πληθυσμιακής μεταβολής, 14
 της ταχύτητας, 139
- Νόρμα, 212, 247**
 επαγόμενη, 246, 247, 250
 ευκλείδεια, 212
 χώρου Banach, 212
- Νόσημα**
 λοιμώδες μολυσματικό, 97–100, 110–113,
 119
 ενδημικό, 119, 124
- Νοσών, 97**
Ξενιστής, 34, 98
Οικοθέση, 34
 διαχωρισμός, 34
Οικολογικός θάκος, 34
Οικοσύστημα, 33, 36, 44
Οικότοπος, 215
 άπειρος, 215
 απομονωμένος, 230, 277

- με αφιλόξενο σύνορο, 230, 235, 236, 277
πεπερασμένος, 216, 229
- Ολικό
ελάχιστο, 161, 189
μέγιστο, 48, 66, 81
- Ολικότητα λύσης, 4, 5, 12, 20, 46, 48, 62,
129–131, 145, 162, 163, 196, 212, 216,
217, 226, 227, 231, 233, 242, 243, 265,
267, 268, 276, 281, 284
- αρνητική, 5, 62, 127, 129, 130, 171, 172,
196
- θετική, 2, 5, 20, 32, 62, 80, 104, 121, 127,
129, 130, 145, 162, 163, 169, 175, 186,
196, 211, 268
- Ομαλότητα λύσης, 1, 9, 12, 16, 20, 22, 30, 33, 45,
46, 62, 80, 102–104, 121, 145, 169,
216, 217, 231–233, 243, 264, 268, 280
- Όμικρον
κεφαλαίο (O), 111
πεζό (ο), 111
- Ομοιομορφισμός, 40
- Οργανισμός, 134
- Οριακό στρώμα, 162
- Οριακός κύκλος, *xxi*, 79, 84, 128, 167, 171, 172,
184, 190, 191, 194, 197
- ασταθής, 85, 86, 90, 96
- εξωτερικός, 84
- ασταθής, 84
- ευσταθής, 84
- εσωτερικός, 84
- ασταθής, 84
- ευσταθής, 84
- ευσταθής, 84, 86, 88, 90, 96, 179, 181, 182,
184, 191, 194, 197
- εξωτερικά, 191, 197
- εσωτερικά, 190, 191, 197
- ημιευσταθής, 87
- Ορίζουσα
τετραγωνικού πίνακα, 40, 55, 57, 64, 82,
124, 176, 186, 253
- Όριο
κοινό από συνθήκη συναρμογής, 151, 163
- πλευρικό, 244
- σειρά Fourier, 243
- Όρος
δημογραφικός, 99, 119, 124
- διάχυσης, *xxii*, 215, 229, 263, 264, 288
- μη γραμμικός, 263
- μη τοπικός, 289
- περιγραφής
αλληλεπίδρασης πληθυσμών, 33
- δυναμικής πληθυσμού, 33
- Ουδετερότητα, 35
- Ουδός, 29, 30, 107, 109, 112, 113, 124, 220,
224, 288
- Πανδημία, 97
- Παραβολή, 207
- Παράγοντας
μετάδοσης, 98
- παθογόνος, 98, 99
- Παράγωγος Lie/τροχιακή/υλική, 58
- Παράμετρος
αβιοτική, 34
- βιοτική, 34
- δημογραφική, 98, 99
- επιβίωσης, 29
- Παρασιτισμός, 34
- Παράσιτο, 34
- βιοτροφικό, 34
- παθογόνο, 34
- Παρασιτοειδές (ή σαπρόφυτο), 34
- Παρελθόν (βλ. “Χρόνος: αρνητικός”), 4
- Πεδίο
έλξης, 58
- διευθύνσεων, 67, 68, 80, 103, 104, 124, 145,
146, 169, 170, 175, 176, 178, 186
- κατεύθυνση, 48
- ορισμού, 4, 8, 24, 104, 145, 169, 170, 204
- Περιοδική λύση (βλ. “Λύση: περιοδική”), *xxi*
- Περίοδος, 50, 51, 55, 59, 125, 243–245, 247
- ελάχιστη θετική, 59
- Περιοχή
ανοικτή, 38–40, 55, 58, 59
- επικάλυψης (βλ. “Στρώμα: επικάλυψης”),
162
- Πηγή παραγωγής πληθυσμού, 202
- Πιθανότητα
επιβίωσης
απογόνων, 14
- οργανισμού, 14
- κίνησης, 200
- Πίνακας
Jacobi, 38, 39, 47, 55, 63, 64, 71, 75, 76, 81,
82, 89–91, 93–95, 104, 121, 145, 170,
175, 176, 186
- κανονική μορφή, 90, 91
- πραγματική (“κατά blocks”)
διαγωνιοποίηση, 65, 75, 92, 94, 122

