Γενικευμένη Μοντελοποίηση των Χρόνων Ημιζωής της Πυρηνικής Αποδιέγερσης β^- με την βοήθεια της Στατιστικής Μεθοδολογίας των Νευρωνικών Δικτύων και Πρόβλεψη των Χρόνων Ημιζωής Εξωτικών Πυρήνων.

Ν. Ι. Κωστήρης

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων
Επιβλέπουσα: Μαυρομμάτη-Φούντου Ειρήνη, Επίκουρος
Καθηγήτρια Ε.Κ.Π.Α.

Αθήνα, 2006

Στο δάσκαλο...

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα **i**

I Η πυρηνική αποδιέγερση β **3**

1 Ο Πυρήνας **5**
1.1 Δομικές Μονάδες, Φορτίο και Μάζα 5
1.2 Τα Νουκλεόνια 6
1.3 Μέγεθος και Σχήμα του Πυρήνα 7
1.4 Δυνάμεις μεταξύ Νουκλεονίων 12
1.5 Η Πυρηνική Δύναμη 13

2 Πυρηνική Σταθερότητα **15**
2.1 Μάζα και Ενέργεια Σύνδεσης του Πυρήνα 16
2.2 Πυρηνικά Πρότυπα 16
2.2.1 Πρότυπο των Φλοιών ή των Ανεξάρτητων Σωματιδίων 17
2.2.2 Μοντέλο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων 17
2.2.3 Πρότυπο της Υγρής Σταγόνας και Συλλογικό Μοντέλο 18
2.3 Ο Ημιεμπειρικός Τύπος της Μάζας σύμφωνα με το Πρότυπο της Υγρής Σταγόνας 18
2.4 Μορφές Πυρηνικής Αποδιέγερσης 19
2.5 Η Αποδιέγερση β 20
2.6 Η τιμή$-Q$ 20

3 Πυρηνική Αστάθεια **23**
3.1 Η Αστάθεια των Πυρήνων 23
3.2 Η Ηλεκτρική Αλληλεπίδραση 25

3.3 Πυρηνικές Μεταπτώσεις 26
3.4 Ρυθμός Διάσπασης - Χρόνος Ημιζωής 27
3.5 Επιμέρους Ρυθμοί 28
3.6 Η Σταθερά Διάσπασης 29
3.7 Στοιχείο Μήτρας Μετάπτωσης - Πλάτος Μετάπτωσης 33

4 Ασθενής Αλληλεπίδραση και Αποδιέγερση β 35
4.1 Διαδικασίες Ασθενούς Αλληλεπίδρασης 35
4.2 Καθολική Ασθενής Αλληλεπίδραση 36
4.3 Μη Διατήρηση της Ομοτιμίας 37
4.3.1 Η Δράση του Τελεστή της Ομοτιμίας 39
4.3.2 Πειραματική Επιβεβαίωση της Παραβίασης της Ομοτιμίας 39
4.3.3 Η Ελικότητα 40
4.3.4 Η V-A Θεωρία της Αποδιέγερσης β 41

5 Η Αποδιέγερση β 43
5.1 Ρυθμός Μετάπτωσης − Ενεργειακό Φάσμα της Αποδιέγερσης β 43
5.1.1 Προσδιορισμός Αρχικής και Τελικής Κατάστασης . . . 44
5.1.2 Πυρηνικό Στοιχείο Μήτρας της Αλληλεπίδρασης 45
5.1.3 Πυκνότητα Τελικών Καταστάσεων 46
5.1.4 Ρυθμός Μετάπτωσης και Ενεργειακό Φάσμα της Αποδιέγερσης β 49
5.2 Η Ηλεκτροστατική Διόρθωση και ο Παράγοντας $Fermi$ . . . 50
5.3 Χρόνος Ημιζωής και Τιμή$-ft$ Για Την Αποδιέγερση β 54
5.4 Ο Ρόλος της Στροφορμής 54
5.5 Επιτρεπτές Μεταπτώσεις 55
5.5.1 Μεταπτώσεις $Fermi$ 55
5.5.2 Μεταπτώσεις $Gamow - Teller$ 56
5.5.3 Κβαντικές Καταστάσεις Επιτρεπτών Αποδιεγέρσεων − Μικτές Μεταπτώσεις 57
5.5.4 Τιμή$-ft$ Επιτρεπτών Μεταπτώσεων 58
5.6 Υπερεπιτρεπτές Αποδιεγέρσεις β 59
5.7 Απαγορευμένες Αποδιεγέρσεις 60

6 Περιοχές και Γενικευμένα Μοντέλα της Αποδιέγερσης β 63
6.1 Η r-process 63
6.2 Καθολικά Πρότυπα β Αποδιέγερσης 65
6.3 Θεωρία Μέσης Τελικής Κατάστασης 66

6.4 Πλήρως Μικροσκοπικά Μοντέλα 67
6.4.1 Το Πρότυπο των Φλοιών 67
6.4.2 Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης 68
6.5 Το Υβριδικό $QRPA + ffGT$ Μικρο-Μακροσκοπικό Μοντέλο 70
6.6 Τα Αυτοσυνεπή Μοντέλα 71
6.7 Ρελατιβιστική Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης 72
6.8 Οι Εξωτικοί Πυρήνες 72

II Νευρωνικά Δίκτυα 75

7 Μηχανική Μάθηση 77
7.1 Εισαγωγή 77
7.2 Εκπαιδευτική Μεθοδολογία 78
7.3 Επιτηρούμενη και Μη Επιτηρούμενη Εκμάθηση 79
7.4 Παράλληλη και Σειριακή Εκπαίδευση 80
7.5 Εκμάθηση και Γενίκευση 80
7.6 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Εκμάθησης 81

8 Νευρωνικά Δίκτυα 83
8.1 Εισαγωγή 83
8.2 Φυσιολογία Βιολογικού Νευρώνα 83
8.3 Μορφολογία Τεχνητού Νευρώνα 85
8.3.1 Απλός Νευρώνας 85
8.3.2 Απλός Νευρώνας με Κατώφλι Ενεργοποίησης 86
8.3.3 Νευρώνας με Διανυσματική Είσοδο 86
8.3.4 Νευρώνας με Βρόγχο Υστέρησης 88
8.4 Αρχιτεκτονική Δικτύου 88
8.4.1 Επίπεδο Δίκτυο 88
8.4.2 Δίκτυο Πολλών Στρωμάτων 89
8.5 Τοπολογία Δικτύου και Δομές Δεδομένων 90
8.6 Συναρτήσεις Ενεργοποίησης 91
8.6.1 Η Συνάρτηση Σκληρού Ορίου 91
8.6.2 Η Σιγμοειδής Συνάρτηση Υπερβολικής Εφαπτομένης . 91
8.6.3 Η Γραμμική Συνάρτηση 92
8.7 Διαδικασία Αποκατάστασης της Απόκλισης 92
8.7.1 Το Κριτήριο Μέσης − Τετραγωνικής − Απόκλισης . . 94
8.8 Η Στατιστική Φύση της Εκπαιδευτικής Διαδικασίας 94

9 Αλγόριθμοι Εκπαίδευσης **97**
9.1 Η Θεωρίας της Βελτιστοποίησης 97
9.2 Η Μέθοδος της πιο Απότομης Πτώσης 98
9.2.1 Η Κατεύθυνση Πτώσης 99
9.2.2 Η Σταθερά Ρυθμού Εκπαίδευσης 99
9.3 Ο Αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης 100
9.3.1 Ο Αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης για Γραμμικούς Νευρώνες Εξόδου 101
9.3.2 Ο Αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης για Μη−Γραμμικούς Αφανείς Νευρώνες 102
9.3.3 Ο Παράγοντας Ορμής 106
9.3.4 Μεταβλητή Παράμετρος Ρυθμού Εκπαίδευσης 106
9.4 Μέθοδοι Συζυγούς Κλίσης 107
9.4.1 Προσαρμογή $Fletcher - Reeves$ 108
9.4.2 Προσαρμογή $Polak - Ribiére$ 108
9.4.3 Επανεκκίνηση $Powell - Beale$ 109
9.5 Η Μέθοδος του $Newton$ 109
9.6 Αλγόριθμοι Τύπου $Newton$ 110
9.6.1 Η Μέθοδος $BFGS$ 110
9.7 Σύγκριση Μεταξύ Αλγορίθμων Τύπου $Newton$ και Μεθόδων Συζυγούς Κλίσης 111
9.8 Ο Αλγόριθμος $Levenberg - Marquardt$ 111
9.8.1 Η Μέθοδος $Gauss - Newton$ 112
9.8.2 Ο Βασικός Αλγόριθμος 113
9.8.3 Εφαρμογή του Αλγορίθμου σε Δίκτυο Πολλών Στρωμάτων 114
9.8.4 Υπολογισμός του Ιακωβιανού Πίνακα 114

10 Ειδικές Τεχνικές **117**
10.1 Τεχνική Διατεκμηρίωσης 117
10.2 Μπαϊεσιανή Εξομάλυνση 118
10.2.1 Βελτιστοποίηση των Υπερπαραμέτρων Εξομάλυνσης . . 119
10.2.2 Προσέγγιση $Gauss - Newton$ στον $Hessian$ Πίνακα . 120
10.2.3 Προσδιορισμός της Βέλτιστης Αρχιτεκτονικής του Δικτύου με την Βοήθεια της Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης . 121
10.3 Εφαρμογή Διατεκμηρίωσης Και Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης . . 122
10.4 Η Μέθοδος $Nguyen - Widrow$ 123
10.5 Μέθοδοι Μετασχηματισμού των Δεδομένων σε Κατάλληλο Διάστημα 125

III Μοντελοποίηση και Πρόβλεψη 129

11 Δοκιμαστικό Πείραμα 131
11.1 Εισαγωγή . . . 131
11.2 Η Δοκιμαστική Συνάρτηση . . . 132
11.3 Χρήσιμα Εργαλεία . . . 133
11.3.1 Δείκτες Απόδοσης της Εκπαιδευτικής Διαδικασίας . . 133
11.3.2 Συμβολισμός Δικτύων . . . 133
11.3.3 Το Δίκτυο Ανατροφοδότησης . . . 134
11.3.4 Η Συμμετρικά Κορεσμένη Ημιτονοειδής Συνάρτηση Ενεργοποίησης . . . 134
11.4 Εφαρμογή Της Τεχνικής Της Διατεκμηρίωσης . . . 135
11.5 Εναλλακτική Τεχνική Συμπερασμού . . . 135
11.5.1 Σταθεροποίηση της Πρόβλεψης . . . 140
11.5.2 Αρχικοποίηση και Σύγκλιση . . . 141
11.5.3 Βελτιστοποίηση της Πρόγνωσης . . . 143
11.5.4 Διαστάσεις του Δικτύου και Αξιοπιστία της Πρόβλεψης 147
11.5.5 Αρχιτεκτονική Δικτύου . . . 150
11.6 Συμπεράσματα . . . 150

12 Μοντελοποίηση των Χρόνων Ημίσειας Ζωής 151
12.1 Εισαγωγή . . . 151
12.2 Σετ Δεδομένων . . . 152
12.3 Πρόσθετοι Δείκτες Απόδοσης . . . 153
12.3.1 Στατιστικές Μετρικές . . . 153
12.3.2 Μετρικές *Klapdor* . . . 159
12.3.3 Μετρικές *Möller* . . . 160

13 Δοκιμαστικά Μοντέλα Νευρωνικών Δικτύων 163
13.1 Μοντέλα $Z - N$ . . . 163
13.1.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N$ . . . 165
13.1.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 *sec* . . . 166
13.1.3 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^3 *sec* . . . 166
13.1.4 Το Ψηφιακό Μοντέλο $Z - N$ . . . 167
13.2 Μοντέλα $Z - N - \delta$ . . . 169
13.2.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N - \delta$ . . . 172

13.2.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N-\delta$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec 172
13.2.3 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N-\delta$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^3 sec 172
13.2.4 Συμπεράσματα 173
13.3 Μοντέλα με την Χρήση της Τιμής$-Q$ 173
13.3.1 Ο Προσεγγιστικός Νόμος της Θεωρίας Μέσης Τελικής Κατάστασης 175
13.3.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N-\delta-Q$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec 177
13.3.3 Το Ψηφιακό Μοντέλο $Z-N$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec με Αναλογική Τιμή$-Q$ 178
13.3.4 Το Αναλογικό Μοντέλο Τύπου $Kratz-Herrmann$. 180
13.4 Μικροστατιστικά Μοντέλα του Προτύπου των Φλοιών 183
13.4.1 Αναλογικό Μοντέλο Κατανομής των Νουκλεονίων στις Ενεργειακές Καταστάσεις 186
13.4.2 Αναλογικό Μοντέλο Ποσοστιαίας Κατάληψης των Ενεργειακών Καταστάσεων 187
13.4.3 Αναλογικό Μοντέλο Απόκλισης από τους Μαγικούς Αριθμούς 188
13.5 Μοντέλα Υπερχώρων 189
13.5.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 190
13.5.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ 190
13.5.3 Το Αναλογικό Μοντέλο $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^6$ 191
13.6 Μοντέλα Ισοαλυσίδων 193
13.6.1 Το Αναλογικό Μοντέλο Z_{eff} 193
13.6.2 Το Αναλογικό Μοντέλο N_{eff} 195
13.6.3 Το Αναλογικό Μοντέλο A_{eff} 195
13.6.4 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z_{eff}-N_{eff}-A_{eff}$ 196
13.7 Το Αναλογικό Μοντέλο $[A/Z]$, $[N-Z]$, $[\delta]$ 197
13.8 Προοπτικές και Μοντέλα Αναπαράστασης της Αλληλεπίδρασης Νουκλεονίου$-$Νουκλεονίου 198
13.8.1 Το Μοντέλο της Μέσης Αλληλεπίδρασης Νουκλεονίου$-$Νουκλεονίου 200
13.8.2 Το Μοντέλο της Αλληλεπίδρασης $p-p$, $n-n$ 201

14 Επιλεγμένο Μοντέλο Πρόβλεψης **205**
14.1 Εκτίμηση της Απόδοσης Του Μοντέλου 206
14.1.1 Σύγκριση με τα Πειραματικά Δεδομένα 206

14.1.2 Σύγκριση με Άλλα Καθολικά Μοντέλα 210
14.2 Εκτίμηση της Ικανότητας Συμπερασμού 219
14.2.1 Η Περιοχή $Z \approx 28$ 219
14.2.2 Η Περιοχή $Z \approx 50$ 220
14.2.3 Η Περιοχή $Z \approx 82$ 220
14.2.4 Οι Περιοχές $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$ 220
14.3 Συμπεράσματα 221
14.4 Γραφήματα 221

15 Πρόβλεψη της Γραμμής Διαφυγής Νετρονίων 239
15.1 Τα Υπάρχοντα Πειραματικά Όρια Σταθερότητας 239
15.2 Χαρακτηριστικά του Μοντέλου 241
15.3 Εκτίμηση της Απόδοσης του Μοντέλου 241
15.3.1 Σύγκριση με τα Πειραματικά Δεδομένα 241
15.3.2 Σύγκριση με Άλλα Καθολικά Μοντέλα 245
15.4 Εκτίμηση της Ικανότητας Συμπερασμού 245
15.4.1 Η Περιοχή $Z \approx 28$ 246
15.4.2 Η Περιοχή $Z \approx 50$ 247
15.4.3 Η Περιοχή $Z \approx 82$ 254
15.4.4 Οι Περιοχές $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$ 254
15.5 Εκτίμηση της Γραμμής Διαφυγής Νετρονίων 254
15.6 Συμπεράσματα 255
15.7 Γραφήματα 256

16 Μοντέλο Διαχωρισμού Άρτιου–Περιττού Χαρακτήρα 273
16.1 Εισαγωγή 273
16.2 Χαρακτηριστικά του Μοντέλου 274
16.3 Εκτίμηση της Απόδοσης του Μοντέλου 274
16.3.1 Σύγκριση με τα Πειραματικά Δεδομένα 276
16.3.2 Σύγκριση με Άλλα Καθολικά Μοντέλα 278
16.4 Εκτίμηση της Ικανότητας Συμπερασμού 278
16.4.1 Η Περιοχή $Z \approx 28$ 279
16.4.2 Η Περιοχή $Z \approx 50$ 280
16.4.3 Η Περιοχή $Z \approx 82$ 280
16.4.4 Οι Περιοχές $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$ 281
16.5 Συμπεράσματα 282
16.6 Γραφήματα 286

17 Μοντέλα με την Χρήση των *SVMs* 303

17.1 Η Βασική Ιδέα των $SVMs$ 303
17.2 Το Πρόβλημα του Δυϊσμού 305
17.3 Ο Υπολογισμός του Κατωφλιού Ενεργοποίησης b και τα Ανύσματα Υποστήριξης 307
17.4 Κεντρικοί Πυρήνες 308
17.4.1 Μη−γραμμικότητα από Προεπεξεργασία 308
17.4.2 Κρυφή Αντιστοιχία Μέσω Πυρήνων 309
17.4.3 Συνθήκες Επιτρεπτότητας Κεντρικών Πυρήνων 310
17.4.4 Ο Πολυωνυμικός Πυρήνας 313
17.4.5 Ο Πυρήνας Υπερβολικής Εφαπτομένης 313
17.4.6 Ο Πυρήνας Γκαουσιανής Συνάρτησης Ακτινικής Βάσης 313
17.4.7 Ο Πυρήνας Πολυωνυμικού Υπολογισμού Ομαλής Καμπύλης 313
17.5 Συναρτήσεις Κόστους 314
17.5.1 Ο Λειτουργικός Παράγοντας Ρίσκου 314
17.5.2 Μοντέλα Μέγιστης Πιθανότητας και Πυκνότητας . . . 315
17.5.3 Λύνοντας τις Εξισώσεις 316
17.5.4 Παραδείγματα 319
17.6 Ανακεφαλαίωση 320
17.7 Μοντέλα με την χρήση των SVM 321
17.7.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N - \delta$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec 321
17.7.2 Το Μοντέλο της Αλληλεπίδρασης Νουκλεονίου−Νουκλεονίου για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec 321

Ι˝ Επίλογος **323**

Βιβλιογραφία **327**

Κατάλογος Συμβόλων και Συντμήσεων **335**

Κατάλογος Σχημάτων **338**

Κατάλογος Πινάκων **349**

Ευρετήριο **357**

Πρόλογος

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΚΑΘΟΛΙΚΩΝ ΠΡΟΤΥΠΩΝ, τα οποία θα περιγράφουν επιτυχώς τις ιδιότητες του πυρήνα, παραμένει ένας εξαιρετικά ενδιαφέρον τομέας της σύγχρονης Πυρηνικής Φυσικής. Η μέθοδος της έρευνας που μέχρι σήμερα χρησιμοποιείται, με αρκετά μεγάλη επιτυχία μάλιστα, είναι *φαινομενολογική*. Η φαινομενολογία θα μπορούσε να οριστεί σαν μια συνεχής αλληλεπίδραση μεταξύ θεωρίας και πειράματος και άλλοτε μεν προηγείται η θεωρία, οπότε νέα πειράματα προτείνονται που θα την ελέγξουν, άλλοτε δε, απροσδόκητα πολλές φορές, πειραματικά αποτελέσματα ανοίγουν νέα πεδία θεωρητικής έρευνας. Οι δύο αυτοί τρόποι έρευνας είναι τόσο αλληλένδετοι και αλληλοσυμπληρώνονται που είναι αδύνατον να συμβεί οποιαδήποτε εξέλιξη της Επιστήμης χωρίς την συμμετοχή και των δύο.

Η στατιστική μοντελοποίηση πυρηνικών δεδομένων αποτελεί πλέον έναν εναλλακτικό τρόπο προσέγγισης έναντι των καθιερωμένων φαινομενολογικών προσεγγίσεων της συστηματικής των ιδιοτήτων των πυρήνων. Οι πρόσφατες εξελίξεις στην στοχαστική και στατιστική ανάλυση και ειδικότερα αυτές που βασίζονται στα νευρωνικά δίκτυα και άλλες προσαρμοστικές τεχνικές που κινούνται στα πλαίσια της μηχανικής μάθησης, μας παρέχουν νέες δυνατότητες μοντελοποίησης που αξιοποιούν την πλούσια συλλογή πυρηνικών δεδομένων που ως τώρα έχουμε στην διάθεσή μας.

Έτσι, οι δυναμικές, στατιστικές και υπολογιστικές δυνατότητες των τεχνητών νευρωνικών δικτύων, καθώς και άλλων στατιστικών μεθόδων που βασίζονται σε αλγόριθμούς τεχνητής νοημοσύνης, μπορούν να αξιοποιηθούν κατάλ-ληλα για την πρόβλεψη πυρηνικών ιδιοτήτων σε περιπτώσεις όπου αδυνατούμε, τουλάχιστον προς το παρόν, να τις προσεγγίσουμε μικοσκοπικά ή πειραματικά.

Στην παρούσα εργασία λοιπόν, θα προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε

την παρατηρούμενη συστηματική των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- και να προβλέψουμε θεωρητικά, με την βοήθεια της στατιστικής μεθοδολογίας των τεχνητών νευρωνικών δικτύων, τους χρόνους ημίζωής των πολύ πλούσιων σε νετρόνια $\beta-$ασταθών πυρήνων που βρίσκονται μακριά από την κοιλάδα σταθερότητας και δεν έχουν ακόμη μετρηθεί πειραματικά.

Μια αξιόπιστη πρόβλεψη του χρόνου ημιζωής των βραχύβιων αυτών εξωτικών πυρήνων είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς θα μας δώσει πολύτιμες πληροφορίες για την δομική εξέλιξη στις περιοχές όπου κυριαρχεί η επονομαζόμενη $r-process$ διαδικασία νουκλεοσύνθεσης και θα μας παρέχει μια σημαντική εισαγωγή στους υπολογισμούς των εκρήξεων των υπερκαινοφανών αστέρων.

Παρά το γεγονός ότι η εργασία αυτή είναι πτυχιακή, έχει καταβληθεί αρκετή προσπάθεια, ώστε να εισάγει τον αναγνώστη σε όλα τα πεδία που διαπραγματεύεται, χωρίς να προϋποθέτει πρότερη γνώση του αντικειμένου είτε της Πυρηνικής Φυσικής, είτε των Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων. Η αυτονομία των επιστημονικών κειμένων άλλωστε, είναι μια ουσιαστική συμβολή στην προσπάθεια εκλαΐκευσης της επιστημονικής γνώσης.

Για την πολύτιμη συνδρομή τους στην όλη προσπάθεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Ειρήνη Μαυρομμάτη αρχικά και τους: Σπύρο Μπούκη, Γιώργο Παρασκευόπουλο, Γιώτα Δημητρούλη, Κώστα Κωστήρη, Γιάννη Μάστορη και Βέφη Παρασκευοπούλου.