- διαγώνιος, 53
 μη διαγώνιος, 54
 μη ιδιάζων, 52
 ομοιότητας, 75
 πραγματικής, 94
 πραγματικός, 94, 95
 τετραγωνικός
 ίχνος, 52, 55, 57, 64, 82, 124
 αντιστρέψιμος, 208, 210
 ορίζουσα, 40, 55, 64, 82, 124, 176, 186, 253
- Πολλαπλότητα, 24, 181, 204, 210, 211, 261
- Πολυώνυμο
 Taylor, 9
 χαρακτηριστικό, 40, 52
- Ποσότητα
 Γ, 83, 84, 89, 91, 93
 πόρων, 34
 χαρακτηριστική αναφοράς, 115–117, 168
- Πρόβλημα
 Cauchy (βλ. “Πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)”), 1
 αντίδρασης-διάχυσης, 288
 αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ),
 xxii, 203, 206, 288
 ασθενής διαφοράση, 205
 ασυμπτωτική μελέτη, 221, 233
 ασυμπτωτική συμπεριφορά λύσης, 233
 αυτόνομο, xxii, 205, 211, 212, 263, 280, 281
 γνήσιο, xxii, 205, 210, 216, 229, 230, 241, 258, 260, 263, 264, 280, 281
 γραμμικό, 205, 215, 229, 241, 258, 260
 γραμμικοποιημένο, 275
 διακριτοποίηση, 212
 έκρηξη λύσης, 265, 268
 εκφυλισμένο, xxii, 210, 215–217, 225
 εξάρτηση λύσης, 211, 212, 216, 217, 227, 231, 233, 243, 264, 265, 268, 280, 281
 εξίσωση διάχυσης, 217, 231, 232
 επεκτασιμότητα λύσης, 211, 263, 264
 ευστάθεια λύσης, 275
 ημιγραμμικό, 205, 280
 ημιγραμμικό μοντέλο Fisher, 264
 καλά τοποθετημένο, 211, 215–217, 226, 229, 231, 233, 241–243, 263, 264, 268, 280, 281
 λύση (βλ. “Λύση: ΠΑΣΤ”), 205
 μεταβολική διατύπωση, 205
 μη γραμμικό, 260, 263, 280
 μοναδικότητα λύσης, 211, 212, 216, 217, 226, 227, 231, 233, 242, 243, 264, 268, 271–274, 276, 280, 281, 283
 ολικότητα λύσης, 211, 212, 216, 217, 226, 227, 231, 233, 242, 243, 265, 267, 268, 276, 281, 284
 ομαλότητα λύσης, 216, 217, 231–233, 243, 264, 268, 280
 ομογενές, 205
 πρόσημο διαφοράσης ως προς εξωτερικό κάθετο διάνυσμα συνόρου, 232, 260, 265–268, 275, 288
 πρώτη ιδιοτιμή, 275
 στασιμότητα λύσης, 212
 σύγκριση λύσεων, 265
 ύπαρξη λύσης, 211, 216, 217, 226, 227, 231, 233, 242, 243, 264, 268, 277, 280, 283
 φάση μελέτης, 206, 217, 225, 233, 268
 αρχικών τιμών (ΠΑΤ), xxi, xxii, 1–3, 7, 12, 15, 23, 30, 45, 53, 62, 80, 94, 101, 111, 115, 116, 120, 121, 143, 144, 152, 155, 168, 173, 183, 199, 210, 271, 277, 284, 287, 288
 αδιάστατο, 107, 108, 125, 147, 148, 154, 168, 169, 175, 185
 απλό, 52
 ασυμπτωτική συμπεριφορά λύσης, 18
 αυτόνομο, xxi, 11, 23, 38–40, 55, 57–59, 70–72, 74–78, 89–91, 93–96, 126–132, 196, 211, 281
 γραμμικό, 2, 12, 27, 39, 43
 γραμμικοποιημένο, 27, 29, 32, 38–40
 διακριτό, 23
 διαταραγμένο, 149
 διαφοριστικότητα λύσης, 9
 ειδική λύση, 13
 έκρηξη λύσης, 6, 16, 17, 20, 22, 62, 63, 80
 εξάρτηση λύσης, xxi, 2, 4, 8, 9, 22, 30, 33, 46, 61, 62, 64, 69–71, 80, 89, 90, 102, 104, 121, 145, 169, 175, 186, 212
 επεκτασιμότητα λύσης, xxi, 1, 2, 4, 5, 30, 45, 102, 104, 121, 127, 169, 175, 186
 καλά τοποθετημένο, 1, 2, 4, 22, 30, 45, 102, 104, 121, 169, 175, 186, 211
 μεγιστική λύση, 5, 6, 20, 22, 23
 μη γραμμικό, 2, 39
 μη επεκτάσιμη λύση (βλ. “Λύση:

- μεγιστική”), 5
 μοναδικότητα λύσης, xxi, 2, 4–9, 12, 16, 20–23, 30, 33, 45, 46, 62, 80, 84, 102, 104, 121, 126–130, 145, 162, 163, 169, 175, 186, 196, 249
 μονοπαραμετρική οικογένεια, 70–72, 74–78, 89–91, 93–96
 ολικότητα λύσης, xxi, 1, 2, 4, 5, 12, 20, 46, 48, 62, 80, 84, 102–104, 121, 127, 129–131, 145, 162, 163, 169, 175, 186, 196, 211
 ομαλότητα λύσης, xxi, 1, 9, 12, 20, 22, 30, 33, 45, 46, 62, 80, 102–104, 121, 145, 169, 175, 186
 σταθερή λύση, 12, 16
 σύνολο τιμών, 16
 τυποποιημένη μονοπαραμετρική οικογένεια, 72, 74, 89
 ύπαρξη λύσης, xxi, 2, 4, 5, 7–9, 22, 30, 33, 46, 62, 80, 102, 104, 121, 126–130, 145, 162, 163, 169, 175, 186, 196, 249
 υποβιβασμένη μονοπαραμετρική οικογένεια, 72, 76, 77, 90, 96
 φάση μελέτης, 1–3, 22, 32, 80, 101, 121, 169, 175, 186
 γραμμικοποιημένο, 47
 διακριτό δυναμικό, 13
 διάχυσης, 199, 203, 277
 ελλειπτικό, 207, 210
 εξελικτικό, 1
 ιδιοτιμών Sturm–Liouville, 243, 248, 249, 254, 258, 284
 ιδιάζον, 257–259
 ιδιοσυνάρτηση, 250
 ιδιοτιμή, 250
 κανονικό, 257, 258
 περιοδικό, 254
 χωριζόμενη συνοριακή συνθήκη, 250
 παραβολικό, 207
 συνοριακών τιμών (ΠΣΤ)
 γραμμικό, 249
 εκφυλισμένο, 210
 μοναδικότητα λύσης, 249
 ύπαρξη λύσης, 249
 υπερβολικό, 207
 Προσανατολισμένο σύμπλεγμα τροχιών, 171, 172, 177, 188
 ετεροκλινών, 123, 129–132
 Προσανατολισμός τροχιάς, 48, 50
 Προσέγγιση, 219, 220, 223
 Faedo–Galerkin, 258, 259
 Michaelis–Menten, 156
 αναλυτική, 222, 223
 αριθμητική, 158, 160, 222
 εξωτερική, 148, 151, 155, 158, 160, 162–164
 εσωτερική, 148, 150, 155, 158, 160, 162–164
 κατά Taylor, 212
 ολική/ομοιόμορφη, 147, 151, 152, 155, 158, 160, 162–164
 συνεχής, 201
 υποστρώματος
 ελεύθερου, 152, 155
 ολικού, 152, 155
 Πρόσημο
 διακρίνουσας, 207
 διαφόρισης ως προς εξωτερικό κάθετο δiάνυσμα συνόρου, 232, 260, 265–268, 275, 288
 παραβολικού, 260
 ίχνους, 64, 82, 176, 186
 ποσότητας Γ , 83, 89
 πραγματικού μέρους ιδιοτιμής, 64, 82, 170, 176, 186
 σταθερό, 132, 181
 συνάρτησης βιοτικής αλληλεπίδρασης, 33, 35
 Προϊόν, 133, 134, 136, 141, 167, 203
 Πτυχή, 72, 74, 75
 Πυκνότητα πληθυσμού, 36, 201–203
 Ροή
 διάχυσης, 203
 μεταγωγής, 203
 συνολική, 203
 Ρυθμός
 αλληλεπίδρασης, 35
 ανάπτυξης, 15, 98
 ανάπτυξης/διαγραφής, 100, 120
 αύξησης, 13, 29, 44
 γεννήσεων, 119, 120
 διαγραφής, 120
 ενζυμικής αντίδρασης, 37
 θανάτου, 120
 θανάτων, 15, 119, 120
 μείωσης, 44
 μεταβολής, 12, 36, 44, 100, 134, 136
 μετάδοσης, 100

Σάγμα, 47, 53

Σαπρόφυτο (ή παρασιτοειδές), 34

Σειρά

Fourier, xxii, 243, 244, 248, 254, 261

γενικευμένη, 249

μερικό άθροισμα, 243

συντελεστής (βλ. “Συντελεστής Fourier”), 233

σύγκλιση, 243, 244, 246, 247

Taylor, 70, 200

Σηματοδότηση, 289

Σημείο

διακλάδωσης, 74, 90

ισορροπίας (σ.ι.), 18, 24, 29, 31, 48, 52, 55,

59, 63–65, 68, 70, 71, 74–77, 81–84,

89, 90, 104, 116, 121, 124, 125,

127–131, 145, 168–172, 174–176,

178, 181, 182, 184–186, 189, 191,

194–197, 212

ασταθές, 25, 47, 50, 63, 64, 77, 81, 82,

105, 121–123, 127, 128, 171, 172, 176,

187, 190, 191, 194

αστεροειδής κόμβος, 54

ασυμπτωτικά ευσταθές, 25, 64, 66, 77, 81,

82, 84, 90, 121–123, 126–129, 145,

146, 171, 177–179, 187, 188

εκφυλισμένος κόμβος (βλ. “νόθος”), 54

ελεύθερο νοσήματος, 121

ενδημικό, 121, 124, 125

εστία, 55, 56, 64, 83, 125, 170, 176, 178,

187, 189

ευσταθές, 24, 50, 58, 172

κατάταξη, 52

κόμβος, 53, 64, 83, 170, 176, 187

μεμονωμένο, 24, 38, 39, 55, 70, 71, 89

μη υπερβολικό, 55, 64, 70, 122

νόθος κόμβος, 54, 55, 170

συμβίωσης, 67

ταξινόμηση/ονοματολογία, 53, 54

υπερβολικό, 28, 39, 40

καμπής, 31

κρίσιμο, 24, 107

σταθερό, 121

ελεύθερο νοσήματος, 121

ενδημικό, 121

Σταθερά

Michaelis-Menten, 142

Van Slyke-Cullen, 142

αδιάστατη, 169, 175, 185

αναλογίας, 12

γονιμότητας, 12

διάστασης συμπλόκου, 141

διάχυσης, 201

θνησιμότητας, 12

μεταγωγής, 201

χημικής αντίδρασης, 136

Στείλεός, 217

Στοιχειομετρία, 135, 136

Στρώμα

εξωτερικό, 148, 155, 156, 158, 160, 162

επικάλυψης, 162–164

εσωτερικό, 148, 155, 157, 158, 160, 162

οριακό/συνοριακό, 162

Συγκέντρωση

μονάδα μέτρησης

molar, 135, 138

γραμμομοριακότητα (ή μοριακότητα) κατ’ όγκο (molarity), 135

παθογόνου παράγοντα, 98

πληθυσμού (βλ. “Πυκνότητα πληθυσμού”), 36

ύλης, 200

χημικής ουσίας, 37, 134–136, 139, 143, 146, 152

Σύγκλιση, 246

απόλυτη σειράς συντελεστών, 243, 245

κατά σημείο/σημειακή, 222, 243, 244

κλασική, 243

ομοιόμορφη, 222, 234, 236, 237, 243–245, 277, 284

σειράς Fourier, 243, 244, 246, 247

στον L^2 , 243, 246, 248

Συγκομιδή, 50, 51

Συμβίωση, 33, 34, 67

Σύμβολο

Bachmann (βλ. “Ομικρον κεφαλαίο”), 111

Landau (βλ. “Ομικρον πεζό”), 111

Vinogradon (\ll), 111

τάξης μεγέθους: O, o , 111

Συμπεριφορά

διακλάδωσης, 71, 90

περιοδική, 55

χαοτική, 13

Σύμπλοκο υποστρώματος-ενζύμου, 141, 143

Συναρμογή, xxii, 152, 155, 163, 164

αλγόριθμος, 163

συνθήκη, 151, 155, 163, 164

Συνάρτηση

- 1 – 1, 247, 283
 Gauss, 220
 Lambert, xxii, 133, 142, 160, 162, 164, 288
 κύριος κλάδος, 142, 151, 161
 Lyapunov, xxi, 43, 55, 58, 66, 67, 124, 284
 ασθενής, 57, 58, 66
 ισχυρή, 58
 αθροίσιμη, 232
 αλληλεπίδρασης, 33, 35
 αρνητικά
 ημιορισμένη, 57
 ορισμένη, 57
 αρνητικό μέρος, 6
 αρχική, 216, 217, 219–224, 231, 232, 239–241, 265, 278, 279
 αύξουσα, 6, 7
 γνησίως, 19, 31, 161, 269, 273
 βάρους, 258, 259
 βιοτικής αλληλεπίδρασης, 33, 35
 διανυσματική, 180, 203
 διαφορίσιμη, 19, 39, 44, 244
 ασθενώς, 205
 επαρκώς, 202
 συνεχώς, 203, 245
 επέκταση, 5
 συνεχής, 242
 επί, 247
 θετικά
 ημιορισμένη, 57
 ορισμένη, 57
 καλά ορισμένη, 272
 κοίλη
 γνησίως, 19, 31
 κυρτή, 31
 γνησίως, 19, 31, 272, 274
 μη σταθερή, 261
 μονοτονία, 270–273, 282
 ολοκληρώσιμη, 6, 7, 217, 243–245
 κατά Lebesgue, 247, 250
 κατά Riemann, 246
 τετραγωνική κατά Lebesgue, 243
 τοπικά τετραγωνικά Lebesgue, 248
 ομαλή, 2, 24, 71, 217, 231, 232, 251
 παράγουσα, 269, 281
 πεδίο ορισμού, 4, 8, 24, 104, 145, 169, 170, 204
 περιοδική, 243–245, 247, 249
 πραγματική, 71, 243
 σταθερή, 260, 271
 στάσιμη, 234
 συνεχής, 5–8, 40, 217, 242, 244, 245, 266
 απόλυτα, 100, 245