Μέρος Ι

Η πυρηνική αποδιέγερση β

Κεφάλαιο 1

Ο Πυρήνας

Ο ΠΥΡΗΝΑΣ είναι ένα σύστημα Α **στοιχειωδών** σωματιδίων, τα οποία συγκρατούνται μεταξύ τους από τις πυρηνικές δυνάμεις. Η μηχανική ενός τέτοιου συστήματος δίνεται, με αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση, από την μη ρελατιβιστική Κβαντική Μηχανική. Ένας πυρήνας μπορεί να βρεθεί σε μια σειρά από κβαντισμένες ενεργειακές καταστάσεις (ιδιότητα δέσμιου κβαντισμένου συστήματος). Η στάθμη με την χαμηλότερη ενέργεια λέγεται **βασική στάθμη**. Στη στάθμη αυτή βρίσκονται όλοι οι πυρήνες στην συνήθη τους κατάσταση. Αν ένας πυρήνας διεγερθεί (απορροφήσει δηλ. ενέργεια) με κάποιο τρόπο, μεταβαίνει σε κάποια στάθμη μεγαλύτερης ενέργειας (**ισομερής κατάσταση**) και κατόπιν αποδιεγείρεται μεταβαίνο-ντας και πάλι στη βασική του στάθμη (ή στη στάθμη άλλου πυρήνα), με εκπο-μπή ακτινοβολίας γ (ή σωματιδίου και γ).

1.1 Δομικές Μονάδες, Φορτίο και Μάζα

Οι βασικοί δομικοί λίθοι του πυρήνα είναι τα **νουκλεόνια**, δηλαδή το **πρωτόνιο** και το **νετρόνιο**, δύο σωμάτια με μάζα περίπου 1840 φορές μεγαλύτερη από την μάζα του ηλεκτρονίου. Τα πρωτόνια έχουν θετικό ηλεκτρικό φορτίο, ίσο σε απόλυτη τιμή με το φορτίο του ηλεκτρονίου ενώ τα νετρόνια είναι ηλεκτρικά ουδέτερα. Σε ένα ουδέτερο άτομο, ο ολικός αριθ-μός των πρωτονίων είναι ίσος με τον αριθμό των ηλεκτρονίων και ονομάζεται **ατομικός αριθμός** Z. Ο αριθμός των νετρονίων, που συμβολίζεται με N, ονομάζεται **νετρονικός αριθμός**. Σε κάθε πυρήνα, ο **μαζικός αριθμός** Α ισούται

με το άθροισμα του ατομικού και νετρονικού αριθμού:

$$A = Z + N \tag{1.1}$$

και αντιπροσωπεύει τον ολικό αριθμό νουκλεονίων του συγκεκριμένου πυρήνα. Το ολικό φορτίο του πυρήνα επομένως $(-Ze)$, χαρακτηρίζεται από τον ατομικό αριθμό Z, ενώ η μάζα του από τον μαζικό αριθμό A. Ο πυρήνας συμβολίζεται με την έκφραση:

$$^{A}_{Z}X_{N}$$

Κάθε διακεκριμένος πυρήνας (με συγκεκριμένο Z και N δηλαδή) ονομάζεται **νουκλίδιο**. Πυρήνες με τον ίδιο αριθμό πρωτονίων Z ονομάζονται **ισοτοπικοί**, ή απλώς **ισότοπα**. Πυρήνες με τον ίδιο μαζικό αριθμό A ονομάζονται **ισοβαρείς**. Τέλος πυρήνες με τον ίδιο αριθμό νετρονίων ονομάζονται **ισότονοι**. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμαι τον καθιερωμένο περιληπτικό συμβολισμό του πυρήνα ^{A}X.

1.2 Τα Νουκλεόνια

Τα νουκλεόνια, όπως και τα λεπτόνια, είναι φερμιόνια με σπιν 1/2. Αλληλεπιδρούν κύρια με ισχυρή αλληλεπίδραση, καθώς επίσης και με την ασθενή ή την ηλεκτρομαγνητική. Η μάζα του νετρονίου είναι 0.14% μεγαλύτερη αυτής του πρωτονίου:

$$m_n = 939.566\ MeV/c^2,$$
$$m_p = 938.272\ MeV/c^2.$$

Η διαφορά των μαζών τους είναι $m_n - m_p = 1.29\ MeV/c^2$, ($\approx$ 2 μάζες ηλεκτρονίου).

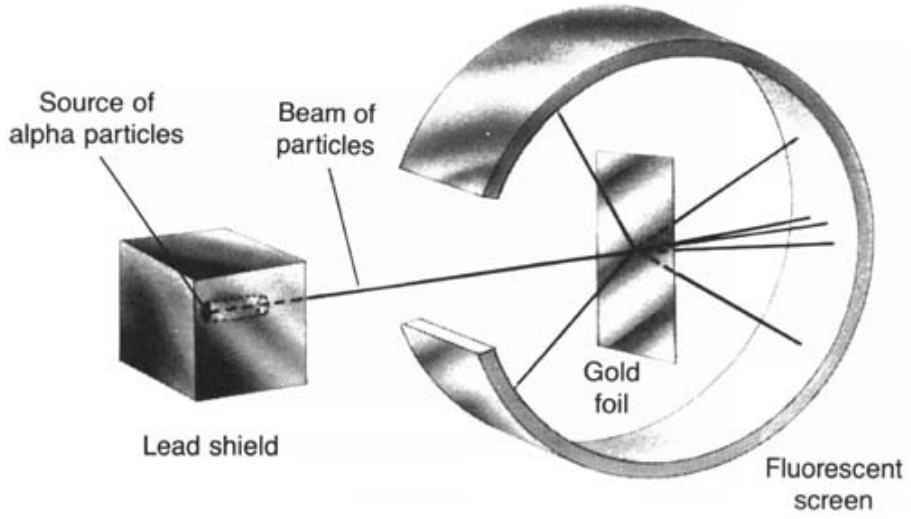
Το ηλεκτρικό φορτίο του πρωτονίου δεν συγκεντρώνεται σε ένα σημείο, αλλά είναι συμμετρικά κατανεμημένο γύρω από το κέντρο του πρωτονίου. Σήμερα γνωρίζουμε ότι η μέση ακτίνα R_p της κατανομής του φορτίου του πρωτονίου είναι $R_p \approx 0.8\ fm$. Μια εκτεταμένη κατανομή φορτίου βρέθηκε και για το νετρόνιο, όπου το θετικό φορτίο στην κεντρική περιοχή, εξουδετερώνεται από το αρνητικό φορτίο στις μεγαλύτερες αποστάσεις. Η κατανομή ύλης στα νουκλεόνια εκτείνεται επίσης σε μια απόσταση περίπου ίση με R_p.

Σε διαδικασίες σχετικές με την ισχυρή αλληλεπίδραση, τα πρωτόνια και τα νετρόνια συμπεριφέρονται σε καλή προσέγγιση με τον ίδιο τρόπο. Το ότι η ισχυρή αλληλεπίδραση είναι σχεδόν ανεξάρτητη από το είδος του νουκλεονίου, είναι ένα σημαντικό γεγονός για την κατανόηση των ιδιοτήτων του πυρήνα.

1.3 Μέγεθος και Σχήμα του Πυρήνα

Η εικόνα του ατόμου όπως είναι γνωστή σήμερα, ένα σύστημα ηλεκτρονίων σε τροχιές γύρω από τον πυρήνα, είχε ως αφετηρία τα ιστορικά πειράματα του Rutherford [27] τα οποία συμπλήρωσε θεωρητικά δύο χρόνια αργότερα ο Bohr [64] στα πλαίσια της τότε νεογέννητης Κβαντικής Μηχανικής. Με την σκέδαση των σωματιδίων α από την ύλη ο Rutherford, ήδη από το 1911, απέδειξε ότι το μέγεθος του πυρήνα ενός ατόμου είναι πολύ μικρό, συγκρινόμενο με το μέγεθος του ατόμου. Μεταγενέστερα πειράματα έδειξαν ότι η κατανομή των νουκλεονίων περιορίζεται σε μερικά μόνο fermis ($1fm = 10^{-15}\ m$), ενώ γνωρίζουμε ότι η κατανομή των ηλεκτρονίων εκτείνεται μέχρι μια απόσταση από τον πυρήνα της τάξης του angström ($1\mathring{A} = 10^{-10}\ m$).

Η σκέδαση σωματιδίων από πυρήνες είναι η πιο άμεση μέθοδος για τον προσδιορισμό του μεγέθους και του σχήματος τους. Μια τυπική πειραματική διάταξη της διαδικασίας αυτής δίνεται στο σχήμα 1.1. Μια δέσμη σωματίων με κινητική ενέργεια E βομβαρδίζει τους πυρήνες μέσα σε ένα λεπτό φύλλο και το σχήμα του πυρήνα προσδιορίζεται από την χαρακτηριστική κατανομή ως προς την γωνία απόκλισης των σωματίων που σκεδάζονται. Υπάρχει όμως ένας βασικός περιορισμός στη διακριτική ικανότητα του πειράματος που είναι άμεσα συνδεδεμένος με την ενέργεια των σωματιδίων της αρχικής δέσμης.



Σχήμα 1.1: Η πειραματική διάταξη του Rutherford.

Όπως γνωρίζουμε από την Κβαντική Μηχανική, ένα σωμάτιο με μάζα m που κινείται με ταχύτητα u συνδέεται με ένα μήκος κύματος:

$$\lambda = \frac{h}{mu} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} \tag{1.2}$$

Είναι επομένως φανερό ότι μόνο σωμάτια που έχουν μήκος κύματος της εξίσωσης (1.2) συγκρίσιμο ή μικρότερο από τις διαστάσεις του πυρήνα θα δώσουν πληροφορίες για τις λεπτομέρειές του. Το κοινό φως για παράδειγμα με μήκος κύματος της τάξης των $10^{-7}\ m$ ($10^{8}\ fm$) είναι τελείως ακατάλληλο. Εξίσου ακατάλληλη είναι και ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μικρό μήκος κύματος (ακτίνες Χ ή ακτίνες γ) καθώς η αλληλεπίδρασή της με τα ηλεκτρόνια που περιβάλλουν τον ατομικό πυρήνα στη συνήθη κατάσταση της ύλης είναι κατά πολύ πιο ισχυρή.

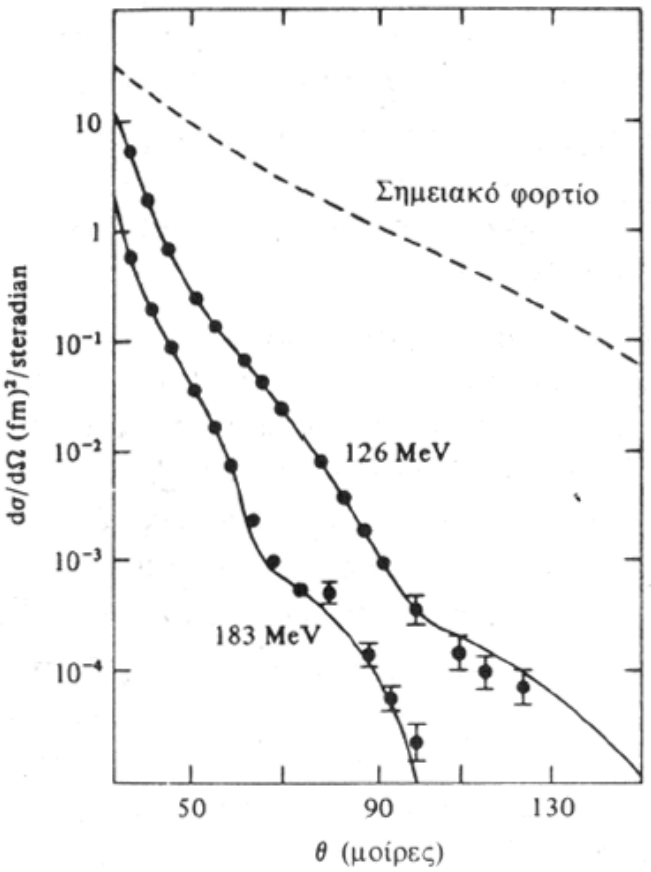
Έτσι σε πειράματα που αποσκοπούν στον προσδιορισμό του μεγέθους και του σχήματος του πυρήνα, αναγκαστικά οδηγείται κανείς στην χρήση σωματίων, όπως ηλεκτρόνια πρωτόνια και νετρόνια. Οι αντίστοιχες ενέργειες που απαιτούνται σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση δίνονται στον πίνακα 1.1.

	$E_{κιν}\ (MeV)$	
Σωμάτιο	λ=1 fm	λ=5 fm
e	1240	247
p, n	620	32
α	200	8.2

Πίνακας 1.1: Κινητική ενέργεια σωματίων με μήκος κύματος λ=1 fm και λ=5 fm.

Πειράματα με πρωτόνια, νετρόνια και σωμάτια α παρουσιάζουν το πλεονέκτημα ότι απαιτούν χαμηλές ενέργειες που αναπτύσσονται σχετικά εύκολα σε σύγχρονους επιταχυντές. Αντίθετα ο προσδιορισμός χαρακτηριστικών του πυρήνα με σκέδαση ηλεκτρονίων απαιτεί ενέργεια μεγαλύτερη από 200 MeV, που είναι αρκετά δύσκολο να επιτευχθεί. Παρουσιάζει όμως το βασικό πλεονέκτημα ότι η αλληλεπίδραση που προκαλεί τη σκέδαση, είναι αποκλειστικά η γνωστή ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση.

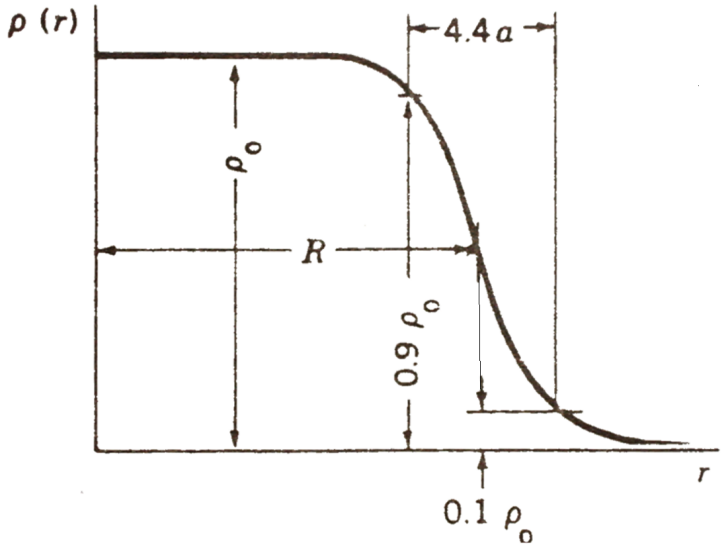
Το 1955, η ερευνητική ομάδα του Πανεπιστημίου Stanfordr της Καλιφόρνια υπό τον R. Hofstadter [9, 75] μελέτησε τη σκέδαση ηλεκτρονίων από έναν μεγάλο αριθμό πυρήνων και για διάφορες ενέργειες βομβαρδισμού ηλεκτρονίων. Τυπικά αποτελέσματα των πειραμάτων για την περίπτωση του ^{197}Au δίνονται στο σχήμα 1.2, όπου είναι φανερή η απόκλιση της γωνιακής κατανομής από την ομαλή συνάρτηση της εξ. (1.2). Σε όλες τις περιπτώσεις μπόρεσαν να προσεγγίσουν τα αποτελέσματά τους με την υπόθεση ότι η πυκνότητα των νουκλεονίων στον πυρήνα δίνεται από την έκφραση:



Σχήμα 1.2: Γωνιακή κατανομή για σκέδαση ηλεκτρονίων με ενέργειες 183 και 126 MeV. Οι καμπύλες διαμέσου των πειραματικών δεδομένων αντιπροσωπεύουν θεωρητικούς υπολογισμούς της γωνιακής κατανομής με βάση το πυρηνικό σχήμα της εξ. (1.3).

$$\rho(r) = \frac{\rho_o}{1 + exp(\frac{r-R}{\alpha})} \tag{1.3}$$

Η τελευταία συνάρτηση, που παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία δίνεται στη γραφική παράσταση του σχήματος 1.3. Από τη γραφική αυτή παράσταση είναι φανερή η φυσική σημασία των παραμέτρων της συνάρτησης $\rho(r)$. Για $r << R$ η παράμετρος ρ_o αντιπροσωπεύει τη σταθερή πυκνότητα των νουκλεονίων στο εσωτερικό του πυρήνα, ενώ R είναι η απόσταση από το κέντρο του πυρήνα έως το σημείο όπου η πυκνότητα των νουκλεονίων μειώνεται στο μισό της αρχικής τιμής ($\frac{1}{2}\rho_o$) και είναι η παράμετρος που πλησιάζει περισσότερο τον χαρακτηρισμό της ακτίνας του πυρήνα. Τέλος η παράμετρος α προσδιορίζει τον ρυθμό με τον οποίο μειώνεται η πυκνότητα των νουκλεονίων στην επιφάνεια



Σχήμα 1.3: Γραφική παράσταση της πυκνότητας νουκλεονίων $\rho(r)$ της εξ. (1.2).

του πυρήνα. Ειδικότερα, η πυκνότητα $\rho(r)$ μειώνεται από 90% σε 10% της τιμής ρ_o σε μια απόσταση $t = 4.39\alpha$ δηλαδή περίπου $2.5fm$ που μπορεί να χαρακτηριστεί ως το πάχος του πυρηνικού φλοιού.

Τα αποτελέσματα των προηγούμενων πειραμάτων είναι αρκετά απλά. Ο πυρήνας εμφανίζεται ως μια σφαίρα με σταθερή πυκνότητα νουκλεονίων στο εσωτερικό του και μια διάχυτη επιφάνεια κατά την έκταση της οποίας μειώνεται ομαλά η πυκνότητα. Κάθε πυρήνας χαρακτηρίζεται από μια ομάδα παραμέτρων ρ_o, R και α που προσδιορίζουν την αριθμητική τιμή της συνάρτησης στην εξ. (1.3). Τα αποτελέσματα όμως γίνονται ακόμη πιο απλά αν παρακολουθήσει κανείς τη συστηματική μεταβολή των παραμέτρων της εξ. (1.3) σε όλη την έκταση του Περιοδικού συστήματος. Όπως απέδειξαν τα πειράματα σκέδασης ηλεκτρονίων που περιγράψαμε, το σχήμα πυρήνων με μαζικό αριθμό A>40 μπορεί να αποδοθεί σε καλή προσέγγιση με αριθμητικές τιμές των παραμέτρων:

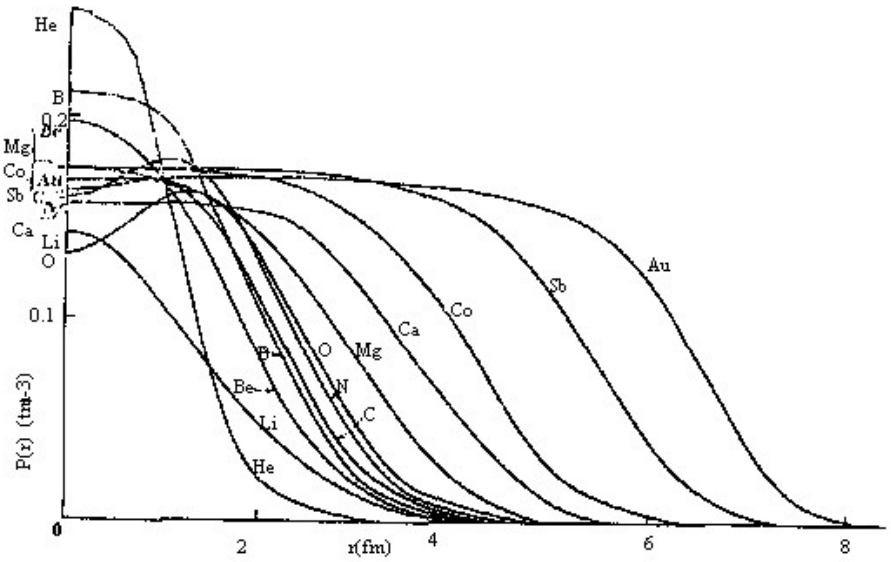
$$\rho_o \cong 0.165 \text{ νουκλεόνια}/fm^3 = 0.165 \cdot 10^{39} \text{ νουκλεόνια}/cm^3$$

$$R \cong 1.07 A^{\frac{1}{3}} fm \tag{1.4}$$

$$\alpha \approx 0.55 fm$$

Η προσεγγιστικά σταθερή τιμή της πυκνότητας νουκλεονίων στο εσωτερικό του πυρήνα, είναι μια πλευρά του φαινομένου που είναι γνωστό ως **πυρηνικός κορεσμός**. Στο σχήμα 1.4 παρουσιάζονται κάποιες μέσες γωνιακές κατανο-μές φορτίου για ορισμένους πυρήνες, που προέρχονται από ανάλυση πειραματικών δεδομένων σκέδασης με χρήση της παραμετροποίησης (1.3) και

δίνουν μια αίσθηση για την πυκνότητα της πυρηνικής ύλης. Παρατηρούμε ότι το He έχει μεγαλύτερη πυκνότητα στο εσωτερικό του από όλους τους πυρήνες. Αντίστοιχες τιμές για τα R και α ορισμένων πυρήνων δίνονται στον πίνακα 1.2.



Σχήμα 1.4: Πυκνότητα νουκλεονίων σε ενδεικτικούς πυρήνες.

Όπως φαίνεται από το σχήμα και τον πίνακα, υπάρχει ένας καλά ορισμένος εξωτερικός φλοιός που έχει το ίδιο πάχος για όλους τους πυρήνες, ακόμα και για τους ελαφρύτερους.

Πυρήνας	$R\ (fm)$	$\alpha\ (fm)$	$R/A^{1/3}\ (fm)$
^{16}O	2.61	0.513	1.04
^{109}Ag	5.33	0.523	1.12
^{208}Pb	6.55	0.526	1.12

Πίνακας 1.2: Πυρηνικές ακτίνες R και πυρηνικά επιφανειακά πάχη α.

Στην πραγματικότητα όμως, δεν είναι όλοι οι πυρήνες σφαιρικοί. Ορισμένοι παρουσιάζουν εγγενής μη−σφαιρικές δομές ή παραμορφώσεις. Μερικοί πυρήνες πραγματοποιούν ταλαντώσεις γύρω από μια σφαιρική μορφή, ενώ άλλοι επιδεικνύουν μόνιμη εγγενή παραμόρφωση. Επιμήκεις (σχήματος μπάλας ράγκμπι) τετραπολικές παραμορφώσεις εμφανίζονται σε μεγάλο αριθμό πυρήνων (σχήμα 1.5). Οκταπολικές (σχήματος αχλαδιού) και υψηλότερου βαθμού παραμορφώσεις έχουν παρατηρηθεί επίσης.



Σχήμα 1.5: Επιμήκεις τετραπολικές παραμορφώσεις του πυρήνα.

1.4 Δυνάμεις μεταξύ Νουκλεονίων

Ίσως το πιο εκπληκτικό αποτελέσματα των πειραμάτων για τον προσδιορισμό του πυρηνικού σχήματος είναι ο μεγάλος συνωστισμός νουκλεονίων μέσα στον πυρήνα. Σε σύγκριση με τον αριθμό του Loschmidt (πυκνότητα μορίων μέσα σε ένα ιδανικό αέριο $= 2.687 \cdot 10^{19}$ μόρια/cm^3) η αντίστοιχη πυκνότητα νουκλεονίων μέσα στον πυρήνα εμφανίζεται μεγαλύτερη κατά 19 τάξεις μεγέθους! Μέσα στον εκπληκτικά μικρό όγκο του πυρήνα περιορίζεται ένας μεγάλος αριθμός νουκλεονίων με αποτέλεσμα να δημιουργούνται τεράστιες απωστικές δυνάμεις μεταξύ των θετικά φορτισμένων πρωτονίων. Μια χαρα-κτηριστική τιμή των ηλεκτροστατικών αυτών δυνάμεων μπορεί να υπολογιστεί αν θεωρήσουμε δύο πρωτόνια σε απόσταση 1 fm. Στην περίπτωση αυτή η απωστική δύναμη είναι:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o r^2} = 1.44 MeV/fm^* = 231N \tag{1.5}$$

ίση περίπου με τη δύναμη που χρειάζεται για να σηκώσουμε 23 χιλιόγραμμα.