 διανυσματική, 181
 ομοιόμορφα, 203
 τοπικά, 248
 σύνολο τιμών, 11, 16, 101
 ταυτοτικά μηδενική, 233, 234, 236
 ταυτοτική, 40
 φανταστική, 89
 φθίνουσα, 31, 105, 161
 γνησίως, 19, 21, 31, 58, 161, 269
 φραγμένη, 8, 217, 226, 231, 244
 φραγμένης κύμανσης, 244, 245
 Συναρτησιακή απόκριση, 35
 Holling
 γενικευμένη, 38
 τύπου I, 35, 36, 38, 44, 50, 100, 136
 τύπου II, 37, 38, 78
 τύπου III, 37, 38
 τύπου IV, 38
 αύξουσα, 36
 κορεσμένη, 36
 μη μονότονη, 38
 Συνδυασμός
 γραμμικός, 2
 Συνεργασία
 ενδογενής, 29
 Συνέχεια
 Hölder, 225
 Lipschitz, 6
 Συνθήκη
 Hölder, 225–227, 244, 245
 ομοιόμορφη, 225, 226, 241, 242
 τοπική, 225, 226, 242, 280
 Lipschitz, 6–8, 244, 245
 τοπική, 6, 7, 23
 Nagumo, 8
 Osgood, 7, 8
 αναγκαία διακλάδωσης
 Hopf, 89–91, 93, 94, 96
 σταθερής κατάστασης, 71, 74–76, 78
 αναγκαία στάσιμης λύσης, 281
 αρχική, 1–3, 12, 13, 15, 16, 30, 45, 50, 52, 62, 66, 67, 69, 70, 80, 85–88, 101, 102, 105, 108, 112–115, 120, 126–129, 143–146, 148, 150, 154, 155, 158, 159, 168, 169, 173–175, 183–185, 204, 210, 218, 287

- μη αρνητική, 217
- για επιδημία
 - αναγκαία, 108
 - ικανή, 108
- γραμμικής ανάπτυξης, 6
- εγκαρσιότητας, 71
- εκθετικής αύξησης, 14
- μη εκφυλισμού, 71, 83, 84, 89–91, 93
- ομοιόμορφης (ή αυστηρής/ισχυρής)
 - ελλειπτικότητας, 208
 - παραβολικότητας, 209
 - υπερβολικότητας, 209
- συμβατότητας, 242, 243, 280
- συμμετρίας/αυτοσυζυγίας, 208, 209
- συναρμογής, 151, 155, 163, 164
- συνοριακή, 204–206, 210, 212, 249, 252, 257–259, 283
 - Dirichlet, 210, 230, 236, 239, 252–254, 264, 278
 - Neumann, 211, 230, 239, 253, 254, 264, 278
 - Robin, 211, 254
 - δεύτερου είδους (βλ. “Neumann”), 211
 - μεικτή, 211, 253, 254
 - μεικτού τύπου (βλ. “Robin”), 211
 - ομογενής, 230, 250, 258, 264
 - περιοδική, 254
 - πρώτου είδους (βλ. “Dirichlet”), 210
 - τρίτου είδους (βλ. “Robin”), 211
 - τύπος, 199, 210, 211, 233
 - χωριζόμενη, 250
- Συνιστώσα
 - συνεκτική
 - εξωτερική, 84
 - εσωτερική, 84
- Σύνολο
 - 0-συνεκτικό, 130, 131, 179, 181, 196
 - 1-συνεκτικό, 130, 131, 191, 196, 197
 - 2-συνεκτικό, 131
 - 3-συνεκτικό, 131
 - m*-συνεκτικό, 130, 131, 196
 - α -οριακό, 127
 - α -οριακό, 127, 130, 172
 - αναλλοίωτο, 17, 20, 22, 24, 30, 45, 46, 62, 67, 102, 104, 121, 123, 169, 171, 172, 175, 177, 178, 212, 217, 232, 265–267
 - αρνητικά, 24, 196
 - θετικά, 24, 178, 185, 186, 191, 192, 196
 - ανοικτό, 24, 59, 70, 71, 89, 132, 145, 202–204, 208, 210, 215, 227, 228, 241, 242, 244, 250, 260, 261, 264, 284
 - σχετικά, 24
 - εσωτερικό, 131
 - εφικτό, 101, 103, 104, 120, 149, 154
 - συμπαγές, 124
 - κυρτό, 48, 212
 - ορθοκανονικό, 246
 - παραβολικό, 205
 - φραγμένο, 206
 - πυκνό, 246
 - συμπαγές, 7, 130, 191, 196
 - συμπαγώς περιεχόμενο, 228
 - συνεκτικό, 196, 202, 204, 208, 227, 241, 242, 250, 260, 261, 264
 - απλά, 129–131, 191
 - ταξινομήση, 130
 - σχετικά κλειστό, 203
 - τιμών, 11, 12, 16, 24, 84, 101, 116, 215, 284
 - φραγμένο, xxii, 48, 203, 204, 216, 228, 229, 241, 242, 250, 257, 258, 260, 261, 263, 264, 280, 281
 - ω -οριακό, 127, 130
 - ω -οριακό, 124, 127
- Σύνορο
 - αφιλόξενο, 230, 235, 236, 277
 - ομαλό, 210
 - κατά τμήματα, 24, 129, 130, 132, 196, 202, 204, 206, 210, 211, 261
 - παραβολικό, 205
 - προσανατολισμένο, 129, 130
- Συντελεστής
 - Fourier, 243, 245, 255, 257
 - γενικευμένος, 233, 236, 249
 - στοιχειομετρικός, 133
- Συσσιτισμός, 35
- Σύστημα
 - αντίδρασης-διάχυσης, 289
 - αυτόνομο, 23
 - γραμμικό, 55
 - διάχυσης, 288
 - δυναμικό, 197
 - διακριτό, 23
 - εξισώσεων, 43, 45, 182, 267, 268, 280
 - διαφορικών, 140, 173, 181, 192
 - χημικών, 134
 - μη γραμμικό, 76, 95
 - ταλαντούμενο, 207
- Σχέση

- αναδρομική, 22, 23
 ασυμπτωτική, 251
 ισοδυναμίας, 99
 Ταλάντωση, 167
 φθίνουσα, 125
 Ταλαντωτής, 193
 Τάξη
 ΣΔΕ, 3, 4
 μεγέθους, 114, 163
 σύμβολο, 111
 Ταξινόμηση
 γραμμικών ομογενών ΜΔΕ δεύτερης τάξης
 δύο διαστάσεων, 199, 206, 207
 πολλών διαστάσεων, 199, 208
 σημείων ισορροπίας (σ.ι.), 53, 54
 συνεκτικών συνόλων, 130
 φυσική
 χημικών αντιδράσεων, 136
 Ταχύτητα
 αναζήτησης, 36
 διάδοσης διαταραχών
 άπειρη, 217, 232
 πεπερασμένη, 217
 χημικής αντίδρασης (βλ. “Χημική
 αντίδραση: ταχύτητα”), 134
 Τελεστής
 Laplace
 αρνητικός, 209
 γραμμικός, 208
 διαφορικός, 208
 γραμμικός, 204
 τάξη, 204
 ελλειπτικός, 208, 210, 249, 259
 ομοιόμορφα/αυστηρά/ισχυρά, 208
 παραβολικός, 209, 210, 258, 259
 ομοιόμορφα/αυστηρά/ισχυρά, 205, 210,
 216, 226, 227, 241, 242, 260, 261
 περιοδικής επέκτασης, 247
 περιορισμού, 247
 πολλαπλασιαστικός, 216
 συμμετρικός, 205, 208, 210, 216, 226, 227,
 241, 242, 260, 261
 συνοριακός, 210
 τάξη, 208
 υπερβολικός, 209, 210
 ομοιόμορφα/αυστηρά/ισχυρά, 210
 Τιμή
 αρχική, 9, 14, 17, 21–23, 45, 62
 ελάχιστη, 232, 233, 260, 261, 271, 288
 κρίσιμη, 235
 μέγιστη, 107, 221, 260, 261, 270, 272, 274,
 277, 278, 288
 μέση (βλ. “Μέση τιμή”), 50
 Τροχιά, 23, 66, 128, 172
 ετεροκλινής, 123, 124, 128, 129, 132, 171,
 172, 177, 188
 προσανατολισμένο σύμπλεγμα, 123,
 129–132
 κλειστή, 43, 50, 70, 84, 88, 90, 123,
 129–132, 167, 171, 177, 180, 181, 188,
 191, 197
 κλειστότητα, 48, 59, 130
 μη φραγμένη, 171, 182
 ομοκλινής, 123, 124, 128–132, 171, 172,
 177, 188
 περιοδική, 90, 132, 181
 προσανατολισμός, 48
 φραγμένη, 124, 177
 Τρυβλίο (καλλιέργειας) Petri, 230
 Τύπος
 Duhamel, 216, 227, 259
 Holling
 I, 35, 36, 38, 44, 50
 II, 37, 38
 III, 37, 38
 IV, 38
 γενικευμένος, 38
 συνοριακής συνθήκης, 199, 210, 211
 Τυχαίος περίπατος, 200
 Ύπαρξη λύσης, xxi, 2, 4, 5, 7–9, 16, 22, 30, 33,
 45, 46, 62, 80, 102, 121, 126–130, 145,
 162, 163, 169, 175, 182, 186, 196, 226,
 231, 249, 264, 268, 277, 280, 283
 ολικής, xxi, 2, 45, 102, 104, 121, 169, 216,
 217, 226, 227, 231, 233, 242, 243, 265,
 267, 268, 281, 284
 αρνητικά, 5, 62, 127, 129, 130, 171, 172,
 196
 θετικά, 2, 4, 5, 20, 32, 59, 62, 80, 102,
 104, 121, 127–131, 145, 162, 163, 169,
 175, 186, 196, 211, 268
 περιοδικής, 59, 129, 132, 178, 181, 189, 196
 τοπικής, 5
 φραγμένης, 216, 217
 Υπερβολή, 207
 Υπόθεση
 σχεδόν σταθερής κατάστασης, 142
 αντίστροφη, 143, 152