Ανάλογα υψηλή είναι και η αντίστοιχη ηλεκτροστατική ενέργεια που περιέχεται στον πυρήνα. Για σφαιρικό πυρήνα ακτίνας R και ολικού φορτίου Ze θα δίνεται από την σχέση:

$$W = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_o R^2} = 0.81\frac{Z^2}{A^{1/3}} MeV \tag{1.6}$$

Έτσι για ένα πυρήνα στο μέσο του Περιοδικού Συστήματος, όπως ο ^{120}Sn ($Z = 50$, $A = 120$), η ηλεκτροστατική ενέργεια θα ανέρχεται σε 500 MeV. Οι παραπάνω υπολογισμοί οδηγούν στο εύλογο ερώτημα, τι συγκρατεί τα νουκλεόνια μέσα στο πυρηνικό σύστημα, αφού μεταξύ των πρωτονίων αναπτύσσονται τόσο ισχυρές δυνάμεις που τείνουν να τα διασπείρουν;

---

*$e^2/4\pi\varepsilon_o \approx 1.44\ MeV$

Η συνοχή σταθερών συστημάτων είναι αναπόσπαστα συνδεδεμένη με την ύπαρξη δυνάμεων. Είναι φανερό ότι οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις αδυνατούν να εξηγήσουν την συνοχή του πυρήνα, ενώ η δύναμη της βαρύτητας μεταξύ των νουκλεονίων είναι μεν ελκτική, αλλά πολύ ασθενέστερη από την ηλεκτροστατική. Είναι εύκολο να υπολογίσουμε ότι ο λόγος της ηλεκτροστατικής προς τη βαρυτική δύναμη είναι περίπου 10^{39}. Στην πραγματικότητα η επίδραση της βαρύτητας στα μοριακά, ατομικά και πυρηνικά φαινόμενα είναι αμελητέα. Οδηγούμαστε λοιπόν στην αναγνώριση ότι υπάρχει ένα τρίτο είδος δυνάμεων στη φύση, που θα τις ονομάσουμε **πυρηνικές δυνάμεις**.

1.5 Η Πυρηνική Δύναμη

Από τα όσο είδαμε ως τώρα είναι φανερό ότι οι πυρηνικές δυνάμεις θα πρέπει να έχουν δύο χαρακτηριστικές ιδιότητες. Θα πρέπει κατ' αρχήν, για αποστάσεις συγκρίσιμες με τις διαστάσεις του πυρήνα, να είναι πολύ ισχυρότερες των αποστικών δυνάμεων Coulomb. Αντίθετα όπως γνωρίζουμε, τα ατομικά και μοριακά φαινόμενα είναι δυνατόν να εξηγηθούν με μεγάλη ακρίβεια μόνο με βάση τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Επομένως οι πυρηνικές δυνάμεις θα πρέπει να είναι αμελητέες για τις χαρακτηριστικές αποστάσεις μεταξύ πυρήνων στη μοριακή δομή. Με άλλα λόγια η εμβέλεια των πυρηνικών δυνάμεων πρέπει να είναι μικρή (της τάξης μεγέθους των διαστάσεων του πυρήνα, δηλ. $1\ fm$) και η συναρτησιακή τους σχέση με την απόσταση θα πρέπει να είναι πολύ πιο δραστική από την ομαλή εξάρτηση r^{-2} των δυνάμεων βαρύτητας και Coulomb. Επιπλέον, η σχεδόν σταθερή πυκνότητα της πυρηνικής ύλης και η σχεδόν σταθερή ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο ($\beta\lambda\acute{\epsilon}\pi\epsilon$ Κφάλαιο 2), δείχνουν ότι κάθε νουκλεόνιο σε έναν πυρήνα δεν μπορεί να αλληλεπιδρά ταυτόχρονα με όλα τα άλλα, αλλά μόνο με τα λίγα νουκλεόνια στην άμεση γειτονιά του. Τέλος, η πυρηνική δύναμη ευνοεί το σχηματισμό δεσμού μεταξύ ζευγών πρωτονίων ή νετρονίων με αντίθετα σπιν, καθώς και ζευγών ζευγών (δηλαδή ενός ζεύγους πρωτονίων και ενός ζεύγους νετρονίων, όπου τα σπίν των αλληλεπιδρώντων νουκλεονίων σε κάθε ζεύγος είναι αντίθετα). Το σωμάτιο άλφα για παράδειγμα (Z=2, N=2) είναι ένας εξαιρετικά σταθερός πυρήνας. Το φαινόμενο σχηματισμού ζευγών καλείται **ζευγοποίηση**. Η ακριβής μορφή παρ' όλα αυτά των δυνάμεων μεταξύ νουκλεονίων αποτελεί ακόμη ανοικτό θέμα και αποσπά ένα μεγάλο μέρος της σύγχρονης ερευνητικής προσπάθειας.

Κεφάλαιο 2

Πυρηνική Σταθερότητα

Η ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ του ατομικού πυρήνα από πρωτόνια και νετρόνια συνεπάγεται καταβολή έργου. Αν το τελικό σύστημα είναι σταθερό, σημαίνει ότι κατά τη συγκρότησή του απελευθερώθηκε ενέργεια, η οποία θα πρέπει να καταβληθεί αν θελήσουμε να το διασπείρουμε πάλι σε ελεύθερα νουκλεόνια. Αντίθετα, αν το τελικό σύστημα είναι ασταθές, θα πρέπει να έχει καταβληθεί κάποιο έργο για την συγκρότησή του, το οποίο παραμένει με την μορφή αποθηκευμένης ενέργειας και θα αποδοθεί στο περιβάλλον αν ο πυρήνας αποσυντεθεί σε ελεύθερα νουκλεόνια. Αν επιπλέον συμπερι-λάβουμε και τη μικρή επιπρόσθετη ενέργεια που απαιτείται για την δημιουργία του τελικού ουδέτερου ατόμου με την προσθήκη ηλεκτρονίων, το ισοζύγιο ενέργειας οδηγεί στον ορισμό της **ενέργειας σύνδεσης**:

$$E_B(A,Z) = ZM_H + (A-Z)m_n - M(A,Z), \tag{2.1}$$

όπου M_H είναι η μάζα του ουδέτερου ατόμου του υδρογόνου, m_n η μάζα του νετρονίου και $M(A,Z)$ η μάζα του ουδέτερου ατόμου με μαζικό αριθμό A και ατομικό αριθμό Z. Η ποσότητα $E_B(A,Z)$ στην εξίσωση (2.1) μπορεί να εκφραστεί είτε σε amu, ή, μέσω της σχέσης $E = mc^2$, σε MeV. Θα έχει θετική τιμή για σταθερές και ασταθείς πυρηνικές δομές και αρνητική για πυρηνικές δομές που δεν μπορούν να υπάρξουν. Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζονται οι ενέργειες σύνδεσης για μερικούς από τους ελαφρότερους πυρήνες, που προκύπτουν αν ξεκινώντας από το Υδρογόνο, προσθέτουμε εναλλάξ ένα νετρόνιο και ένα πρωτόνιο. Οι ενέργειες σύνδεσης είναι θετικές για ένα μεγάλο εύρος αριθμού νετρονίων και πρωτονίων του πυρηνικού συστήματος, γεγο-

νός που αντανακλά τη σχετικά μεγάλη εμβέλεια της ελκτικής αλληλεπίδρασης νουκλεονίου−νουκλεονίου.

Πυρήνας	Ενέργεια Σύνδεσης (MeV)	Ενέργεια Σύνδεσης τελευταίου νουκλεονίου	Ενέργεια Σύνδεσης ανά νουκλεόνιο	Spin και ομοτιμία
${}^{2}_{1}H$	2.22	2.2	1.1	1^+
${}^{3}_{1}H$	8.48	6.3	2.8	$\frac{1}{2}^+$
${}^{4}_{2}He$	28.30	19.8	7.1	0^+
${}^{5}_{2}He$	27.34	-1.0	5.5	$\frac{3}{2}^-$
${}^{6}_{3}Li$	31.99	4.7	5.3	1^+
${}^{7}_{3}Li$	39.25	7.3	5.6	$\frac{3}{2}^-$
${}^{8}_{4}Be$	56.50	17.3	7.1	0^+
${}^{9}_{4}Be$	58.16	1.7	6.5	$\frac{3}{2}^-$

Πίνακας 2.1: Ενέργειες για μερικούς ελαφρούς πυρήνες (MeV).

2.1 Μάζα και Ενέργεια Σύνδεσης του Πυρήνα

Η μάζα του ατομικού πυρήνα είναι σήμερα γνωστή σε όλη την έκταση του Περιοδικού Συστήματος με ακρίβεια 6 ή 7 σημαντικών ψηφίων. Τιμές της πυρηνικής μάζας δίνονται συνήθως μέσω της ποσότητας Δ κατά την οποία η μάζα του αντίστοιχου ουδέτερου ατόμου $M(A,Z)$ υπερβαίνει τον μαζικό αριθμό A:

$$\Delta = M(A,Z) - A \tag{2.2}$$

η οποία αναφέρεται ως **πλεόνασμα μάζας** ή **έλλειμμα μάζας**. Μέσω του ελλείμματος μάζας Δ η μάζα του πυρήνα μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$M(A,Z) = 931.478A + \Delta \quad MeV. \tag{2.3}$$

Το πλεόνασμα μάζας που ορίζεται στην εξ. (2.2) είναι στενά συνδεδεμένο με την ενέργεια σύνδεσης της εξ. (2.1), δηλαδή με την ενέργεια που θα απελευθερωθεί αν διασπάσουμε τον πυρήνα στα συστατικά του.

2.2 Πυρηνικά Πρότυπα

Ο πυρήνας όπως είδαμε είναι ένα αυτοοργανωμένο κβαντικό σύστημα πολλών σωματιδίων, το οποίο αλληλεπιδρά μέσω ισχυρών, ασθενών και ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων. Η κατασκευή λοιπόν μιας απλής θεωρητικής περιγραφής του συστήματος αυτού αποτελεί μια μεγάλη πρόκληση για τον σύγχρο-

νο επιστήμονα. Μέχρι σήμερα όμως η λεπτομερής φύση των πυρηνικών δυνάμεων δεν έχει γίνει πλήρως κατανοητή. Τα διάφορα μοντέλα που έχουν προταθεί είναι φαινομενολογικά και ερμηνεύουν ικανοποιητικά κάποια, αλλά όχι όλα τα φαινόμενα που σχετίζονται με την συμπεριφορά των πυρήνων. Τα βασικότερα πυρηνικά μοντέλα που έχουν ως τώρα αναπτυχθεί λοιπόν, είναι τα εξής:

2.2.1 Πρότυπο των Φλοιών ή των Ανεξάρτητων Σωματιδίων

Ένα εξαιρετικά σημαντικό χαρακτηριστικό του πυρηνικού συστήματος, πρωτοπαρατηρούμενο την δεκαετία του 1940, ήταν ότι ορισμένοι συνδυασμοί πρωτονίων−νετρονίων είναι ιδιαίτερα σταθεροί. Αυτοί οι *μαγικοί αριθμοί* (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ...) μπορούν να εξηγηθούν από το επονομαζόμενο **Πρότυπο των Φλοιών**, σύμφωνα με το οποίο κάθε νουκλεόνιο κινείται σε κάποια τροχιά, λόγω της ύπαρξης μια κεντρικής δύναμης που οφείλεται στην μέση επίδραση των υπόλοιπων νουκλεονίων. Τα νουκλεόνια στοιβάζονται σε *ενεργειακούς φλοιούς* (δηλ. ενεργειακές καταστάσεις του δυναμικού), σύμφωνα με τις αρχές της Κβαντικής Μηχανικής (π.χ. Απαγορευτική αρχή του *Pauli*, αφού είναι φερμιόνια), όπως και τα ηλεκτρόνια στα άτομα. Οι μαγικοί αριθμοί τότε, αντιπροσωπεύουν πλήρως κατειλημμένους ή κλειστούς σταθερούς ενεργειακούς φλοιούς πρωτονίων ή νετρονίων. Κάθε νουκλεόνιο που κινείται σε τροχιά πέρα από τον τελευταίο κλειστό φλοιό συμπεριφέρεται ως **νουκλεόνιο σθένους** (δηλ. ελεύθερο σωμάτιο) το οποίο μπορεί να διεγερθεί σε υψηλότερες κβαντικές καταστάσεις. Το Πρότυπο των Φλοιών δίνει ορθότερα αποτελέσματα για τους πιο ελαφρύς πυρήνες και για αυτούς με αριθμούς νετρονίων και πρωτονίων κοντά σε κλειστό φλοιό.

2.2.2 Μοντέλο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων

Ένα άλλο μοντέλο, το **Μοντέλο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων** (IBM) , επιτυχές για αρκετούς πυρήνες, περιγράφει τα νουκλεόνια ως σχηματισμούς ζευγών σε δομικές μονάδες με μποζονικές ιδιότητες ολικού σπίν 0, 2 ή 4 που χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες κβαντικές ιδιότητες όμοιες με αυτές που συναντούμε στα ζεύγη ηλεκτρονίων που ευθύνονται για την υπεραγωγιμότητα. Η μεταβολές της δομής του πυρηνικού συστήματος τότε, θα μπορούν να περιγράφουν από ζεύγη που διεγείρονται ή θρυμματίζονται.

2.2.3 Πρότυπο της Υγρής Σταγόνας και Συλλογικό Μοντέλο

Για βαρύς πυρήνες και αυτούς με νουκλεόνια που δεν βρίσκονται κοντά σε μαγικούς αριθμούς, οι αλληλεπιδράσεις περιγράφονται καλύτερα από άλλου τύπου μοντέλα, σύμφωνα με τα οποία τα νουκλεόνια θεωρούνται συλλογικά ως **υγρή σταγόνα**, που συνδέονται μεταξύ τους με δυνάμεις βραχείας εμβέλειας και συγκροτούνται λόγω επιφανειακής τάσης. Συμπεριφέρονται έτσι, κατά κάποιο τρόπο, όπως τα μόρια μιας σταγόνας νερού (κινούνται, αλληλεπιδρούν, συγκρούονται κ.ο.κ.). Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τον *Bohr* το 1936. Κατά την διέγερση του πυρηνικού συστήματος τα νουκλεόνια κινούνται όλα μαζί, κάνοντας τον πυρήνα να δονείται ή να περιστρέφεται ή ακόμα και να αλλάζει σχήμα. Πολλές πυρηνικές ιδιότητες ωστόσο, δείχνουν μια πιο σύνθετη συμπεριφορά του συστήματος που εμπεριέχει αλληλεπίδραση μεταξύ συλλογικών διεγέρσεων και διεγέρσεων απλού σωματιδίου ή μποζονίου.

2.3 Ο Ημιεμπειρικός Τύπος της Μάζας σύμφωνα με το Πρότυπο της Υγρής Σταγόνας

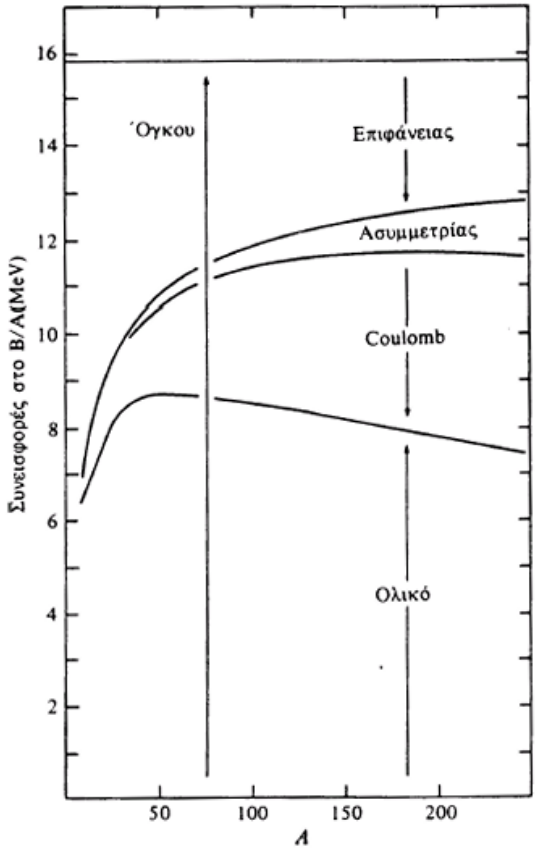
Η συμπεριφορά της μέσης ενέργειας σύνδεσης ανά νουκλεόνιο μέσα στον πυρήνα, θυμίζει κατά πολύ τη λανθάνουσα θερμότητα υγροποίησης που απαντάται στην κλασική φυσική. Αυτή η παρατήρηση οδήγησε τον Γερμανό φυσικό *Weizsäcker* στον ακόλουθο **ημιεμπειρικό τύπο**:

$$E_B(A,Z) = \alpha_v A - \alpha_s A^{2/3} - \alpha_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - \alpha_\alpha \frac{(A-2Z)^2}{A} \pm \delta \qquad (2.4)$$

όπου M_H και m_n είναι αντίστοιχα η μάζα του υδρογόνου και του νετρονίου. Ο τύπος ονομάζεται ημιεμπειρικός, καθώς οι σταθερές της έκφρασης αυτής, μπορούν να προσδιοριστούν από την προσαρμογή προς πειραματικά δεδομένα της μάζας του πυρήνα σε όλη την έκταση του Περιοδικού Συστήματος. Με την συνεχή προσθήκη πειραματικών δεδομένων υψηλής ακριβείας η διαδικασία αυτή έχει επαναληφθεί πολλές φορές στο παρελθόν από διάφορους ερευνητές. Αν εξαιρεθούν τα δυο άκρα του περιοδικού συστήματος, η ενέργεια σύνδεσης είναι δυνατόν να αποδοθεί με ακρίβεια της τάξης του 1% από τις τιμές των παραμέτρων:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= 15.6 \quad MeV \\ \alpha_s &= 17.4 \quad MeV \\ \alpha_c &= 0.70 \quad MeV \\ \alpha_\alpha &= 23.3 \quad MeV \\ \delta &= 0.6 - 1.0 \quad MeV. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Για τις τιμές αυτές των εμπειρικών σταθερών, η συνεισφορά κάθε όρου της εξ. (2.4) δίνεται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: Σχετική συμπεριφορά των διαφόρων όρων του ημιεμπειρικού τύπου στη μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο.

2.4 Μορφές Πυρηνικής Αποδιέγερσης

Στην περίπτωση που το πυρηνικό σύστημα είναι ασταθές, αυθόρμητα θα αποδιεγερθεί σε μια κατάσταση σταθερότερη, δηλαδή σε μια κατάσταση με μεγαλύτερη ενέργεια σύνδεσης E_B. Η αποδιέγερση αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με τρεις διαφορετικές διαδικασίες, ανάλογα με την διαθέσιμη ενέρ-γεια και το είδος των προϊόντων, τα οποία αν εξαιρέσουμε τον θυγατρικό πυρήνα, εν γένει, καλούνται *ακτινοβολία*: την αποδιέγερση α, την αποδιέγερση β, και την αποδιέγερση γ.

Έτσι προϊόν της αποδιέγερσης α είναι η ακτινοβολία α. Πρόκειται για πυρήνες He (σωμάτια άλφα) και μπορεί να ερμηνευθεί μέσω του φαινομένου

σήραγγας. Τελείως ανάλογα, προϊόν της αποδιέγερσης β είναι η ακτινοβολία β. Πρόκειται για ηλεκτρόνια ή ποζιτρόνια. Η μελέτη της (φαινόταν αρχικά να παραβιάζει την αρχή διατήρησης ενέργειας και ορμής) οδήγησε στην ανακάλυψη του νετρίνου ($Pauli, 1930$), ουδέτερου σωματιδίου, πιθανόν χωρίς μάζα, με σπιν $1/2$, που αλληλεπιδρά πολύ ασθενικά με την ύλη. Τέλος, προϊόν της αποδιέγερσης γ είναι η αποκαλούμενη ακτινοβολία γ. Είναι φωτόνια με πολύ υψηλή ενέργεια (MeV). Εκπέμπεται κυρίως από τους πυρήνες που αποτελούν προϊόντα αποδιέγερσης α ή β, οι οποίοι στις περισσότερες περιπτώσεις, όπως είπαμε, βρίσκονται σε ισομερείς καταστάσεις.

2.5 Η Αποδιέγερση β

Η πυρηνική αποδιέγερση β είναι η διαδικασία κατά την οποία, ένας πυρήνας αποτελούμενος από Z πρωτόνια και N νετρόνια, διασπάται σε ένα πυρήνα του ίδιου μαζικού αριθμού A, αλλά με $(Z \mp 1,\ N \pm 1)$. Έτσι, μια β^-αποδιέγερση:

$$ {}^{A}_{Z}X_N \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X_{N-1} + e^- + \bar{v}_e, \tag{2.6} $$

μπορεί να θεωρηθεί ως ο μετασχηματισμός ενός από τα νετρόνια του πυρήνα σε ένα πρωτόνιο και μια β^+αποδιέγερση:

$$ {}^{A}_{Z}X_N \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X_{N+1} + e^+ + v_e, \tag{2.7} $$

ως ο μετασχηματισμός ενός πρωτονίου σε ένα νετρόνιο.

Σε αναλογία με την εσωτερική μετατροπή στις ηλεκτρομαγνητικές διασπάσεις, ένα ατομικό ηλεκτρόνιο μπορεί να δεσμευτεί από τον πυρήνα αντί να εκπέμψει ένα ποζιτρόνιο στην β^+ διάσπαση:

$$ {}^{A}_{Z}X_N + e^- \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X_{N+1} + v_e. \tag{2.8} $$

Εκτός από μια μικρή διαφορά στις ενέργειες την οποία θα εξετάσουμε αργότερα, μια τέτοια διαδικασία σύλληψης ηλεκτρονίου έχει τον ίδιο κανόνα επιλογής, όπως η β^+ διάσπαση και είναι συνήθως ανταγωνιστική της. Η πιθανότητα της ηλεκτρονικής σύλληψης αυξάνει με το Z^3 εξαιτίας της αύξησης της ισχύος του πυρηνικού πεδίου $Coulomb$ και την μείωση των ακτινών των ηλεκτρονικών τροχιών σε άτομα με αυξανόμενο αριθμό πρωτονίων.

2.6 Η τιμή$-Q$

Η τιμή$-Q$ μιας αντίδρασης ορίζεται ως η διαφορά της ολικής κινητικής ενέργειας του συστήματος πριν και μετά την αντίδραση,

$$ Q = T_f - T_i \tag{2.9} $$

Για μια πυρηνική $\beta-$αποδιέγερση μπορούμε να θεωρήσουμε τον μητρικό πυρήνα σε ηρεμία στο εργαστήριο και την ολική αρχική κινητική ενέργεια T_i του συστήματος μηδέν. Για να πραγματοποιηθεί μια αντίδραση, η $\beta-$αποδιέγερση στην προκειμένη περίπτωση, η τιμή$-Q$ πρέπει να είναι θετική. Αφού κατά την διαδικασία εκπέμπεται είτε ηλεκτρόνιο, είτε ποζιτρόνιο, η τιμή$-Q$ δεν είναι απλώς η διαφορά μεταξύ των ενεργειών της αρχικής και τελικής κατάστασης του πυρήνα. (Η μάζα του νετρίνο είναι πολύ μικρή, αν όχι μηδενική, για να διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στις εδώ θεωρήσεις).

Μια περαιτέρω επιπλοκή, προέρχεται εκ του γεγονότος ότι η μάζα και η ενέργεια σύνδεσης ενός πυρήνα ορίζονται για ουδέτερο άτομο. Δηλαδή η διαφορά μαζών μεταξύ μητρικού και θυγατρικού πυρήνα σε μια $\beta-$αποδιέγερση,

$$\Delta M_{\beta^{\pm}} = M\left(Z, N\right) - M\left(Z \mp 1, N \pm 1\right) \tag{2.10}$$

περιλαμβάνει την μάζα και την ενέργεια σύνδεσης ενός ατομικού ηλεκτρονίου επίσης. Γι' αυτό το λόγο η τιμή$-Q$ της β^-αποδιέγερσης δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$Q_{\beta^-} = \left(M\left(Z, N\right) - M\left(Z + 1, N - 1\right)\right) c^2, \tag{2.11}$$

αφού το ηλεκτρόνιο που εκπέμπεται κατά την αποδιέγερση μπορεί να χρησιμοποιηθεί, όσον αφορά τους υπολογισμούς ενέργειας, για να αντισταθμίσει το επιπλέον ηλεκτρόνιο που απαιτείται για μετατραπεί το θυγατρικό άτομο σε ουδέτερο. Από την άλλη, τιμή$-Q$ της β^+αποδιέγερσης θα δίνεται από:

$$Q_{\beta^+} = \left(M\left(Z, N\right) - M\left(Z - 1, N + 1\right)\right) c^2 - 2m_e c^2, \tag{2.12}$$

αφού ένα ποσό ενέργειας ισοδύναμο με αυτό που απαιτείται για να δημιουργηθούν δυο ηλεκτρόνια πρέπει να παρασχεθεί από την αποδιέγερση, ένα για το εκπεμπόμενο ποζιτρόνιο και το άλλο για το ατομικό ηλεκτρόνιο που πρέπει να αποβληθεί για την μετατροπή από ένα ουδέτερο άτομο Z ηλεκτρονίων σε ένα με $Z - 1$ ηλεκτρόνια.

Για την ηλεκτρονική σύλληψη αντίθετα, θα έχουμε την σχέση:

$$Q_{EC} = \left(M\left(Z, N\right) - M\left(Z - 1, N + 1\right)\right) c^2 - B_n, \tag{2.13}$$

όπου B_n είναι η ενέργεια ιονισμού του νιοστού συλληφθέντος ατομικού ηλεκτρονίου ($n = K$, L_I, L_{II}, L_{III}, M, ...). Αφού το B_n είναι της τάξης των 10 eV, μπορεί να αγνοηθεί, εκτός αν μας ενδιαφέρει ακρίβεια τέτοιας τάξης, όπως για παράδειγμα στις περιπτώσεις μετρήσεων μάζας νετρίνο. Η διαφορά των $2m_e c^2$ στις τιμές$-Q$ μεταξύ β^+ αποδιέγερσης και ηλεκτρονικής σύλληψης είναι

σημαντική. Για παράδειγμα, η διαφορά μαζών μεταξύ ^7Be και ^7Li είναι $0,86$ MeV/c^2, μικρότερη από $2m_ec^2$. Ως αποτέλεσμα, η $\beta-$αποδιέγερση από το ^7Be προς το ^7Li είναι αδύνατη, και η μετάβαση γίνεται αμιγώς μέσω ηλεκτρονικής σύλληψης με χρόνο ημιζωής $53,4$ ημερών. Μόνο ένα νετρίνο παράγεται από μια ηλεκτρονική σύλληψη. Εξαιτίας όμως της δυσκολίας στην ανίχνευση νετρίνων, η πιο εξέχουσα ένδειξη της ηλεκτρονικής σύλληψης είναι η ακτίνα X που εκπέμπεται όταν ατομικά ηλεκτρόνια σε υψηλότερα τροχιακά μεταβαίνουν σε χαμηλότερα, τα οποία μένουν κενά όταν ένα ηλεκτρόνιο εσωτερικού φλοιού απορροφηθεί από τον πυρήνα.

Με βάση την ενέργεια σύνδεσης, οι παραπάνω τιμές$-Q$ δίνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$Q_{\beta^-} = E_B\left(Z+1, N-1\right) - E_B\left(Z, N\right) + 0.782 \quad MeV \tag{2.14}$$

$$Q_{\beta^+} = E_B\left(Z-1, N+1\right) - E_B\left(Z, N\right) - 2m_ec^2 - 0.782 \quad MeV \tag{2.15}$$

$$Q_{EC} = E_B\left(Z-1, N+1\right) - E_B\left(Z, N\right) - B_e - 0.782 \quad MeV \tag{2.16}$$

όπου ή ενέργεια των 0.782 MeV προκύπτει από την διαφορά μαζών μεταξύ νετρονίου και ουδέτερου ατόμου του Υδρογόνου.

Είναι φανερό ότι τα τρία είδη αποδιέγερσης που εξετάσαμε συμβαίνουν αυθόρμητα αν οι αντίστοιχες τιμές$-Q$ είναι θετικές. Στην περίπτωση αυτή η αποδιδόμενη ενέργεια εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, του νετρίνο και του θυγατρικού πυρήνα. Έτσι για να πραγματοποιηθεί μια αποδιέγερση β αρκεί απλώς η μάζα του θυγατρικού πυρήνα να είναι μικρότερη από την μάζα του μητρικού.

Κεφάλαιο 3

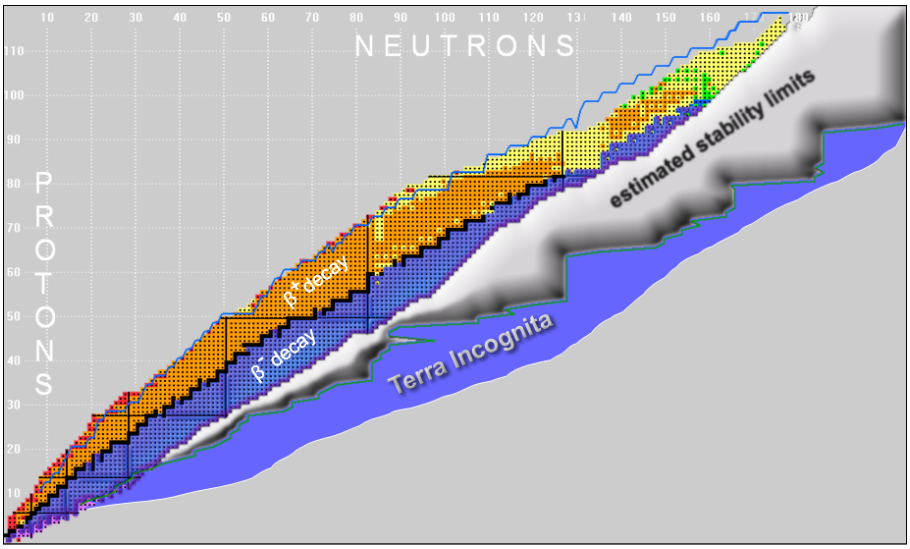
Πυρηνική Αστάθεια

Η ΣΤΑΘΕΡΟΤΗΤΑ ή η αστάθεια ενός συγκεκριμένου πυρήνα οριοθετείται από τον ανταγωνισμό των ελκτικών πυρηνικών δυνάμεων μεταξύ πρωτονίων και νετρονίων και των απωστικών ηλεκτρικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των πρωτονίων. Οι ασταθής πυρήνες διασπώνται και μετασχηματίζονται αυθόρμητα σε άλλες δομές μέσω μιας ποικιλίας διαδικασιών διάσπασης, όπως οι διασπάσεις α, β και γ που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

3.1 Η Αστάθεια των Πυρήνων

Από τους 6000 περίπου δυνατούς διαφορετικούς συνδυασμούς μεταξύ πρωτονίων και νετρονίων που μπορούν να οδηγήσουν στην δημιουργία νουκλιδίων, σήμερα γνωρίζουμε σχεδόν 3000, ενώ λιγότερα από 300 νουκλίδια είναι σταθερά. Τα υπόλοιπα είναι ραδιενεργά, δηλαδή, ασταθείς δομές που διασπώνται και σχηματίζουν άλλα νουκλίδια, εκπέμποντας σωματίδια και ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η χρονική κλίμακα αυτών των διαδικασιών διάσπασης έχει τεράστιο εύρος, με όρια από ένα μικρό κλάσμα ενός μικροδευτερολέπτου ως και δισεκατομμύρια χρόνια. Τα σταθερά νουκλίδια παριστάνονται με ένα μαύρο τετράγωνο στη γραφική παράσταση του πίνακα των νουκλιδίων (σχ. 3.1), που δίνει τον αριθμό νετρονίων N συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z. Αυτή η γραφική παράσταση ονομάζεται και διάγραμμα Segrè προς τιμήν του Emilio Segrè που το επινόησε.

Κάθε νοητή γραμμή κάθετη στη γραμμή $N = Z$ αντιπροσωπεύει μια συγκεκριμένη τιμή του μαζικού αριθμού $A = Z + N$. Οι περισσότερες γραμμές σταθερού A διέρχονται από ένα ή δύο σταθερά νουκλίδια. Τέσσερα μόνο



Σχήμα 3.1: Πίνακας των νουκλιδίων.

σταθερά νουκλίδια λοιπόν εμφανίζουν ταυτόχρονα περιττά Z και N, τα:

$$^{21}\mathrm{H},\ ^{63}\mathrm{Li},\ ^{105}\mathrm{B},\ ^{147}\mathrm{N}.$$

Τα νουκλίδια αυτά ονομάζονται περιττά−περιττά. Η απουσία άλλων πυρήνων αυτής της περιττής−περιττής σύστασης, δείχνει τη σημασία του παράγοντα της ζευγοποίησης στον σχηματισμό των νουκλιδίων.

Τα σημεία που αντιστοιχούν σε σταθερά νουκλίδια ορίζουν μια μάλλον στενή περιοχή σταθερότητας. Για μικρούς μαζικούς αριθμούς λοιπόν, οι α-ριθμοί των πρωτονίων και των νετρονίων είναι περίπου ίσοι. Δηλαδή ισχύει $N \approx Z$. Ο λόγος N/Z αυξάνει βαθμιαία, αυξανομένου του A, ως την τιμή 1.6 για τους μεγάλους μαζικούς αριθμούς. Σημεία πάνω από την περιοχή σταθερότητας παριστάνουν νουκλίδια που έχουν υπερβολικά πολλά πρωτόνια ή ανεπαρκή αριθμό νετρονίων για να είναι σταθερά. Τα νουκλίδια αυτά αποδιεγείρονται κυρίως με διάσπαση β^+ για $Z < 80$, όπως φαίνεται στο διάγραμμα, ενώ για $Z > 80$ κυριαρχεί η διάσπαση α. Στην κάτω πλευρά δε, βρίσκονται πυρήνες με υπερβολικά πολλά νετρόνια ή ανεπαρκή αριθμό πρωτονίων. Η περιοχή αυτή επικεντρώνει το ενδιαφέρον μας καθώς τα νουκλίδια που περιλαμβάνει αποδιεγείρονται με διάσπαση β^-.

Η πράσινη γραμμή είναι η λεγόμενη **γραμμή διαφυγής νετρονίων** και αποτελεί μια θεωρητική εκτίμηση των *Möller* και συνεργατών [69] των ορίων σταθερότητας. Παρατηρήσουμε λοιπόν ότι υπάρχει μια εκτεταμένη περιοχή πολύ πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων, τα χαρακτηριστικά των οποίων, θα πρέπει να προκύψουν από θεωρητικά πρότυπα, καθώς οι σύγχρονες τεχνικές,

αλλά και το πλήθος τους, δεν επιτρέπουν τον πειραματικό τους προσδιορισμό. Μπορεί να δει κανείς επιπλέον, ότι στους ελαφρύτερους πυρήνες, η εκτίμηση της ομάδας του *Möller* έχει ξεπεραστεί από τα πειραματικά δεδομένα. Τα σύγχρονα διαγράμματα νουκλιδίων έτσι, δίνονται με μια πολύ πιο διευρυμένη άγνωστη περιοχή. Το εγχείρημα μας λοιπόν, στην παρούσα εργασία, συνίσταται στην ανάπτυξη ενός προτύπου στατιστικής φύσης, που να έχει την δυνατότητα να προβλέπει αξιόπιστα τους χρόνους ημίσειας ζωής των *εξωτικών* αυτών πυρήνων της άγνωστης περιοχής. Ένα από τα καλύτερα λοιπόν πρότυπα που αναπτύξαμε παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 14, ενώ στο κεφάλαιο 15 γίνεται μια απόπειρα εκτίμησης της γραμμής διαφυγής νετρονίων.

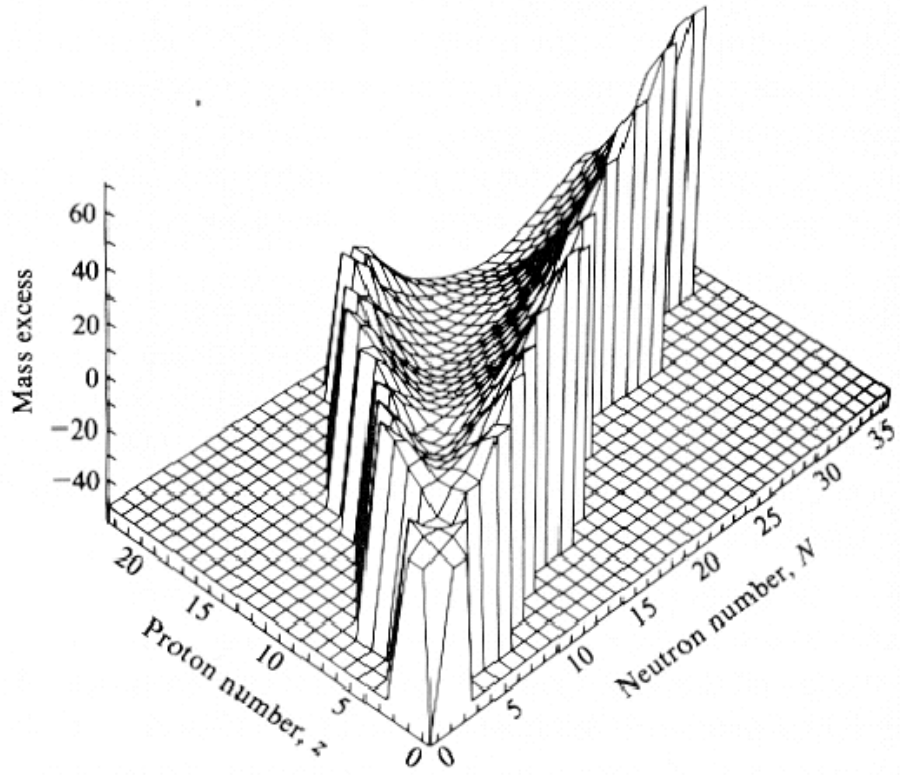
3.2 Η Ηλεκτρική Αλληλεπίδραση

Το σχήμα 3.2, μια τρισδιάστατη γενίκευση του διαγράμματος Segrè , δείχνει την **κοιλάδα σταθερότητας** για τους ελαφρούς πυρήνες (ως την τιμή $Z = 22$).

Ο σημαντικότερος λόγος, της ευστάθειας ορισμένων πυρήνων και της αστάθειας άλλων, είναι όπως είπαμε, ο ανταγωνισμός μεταξύ της ελκτικής πυρηνικής δύναμης και της απωστικής ηλεκτρικής δύναμης. Η πυρηνική δύναμη ευνοεί ζεύγη νουκλεονίων και ζεύγη ζευγών. Αν δεν υπήρχαν ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις, σταθερότεροι θα ήταν οι πυρήνες με άρτιους και ίσους αριθμούς νετρονίων και πρωτονίων, ή $N = Z$. Η ηλεκτρική άπωση μετατοπίζει την ισορροπία και ευνοεί μεγαλύτερους αριθμούς νετρονίων, αλλά ένας πυρήνας πολύ πλούσιος σε νετρόνια είναι ασταθής γιατί δεν είναι αρκετά αυτά που μπορούν να σχηματίσουν ζεύγη με πρωτόνια. Σε ένα πυρήνα με υπερβολικά πολλά πρωτόνια, οι απωστικές ηλεκτρικές αλληλεπιδράσεις υπερισχύουν έναντι των ελκτικών πυρηνικών αλληλεπιδράσεων, οπότε ο πυρήνας δεν είναι δυνατόν να είναι σταθερός.

Καθώς ο αριθμός των νουκλεονίων αυξάνεται, η ολική ενέργεια λόγω της ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης αυξάνεται με ταχύτερο ρυθμό από την ενέργεια λόγω της πυρηνικής αλληλεπίδρασης. Για να το κατανοήσουμε αυτό, θα θυμηθούμε την ηλεκτροστατική ενέργεια του πυκνωτή. Η ενέργεια σε ένα πυκνωτή με φορτίο Q είναι ανάλογη προς το Q^2. Η ενέργεια που χρειάζεται για να σχηματίσουμε μια σφαιρική κατανομή φορτίου με ακτίνα R και συνολικό φορτίο Q είναι ανάλογη προς το Q^2/R. Στον πυρήνα, η (θετική) ηλεκτρική δυναμική ενέργεια αυξάνεται κατά προσέγγιση αναλόγως προς το A, χωρίς να έχουν συμπεριληφθεί οι απαραίτητες διορθώσεις εξαιτίας των φαινομένων ζευγοποίησης και των επιφανειακών φαινομένων.

Καθώς το A αυξάνεται λοιπόν, η θετική ηλεκτρική δυναμική ενέργεια ανά



Σχήμα 3.2: Τρισδιάστατη γενίκευση του διαγράμματος *Segrè* για ελαφρά νουκλίδια ως την τιμή $Z = 22$ (τιτάνιο). Ο τρίτος άξονας παριστάνει το πλεόνασμα μάζας $(M - A)$.

νουκλεόνιο αυξάνεται ταχύτερα από την αρνητική πυρηνική δυναμική ενέργεια ανά νουκλεόνιο, οπότε φθάνουμε σε ένα σημείο πέραν του οποίου δεν είναι δυνατόν να επιτευχθεί σταθερότητα. Έτσι, ο ανταγωνισμός μεταξύ των ηλεκτρικών και πυρηνικών δυνάμεων εξηγεί το γεγονός ότι, στους σταθερούς πυρήνες, ο λόγος του αριθμού νετρονίων προς τον αριθμό πρωτονίων αυξάνεται, αυξανομένου του Z, και ότι ένας πυρήνας δεν μπορεί να είναι σταθερός αν το A ή το Z είναι υπερβολικά μεγάλο.

3.3 Πυρηνικές Μεταπτώσεις

Ο βαθμός σταθερότητας ενός πυρηνικού συστήματος μπορεί να εκφραστεί από την πιθανότητα που έχει, ώστε μέσα σε ένα χρονικό διάστημα Δt να μεταπέσει σε ένα άλλο σταθερότερο σύστημα. Εφόσον ο πυρήνας παραμένει αμετάβλητος μέχρι την στιγμή που πραγματοποιείται η μετάπτωση, η πιθανότητα αυτή είναι μια σταθερά του συστήματος ανεξάρτητη από το χρόνο. Με

άλλα λόγια, για οποιαδήποτε δεδομένη χρονική στιγμή, η πιθανότητα ώστε να αποδιεγερθεί ο πυρήνας μέσα στο αμέσως επόμενο χρονικό διάστημα Δt είναι ίδια. Έτσι για ένα ορισμένο πυρήνα δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε την ακριβή στιγμή που θα μεταπέσει σε μια άλλη κατάσταση. Η περιγραφή της αποδιέγερσης είναι εφικτή μόνο για ένα στατιστικό σύνολο όμοιων α-σταθών πυρήνων από τους οποίους ο καθένας έχει την ίδια πιθανότητα W να αποδιεγερθεί μέσα στην αμέσως επόμενη μονάδα του χρόνου.

3.4 Ρυθμός Διάσπασης - Χρόνος Ημιζωής

Για δείγμα N ραδιενεργών πυρήνων, η πιθανότητα να διασπαστεί κάποιος από αυτούς σε δεδομένη χρονική στιγμή είναι ανεξάρτητη της κατάστασης των υπολοίπων πυρήνων του δείγματος. Ο ρυθμός διάσπασης (αριθμός των αποδιεγέρσεων ανά μονάδα χρόνου) θα είναι επομένως κατά μέσο όρο ανάλογος του αριθμού των πυρήνων $N(t)$ που απομένουν τη χρονική στιγμή t:

$$\frac{dN}{dt} = -WN(t), \tag{3.1}$$

όπου το αρνητικό σημείο εκφράζει την μείωση του αριθμού $N(t)$ με το χρόνο, ενώ η σταθερά αναλογίας W, καλείται πιθανότητα μετάπτωσης ή σταθερά διάσπασης και η τιμή της εξαρτάται από τη φύση της διαταραχής που προκαλεί την αποδιέγερση και τις ιδιότητες της αρχικής και τελικής κατάστασης. Κατά μείζονα λόγο, η σταθερά αποδιέγερσης είναι μια καθοριστική ποσότητα στην μελέτη των πυρηνικών μεταπτώσεων.

Με ολοκλήρωση της εξίσωσης (3.1) παίρνουμε τον **εκθετικό νόμο διάσπασης**, ο οποίος δίνει την χρονική εξέλιξη ενός συνόλου ραδιενεργών πυρήνων:

$$N(t) = N_o e^{-Wt}, \tag{3.2}$$

όπου N_o ο αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων την στιγμή $t = 0$. Ο χρόνος ημιζωής, $T_{1/2}$, αντιπροσωπεύει το χρόνο που απαιτείται ώστε η ενεργότητα του δείγματος να μειωθεί στο μισό ή αντίστοιχα να αποδιεγερθούν οι μισοί από τους πυρήνες του αρχικού δείγματος και είναι αντιστρόφως ανάλογος του ρυθμού μετάπτωσης:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{W} = \frac{0.693}{W}. \tag{3.3}$$

Ο μέσος χρόνος ζωής είναι ο μέσος χρόνος που απαιτείται για να διασπαστεί ένας ραδιενεργός πυρήνας. Σχετίζεται με την πιθανότητα μετάπτωσης και το χρόνο ημιζωής με την έκφραση:

$$\bar{T} = \frac{\int_0^\infty te^{-Wt}dt}{\int_0^\infty e^{-Wt}dt} = \frac{1}{W} = \frac{T_{1/2}}{0.693}. \tag{3.4}$$

Οι τρεις αυτές ποσότητες, πιθανότητα μετάπτωσης, χρόνος ημιζωής και μέσος χρόνος ζωής είναι τρεις διαφορετικοί τρόποι για τον χαρακτηρισμό της ίδιας φυσικής παρατήρησης.