- ολική, 143
 τυπική, 142, 147
 ταχείας ισορροπίας, 141
 της σχεδόν σταθερής κατάστασης
 αντίστροφης, xxii
 τυπική, xxii
- Υπόστρωμα, 134, 141
 δεσμευμένο, 143
 ελεύθερο/αδέσμευτο, 143, 152, 155
 ολικό, 143, 152, 155
- Υστέρηση, 287
- Φάση
 εγκατάστασης πληθυσμού, 221, 222, 224,
 225, 233, 268
 λανθάνουσα, 98
 λοίμωξης, 99
 μελέτης
 ΠΑΣΤ, 206, 217, 225, 233, 268
 ΠΑΤ, 1–3, 22, 32, 101, 121, 169, 175,
 186
- Φέρουσα ικανότητα, 15, 17, 30, 277
- Φορέας, 99
- Φυσική επιλογή, 35
- Φυτοφαγία, 34
- Χημειοταξία, 203, 289
- Χημική
 αντίδραση, xxii, 36, 37, 43, 133, 134, 139,
 140, 156, 157, 167, 203
 Belouzon-Zhabotinsky, 168
 Bray-Liebafsky, 168
 Briggs-Rauscher, 168
 αμφίδρομη, 134, 136, 137
 αντίστροφης, 134
 απλή (στοιχειώδης), 136, 139
 απορροή, 171, 192
 αργή, 134
 γρήγορη, 134
 εισροή, 138, 168, 173, 181, 182, 192
 εκροή, 138, 171
 θεωρία συγκρούσεων, 134
 κατάλυση, 43
 καταλύτης, 134
 κατανομή Maxwell-Boltzmann, 135
 μεταβολικό μονοπάτι, 138, 167, 173
 μεταβολισμού (βλ. “Βιοχημική
 αντίδραση”), 134
 μηχανισμός, 138–140, 167, 173, 181, 182,
 192
 μονόδρομη, 133–139
 πολύπλοκη, 136
 στάδιο, 136, 139, 182
 σταθερά, 136
 στοιχειομετρία, 135, 136
 στοιχειομετρικός συντελεστής, 133
 τάξη, 139
 ταχύτητα, 134–137, 139, 156
 φυσική ταξινόμηση, 136
- ένωση, 167
 εξίσωση, 133–137, 141, 147, 152, 156, 173,
 182
 ισορροπία, 134, 137
 κινητική, 36, 37, 199, 203
 ουσία, 36, 133, 134, 138, 139, 203
 αντιδρών, 133–136, 139, 203
 γραμμομόριο (mol), 135
 προϊόν, 133, 134, 136, 141, 167, 203
 συγκέντρωση, 37, 134–136, 139, 143,
 146, 152
- Χημικό
 μόριο, 11
 στοιχείο, 11
- Χρόνος
 αναζήτησης, 37
 αντιστροφή, 4, 13, 22, 33, 62, 102, 206
 αρνητικός, 4, 13, 16–18, 20, 22, 32, 63, 113
 επώασης, 100
 θετικός, 4, 17, 18, 22, 52, 63, 69, 85–88,
 114, 126–129, 170, 171, 174,
 183–185, 193–195, 206, 268
 θήρευσης, 37
 κλίμακα, 116, 141–143, 147, 151–153, 162,
 163, 168
 εγγενής, 99, 115, 116
 ενδιάμεση, 163
 μεταφορά, 20, 23
 μεταχείρισης, 37
 σύγκριση, 142, 143, 148, 156, 157
 χαρακτηριστικός αναφοράς, 115, 116
- Χωρητικότητα (βλ. “Φέρουσα ικανότητα”), 15
- Χωρίο
 εξωτερικό (βλ. “Στρώμα: εξωτερικό”), 162
 επικάλυψης (βλ. “Στρώμα: επικάλυψης”),
 162
 εσωτερικό (βλ. “Στρώμα: εσωτερικό”), 162
 παγίδευσης, xxii, 129, 167, 190, 192, 196
 αρνητικής, 196
 θετικής, 190, 191, 193–197
- Χωρισμός μεταβλητών, 152

Χώρος

C , 2, 57, 203–205, 210, 211, 226, 230, 231,
 241, 242, 249, 251, 258, 261, 264, 280
 C^1 , 230, 231, 242, 249, 258, 261, 264, 280,
 281, 284
 C^2 , 251, 258
 C^k , 2, 9, 59, 70, 203
 C^∞ , 2, 227, 248, 251–254, 264, 269, 273
 C_0^1 , 203, 241, 242
 C_1^2 , 203, 260, 261
 C_B , 212, 216, 222, 226–228, 234, 244, 245,
 252, 265–269, 280, 281
 $C_{0,B}^1$, 226, 227
 $C_{0,B}^2$, 226, 227
 $C_{k_2,B}^{k_1}$, 205
 $C_{k_2}^{k_1}$, 203, 204
 L^2 , 243, 246–249, 252–255, 258, 259
 με βάρος w (βλ. “ L_w^2 ”), 250
 L_w^2 , 250, 251
 $L_{per,1}^2$, 247, 248

$L_{per,2}^2$, 247, 248

Banach, 246

νόρμα, 212

Hilbert, 246–248, 251

απειροδιάστατος, 246

Sobolev, 205

διανυσματικός, 247

μιγαδικός, 246

πλήρης, 212, 247

πραγματικός, 246

ευκλείδειος, 202, 210

πηλίκο, 247

συναρτησιακός, 2, 203

των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων κατά

Lebesgue συναρτήσεων (βλ. “ L^2 ”), 243

φάσης, 23, 38–40, 43, 55, 58, 59, 62, 64, 67,

68, 80, 83, 84, 122, 123, 125, 126, 132,

170–172, 177, 178, 181, 182, 188, 189,

191, 196, 212

φραγμένος, 171

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΩΝ ΟΡΩΝ

A

Advection, 201, 203
Amensalism, 35
Antagonism, 34
Assumption
 quasi-steady state
 reverse, 143
 standard, 142
 total, 143
 rapid equilibrium, 141

B

Bifurcation, 70
 fold/saddle-node, 72
 subcritical, 70
 pitchfork, 73
 supercritical, 70
 pitchfork, 73
 transcritical, 73
Biocatalyst, 134
Biochemical reaction, 134
 biocatalyst, 134
 enzymatic, 134
 dissociation constant, 141
 enzyme, 134
 solution, 134
 solvent, 134
 substrate, 134

C

Carassius auratus, 29
Carrier, 99
Catalyst, 134
Center, 55, 56

Chemical

 equation, 133
 equilibrium, 134
 reaction, 133
 catalyst, 134
 complex, 136
 elementary, 136
 irreversible, 133
 mechanism, 138
 metabolic pathway, 138
 product, 133
 rate, 134
 rate constant, 136
 reagent, 133
 reversible, 134
 stoichiometric factor, 133
 substance, 133
 mol, 135
Collision theory, 134
Commensalism, 35
Compartment, 97
Competition, 34
 chemical, 34
 consumptive, 34
 contact, 34
 contest, 34
 interference, 34
 preemptive, 34
 scramble, 34
 territorial, 34
Competitive exclusion, 34
Complex, 141
Concentration

unit of measure
 molar, 135
 molarity, 135
 Conservation of matter (mass), 133
 Constant
 dissociation, 141
 rate, 136

D

Diffusion, 199

E

Ecosystem, 33
 Effect, 33
 Allee, 29
 strong, 29
 weak, 29
 smoothing, 217
 Endemicity, 119
 Enzyme, 134
 Equation
 chemical, 133
 delay differential, 287
 difference, 23
 Equilibrium point, 18, 24, 121
 center, 55, 56
 disease-free, 121
 endemic, 121
 focus, 55, 56
 node, 53
 degenerate, 54, 55
 star, 54
 saddle, 53
 Equivalence class, 97
 Establishment phase, 221
 Evolution, 35
 Exploitation, 34
 Exposed, 98