3.5 Επιμέρους Ρυθμοί

Πολλές φορές σε ένα πυρηνικό σύστημα η τελική κατάσταση δεν αποτελεί μια μεμονωμένη κατάσταση του συστήματος, αλλά μέλος μιας ομάδας ιδιοκατα-στάσεων με μικρή διαφορά ενέργειας. Η αποδιέγερση επομένως πραγματοποιείται σε περισσότερες από μια τελικές καταστάσεις f. Αν η πιθανότητα μετάπτω-σης σε κάθε τελική κατάσταση είναι $W(f)$, η ολική πιθανότητα μετάπτωσης της αρχικής κατάστασης i θα είναι το άθροισμα των μεταπτώσεων σε όλες τις δυνατές τελικές καταστάσεις:

$$W = \sum_f W_f. \tag{3.5}$$

Η σχέση μεταξύ του χρόνου ημιζωής $T_{1/2}$ και των επιμέρους χρόνων $T_{1/2}(f) = ln2/W(f)$ θα δίνεται από την έκφραση:

$$\frac{1}{T_{1/2}} = \sum_f \frac{1}{T_{1/2}\,(f)}. \tag{3.6}$$

Οι επιμέρους ρυθμοί δίνουν την επιμέρους ή μερική πιθανότητα μετάπτωσης σε μια συγκεκριμένη τελική κατάσταση f ως κλάσμα της ολικής πιθανότητας μετάπτωσης από μια συγκεκριμένη αρχική κατάσταση i. Η μέση ζωή του π^o μεσονίου για παράδειγμα, είναι $8.4x10^{-17}s$ και διασπάται το 98.8% του χρόνου σε 2 φωτόνια, το 1.17% του χρόνου σε ένα φωτόνιο και ένα ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου και $2x10^-7$ του χρόνου σε ένα μόνο ζεύγος ηλεκτρονίου−ποζιτρονίου. Οι επιμέρους ρυθμοί για αυτά τα τρία κανάλια διάσπασης είναι επομένως: 98.8%, 1.17% και $2x10^{-7}$, αντίστοιχα. Μεταξύ των ραδιενεργών πυρήνων, η θεμελιώδης στάθμη του περιττού−περιττού πυρήνα $^{226}_{89}Ac$ στην αρχή της σειράς των ακτινιδίων έχει χρόνο ημιζωής 29 ώρες και μπορεί να διασπαστεί εκπέμποντας ένα ηλεκτρόνιο σε $^{226}_{90}Th$, να μετατραπεί σε $^{226}_{88}Ra$ συλλαμβάνοντας ένα ατομικό ηλεκτρόνιο ή να διασπαστεί με εκπομπή σωματιδίου α σε $^{222}_{87}Fr$ με επιμέρους ρυθμούς: 83%, 10% και 0,06% αντίστοιχα.

3.6 Η Σταθερά Διάσπασης

Η δυναμική μιας μετάπτωσης περιέχεται στην σταθερά αποδιεγέρσεως W που χαρακτηρίζει την μετάπτωση. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να υπολογί-

σουμε την σταθερά αυτή για μια συγκεκριμένη μετάπτωση, με βάση την αλληλεπίδραση που την προκαλεί και τη δομή του πυρηνικού συστήματος που αποδιεγείρεται. Όπως κάθε άλλη ιδιότητα του πυρήνα, πιστεύουμε ότι η σταθερά αποδιεγέρσεως θα προέλθει από την λύση της εξίσωσης του Schrödinger που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη του συστήματος. Θα πρέπει επομένως να εργαστούμε με την πλήρη εξίσωση:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|q,t\right\rangle = H\left|q,t\right\rangle, \tag{3.7}$$

όπου η χαμιλτονιανή H και οι ιδιοκαταστάσεις $|q,t\rangle$ είναι συναρτήσεις των σχετικών συντεταγμένων q και του χρόνου t. Όπως όμως συμβαίνει με τα περισσότερα κβαντικά προβλήματα, η εξ. (3.7) δεν μπορεί να λυθεί στην περίπτωση αυτή με τις σημερινές δυνατότητες της μαθηματικής επιστήμης. Στη συνέχεια, θα κάνουμε μια γρήγορη ανασκόπηση της προσεγγιστικής μεθόδου που είναι γνωστή σαν χρονικά εξαρτημένη **θεωρία διαταραχών**. Οι γενικές εκφράσεις που θα προκύψουν θα μας επιτρέψουν στα επόμενα κεφάλαια να υπολογίσουμε την σταθερά αποδιεγέρσεως για την $\beta-$διάσπαση.

Η εξίσωση (3.7), είναι λοιπόν δυνατόν να επιλυθεί προσεγγιστικά στην περίπτωση που ο χαμιλτόνιος τελεστής μπορεί να γραφεί ως:

$$H = H_o + V, \tag{3.8}$$

όπου H_o απλός τελεστής ανεξάρτητος του χρόνου και V μικρός σε σχέση με το H_o και περιέχει την εξάρτηση ως προς το χρόνο. Ουσιαστικά αν είναι δυνατή η λύση της εξίσωσης:

$$H_o\left|k\right\rangle = E_k\left|k\right\rangle, \tag{3.9}$$

τότε ο τελεστής V μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή που προκαλεί μεταπτώσεις μεταξύ των ιδιοκαταστάσεων $|k\rangle$ του τελεστή H_o. Η διαδικασία της προσέγγισης συνίσταται στην ανάπτυξη των ιδιοκαταστάσεων της εξίσωσης (3.7) με βάση τις ιδιοκαταστάσεις τις εξίσωσης (3.9):

$$\left|q,t\right\rangle = \sum_n a_n\left(t\right)\left|n\right\rangle e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}, \tag{3.10}$$

όπου οι συντελεστές του αναπτύγματος είναι συναρτήσεις του χρόνου. Αντικαθιστώντας την εξ. (3.10) στην (3.7) παίρνουμε λοιπόν:

$$i\hbar\sum_n \frac{\partial a_n}{\partial t}\left|n\right\rangle e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} + \sum_n a_n E_n\left|n\right\rangle e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}} = \sum_n a_n\left(H_o + V\right)\left|n\right\rangle e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}. \tag{3.11}$$

Από την εξ. (3.9) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την έκφραση $H_o\,|n\rangle$ με $E_n\,|n\rangle$. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξ. (3.11) από τα αριστερά με την συζυγή ιδιοκατάσταση $\langle k|$ και ολοκληρώσουμε με τον χρόνο, τότε, με την χρησιμοποίηση της ορθοκανονικής ιδιότητας των ιδιοκαταστάσεων, η εξ. (3.11) παίρνει την μορφή:

$$i\hbar\frac{\partial a_k}{\partial t}e^{-i\frac{E_k t}{\hbar}} + \sum_n a_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}\,\langle k|\,V\,|n\rangle\,,$$

ή

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\sum_n \langle k|\,V\,|n\rangle\,a_n e^{i\omega_{kn}t}. \tag{3.12}$$

Στον τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της γωνιακής συχνότητας *Bohr*:

$$\omega_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar}. \tag{3.13}$$

Ως τώρα η διαδικασία είναι ακριβής και το σύστημα των εξ. (3.12) είναι απόλυτα ισοδύναμο με την εξίσωση του Schrödinger (3.7). Η προσέγγιση εισάγεται στο σημείο αυτό για την ολοκλήρωση της συνάρτησης $\frac{\partial a_k}{\partial t}$. Η παραδοχή μας ότι ο τελεστής V είναι μικρός, μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις διαταραγμένες ιδιοκαταστάσεις ως πολυώνυμα του V. Αν αντικαταστήσουμε τη διαταραχή με εV, όπου $0 \le \varepsilon \le 1$, και εκφράσουμε τους συντελεστές a_n:

$$a_n^{(0)} = a_n^{(0)} + a_n^{(1)}\varepsilon + a_n^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots, \tag{3.14}$$

τότε η σταδιακή εύρεση κάθε όρου $a_n^{(\ell)}$ της εξ. (3.14) αντιστοιχεί σε βελτίωση της προσέγγισης του υπολογισμού κατά μια τάξη. Αντικαθιστούμε επομένως την σειρά της εξ. (3.14) στην εξ. (3.12), εξισώνουμε τις αντίστοιχες δυνάμεις του ε και θέτουμε $\varepsilon = 1$ στο τελικό αποτέλεσμα. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η ομάδα των εξισώσεων:

$$\frac{\partial a_k^{(0)}}{\partial t} = 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial a_k^{(\ell+1)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\sum_n \langle k|\,V\,|n\rangle\,a_n^{(\ell)} e^{i\omega_{kn}t}, \tag{3.16}$$

που κατ' αρχήν μπορούν να ολοκληρωθούν διαδοχικά και να δώσουν προσεγγιστικές λύσεις σε οποιαδήποτε επιθυμητή τάξη της διαταραχής. Η εξ. (3.15) προβλέπει ότι σε μηδενική τάξη διαταραχής οι συντελεστές a_n του αναπτύγματος (3.10) είναι σταθεροί. Αν το σύστημα βρίσκεται αρχικά σε μια κατά-σταση

$|i\rangle$ τότε δεν μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Οι συντελεστές a_n έχουν επομένως τη μορφή:

$$a_n^{(0)} = \delta_{in}. \tag{3.17}$$

Στην επόμενη τάξη προσέγγισης, η εξ. (3.16) δίνει:

$$\frac{\partial a_k^{(1)}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\sum_n \langle k|\, V\, |n\rangle\, a_n^{(0)} e^{i\omega_{kn}t} = -\frac{i}{\hbar}\langle k|\, V\, |i\rangle\, e^{i\omega_{ki}t}, \tag{3.18}$$

ή

$$a_k^{(1)} = \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \langle k|\, V\,(t)\, |i\rangle\, e^{i\omega_{ki}t'} dt'. \tag{3.19}$$

Η εξ. (3.19) μπορεί να ολοκληρωθεί αν θεωρηθεί μια συγκεκριμένη συναρτησιακή μορφή για την μεταβολή της αναμενόμενης τιμής $\langle k|\, V\, |i\rangle$ ως προς το χρόνο. Η ολοκλήρωση παίρνει ιδιαίτερα απλή μορφή στην ενδιαφέρουσα περίπτωση, όπου η εξάρτησης της διαταραχής από το χρόνο είναι αρμονική για ένα χρονικό διάστημα $0 \le t' \le t$:

$$\langle k|\, V\,(t)\, |i\rangle = 2\langle k|\, V\, |i\rangle \cos(\omega t) \tag{3.20}$$

και ίση με το μηδέν κατά τον υπόλοιπο χρόνο. Για την συναρτησιακή αυτή μορφή της διαταραχής η ολοκλήρωση της εξ. (3.19) δίνει:

$$a_k^{(1)} = \frac{i}{\hbar}\langle k|\, V\, |i\rangle \left[\frac{1-e^{i(\omega_{ki}-\omega)t}}{\omega_{ki}-\omega} + \frac{1-e^{i(\omega_{ki}+\omega)t}}{\omega_{ki}+\omega}\right]. \tag{3.21}$$

Από την μορφή της εξ. (3.21) είναι φανερό ότι ο συντελεστής $a_k^{(1)}$ είναι σημαντικός μόνον όταν ένας από τους δύο παρανομαστές των όρων που βρίσκονται μέσα στην αγκύλη είναι μικρός. Ο πρώτος όρος γίνεται σημαντικός για $\omega_{ki} \simeq \omega$ ή $E_k \simeq E_i + \hbar\omega$ και περιγράφει απορρόφηση ενέργειας $\hbar\omega$ κατά την μετάπτωση, ενώ ο δεύτερος για $\omega_{ki} \simeq -\omega$ ή $E_k \simeq E_i - \hbar\omega$ και αναφέρεται στην εκπομπή ενέργειας $\hbar\omega$. Σε μια συγκεκριμένη μετάπτωση επομένως μόνο ένας από τους δύο όρους της εξ. (3.21) συνεισφέρει, ενώ ο άλλος αντιπροσωπεύει μικρή διαταραχή υψηλής συχνότητας και μπορεί να παραληφθεί.

Το τετράγωνο του συντελεστή $a_k^{(t)}$ δίνει την πιθανότητα ώστε το σύστημα να βρεθεί μετά από χρόνο t στην κατάσταση $|k\rangle$, αν σε χρόνο $t = 0$ βρισκόταν στην κατάσταση $|i\rangle$. Σε πρώτη επομένως προσέγγιση η πιθανότητα για την συγκεκριμένη μετάπτωση:

$$|i\rangle \to |f\rangle\,, \tag{3.22}$$

δίνεται από την έκφραση:

$$|a_f|^2 \simeq \left|a_f^{(1)}\right|^2 = \frac{4\left|\langle f|\, V\, |i\rangle\right|^2 \sin^2 \frac{1}{2}\left(\omega_{fi} \pm \omega\right) t}{\hbar^2 \left(\omega_{fi} \pm \omega\right)^2}, \tag{3.23}$$

όπου το εναλλακτικό πρόσημο της συχνότητας ω αναφέρεται στον όρο της εξ. (3.21) που συνεισφέρει στη μετάπτωση.

Η ποσότητα που αναλογεί στη σταθερά διάσπαση W για μια μετάπτωση είναι η πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδα χρόνου* που μπορεί να υπολογιστεί από την εξ. (3.23) αν διαιρέσουμε με τον χρόνο. Στην συνήθη περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μία τελικές καταστάσεις, η ανά μονάδα χρόνου πιθανότητα μετάπτωσης για όλες τις προσφερόμενες τελικές καταστάσεις του συστήματος, θα δίνεται από την έκφραση:

$$W_{fi} = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} |a_f|^2 \rho\left(E_f\right) dE_f, \tag{3.24}$$

όπου $\rho\left(E_f\right)$ είναι η πυκνότητα των καταστάσεων ανά διάστημα ενέργειας $dE_f = \hbar d\left(\omega_{fi} \pm \omega\right)$.

Αν θεωρήσουμε ότι στο διάστημα ενέργειας $\Delta E \leq E_f$, όπου ουσιαστικά είναι σημαντικός ο συντελεστής a_f της εξ. (3.23), η πυκνότητα ενέργειας $\rho\left(E_f\right)$ και το πλάτος της διαταραχής $\langle f|\, V\, |i\rangle$ δεν μεταβάλλονται πολύ γρήγορα με την ενέργεια, τότε η εξ. (3.24) παίρνει την μορφή:

$$W_{fi} = \frac{4\left|\langle f|\, V\, |i\rangle\right|^2 \rho\left(E_f\right)}{\hbar t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x t}{x^2} dx, \tag{3.25}$$

όπου

$$x = \omega_{fi} \pm \omega$$

και το ορισμένο ολοκλήρωμα της εξ. (3.25) έχει την τιμή $\frac{\pi}{2}$. Η πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδα χρόνου για τη μετάπτωση από μια αρχική κατάσταση $|i\rangle$ σε όλες τις δυνατές τελικές καταστάσεις $|f\rangle$ δίνεται επομένως από την τελική έκφραση:

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f|\, V\, |i\rangle\right|^2 \rho\left(E_f\right), \tag{3.26}$$

που είναι γνωστή ως ο δεύτερος **χρυσός κανόνας του** *Fermi*. Στο κεφάλαιο 5, θα ασχοληθούμε με την εφαρμογή της εξ. (3.26) στο πεδίο της αποδιέγερσης β.

*Για το ίδιο μέγεθος χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τον όρο ρυθμός διάσπασης.

3.7 Στοιχείο Μήτρας Μετάπτωσης - Πλάτος Μετάπτωσης

Η πιθανότητα μετάπτωσης όπως είδαμε είναι ανάλογη του τετραγώνου του πυρηνικού στοιχείου μήτρας $|\langle f|\, V\, |i\rangle|^2$. Αν $|J_i M_i \zeta\rangle$ και $|J_f M_f \xi\rangle$ είναι αντίστοιχα οι κυματοσυναρτήσεις αρχικής και τελικής κατάστασης και $O_{\lambda\mu}$ το πυρηνικό μέρος του τελεστή εκφρασμένο με σφαιρικό τανυστή τάξης (λ, μ), το πλάτος μετάβασης θα δίνεται από την έκφρασηΧ

$$M_{fi}\left(M_f, M_i\right) = \langle J_f M_f \xi\, |O_{\lambda\mu}|\, J_i M_i \zeta\rangle\,. \tag{3.27}$$

Τα γράμματα ξ και ζ εδώ δηλώνουν όλους τους άλλους κβαντικούς αριθμούς εκτός της στροφορμής που απαιτούνται για τον προσδιορισμό των καταστάσεων. Εφόσον η μετάβαση μπορεί να περιλαμβάνει και εκπομπή σωματιδίου, όπως π.χ. ηλεκτρονίου ή νουκλεονίου, οι αρχικές και τελικές καταστάσεις δεν αναφέρονται απαραίτητα στον ίδιο πυρήνα. Αν η μετάπτωση προκληθεί από την αλληλεπίδραση του πυρήνα με εξωτερικό πεδίο, η ακριβής σχέση μεταξύ πιθανότητας μετάπτωσης W και πλάτους μετάπτωσης M_{fi} θα περιλαμβάνει και όρους σχετικούς με το εξωτερικό πεδίο. Η εξάρτηση του στοιχείου μήτρας M_{fi} από τα M_i και M_f, τις προβολές δηλαδή της αρχικής και τελικής ολικής στροφορμής αντίστοιχα, μπορεί να εξαχθεί ως κοινός παράγοντας χρησιμοποιώντας το θεώρημα $Wigner - Eckart$:

$$M_{fi}\left(M_f, M_i\right) = (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \xi\, ||O_\lambda||\, J_i \zeta\rangle\,, \tag{3.28}$$

όπου $\langle J_f \xi\, ||O_\lambda||\, J_i \zeta\rangle$ είναι το ανηγμένο στοιχείο μήτρας και παραμένει αναλλοίωτο σε στροφές του συστήματος συντεταγμένων.

Αν η μέτρηση δεν είναι ευαίσθητη στον προσανατολισμό του σπιν της τελικής κατάστασης, η μετάπτωση θα περιλαμβάνει όλες τις πιθανές τελικές καταστάσεις που διαφέρουν μόνο ως προς το M_f. Αν ο τελεστής της μετάπτω-σης επιπλέον, δεν περιορίζεται σε κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση στο χώρο, όλες οι επιτρεπόμενες τιμές του μ θα πρέπει να περιλαμβάνονται ενόψει της μετάπτωσης. Υπό αυτές τις συνθήκες, το τετράγωνο του στοιχείου μήτρας της μετάπτωσης ανάγεται στη μορφή:

$$|M_{fi}|^2 = \sum_{\mu M_f} \left| (-1)^{J_f - M_f} \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \langle J_f \xi\, ||O_\lambda||\, J_i \zeta\rangle \right|^2$$

$$= |\langle J_f \xi \,||O_\lambda||\, J_i \zeta\rangle|^2 \sum_{\mu M_f} \left| \begin{pmatrix} J_f & \lambda & J_i \\ -M_f & \mu & M_i \end{pmatrix} \right|^2$$
$$= \frac{\Delta\left(J_f, \lambda, J_i\right)}{2J_i + 1} |\langle J_f \xi \,||O_\lambda||\, J_i \zeta\rangle|^2 .$$
(3.29)

Στην τελευταία αυτή έκφραση καταλήξαμε χρησιμοποιώντας τη σχέση ορθογωνιοποίησης:

$$\sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3' \\ m_1 & m_2 & m_3' \end{pmatrix} = \frac{\Delta\left(j_1, j_2, j_3\right)}{2j_3 + 1} \delta_{j_3, j_3'} \delta_{m_3, m_3'}.$$
(3.30)

Ο όρος:

$$\Delta\left(j_1, j_2, j_3\right) = \begin{cases} 1, & \vec{J}_f = \vec{\lambda} + \vec{J}_i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} ,$$
(3.31)

εκφράζει τον κανόνα επιλογής γωνιακής στροφορμής απαγορευμένης μετάπτωσης.

Κεφάλαιο 4

Ασθενής Αλληλεπίδραση και Αποδιέγερση β

4.1 Διαδικασίες Ασθενούς Αλληλεπίδρασης

Η ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΤΙΔΡΑΣΗ ασθενούς αλληλεπίδρασης που πραγματοποιείται σε πυρήνες, μπορεί να χαρακτηριστεί από την αποδιέγερση ενός ελεύθερου νετρονίου και ενός δέσμιου πρωτονίου:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{v}_e, \tag{4.1}$$

$$p_{\delta\acute{\epsilon}\sigma\mu\iota o} \rightarrow n + e^+ + v_e. \tag{4.2}$$

Οι μεταπτώσεις αυτές είναι παραδείγματα μια γενικότερης κατηγορίας αποδιέγερσης που επίσης λαμβάνει χώρα και σε άλλα αδρόνια. Για παράδειγμα:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + v_\mu, \tag{4.3}$$

$$\pi^+ \rightarrow e^+ + v_e, \tag{4.4}$$

$$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-. \tag{4.5}$$

Διαδικασίες όπως αυτές που δίνονται στις (4.1, 4.2) και (4.3, 4.4) συνήθως αναφέρονται ως ημιλεπτονικές, καθώς περιέχουν αδρόνια και λεπτόνια μαζί. Αντιδράσεις του τύπου (4.5) αποτελούν μη−λεπτονικές διαδικασίες, αφού δεν περιλαμβάνονται λεπτόνια στις αρχικές και τελικές καταστάσεις. Υπάρχουν επίσης καθαρά−λεπτονικές διαδικασίες, όπως π.χ. η διάσπαση του μιονίου:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + v_e + v_\mu. \tag{4.6}$$

Επίκεντρο του ενδιαφέροντός μας θα αποτελέσουν οι ημιλεπτονικές διαδικασίες, καθώς η αποδιέγερση β ανήκει σε αυτές.

4.2 Καθολική Ασθενής Αλληλεπίδραση

Οι διαδικασίες ασθενούς αλληλεπίδρασης συχνά προτείνεται να θεωρούνται ως καθολικές, αφού η ισχύς της βασικής αλληλεπίδρασης είναι ίδια και για τους τρεις τύπους αντίδρασης που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Το θέμα αυτό ξεκαθαρίζεται από το γεγονός ότι η σταθερά σύζευξης G_F, γενικότερα γνωστή ως σταθερά σύζευξης Fermi, παίρνει την ίδια τιμή:

$$G_F = 1.43584\,(3) \times 10^{-62} J \cdot m^3 = 1.16637\,(2) \times 10^{-11}\,(\hbar c)^3\, MeV^{-2} \quad (4.7)$$

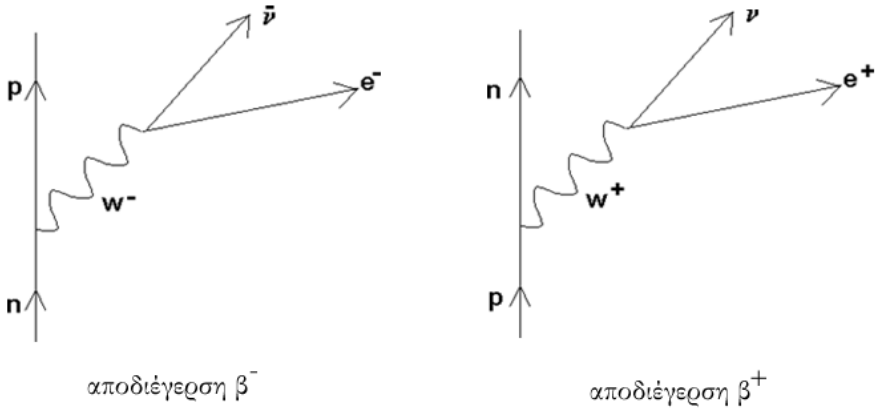
ανεξάρτητη του τύπου της αποδιέγερσης από την οποία προέρχεται.

Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις μεσολαβούν τα διανυσματικά μποζόνια $W^{\pm}$ και Z^0, ακριβώς όπως οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις φέρονται από φωτόνια. Ωστόσο, λόγων των μεγάλων μαζών τους

$$m_W c^2 = 80.9 \pm 1.4 GeV \quad (4.8)$$

$$m_Z c^2 = 91.9 \pm 1.8 GeV \quad (4.9)$$

το εύρος της ασθενούς αλληλεπίδρασης είναι εξαιρετικά μικρό ($r_0 = \hbar/mc \sim 10^{-3} fm$). Για πρακτικούς λοιπόν λόγους, οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις μπορούν να θεωρηθούν ως μηδενικού−εύρους ή εξ' επαφής αλληλεπιδράσεις.



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα *Feynman* της αποδιέγερσης β^- και β^+.

Εφόσον τα μποζόνια $W^{\pm}$ φέρουν αμιγή φορτία, μπορούν να μεταβάλλουν το φορτίο ενός σωματιδίου όπως, για παράδειγμα, στις ημιλεπτονικές αντιδράσεις (4.1), (4.2). Γραφικά, αυτές οι αντιδράσεις μπορούν να παρασταθούν από τα διαγράμματα *Feynman* που φαίνονται στο σχήμα 4.1. Το ουδέτερο μποζόνιο Z^0 είναι φορέας του ουδέτερου ασθενούς ρεύματος.

Έτσι, σε ένα πιο θεμελιακό επίπεδο, η αποδιέγερση β, μπορεί να θεωρηθεί ως μετατροπή από έναν τύπο κουάρκ σε έναν άλλο μέσω της ανταλλαγής φορτισμένων ασθενών ρευμάτων. Στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις η γεύση των κουαρκ διατηρείται. Στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις όμως, τα κουαρκ μπορούν να αλλάζουν γεύση, όπως για παράδειγμα η μετατροπή από ένα d κουάρκ σε ένα u,

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{v}_e. \tag{4.10}$$

Επομένως, αυτό που συμβαίνει στην αποδιέγερση β^-, αναφορικά με τα κουάρκ, δίνεται από την έκφραση:

$$\begin{bmatrix} u \\ d \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ u \\ d \end{bmatrix} + e^- + \bar{v}_e. \tag{4.11}$$

Ομοίως, η αποδιέγερση β^+ δέσμιου πρωτονίου σε νετρόνιο περιλαμβάνει την μετατροπή ενός u κουαρκ σε ένα d κουαρκ, σύμφωνα με την αντίδραση,

$$\begin{bmatrix} u \\ u \\ d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ d \\ d \end{bmatrix} + e^+ + v_e. \tag{4.12}$$

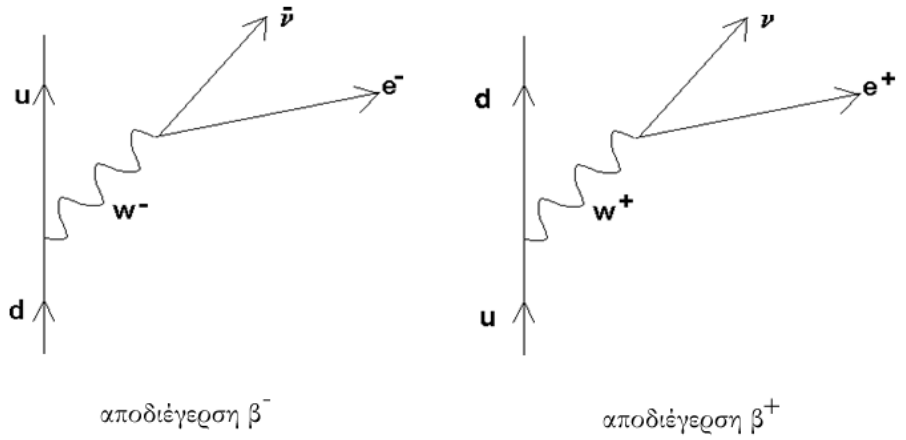
Με τη μορφή διαγραμμάτων *Feynman*, οι διαδικασίες (4.11) και (4.12) δίνονται στο σχήμα 4.2.

4.3 Μη Διατήρηση της Ομοτιμίας

Μια από τις πιο αξιοσημείωτες ιδιότητες της ασθενούς αποδιέγερσης είναι η μη διατήρηση της ομοτιμίας. Είναι σημαντική η κατανόηση του γεγονότος αυτού, καθώς είναι στενά συνδεδεμένο με την μορφή του τελεστή της αποδιέγερσης β. Η μετατροπή της ομοτιμίας είναι η διαδικασία που αντιστρέφει τις χωρικές συντεταγμένες:

$$(x, y, z) \underset{P}{\rightarrow} (-x, -y, -z) \tag{4.13}$$

Η επίδραση του τελεστή της ομοτιμίας Π επομένως, έχει ως αποτέλεσμα την αναστροφή ενός δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων σε ένα αριστερόστροφο. Η διατήρηση της ομοτιμίας, δηλαδή η διατήρηση της μορφής



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα *Feynman* της αποδιέγερσης β^- και β^+ σε επίπεδο κουάρκς.

ενός φυσικού νόμου με την αντιστροφή των συντεταγμένων, εκφράζει την αρχή ότι οι έννοιες "αριστερά" και "δεξιά" δεν έχουν απόλυτη σημασία.

Η διατήρηση της ομοτιμίας παρουσιάζει μια βασική διαφορά από τις υπόλοιπες αρχές διατήρησης στη φύση. Οι μετασχηματισμοί που μπορούν να οδηγήσουν στις γενικές αρχές διατήρησης μπορεί να δημιουργηθούν από την θεώρηση διαδοχικών απειροστών μετασχηματισμών των συντεταγμένων $q_i \rightarrow q_i + \delta q_i$. Η διαδικασία αυτή δεν είναι δυνατή για τη δημιουργία της αναστροφής των συντεταγμένων στην εξ. (4.13).

Στην κλασσική μηχανική είναι φανερό ότι η χαμιλτονιανή ενός συστήματος σωματίων:

$$H = \sum_i (p_i \dot{q}_i - L), \tag{4.14}$$

παραμένει αμετάβλητη με την αντιστροφή των συντεταγμένων, αν το δυναμικό αλληλεπίδρασης είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας. Παρόλα αυτά, από τη διατήρηση της ομοτιμίας στην περίπτωση αυτή δεν προκύπτει καμία χρήσιμη σταθερά της κίνησης. Αντίθετα, στα πλαίσια της κβαντικής φυσικής η διατήρηση της ομοτιμίας αποκτά ιδιαίτερη σημασία. Αν ο τελεστής της εξ. (4.13) μετατίθεται με την χαμιλτονιανή του συστήματος:

$$[H, P] = 0, \tag{4.15}$$

τότε οι ιδιοσυναρτήσεις που περιγράφουν το σύστημα χαρακτηρίζονται ταυτόχρονα από ιδιοτιμές της ενέργειας και της ομοτιμίας.

4.3.1 Η Δράση του Τελεστή της Ομοτιμίας

Υπό την επίδραση του τελεστή της ομοτιμίας, ένα σύνηθες βαθμωτό μέγεθος (S) παραμένει αμετάβλητο, ενώ ένα σύνηθες διανυσματικό μέγεθος (V) αλλάζει πρόσημο. Για να τα διαχωρίζουμε από τα *αξονικά* διανυσματικά μεγέθη, τα οποία θα ορίσουμε στη συνέχεια, τα συνήθη διανυσματικά μεγέθη θα καλούνται *πολικά* διανυσματικά μεγέθη, όταν ο διαχωρισμός αυτός απαιτείται. Παραδείγματα πολικών διανυσματικών μεγεθών είναι η χωρική θέση $\vec{r}$ και η ορμή $\vec{p}$.

Μπορούμε ωστόσο να κατασκευάσουμε διανυσματικά μεγέθη, τα οποία δεν αλλάζουν πρόσημο υπό τον μετασχηματισμό της ομοτιμίας. Το διάνυσμα της στροφορμής, για παράδειγμα, $\vec{l}\hbar = \vec{r} \times \vec{p}$, δεν αλλάζει πρόσημο όταν δρα σε αυτό ο τελεστής της ομοτιμίας, καθώς αλλάζει πρόσημο και το $\vec{r}$ και το $\vec{p}$. Τέτοια διανύσματα, τα οποία δεν αλλάζουν πρόσημο με την αναστροφή του συστήματος συντεταγμένων , ονομάζονται αξονικά διανύσματα A. Το γινόμενο ενός αξονικού και ενός πολικού διανύσματος είναι ένα βαθμωτό μέγεθος που αλλάζει πρόσημο υπό τον τελεστή της ομοτιμίας. Τέτοια μεγέθη καλούνται ψευδοβαθμωτά μεγέθη P. Υπάρχει επίσης μια πέμπτη κατηγορία που ονομάζονται *τανυστές* (δεν πρέπει να συγχέονται με τους σφαιρικούς τανυστές που χρησιμοποιούνται στην άλγεβρα της γωνιακής στροφορμής) που επιδεικνύουν διαφορετική συμπεριφορά από τα S, V, A και P, αλλά δεν θα επεκταθούμε σε αυτά.

Ένας τελεστής αποτελούμενος από σύμμειξη βαθμωτών και ψευδοβαθμωτών μεγεθών, ή διανυσματικών και αξονικά διανυσματικών μεγεθών, δεν έχει καθορισμένη ομοτιμία και, ως αποτέλεσμα, η ομοτιμία δεν διατηρείται κατά τη δράση του. Για τις ισχυρές και τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, η ομοτιμία διατηρείται αυστηρά, που σημαίνει ότι όλες οι διαδικασίες είναι αναλλοίωτες στη χωρική αντιστροφή. Αυτό δεν ισχύει όμως για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις.

4.3.2 Πειραματική Επιβεβαίωση της Παραβίασης της Ομοτιμίας

Η υποψία για την παραβίαση της ομοτιμίας στην ασθενή αλληλεπίδραση προήλθε από παρατηρήσεις της διάσπασης του K^+ μεσονίου. Δύο διαφορετικά μοντέλα παρατηρήθηκαν, ένα με δύο πιόνια και ένα με τρία πιόνια στην τελική κατάσταση . Καθώς τα δύο αυτά μοντέλα εμφάνιζαν διαφορετική ομοτιμία, η μη διατήρηση της ομοτιμίας στις ασθενής αλληλεπιδράσεις προτάθηκε ως πιθανή λύση. Η επιβεβαίωση της πρότασης αυτής, προήλθε από την παρατήρηση της

αποδιέγερσης β του ^{60}Co:

$$^{60}Co \rightarrow {}^{60}Ni + e^{-} + \bar{v}_e. \tag{4.16}$$

Η θεμελιώδης κατάσταση του περιττού−περιττού πυρήνα $^{27}_{60}Co$ εμφανίζει $J^{\pi} = 5^{+}$. Με μη μηδενικό σπιν ο πυρήνας μπορεί να πολωθεί από εξωτερικό μαγνητικό πεδίο. Η θεμελιώδης κατάσταση αποδιεγείρεται κυρίως (99% του χρόνου) στη κατάσταση με $J^{\pi} = 4^{+}$ του $^{28}_{60}Ni$, με ενέργεια διέγερσης 2.5 MeV. Από την μελέτη της γωνιακής κατανομής των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται κατά την αποδιέγερση β του Co σε σχέση με την διεύθυνση του σπίν του μητρικού πυρήνα, παρατηρήθηκε ότι το ηλεκτρόνιο εκπέμπεται κατά προτίμηση σε διεύθυνση αντίστροφη του σπιν του $_{60}Co$. Με τον τρόπο αυτό, οι έννοιες "δεξιά" και "αριστερά"αποκτούν απόλυτη σημασία και η αρχή διατήρησης της ομοτιμίας δεν ικανοποιείται. Ανάλογα αποτελέσματα πάρθηκαν μετέπειτα και από διασπάσεις μιονίων και πιονίων.

4.3.3 Η Ελικότητα

Η ελικότητα ενός σωματιδίου ορίζεται ως η προβολή του $\vec{\sigma}$, δύο φορές το σπίν $\vec{s}$ δηλαδή, κατά την διεύθυνση της κίνησής του:

$$h = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|p|}. \tag{4.17}$$

Για σωμάτιο χωρίς μάζα, οι ιδιοτιμές της ελικότητας μπορούν να πάρουν μόνο τις τιμές ± 1. Ένα παράδειγμα σωματιδίου με μόνο δύο δυνατούς προσανατολισμούς είναι το φωτόνιο, το οποίο μπορεί να έχει μόνο δύο γραμμικά ανεξάρτητες, εγκάρσια πολωμένες διευθύνσεις. Για ηλεκτρόνια και άλλα σωμάτια με μη μηδενική μάζα ηρεμίας, η ελικότητα παίρνει τιμές $\pm v/c$. Σωμάτια με θετική ελικότητα αναφέρονται συχνά ως "δεξιόστροφα"σωμάτια, ενώ σωμάτια με αρνητική ελικότητα αναφέρονται συνήθως ως "αριστερόστροφα"σωμάτια. Αν τα νετρίνο δεν έχουν μάζα, θα συμπεριφέρνονται παρόμοια με τα φωτόνια και η ελικότητα θα μπορεί ναι πάρει μόνο τις τιμές ± 1.

Από μετρήσεις της πόλωσης των ακτίνων−γ που προέρχονται από την αποδιέγερση του ^{152}Sm

$$e^{-} + {}^{152}Eu \rightarrow v_e + {}^{152}Sm^{*}\left(-1^{+}\right) \rightarrow v_e + {}^{152}Sm\left(0^{+}\right) + \gamma \tag{4.18}$$

στην 0^{+} θεμελιώδη του κατάσταση, η ελικότητα των v_e που εκπέμπονται κατά την διαδικασία της ηλεκτρονικής σύλληψης προσδιορίστηκε ότι είναι -1. Άλλες πυρηνικές αποδιεγέρσεις β δίνουν την ελικότητα του $\bar{v}_e$: $+1$, καθώς δε και $+v/c$ για τα ηλεκτρόνια και $-v/c$ για τα εκπεμπόμενα ποζιτρόνια.

4.3.4 Η V-A Θεωρία της Αποδιέγερσης β

Δύο σημαντικά συμπεράσματα προκύπτουν από αυτές τις πειραματικές παρατηρήσεις. Το πρώτο προέρχεται από το γεγονός ότι όλα τα λεπτόνια που εκπέμπονται κατά την αποδιέγερση β είναι αριστερόστροφα ($h < 0$) και όλα τα αντιλεπτόνια δεξιόστροφα ($h > 0$). Για λόγους τους οποίους δεν θα παραθέσουμε εδώ, τελεστές που είναι βαθμωτοί, διανυσματικοί, ψευδοβαθμωτοί και τανυστές υπό το μετασχηματισμό της ομοτιμίας, παράγουν λεπτόνια (όπως και αντιλεπτόνια) και των δύο ελικοτήτων. Μόνο οι διανυσματικοί τελεστές V και οι αξονικά−διανυσματικοί τελεστές A μπορούν να συμβιβα-στούν με τα παρατηρούμενα αποτελέσματα. Επιπρόσθετα, καθώς τα V και A εμφανίζουν διαφορετική ομοτιμία, ένας γραμμικός συνδυασμός τους μπορεί να θεωρηθεί ως ο τελεστής της αποδιέγερσης β. Το γεγονός αυτό οδηγεί στην επονομαζόμενη θεωρία $(V - A)$ της αποδιέγερσης β.

Μια δεύτερη παρατήρηση του γεγονότος ότι τα νετρίνα βρίσκονται στην φύση μόνο με ελικότητα $h = -1$ και τα αντινετρίνα με $h = +1$ είναι ότι θα πρέπει να περιγράφονται από μια κυματοσυνάρτηση δύο συνιστωσών. Στην θεωρία του Dirac, κυματοσυναρτήσεις σωματιδίων με σπιν $\frac{1}{2}$ έχουν τέσσερις συνιστώσες, έτσι ώστε να περιγράφουν ταυτόχρονα σωμάτια και αντισωμάτια με σπιν $\pm\frac{1}{2}$. Αν τα νετρίνα έχουν πάντα την ίδια ελικότητα και τα αντινετρίνα πάντα την αντίθετη, τότε μια θεωρία δύο συνιστωσών θα αρκεί, καθώς τα σωμάτια έχουν ελικότητα $h = -1$ και τα αντισωμάτια $h = +1$. Ωστόσο, μια τέτοια απλοποίηση υπονοεί ότι τα νετρίνα δεν έχουν μάζα. Ο πειραματικός προσδιορισμός της μάζας των νετρίνων παρουσιάζει λοιπόν εξαιρετικό ενδιαφέρον στη σύγχρονη έρευνα.

Κεφάλαιο 5

Η Αποδιέγερση β

ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΟ *αποδιέγερση β* αποδίδουμε, λοιπόν, τη μετάπτωση μεταξύ δύο ισοβαρών πυρηνικών συστημάτων όταν η μετατροπή ενός πρωτονίου σε ουδετερόνιο (ή αντίστροφα ενός ουδετερονίου σε πρωτόνιο) συνεπάγεται αύξηση της ενέργειας σύνδεσης και επομένως διαμόρφωση ενός πλέον σταθερού συστήματος. Πειραματικά, όπως είδαμε, η αποδιέγερση β εκδηλώνεται ως αυθόρμητη εκπομπή ενός αρνητικού ή θετικού πρωτονίου.

Από τα πρώτα βήματα της πυρηνικής φυσικής, η αποδιέγερση β και γενικότερα η μελέτη της ασθενούς αλληλεπίδρασης υπήρξε υπεύθυνη για μερικές από τις πιο σημαντικές μεταβολές της φυσικής σκέψης. Ορισμένες από τις πιο θεμελιώδης πεποιθήσεις μας για τους νόμους διατήρησης που διέπουν το φυσικό κόσμο κλονίστηκαν και στην περίπτωση της ομοτιμίας, όπως είδαμε, αναθεωρήθηκαν σημαντικά. Ακόμη και σήμερα όμως, η ασθενής αλληλεπίδραση παραμένει *terra incognita* και αποτελεί έναν από τους πιο ενδιαφέροντες τομείς της σύγχρονής ερευνητικής προσπάθειας.

Είναι πολύ πιθανό ότι μερικά από τα πιο θεμελιώδη προβλήματα γύρω από την φύση της δομής της ύλης και των στοιχειωδών σωματιδίων να βρουν μερική τουλάχιστον απάντηση στο μέλλον, από τα θεωρητικά και πειραματικά αποτελέσματα της αποδιέγερσης β.

5.1 Ρυθμός Μετάπτωσης – Ενεργειακό Φάσμα της Αποδιέγερσης β

Θα προσπαθήσουμε αρχικά να συσχετίσουμε την πιθανότητα μετάπτωσης W της εξ. (3.1) για την αποδιέγερση β με το εμπλεκόμενο πυρηνικό στοιχείο

μήτρας M_{fi} της εξ. (3.27). Για να το κατορθώσουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, την χρονοεξαρτώμενη θεωρία διαταραχών και για να απλοποιήσουμε την διαδικασία θα αγνοήσουμε την ηλεκτρονική σύλληψη. Ξεκινάμε λοιπόν από τον χρυσό κανόνα του Fermi :

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} \left|\langle f| V_\beta |i\rangle\right|^2 \rho\left(E_f\right), \tag{5.1}$$

όπου V_β είναι η διαταραχή που προκαλεί την αποδιέγερση β και $\rho\left(E_f\right)$ η πυκνότητα τελικών καταστάσεων.

5.1.1 Προσδιορισμός Αρχικής και Τελικής Κατάστασης

Η αρχική κατάσταση είναι απλή και περιλαμβάνει μόνο την κατάσταση του μητρικού πυρήνα:

$$|i\rangle = |J_i M_i \zeta\rangle\,, \tag{5.2}$$

ο οποίος θεωρείται ακίνητος στο σύστημα εργαστηρίου.

Η τελική κατάσταση απαρτίζεται από 3 σωμάτια, ένα ουδέτερο λεπτόνιο, ένα φορτισμένο λεπτόνιο και τον θυγατρικό πυρήνα. Σε πρώτη προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε τα τρία αυτά σωμάτια ως ανεξάρτητα. Η κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης θα είναι επομένως το γινόμενο των κυματοσυναρτήσεων των τριών σωματίων:

$$|f\rangle = \Psi_f \Phi_e(\vec{r}) \Phi_v(\vec{r}), \tag{5.3}$$

όπου $\Psi_f = |J_f M_f \xi\rangle$ η κυματοσυνάρτηση του θυγατρικού πυρήνα, $\Phi_e(\vec{r})$ η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου και $\Phi_v(\vec{r})$ η κυματοσυνάρτηση του νετρίνο. Για απλούστευση, θα ξεκινήσουμε αγνοώντας οποιαδήποτε επίδραση Coulomb μεταξύ φορτισμένου λεπτονίου και θυγατρικού πυρήνα. Σε αυτό το όριο, και τα δύο λεπτόνια είναι ελεύθερα σωμάτια και η κίνησή τους περιγράφεται αντίστοιχα από τα επίπεδα κύματα:

$$\Phi_e(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}}, \tag{5.4α'}$$

$$\Phi_v(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_v \cdot \vec{r}}, \tag{5.4β'}$$

που διαδίδονται με κυματάριθμους k_e και k_v. Οι δύο όροι $\frac{1}{\sqrt{V}}$ απαιτούνται για την κανονικοποίηση των κυματοσυναρτήσεων των δύο λεπτονίων. Η κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην εξ. (5.3) παίρνει λοιπόν την ακόλουθη μορφή:

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_v \cdot \vec{r}} \left|J_f M_f \xi\right\rangle, \tag{5.5}$$

Αν αναπτύξουμε τα επίπεδα κύματα με την βοήθεια των σφαιρικών αρμονικών:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2\lambda+1)} i^{\lambda} j_{\lambda}(kr) Y_{\lambda 0}(\theta, 0), \tag{5.6}$$

όπου $k = \left|\vec{k}\right| = \left|\vec{k}_e + \vec{k}_v\right|$ και θ η γωνία μεταξύ $\vec{k}$ και $\vec{r}$, οι σφαιρικές αρμονικές $Y_{\lambda\mu}(\theta, \phi)$ θα είναι ανεξάρτητες της αζιμουθιακής γωνίας ϕ για $\mu = 0$.