F

Fixed point (βλ. “Equilibrium point”), 18, 121
 disease-free, 121
 endemic, 121
 Focus, 55, 56
 Fold/saddle-node, 72
 Fractal, 24
 Functional response, 35

H

Habitat, 215

inhospitable, 230
 segregated, 230

Herbivory, 34

Host, 34

I

Incidence, 100

Infected/infectious, 98

Infection

active, 98
 acute, 98
 chronic, 98
 clinical, 98
 contagious, 98
 endemic, 119
 latent, 98
 subacute, 98
 subclinical, 98

Instability

diffusion-driven (βλ. “Turing”), 288
 Turing, 288

Interaction, 33

benefit, 33
 harm, 33
 no effect, 33

J

Jacobi matrix, 38, 39, 121

L

Law

Gause’s, 34
 of mass action, 36

M

Maternally derived immunity, 98

Mechanism, 138

Metabolic pathway, 138

Metabolism, 134

Method

cobwebbing, 15

Model

age-structured, 98
 compartmental, 97
 endemic, 98
 epidemic, 98
 lock and key, 141

Mutualism, 34

N

Natural selection, 35

Neutralism, 35
 Niche, 34
 differentiation, 34
 partitioning, 34
 segregation, 34
 separation, 34
 Node, 53
 degenerate, 54, 55
 star, 54
 Nullcline, 67

O

Orbit
 heteroclinic, 128
 homoclinic, 128
 Organism, 134
 Oscillation, 167
 Oscillator, 193

P

Parasite, 34
 Parasitism, 34
 Pitchfork
 subcritical, 73
 supercritical, 73
 Predation, 34
 Predator, 29, 34
 Prey, 29, 34
 Product, 133

R

Random walk, 200
 Range, 221
 Rate law, 139
 Reaction, 203

biochemical
 complex, 141
 enzymatic, 134
 Reagent, 133
 Recovered/removed, 98
 Reproductive number (ratio, rate)
 basic, 108
 effective, 109

S

Saddle, 53
 Saturation, 36
 Scale, 141
 Scaling, 115
 Solution, 134
 global, 46
 Solvent, 134
 Steady state (βλ. “Equilibrium point”), 18, 121
 disease-free, 121
 endemic, 121
 Substrate, 134
 Susceptible, 98
 Symbiosis, 33

T

Threshold, 29, 107
 theorem of Epidemiology, 107, 109

V

Volterra’s principle, 51

W

Wave
 plane, 288
 travelling, 288

EΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΝΟΜΑΤΩΝ

A

Allee, xxi, 27, 29, 30, 33, 79, 277
Andrews, 38
Andronov, 89
Aronson, 263
Arrhenius, 134

B

Bachmann, 111
Banach, 212, 246
Barbashin, 58
Belousov, 167
Bendixson, xxii, 89, 119, 123, 124, 126, 127,
129, 131, 132, 146, 171, 172, 177, 181,
188
Bernoulli, D., xix
Bernoulli, J., 15
Bessel, 258
Bodenstein, 141
Boer, 143
Boltzmann, 135
Borghans, 143
Bowen, 29
Bray, 167
Briggs, 37, 142, 167
Brown, 141, 199
Burk, 142

C

Cauchy, 1, 4, 7
Četaev, 58, 107
Cohen, xix
Corless, 142
Cullen, 141, 142

D

Darcy, 202
Dini, 243
Dirac, 219
Dirichlet, 210, 230, 236, 239, 243, 244,
252–254, 264, 278
Duhamel, 216, 227, 259
Dulac, 119, 123, 129, 131, 132, 146, 171, 172,
177, 181, 188

E

En'ko, 98
Euler, xix, 11, 22, 212

F

Faedo, 258
Fibonacci, xix
Fick, 202, 203
Fischer, 141
Fisher, 263, 264
Fourier, xxii, 202, 229, 233, 236, 243–249, 254,
255, 257, 261

G

Galerkin, 258
Gause, 34
Gauss, 220
Gelfand, xx
Gonnet, 142
Grattan-Guinness, xix
Green, 132
Grobman, 40
Gronwall, 4, 6

H

Hadamard, 2, 4, 204

Haldane, xx, 37, 142

Hamer, 98

Hamming, xix

Hare, 142

Hartman, 40

Henri, 141

Hermite, 258

Higgins, 167, 173, 188

Hilbert, 246–248, 250, 251

Hölder, 225–227, 241, 242, 244, 245, 280

Holling, 35–38, 44, 50, 78, 100, 136

Hopf, xxi, 70, 79, 83, 84, 89–91, 93, 94, 96, 177,
178, 182, 187, 189, 288

J

Jacobi, 38, 39, 47, 55, 63, 64, 71, 75, 76, 81, 82,
89–91, 93–95, 104, 121, 145, 170, 175,
176, 186