Καθώς η τιμή-Q της μετάπτωσης είναι τυπικά της τάξης των λίγων MeV, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση μεγάλου μήκους κύματος. Σε αυτό το όριο, χρειαζόμαστε μόνο τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα των σφαιρικών συναρτήσεων Bessel $j_{\lambda}(kr)$:

$$j_{\lambda}(kr) \approx \frac{(kr)^{\lambda}}{(2\lambda+1)!!} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{(kr)^2}{2\lambda+3} + \cdots\right) \approx \frac{(kr)^{\lambda}}{(2\lambda+1)!!}. \tag{5.7}$$

Η κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης μπορεί επομένως να γραφτεί στη μορφή:

$$|f\rangle = \frac{1}{V}\left\{1 + i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(kr) Y_{10}(\theta, 0) + O\left((kr)^2\right)\right\} |J_f M_f \xi\rangle. \tag{5.8}$$

5.1.2 Πυρηνικό Στοιχείο Μήτρας της Αλληλεπίδρασης

Θα προσπαθήσουμε να ερευνήσουμε αρχικά τις πιθανές μορφές του πυρηνικού μέρους του τελεστή της αποδιέγερσης β, πριν προχωρήσουμε στην εύρεση του στοιχείου μήτρας της μετάπτωσης. Καθώς ένα νετρόνιο μετατρέπεται σε πρωτόνιο στην αποδιέγερση β^- και αντίστροφα στην αποδιέγερση β^+, ο πυρηνικός τελεστής θα πρέπει να είναι μονοσωματιδιακός. Μόνο ένα νουκλεόνιο εμπεριέχεται κάθε φορά για παράδειγμα και πρέπει να περιλαμβάνει το μονοσωματιδιακό τελεστή αναβίβασης ή καταβίβασης $\tau_{\pm}$. Επιπλέον, σύμφωνα με την θεωρία $V - A$, υπάρχουν δύο όροι στην ασθενή αλληλεπίδραση, το πολικά διανυσματικό μέρος με σταθερά σύζευξης G_V και το αξονικά διανυσματικό μέρος με σταθερά G_A. Στο μη σχετικιστικό όριο, το διανυσματικό μέρος μπορεί να αντικατασταθεί από τον μοναδιαίο τελεστή και το αξονικά διανυσματικό μέρος από το γινόμενο του τελεστή σπιν s και $\tau_{\pm}$. Μια σωστή έκβαση αυτού του αποτελέσματος απαιτεί χειρισμούς με κυματοσυναρτήσεις Dirac και πίνακας γ. Δεν θα επεκτείνουμε την συζήτηση αυτή όμως περαιτέρω. Μια αναλυτική περιγραφή μπορεί να βρει κανείς σε κλασικές αναφορές όπως η [60].

Θέτοντας το αποτέλεσμα αυτό για τον τελεστή μαζί με αυτά που προέκυψαν νωρίτερα στις εξ. (5.2) και (5.8) για τις κυματοσυναρτήσεις, μπορούμε

να γράψουμε το στοιχείο μήτρας της μετάπτωσης της $\beta^{\mp}$ αποδιέγερσης στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}\langle i|\, V_\beta\, |f\rangle &= \tfrac{1}{V}\,\langle J_f M_f \xi|\sum_{j=1}^{A}\left\{G_V\vec{\tau}_\pm\left(j\right)+G_A\vec{\sigma}\left(j\right)\vec{\tau}_\pm\left(j\right)\right\}\\ &\times\left\{1-i\sqrt{\tfrac{4\pi}{3}}\left(kr\right)Y_{10}\left(\vartheta,0\right)+O\left(\left(kr\right)^2\right)\right\}|J_i M_i\zeta\rangle\,.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Αρχικά θα μας απασχολήσουν κυρίως οι δύο πρώτοι όροι στην έκφραση, γενικότερα γνωστοί ως τελεστές *επιτρεπτής μετάπτωσης*. Οι όροι υψηλότερης τάξης περιλαμβάνουν σφαιρικές αρμονικές τάξεων μεγαλύτερων του μηδενός και αυτοί είναι υπεύθυνοι για τις *απαγορευμένες μεταπτώσεις*.

Για τις επιτρεπόμενες μεταπτώσεις, το πυρηνικό μέρος του τελεστή μετάπτωσης της αποδιέγερσης $\beta^{\mp}$ έχει τη μορφή:

$$V_\beta = G_V\sum_{j=1}^{A}\vec{\tau}_\pm\left(j\right)+G_A\sum_{j=1}^{A}\vec{\sigma}\left(j\right)\vec{\tau}_\pm\left(j\right). \tag{5.10}$$

Η στροφορμή που εκφράζεται από τον πρώτο όρο είναι $\vec{\lambda}=0$ και από τον δεύτερο $\vec{\lambda}=1$. Το στοιχείο μήτρας της μετάπτωσης για αυτή την μορφή του τελεστή της αποδιέγερσης β θα είναι επομένως:

$$\begin{aligned}\langle i|\, V_\beta\, |f\rangle \approx \tfrac{G_V}{V}\Bigg\{&\sum_{\mu M_f}\langle J_f M_f\xi|\sum_{j=1}^{A}\vec{\tau}_\pm\left(j\right)|J_i M_i\xi\rangle\\ &+g_A\,\langle J_f M_f\xi|\sum_{j=1}^{A}\vec{\sigma}\left(j\right)\vec{\tau}_\pm\left(j\right)|J_i M_i\zeta\rangle\,,\end{aligned} \tag{5.11}$$

όπου $g_A = {}^{G_A}\!/_{G_V}$. Ο πρώτος όρος αναφέρεται συνήθως ως *μετάπτωση Fermi* και ο δεύτερος ως *μετάπτωση Gamow − Teller*. Τα στοιχεία μήτρας της μετάπτωσης τελεστών με $\lambda>1$ είναι συνήθως πολύ μικρότερα, αφού προέρχονται από όρους υψηλότερων τάξεων της σχέσης (5.9). Η συνεισφορά τους είναι σημαντική, μόνο σε μεταβάσεις όπου οι δύο όροι χαμηλότερης τάξης είναι απαγορευμένοι από τους κανόνες επιλογής της στροφορμής και της ομοτιμίας.

5.1.3 Πυκνότητα Τελικών Καταστάσεων

Η πυκνότητα των καταστάσεων στη πυρηνική $\beta-$διάσπαση περιπλέκεται περισσότερο από την τρισωματιδιακή τελική κατάσταση. Στη περίπτωση των δύο σωμάτων η ενέργεια και η ορμή ενός σωματιδίου περιορίζεται από τις τιμές που παίρνει το άλλο σωματίδιο εξ' αιτίας των νόμων διατήρησης. Γι'

αυτό το λόγο το πρόβλημα δύο σωμάτων απλοποιείται σε ένα ισοδύναμο ενός σώματος. Στην πυρηνική $\beta-$διάσπαση, η διαθέσιμη κινητική ενέργεια, συμπε-ριλαμβανομένης και της ανάκρουσης του πυρήνα, μοιράζεται μεταξύ του νετρίνου και του ηλεκτρονίου (ή ποζιτρονίου). Ως αποτέλεσμα, συνεχή ενεργειακά φάσματα του φορτισμένου λεπτονίου και του νετρίνο παράγονται, που υπόκει-νται μόνο στη συνθήκη ότι το άθροισμά τους, μαζί με αυτό της ανάκρουσης του πυρήνα, ικανοποιεί την διατήρηση ενέργειας$-$ορμής για την διάσπαση. Επιπλέον το φορτισμένο λεπτόνιο εκπέμπεται στο πεδίο Coulomb του θυγατρικού πυρήνα και η κυματοσυνάρτησή του παραμορφώνεται ως απόρροια της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης, γεγονός το οποίο έχει επίδραση στην πυκνότητα των διαθέσιμων τελικών καταστάσεων του φορτισμένου λεπτονίου.

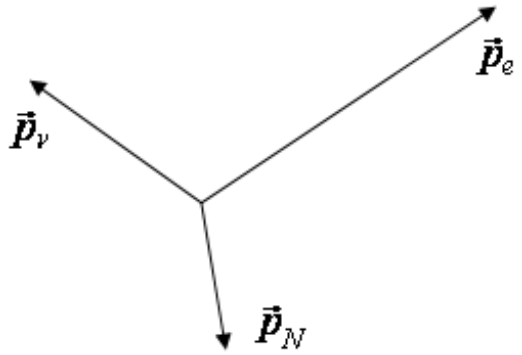
Η ενέργεια της τελικής κατάστασης E_f θα είναι ίση με την διαθέσιμη για την αποδιέγερση* ενέργεια:

$$E_f = E_\beta = M\left(A, Z\right) - M\left(A, Z+1\right). \tag{5.12}$$

Η ενέργεια αυτή θα διαμοιραστεί όπως είπαμε, ως κινητική ενέργεια των σωματίων στην τελική κατάσταση:

$$E_f = E_N + E_e + E_v, \tag{5.13}$$

όπου οι δείκτες N, e και v αναφέρονται αντίστοιχα στο θυγατρικό πυρήνα, στο ηλεκτρόνιο και στο νετρίνο.



Σχήμα 5.1: Διατήρηση της ορμής κατά την αποδιέγερση β

Ο τρόπος με τον οποίο θα διαμοιραστεί η ενέργεια στα τρία σωμάτια της τελικής κατάστασης μπορεί να βρεθεί από την διατήρηση της ορμής. Όπως δείχνει το σχήμα 5.1, αν ο μητρικός πυρήνας βρίσκεται ακίνητος πριν από την

*Στη συνέχεια θα περιοριστούμε για μεγαλύτερη σαφήνεια στην αποδιέγερση β^-.

αποδιέγερση, τότε το ανυσματικό άθροισμα των ορμών στην τελική κατάσταση είναι ίσο με το μηδέν.

$$\vec{p}_N + \vec{p}_e + \vec{p}_v = 0. \tag{5.14}$$

Είναι φανερό ότι εφόσον η μάζα του θυγατρικού πυρήνα είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου,

$$M(A, Z) \gg m_e \tag{5.15}$$

και οι ορμές των τριών σωματίων είναι της ίδιας τάξης μεγέθους

$$p_N \approx p_e \approx p_v, \tag{5.16}$$

η ενέργεια ανάκρουσης του θυγατρικού πυρήνα E_N είναι, σε πολύ καλή προσέγγιση, αμελητέα. Έτσι στην αποδιέγερση β μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διαθέσιμη ενέργεια μοιράζεται ουσιαστικά μεταξύ του ηλεκτρονίου και του νετρίνο:

$$E_f = E_e + E_v, \tag{5.17}$$

ενώ η σχέση μεταξύ κινητικής ενέργειας και ορμής δίνεται από τις αντίστοιχες σχετικιστικές εκφράσεις. Για το νετρίνο με μάζα αδράνειας $m_v = 0$ η ορμή δίνεται από την έκφραση:

$$p_v = \frac{E_v}{c} = \frac{1}{c}\left(E_f - E_e\right), \tag{5.18}$$

ενώ για το ηλεκτρόνιο:

$$p_e = \frac{1}{c}\left[E_e\left(E_e + 2m_e c^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5.19}$$

Η πυκνότητα των καταστάσεων ανά διάστημα ενέργειας μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της ορμής στις δύο τελευταίες εξισώσεις. Αν θεωρήσουμε λοιπόν το ηλεκτρόνιο στην τελική κατάσταση ως ελεύθερο σωμάτιο, τότε, όπως είναι γνωστό από την κβαντική θεωρία, η ενεργειακές του καταστάσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο χώρο των φάσεων με πυκνότητα h^{-3}. Μπορούμε επομένως να εκφράσουμε τον αριθμό των καταστάσεων μέσα σε ένα στοιχείο του χώρου των φάσεων $dxdydzdp_xdp_ydp_z$ ως:

$$dn = \frac{dxdydzdp_xdp_ydp_z}{h^3}. \tag{5.20}$$

Αν θεωρήσουμε ότι η αποδιέγερση β πραγματοποιείται μέσα σε ένα κιβώτιο με όγκο $\int dxdydz = V$, και εκφράσουμε την ορμή σε σφαιρικές συντεταγμένες, τότε για το ηλεκτρόνιο η εξ. (5.20) παίρνει την μορφή:

$$dn_e = V\frac{4\pi p_e^2 dp_e}{h^3}, \tag{5.21}$$

που εκφράζει την πιθανότητα ώστε το ηλεκτρόνιο να βρεθεί κάπου μέσα στο χώρο V με ορμή μεταξύ των τιμών p_e και $p_e + dp_e$.

Εφόσον το νετρίνο αντιδρά αμυδρά με το περιβάλλον του, μπορεί να θεωρηθεί ως ελεύθερο σωματίδιο από την στιγμή που δημιουργείται. Ο αριθμός των καταστάσεων με ορμή p_v, μη λαμβάνοντας υπ' όψη την κατεύθυνση κατά την οποία το σωματίδιο κινείται, στο χώρο των φάσεων θα είναι επομένως:

$$dn_v = V\frac{4\pi p_v^2 dp_v}{h^3}, \tag{5.22}$$

ενώ ο αριθμός των καταστάσεων για την ταυτόχρονη εκπομπή των δύο σωματίων δίνεται από το γινόμενο των εξίσωση:

$$dn = dn_e dn_v. \tag{5.23}$$

Η πυκνότητα των καταστάσεων της εξίσωσης ανά διάστημα ενέργειας dE_f μπορεί να εκφραστεί από τα παραπάνω αποτελέσματα ως:

$$\rho\left(E_f\right) = \frac{dn}{dE_f} = \frac{16\pi^2 V^2}{h^3} p_e^2 p_v^2 \frac{dp_v}{dE_f} dp_e. \tag{5.24}$$

Χρησιμοποιώντας την εξ. (5.18), οι παράγοντες της εξ. (5.24) που αναφέρονται στην ορμή του νετρίνο p_v μπορούν να γραφούν ως συνάρτηση της ενέργειας του ηλεκτρονίου:

$$p_v^2 \frac{dp_v}{dE_f} = \frac{1}{c^3}\left(E_f - E_e\right)^2, \tag{5.25}$$

ώστε η έκφραση της εξ. (5.24) να πάρει την μορφή:

$$\rho\left(E_f\right) = \frac{16\pi^2 V^2}{c^3 h^6} p_e^2 \left(E_f - E_e\right)^2 dp_e. \tag{5.26}$$

5.1.4 Ρυθμός Μετάπτωσης και Ενεργειακό Φάσμα της Αποδιέγερσης β

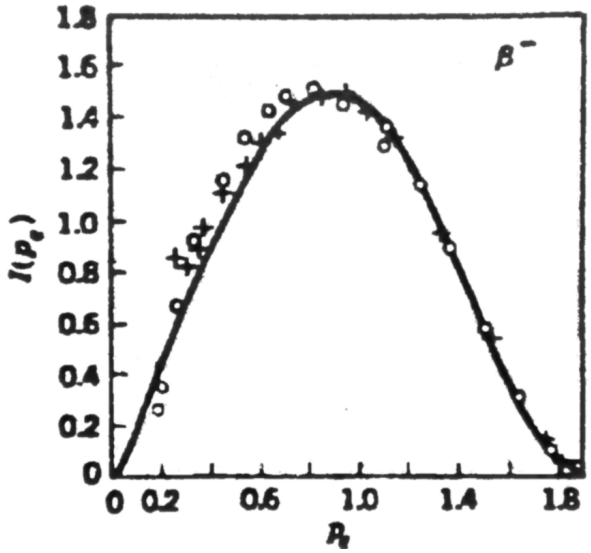
Με βάση την τελευταία έκφραση και το αποτέλεσμα της εξ. (5.11) για το στοιχείο μήτρας $\langle f|\, V_\beta \,|i\rangle$ της αλληλεπίδρασης, η εξ. (5.1) δίνει την πιθανότητα μετάπτωσης ανά μονάδα χρόνου ανά στοιχειώδες διάστημα της ορμής του ηλεκτρονίου dp_e:

$$dW_{fi} = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \sum_{\mu M_f} \left|\langle J_f M_f \xi|\, V_\beta \,|J_i M_i \zeta\rangle\right|^2 \left(E_f - E_e\right)^2 p_e^2 dp_e, \tag{5.27}$$

ή ισοδύναμα την ένταση του ενεργειακού φάσματος των ηλεκτρονίων:

$$I\left(p_e\right) = \frac{dW_{fi}}{dp_e} = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \sum_{\mu M_f} \left|\langle J_f M_f \xi|\, V_\beta \,|J_i M_i \zeta\rangle\right|^2 \left(E_f - E_e\right)^2 p_e^2. \tag{5.28}$$

Η εξ. (5.27), περιγράφει την χαρακτηριστική μορφή του ενεργειακού φάσματος της αποδιέγερσης β, που οφείλεται στην συνύπαρξη ηλεκτρονίου και νετρίνο στην τελική κατάσταση. Στο σχήμα 5.2 μπορεί κανείς να δει την μορφή του ενεργειακού αυτού φάσματος όπως προκύπτει πειραματικά.



Σχήμα 5.2: Φάσμα ορμής σωματίων β^- κατά την αποδιέγερση του ^{64}Cu σύμφωνα με την μετάπτωση $^{64}Cu \rightarrow ^{64} Zn$. [49]

5.2 Η Ηλεκτροστατική Διόρθωση και ο Παράγοντας *Fermi*

Η ολική σταθερά αποδιέγερσης στη μετάπτωση β^- μπορεί να βρεθεί από την εξ. (5.27) με ολοκλήρωση σε όλο το φάσμα της ορμής:

$$W_{fi} = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \sum_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \xi | V_\beta | J_i M_i \zeta \rangle|^2 \int_0^{p_e^{\max}} \left[E_f - \left(m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2\right)\right]^2 p_e^2 dp_e \tag{5.29}$$

όπου το άνω όριο της ολοκλήρωσης αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της ορμής:

$$p_e^{\max} = \frac{1}{c}\left(E_f^2 - m_e^2 c^4\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.30}$$

Η έκφραση της εξ. (5.29), καθώς και το αντίστοιχο αποτέλεσμα της εξ. (5.28) για το ενεργειακό φάσμα περιέχουν αρκετές υπεραπλοποιήσεις. Πέρα από την προσέγγιση του στοιχείου της αλληλεπίδρασης M_{fi} και την απόδοση των σωματίων που εκπέμπονται με επίπεδα κύματα, δεν έχει ληφθεί καθόλου υπόψη η επίδραση της αλληλεπίδρασης Coulomb. Σε αναλογία με την εκπομπή

α, περιμένουμε ότι το φράγμα Coulomb που δημιουργεί το φορτίο του πυρήνα θα επιταχύνει την εκπομπή β^-. Ποιοτικά η επίδραση της ηλεκτροστατικής αλληλεπίδρασης μεταξύ του ηλεκτρονίου και του πυρηνικού φορτίου εμφανίζεται ως μετατόπιση του ενεργειακού φάσματος προς υψηλές τιμές της ενέργειας για την εκπομπή β^+ και προς χαμηλές τιμές για εκπομπή β^- (σχ. 5.2).

Ποσοτικά η αλληλεπίδραση Coulomb κατά την εκπομπή β μπορεί να αποδοθεί ως μια παραμόρφωση του επίπεδου κύματος του ηλεκτρονίου από το ηλεκτροστατικό πεδίο του πυρήνα. Διατηρώντας τις προσεγγίσεις που έχουμε κάνει ως τώρα, μπορούμε να συμπεριλάβουμε την παραμόρφωση αυτή, εισάγοντας στην έκφραση (5.26) που δίνει την πυκνότητα των τελικών καταστάσεων τον αποκαλούμενο παράγοντα Fermi :

$$F\left(Z,E_e\right)=\frac{\left|\Phi_{e,Z}\left(0\right)\right|^2}{\left|\Phi_e\left(0\right)\right|^2}, \tag{5.31}$$

όπου $\Phi_{e,Z}\left(r\right)$ είναι η παραμορφωμένη κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου. Ο παράγοντας Fermi ισούται με την πυκνότητα των ηλεκτρονίων στην άμεση γειτονιά του πυρήνα προς την πυκνότητα των ηλεκτρονίων σε απόσταση $r\rightarrow\infty$. Μέσω του παράγοντα $F\left(Z,E_e\right)$ μπορούμε τώρα να συμπεριλάβουμε την αλληλεπίδραση Coulomb στο ενεργειακό φάσμα των σωματίων β με την αντικατάσταση της εξ. (5.28) από την έκφραση:

$$I\left(p_e\right)=\frac{1}{2\pi^3c^3\hbar^7}\sum_{\mu M_f}\left|\left\langle J_fM_f\xi\right|V_\beta\left|J_iM_i\zeta\right\rangle\right|^2F\left(Z,E_e\right)\left(E_f-E_e\right)^2p_e^2. \tag{5.32}$$

Η αναλυτική μορφή του παράγοντα Fermi είναι αρκετά πολύπλοκη. Για σημειακό πυρηνικό φορτίο, ο λόγος της πυκνότητας των ηλεκτρονίων σε απόσταση R δίνεται από τη σχέση:

$$F\left(Z,E_e\right)=2\left(1+\gamma\right)\left(\frac{2p_eR}{\hbar}\right)^{-2(1-\gamma)}e^{\pi v}\frac{\left|\Gamma\left(\gamma+iv\right)\right|^2}{\Gamma\left(2\gamma+1\right)^2}, \tag{5.33}$$

όπου

$$\gamma=\left(1-a^2Z^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.34}$$

$$v=\pm\frac{aZE_e}{cp_e}. \tag{5.35}$$

$\alpha\left(=e^2/\hbar c\right)$ είναι η σταθερά λεπτής υφής και το εναλλακτικό πρόσημο $\pm$ στην εξ. (5.35) αναφέρεται αντίστοιχα στην εκπομπή $\beta^\mp$. Στο μη σχετικιστικό όριο, όπου η τελική ταχύτητα του φορτισμένου λεπτονίου $v\ll c$, η συνάρτηση

σχετίζεται με το τετράγωνο του απολύτου της κυματοσυνάρτησης *Coulomb* και δίνεται προσεγγιστικά από την έκφραση:

$$F(Z, E_e) = \frac{2\pi n}{1 - e^{-2\pi n}}, \tag{5.36}$$

με

$$n = \pm \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar \upsilon}. \tag{5.37}$$

Το θετικό πρόσημο ισχύει για τα ηλεκτρόνια και το αρνητικό για τα ποζιτρόνια. Καθώς το $\upsilon \to 0$ για τα ηλεκτρόνια, το $F(Z, E_e) \to 2\pi n$. Εξαιτίας του όρου $1/\upsilon$ ο ρυθμός διασπάσεων αυξάνει στις χαμηλές ενέργειες, αφού το πεδίο *Coulomb* είναι ελκτικό για τα ηλεκτρόνια.

Για ποζιτρόνια σε χαμηλές ενέργειες $F(Z, E_e) \to 2\pi |n| e^{-2\pi|n|}$. Το πεδίο *Coulomb* για τα ποζιτρόνια είναι απωστικό και το εκθετικό είναι ο συντελεστής σήραγγας φράγματος *Coulomb*, στο οποίο και οφείλεται η μείωση εκπομπής ποζιτρονίων στις χαμηλές ενέργειες.