Jeffrey, 142

Jordan, 59, 244

K

Kermack, 98, 109, 111

Klainerman, xix

Knuth, 142

Koch, 98

Kolmogorov, 263, 288

Kostitzin, xx

Krasovskii, 58

L

Lambert, xxii, 133, 142, 151, 160, 162, 164, 288

Landau, 111

Laplace, 209

LaSalle, 58, 66

Lebesgue, 243, 246–248, 250

Lefever, 192

Legendre, 258

Leibniz, xix

Lesk, xix

Lie, 58

Liebhafsky, 168

Lindelöf, 4, 7

Lineweaver, 142

Liouville, xxii, 229, 243, 248, 249, 254, 257,
258, 261, 284

Lipschitz, 4, 6–8, 23, 244, 245

Lotka, xx, xxi, 35, 36, 43, 61, 79, 167, 168, 171

Ludwig, 263

Lyapunov, xxi, 39, 43, 47, 50, 55, 57, 58, 65–67,
71, 75, 90, 94, 122, 124, 284

M

Maini, 143

Malthus, xix, 11, 12, 14, 15

Martini, 98

Maxwell, 135

McKendrick, 98, 109, 111

Mendoza, 142

Menten, 37, 141, 142, 156

Meyer, 192

Michaelis, 37, 141, 142, 156

Monod, 37

N

Nagumo, 4, 8

Neumann, 211, 230, 239, 253, 254, 264, 278

Newton, xix

O

Ohm, 202

Osgood, 4, 7

P

Parseval, 246

Peano, 4, 5

Petri, 230

Petrovskii, 263, 288

Picard, 4, 7

Piskunov, 263, 288

Poincaré, xxii, 39, 71, 89, 119, 123, 124, 126,
127, 129, 146, 171, 177, 181

Prigogine, 192, 193

R

Rauscher, 167

Real, 37

Riemann, 246, 247

Robin, 211, 254

Ross, 98

S

Schmidt, 65, 71, 75, 90, 94, 122

Schnakenberg, 181

Schnell, 142, 143

Segel, 142, 143, 158

Sel'kov, 167, 173, 182, 188

Skellam, 215, 229

Slemrod, 142

Sobolev, 205

Soper, 98
Stokes, 132
Sturm, xxii, 229, 243, 248, 249, 254, 257, 258,
261, 284

T

Taylor, 9, 39, 70, 109, 110, 200, 212
Tegmark, xix
Turing, 288

V

Van Slyke, 141, 142

van 't Hoff, 136

Verhulst, xix, 11, 14, 15, 27, 43

Vinogradov, 111

Volpert, 15

Volterra, xx, xxi, 35, 43, 50, 51, 61, 79

W

Weinberger, 263

Wigner, E., xix, xx

Z

Zhabotinsky, 167

«Τα Μαθηματικά είναι το επόμενο μικροσκόπιο της Βιολογίας, αλλά καλύτερο. Η Βιολογία είναι η επόμενη Φυσική των Μαθηματικών, αλλά καλύτερη» είναι ο τίτλος μιας εργασίας του J. E. Cohen, που αποτελεί μια ιδιαίτερα επιτυχημένη εικονοποίηση της εντυπωσιακής εξέλιξης της Μαθηματικής Βιολογίας κατά τον εικοστό πρώτο αιώνα. Τα Μαθηματικά παρέχουν τα κατάλληλα μέσα για την αντιμετώπιση πολύπλοκων βιολογικών συστημάτων σε διάφορα επίπεδα οργάνωσης και είναι έτσι εξαιρετικά αποτελεσματικά (και) στη Βιολογία. Το παρόν σύγγραμμα αποσκοπεί στην παρουσίαση βασικών και πιο προωθημένων μεθόδων των Διαφορικών Εξισώσεων (Συνήθων (ΣΔΕ) και Μερικών (ΜΔΕ)), Δυναμικών Συστημάτων και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών μέσω εφαρμογών στη Βιολογία. Παρουσιάζονται στοιχεία των εξής περιοχών της Μαθηματικής Βιολογίας: Οικολογία, Επιδημιολογία, Βιοχημική Κινητική και Διάχυση. Στο πρώτο μέρος (Οικολογία), εισάγονται και μελετώνται τα ακόλουθα μοντέλα: εκθετικό (συνεχές και διακριτό), λογιστικό (χωρίς και με επίδραση Allee), περισσότερων του ενός πληθυσμών (αλληλεπίδρασης πληθυσμών), Lotka-Volterra (βασικό, η πρώτη και η δεύτερη παραλλαγή του). Στο δεύτερο μέρος (Επιδημιολογία), εισάγονται και μελετώνται τα δυναμικά επιδημιολογικά μοντέλα κλάσεων και μελετάται το μοντέλο SIR (χωρίς και με δημογραφικούς όρους). Στο τρίτο μέρος (Βιοχημική Κινητική) εισάγονται και μελετώνται τα βασικά στοιχεία της θεωρίας χημικών αντιδράσεων, το βασικό μοντέλο ενζυμικής κατάλυσης, η τυπική και η αντίστροφη υπόθεση της σχεδόν σταθερής κατάστασης, καθώς και διάφορα μοντέλα αυτοκατάλυσης. Στο τέταρτο μέρος (Διάχυση) εισάγονται και μελετώνται τα βασικά μοντέλα (εκθετικό και λογιστικό) με όρο διάχυσης και η έννοια του δείκτη μοτίβου. Το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο παρουσιάζεται και αναπτύσσεται στο τέλος κάθε κεφαλαίου, μετά τη μελέτη του βιολογικού προβλήματος και συμπεριλαμβάνει: στοιχεία της βασικής θεωρίας των Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) για ΣΔΕ, διακριτοποίηση ΠΑΤ, ανάλυση ευστάθειας (γραμμικοποίηση, συναρτήσεις Lyapunov, περιοδικές λύσεις αυτόνομων ΠΑΤ), διακλάδωση, οριακούς κύκλους και διακλάδωση Hopf, βασική θεωρία Poincaré-Bendixson, εισαγωγή στην έννοια της αδιαστατοποίησης, των τοπικά προσεγγιστικών λύσεων και της συναρμογής τους, Προβλήματα Αρχικών-Συνοριακών Τιμών (ΠΑΣΤ) για ΜΔΕ δεύτερης τάξης, εκφυλισμένα και γνήσια ΠΑΣΤ, αρχή μεγίστου/ελαχίστου, σειρές Fourier, προβλήματα ιδιοτιμών Sturm-Liouville, στάσιμες λύσεις και την ευστάθειά τους, το αυτόνομο γνήσιο ΠΑΣΤ για την ημιγραμμική εξίσωση διάχυσης και εξάρτηση στάσιμων λύσεων από παραμέτρους.

Το παρόν σύγγραμμα δημιουργήθηκε στο πλαίσιο του Έργου Κάλλιπος+	
Χρηματοδότης	Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, Προγράμματα ΠΔΕ, ΕΠΑ 2020-2025
Φορέας υλοποίησης	ΕΛΚΕ ΕΜΠ
Φορέας λειτουργίας	ΣΕΑΒ/Παράρτημα ΕΜΠ/Μονάδα Εκδόσεων
Διάρκεια 2ης φάσης	2020-2023
Σκοπός	Η δημιουργία ακδημαϊκών ψηφιακών συγγραμμάτων ανοικτής πρόσβασης (περισσότερων από 700) - Προπτυχιακών και μεταπτυχιακών εγχειριδίων - Μονογραφιών - Μεταφράσεων ακοιντών textbooks - Βιβλιογραφικών Οδηγών
Επιστημονικά Υπευθυνος	Νικόλαος Μήτρου, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

ISBN: 978-618-5726-95-9

DOI: <http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-225>