Η αριθμητική τιμή της εξ. (5.33) μπορεί να βρεθεί εύκολα με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Όπως περιμένουμε από την παραπάνω ποιοτική θεώρηση της επίδρασης του πυρηνικού ηλεκτροστατικού πεδίου:

$$\begin{array}{lll} F(Z, E_e) \geq 1 & \gamma\iota\alpha \quad \varepsilon\kappa\pi o\mu\pi\acute{\eta} \quad \beta^- & , \\ F(Z, E_e) = 1 & \gamma\iota\alpha \quad Z = 0 & , \\ F(Z, E_e) \leq 1 & \gamma\iota\alpha \quad \varepsilon\kappa\pi o\mu\pi\acute{\eta} \quad \beta^+ & , \end{array} \tag{5.38}$$

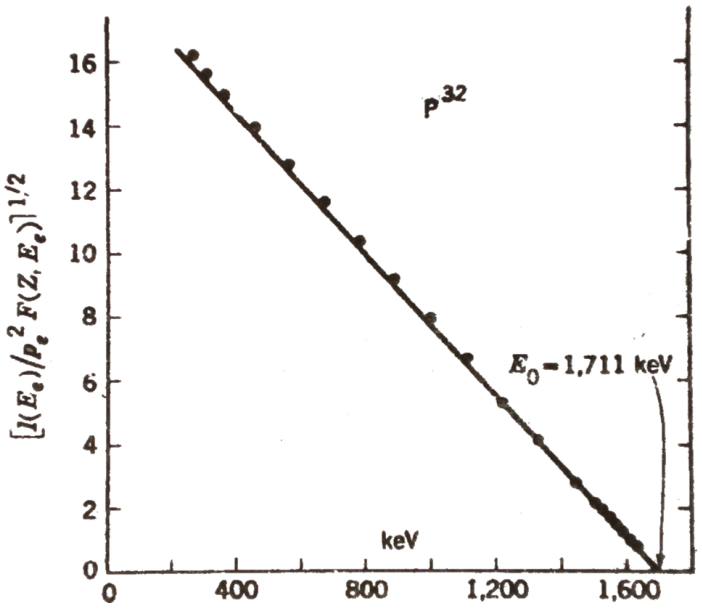
με αποτέλεσμα η ηλεκτροστατική διόρθωση να ευνοεί την αλληλεπίδραση β^+. Γενικά, η ακριβής γνώση της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης επιτρέπει τον προσδιορισμό του παράγοντα *Fermi* με μεγάλη ακρίβεια.

Π.χ. η επίδραση των ατομικών ηλεκτρονίων στην κατανομή της εξ. (5.32), μπορεί να ληφθεί υπόψη, αν και σπάνια υπερβαίνει το 2 ως 3% για την αποδιέγερση β^-. Πρακτικά, η σύγκριση των πειραματικών φασμάτων ενεργείας κατά την αποδιέγερση β με θεωρητικές προβλέψεις γίνεται συνήθως με μια γραμμική απεικόνιση των δεδομένων που είναι γνωστή ως **απεικόνιση** *Kurie*. Η απεικόνιση *Kurie* προκύπτει από την παρατήρηση ότι το ενεργειακό φάσμα της εξ. (5.32) μπορεί να γραφεί υπό την μορφή:

$$\left[\frac{I(p_e)}{p_e^2 F(Z, E_e)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \sum_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \xi | V_\beta | J_i M_i \zeta \rangle|^2\right]^{\frac{1}{2}} (E_f - E_e). \tag{5.39}$$

Στην περίπτωση λοιπόν που το στοιχείο μήτρας της αλληλεπίδρασης είναι ανεξάρτητο της ορμής p_e, η εξ. (5.39) αντιπροσωπεύει μια ευθεία γραμμή που

τέμνει τον οριζόντιο άξονα στην τιμή της ενέργειας αποδιέγερσης E_f, ενώ η κλίση της ευθείας δίνει την τιμή του στοιχείου M_{fi}. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα απεικονίσεως $Kurie$ δίνεται στο σχήμα 5.3, όπου η γραμμικότητα του φάσματος είναι προφανής. Στην πράξη αποκλίσεις από την γραμμικότητα παρατηρούνται μόνο στην περιοχή χαμηλής ενέργειας του φάσματος, όπου το πάχος του υλικού επιβραδύνει ηλεκτρόνια που προέρχονται από το εσωτερικό της πηγής ακτινοβολίας.



Σχήμα 5.3: Απεικόνιση $Kurie$ για το ενεργειακό φάσμα ηλεκρονίων κατά την αποδιέγερση β του ^{32}P. [2]

Με την ενσωμάτωση της ηλεκτροστατικής διορθώσεως η σταθερά αποδιεγέρσεως της εξ. (5.29) παίρνει πλέον την μορφή:

$$W_{fi} = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \sum_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \xi| V_\beta |J_i M_i \zeta\rangle|^2 \int_0^{p_e^{\max}} F(Z, E_e) (E_f - E_e)^2 p_e^2 dp_e \tag{5.40}$$

ή πιο απλά,

$$W_{fi} = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_f) \sum_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \xi| V_\beta |J_i M_i \zeta\rangle|^2 \tag{5.41}$$

όπου η συνάρτηση:

$$f(Z, E_f) = \frac{1}{m_e^5 c^7} \int F(Z, E_e) (E_f - E_e)^2 p_e^2 dp_e \tag{5.42}$$

καλείται ολοκληρωμένη συνάρτηση $Fermi$ και μπορεί να υπολογιστεί με οποιαδήποτε ακρίβεια. Η συνάρτηση $f(Z, E_f)$ μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή μόνο για $Z = 0$ (οπότε $F(0, E_f) = 1$), έχει όμως υπολογιστεί αριθμητικά για ένα ευρύ φάσμα τιμών των παραμέτρων Z και E_f.

5.3 Χρόνος Ημιζωής και Τιμή$-ft$ Για Την Αποδιέγερση β

Από τη πιθανότητα μετάπτωσης, παίρνουμε την έκφραση για το χρόνο ημιζωής της αποδιέγερσης β, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3.

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{W} = \frac{1}{f(Z, E_f)} \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{\ln 2}{\sum\limits_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \xi | V_\beta | J_i M_i \zeta \rangle|^2}. \tag{5.43}$$

Αντί των χρόνων ημιζωής, οι ρυθμοί της αποδιέγερσης β συνήθως δίνονται με την τιμή$-ft$, η οποία δεν είναι τίποτε άλλο, παρά το γινόμενο του ολοκληρώματος $Fermi$ $f(Z, E_f)$ και του χρόνου ημιζωής $T_{1/2}$

$$ft = f(Z, E_f) T_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7}{m_e^5 c^4} \frac{\ln 2}{\sum\limits_{\mu M_f} |\langle J_f M_f \xi | V_\beta | J_i M_i \zeta \rangle|^2}. \tag{5.44}$$

Η τιμή$-ft$ αναφέρεται και ως *σχετικός χρόνος ημιζωής* και κυμαίνεται μεταξύ πολλών τάξεων μεγέθους αν συμπεριλάβουμε επιτρεπόμενες και απαγορευμένες μεταπτώσεις. Εύλογα είναι μάλλον πιο χρηστική η τιμή $logft$, ο λογάριθμος με βάση το 10 δηλαδή της τιμής$-ft$.

5.4 Ο Ρόλος της Στροφορμής

Κατά την αποδιέγερση β είναι αρκετά δύσκολο για τα λεπτόνια να αποκομίσουν τροχιακή στροφορμή. Το γεγονός αυτό είναι επακόλουθο αφ' ενός της μικρής μάζας αδρανείας του ηλεκτρονίου και αφ' ετέρου των χαμηλών σχετικά ενεργειών που συνδέονται με την αποδιέγερση. Ειδικότερα, οι ορμές των λεπτονίων που δίνονται στις εξ. (5.18) και (5.19) και είναι συγκρίσιμες με την ποσότητα $m_e c$ όπου m_e είναι η μάζα αδρανείας του ηλεκτρονίου. Κλασσικά, για να αποκομίσει ένα ηλεκτρόνιο τροχιακή στροφορμή ίση με μια κβαντική μονάδα $\hbar$ θα πρέπει να εκπεμφθεί από μια απόσταση:

$$d = \frac{\hbar}{m_e c} \tag{5.45}$$

από το κέντρο του μητρικού πυρήνα. Η απόσταση αυτή, που μπορεί να αναγνωριστεί ως το μήκος κύματος *Compton* του ηλεκτρονίου:

$$\lambda = \frac{\hbar}{m_e c} = 386 fm, \tag{5.46}$$

είναι τουλάχιστον μία ως δύο τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την πυρηνική ακτίνα. Η πιθανότητα επομένως ώστε ένα λεπτόνιο που εκπέμπεται από την επιφάνια του πυρήνα να αποκομίσει έστω και μία μονάδα $\hbar$ τροχιακής στροφορμής είναι εξαιρετικά μικρή.

Γενικά λοιπόν σε μία πυρηνική αποδιέγερση β:

$$|i, J_i\rangle \xrightarrow{\beta} |f, J_f\rangle\,, \tag{5.47}$$

η διατήρηση της στροφορμής όπως είδαμε και στην εξ. (3.31) απαιτεί:

$$\vec{J_i} = \vec{J_f} + \vec{\lambda}_{ev}, \tag{5.48}$$

όπου λ_{ev} είναι το ανυσματικό άθροισμα των σπίν των δυο λεπτονίων ($s_e = \frac{1}{2}$ και $s_v = \frac{1}{2}$) και της σχετικής τους στροφορμής ℓ_{ev}

$$\vec{\lambda}_{ev} = \vec{s}_e + \vec{s}_v + \vec{\ell}_{ev} \tag{5.49}$$

Από τα προηγούμενα επιχειρήματα είναι φανερό ότι η πιθανότητα μεταπτώσεως θα είναι μεγαλύτερη αν η εξ. (5.48) μπορεί να ικανοποιηθεί για μηδενική στροφορμή των λεπτονίων που εκπέμπονται. Με βάση το κριτήριο αυτό συνήθως οι μεταπτώσεις β διαχωρίζονται όπως είδαμε και στην παράγραφο 5.1.2 σε **επιτρεπτές** ($\lambda = 0$) και **απαγορευμένες** ($\lambda = 1$).

5.5 Επιτρεπτές Μεταπτώσεις

5.5.1 Μεταπτώσεις *Fermi*

Ας επιστρέψουμε λοιπόν στον τελεστή για τις επιτρεπτές μεταπτώσεις που δίνεται στην εξ. (5.10). Ο όρος *Fermi* περιλαμβάνει μονό τον τελεστή αναβίβασης ή καταβίβασης του ισοτοπικού σπίν. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε το άθροισμα σε όλα τα νουκλεόνια:

$$\sum_{j=1}^{A} \tau_{\pm}(j) = T_{\pm}, \tag{5.50}$$

όπου το $T_{\pm}$ αυξάνει ή μειώνει κατά μια μονάδα την τρίτη συνιστώσα του ολικού ισοτοπικού σπίν του πυρήνα:

$$T_{\pm} = T_x \pm i T_y. \tag{5.51}$$

Η τιμή του στοιχείου μήτρας του τελεστή $Fermi$, μπορεί τώρα να υπολογιστεί χωρίς να απαιτείται η ακριβής γνώση των εμπλεκόμενων κυματοσυναρτήσεων:

$$\begin{aligned} &\langle J_f M_f T_f T_{0f} | \sum_{j=1}^{A} \tau_{\pm}(j) | J_i M_i T_i T_{0i} \rangle \\ &= \sqrt{T_i(T_i+1) - T_{0i}(T_{0i} \pm 1)} \delta_{J_f J_i} \delta_{M_f M_i} \delta_{T_f T_i} \delta_{T_{0f}(T_{0i} \pm 1)}. \end{aligned} \tag{5.52}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει υπό την θεώρηση ότι το ισοσπίν είναι ακριβής κβαντικός αριθμός. Όπως είδαμε νωρίτερα, τόσο οι δυνάμεις $Coulomb$, όσο και οι διαφορές μαζών μεταξύ φορτισμένων και ουδέτερων νουκλεονίων παραβιάζουν την ισοτοπική συμμετρία και επομένως επηρεάζουν την πραγματική τιμή του στοιχείου μήτρας $Fermi$. Στην πράξη, έχει βρεθεί ότι οι απαιτούμενη παράγοντες διόρθωσης είναι αρκετά μικροί για ελαφρούς πυρήνες και μπορούν να υπολογιστούν με αρκετή ακρίβεια ώστε το τελικό αποτέλεσμα να παρουσιάζει απόκλιση μικρότερη του 0.1%.

Από τα αποτελέσματα της εξ. (5.52) βρίσκουμε ότι οι κανόνες επιλογής της γωνιακής στροφορμής και του ισοτοπικού σπίν για αποδιέγερση τύπου $Fermi$, είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{array}{c} J_f = J_i, \\ T_f = T_i, \\ T_{0f} = T_{0i} \pm 1, \\ \Delta\pi = 0, \end{array} \qquad \left(\begin{array}{c} (\Delta J = 0) \\ \Delta T = 0, \quad \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha} \quad T_i = 0 \to T_{f=0} \quad \alpha\pi\alpha\gamma. \\ (\Delta T_0 = 0) \\ \acute{\iota}\delta\iota\alpha \quad o\mu o\tau\iota\mu\acute{\iota}\alpha \end{array} \right) \tag{5.53}$$

Με άλλα λόγια, η αποδιέγερση $Fermi$ συμβαίνει κυρίως μεταξύ αντίστοιχων ισοβαρών καταστάσεων, όπου η μόνη διαφορά μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης είναι η αντικατάσταση ενός πρωτονίου από ένα νετρόνιο και αντίστροφα.

5.5.2 Μεταπτώσεις $Gamow - Teller$

Για τον τελεστή $Gamow - Teller$, $\sum_j \vec{\sigma}(j) \vec{\tau}_{\pm}(j)$, δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το άθροισμα σε όλα τα νουκλεόνια, αφού δρουν ταυτόχρονα το σπιν και το ισοσπίν του κάθε νουκλεονίου. Αντίθετα λοιπόν με τις αποδιεγέρσεις $Fermi$, δεν μπορεί να υπολογιστεί το στοιχείο μήτρας για τον τελεστή $Gamow - Teller$ αν δεν δίνονται οι αρχικές και τελικές κυματοσυναρτήσεις. Οι κανόνες επιλογής για τη γωνιακή στροφορμή και το ισοτοπικό σπιν μπορούν να εξαχθούν από τις ιδιότητες του ίδιου του τελεστή. Καθώς οι τάξεις του σφαιρικού τανυστή του τελεστή είναι μοναδιαίες τόσο στο χώρο του ισοσπίν, όσο και στο χώρο του σπίν, είναι αναγκαίο οι αρχικές και τελικές καταστάσεις

να σχετίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{array}{ccc} \Delta J = 0,1 & \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha} \quad J_i = 0 \rightarrow J_{f=0} & \alpha\pi\alpha\gamma o\rho\epsilon\upsilon\mu\acute{\epsilon}\nu\eta \\ \Delta T = 0,1 & \alpha\lambda\lambda\acute{\alpha} \quad T_i = 0 \rightarrow T_{f=0} & \alpha\pi\alpha\gamma o\rho\epsilon\upsilon\mu\acute{\epsilon}\nu\eta \\ T_{0f} = T_{0i} \pm 1 & (\Delta T_0 = 1) & \\ \Delta\pi = 0 & \acute{\iota}\delta\iota\alpha \quad o\mu o\tau\iota\mu\acute{\iota}\alpha & \end{array} \tag{5.54}$$

Ο κανόνας επιλογής για την ομοτιμία προκύπτει από το γεγονός ότι το $\vec{\sigma}$ είναι αξονικός−ανυσματικός τελεστής και επομένως δεν μπορεί να μεταβάλλει την ομοτιμία μεταξύ αρχικών και τελικών καταστάσεων. Οι απόλυτες τιμές των στοιχείων $Gamow-Teller$ του πίνακα αλληλεπίδρασης είναι κατά κανόνα μικρότερες από εκείνες των μεταπτώσεων $Fermi$, εφόσον σπιν και ισοσπίν συμπεριλαμβάνονται ταυτόχρονα.

5.5.3 Κβαντικές Καταστάσεις Επιτρεπτών Αποδιεγέρσεων − Μικτές Μεταπτώσεις

Κατά τις μεταπτώσεις $Fermi$, τα δύο λεπτόνια εκπέμπονται με αντιπαράλληλα σπίν ($\uparrow\downarrow$) σε μία σχετική απλή κατάσταση που χαρακτηρίζεται από:

$$\lambda_{ev} = 0, \tag{5.55}$$

ενώ κατά τις μεταπτώσεις $Gamow-Teller$, τα δύο λεπτόνια στην τελική κατάσταση εμφανίζονται με παράλληλα σπίν ($\uparrow\uparrow$) σε σχετική τριπλή κατάσταση με:

$$\lambda_{ev} = 1. \tag{5.56}$$

Είδαμε ότι οι μεταπτώσεις $Fermi$ μπορούν να συνδέσουν μόνο καταστάσεις πυρηνικών συστημάτων με την ίδια στροφορμή $\vec{J}_i = \vec{J}_f$. Αντίθετα, στις μεταπτώσεις $Gamow-Teller$, η διαφορά της στροφορμής ΔJ μεταξύ αρχικής και τελικής καταστάσεως μπορεί να πάρει τις τιμές:

$$\left|\Delta\vec{J}\right| = \left|\vec{J}_i - \vec{J}_f\right| = \left|\vec{\lambda}_{ev}\right| = 0, \pm 1, \tag{5.57}$$

με εξαίρεση την περίπτωση $J_i = J_f = 0$. Και για τις δύο καταστάσεις των επιτρεπτών μεταπτώσεων η πάριτη δίνεται από την εξίσωση :

$$\pi_{ev} = (-1)^{\ell_{ev}} = +1, \tag{5.58}$$

με αποτέλεσμα οι μεταπτώσεις αυτές να συνδέουν μόνο πυρηνικές καταστάσεις με την ίδια ομοτιμία.

Αντίστροφα, αποδιεγέρσεις β που χαρακτηρίζονται από μεταβολή $\Delta J = \pm 1$, έχουν καθαρά χαρακτήρα μεταπτώσεως $Gamow-Teller$, ενώ αποδιεγέρσεις β με $\Delta J = 0$, (εκτός από μεταπτώσεις $0 \to 0$) έχουν μικτό χαρακτήρα. Συνοπτικά, οι κανόνες επιλογής που διέπουν τις επιτρεπτές μεταπτώσεις β δίνονται στον πίνακα 5.1.

Μετάπτωση	**Σπιν**	**Ομοτιμία**
$Fermi\ (F)$	$J_i = J_f = 0$	$\pi_i = \pi_f$
$Gamow-Teller\ (GT)$	$J_i = J_f \pm 1$	$\pi_i = \pi_f$
Μίγμα F και GT	$J_i = J_f \neq 0$	$\pi_i = \pi_f$

Πίνακας 5.1: Κανόνες επιλογής επιτρεπτών αποδιεγέρσεων β.

5.5.4 Τιμή$-ft$ Επιτρεπτών Μεταπτώσεων

Για τις επιτρεπτές λοιπόν μεταπτώσεις, το πυρηνικό στοιχείο μήτρας της αλληλεπίδρασης μπορεί να γραφτεί υπό την μορφή:

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu M_f} \left|\langle J_f M_f \xi| \, V_\beta \, |J_i M_i \zeta\rangle\right|^2 = \\ &= G_V^2 \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{M_f} \left|\langle J_f M_f \xi| \, T_\pm \, |J_i M_i \zeta\rangle\right|^2 + \\ \\ + g_A^2 \sum\limits_{\mu M_f} \left| \langle J_f M_f \xi| \sum\limits_{j=1}^{A} \vec{\sigma}_\mu(j) \, \vec{\tau}_\pm(j) \, |J_i M_i \zeta\rangle \right|^2 \end{array} \right\} \\ &= G_V^2 \left\{ \langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2 \right\} \end{aligned} \tag{5.59}$$

Για απλοποίηση στη συνέχεια θα υιοθετήσουμε την τελευταία αυτή συντετμημένη έκφραση για τα στοιχεία μήτρας.

Για τις επιτρεπτές αποδιεγέρσεις επιπλέον, η τιμή$-ft$ μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$ft = \frac{K}{\langle F \rangle^2 + g_A^2 \langle GT \rangle^2}. \tag{5.60}$$

Ο προσδιορισμός του K είναι, επομένως, ένας τρόπος για τον υπολογισμό της απολύτου τιμής της σταθεράς σύζευξης G_V. Η καλύτερη ως τώρα μέτρηση του K είναι $6141.2 \pm 3.2\ s$ και προέρχεται από υπερεπιτρεπτές αποδιεγέρσεις, αφού εφαρμοστούν κάποιες διορθώσεις, όπως οι πεπερασμένες διαστάσεις και η κατανομή φορτίου του πυρήνα. Η τιμή της σταθεράς σύζευξης που παίρνουμε με αυτόν τον τρόπο είναι $G_V = 1.41549 \times 10^{-49}\ erg \cdot cm^3$ ή, στην πιο

διαδεδομένη της μορφή, ${}^{G_V}/_{(\hbar c)^3} = 1.1493 \times 10^{-11}\ MeV^{-2}$. Για την σταθερά σύζευξης $Fermi$ ${}^{G_V}/_{(\hbar c)^3} = 1.16637\,(2) \times 10^{-11} MeV^{-2}$ απαιτούνται περεταίρω παράγοντες διόρθωσης.

5.6 Υπερεπιτρεπτές Αποδιεγέρσεις β

Μεταπτώσεις από μια αρχική κατάσταση με $J^\pi = 0^+$ σε μια τελική κατάσταση με $J^\pi = 0^+$ αποτελούν μια ξεχωριστή κατηγορία αποδιέγερσης β, καθώς σε αυτές δεν υπεισέρχεται ο όρος $Gamow - Teller$. Οι μεταπτώσεις αυτές είναι καθαρά μεταπτώσεις $Fermi$ και, ως αποτέλεσμα, είναι ελάχιστα ευαίσθητες στις λεπτομέρειες των πυρηνικών κυματοσυναρτήσεων. Τέτοιες αποδιεγέρσεις είναι χρήσιμες, για παράδειγμα, στον προσδιορισμό της τιμής του K και συνεπώς στον προσδιορισμό του G_V, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Οι ελαφροί πυρήνες ευνοούνται εδώ, καθώς παρουσιάζουν ελάχιστη απόκλιση από την συμμετρία του ισοτοπικού σπιν. Παρόλα αυτά ο αριθμός των διαθέσιμων περιπτώσεων είναι περιορισμένος. Η υπερεπιτρεπτή αποδιέγερση β, είναι συχνά απαγορευμένη λόγω της τιμής$-Q$ της αντίδρα-σης, αφού η ενέργεια $Coulomb$ είναι μεγαλύτερη για πυρήνα με ένα παραπάνω πρωτόνιο. Τα περισσότερα παραδείγματα περιέχουν εκπομπή ποζιτρονίου, όπως η αποδιέγερση β^+ του ${}^{14}O$ με $T = 1$,

$$ {}^{14}O \rightarrow {}^{14}N + e^+ + v_e, \tag{5.61}$$

που οδηγεί κυρίως στην 0^+ πρώτη διεγερμένη κατάσταση του ${}^{14}N$ επίσης με $T = 1$ στα $2.311\ MeV$. Ο χρόνος ημιζωής του ${}^{14}O$ είναι $74\ s$ και η τιμή$-Q$ της αντίδρασης είναι $1.12\ MeV$. Η τιμή$-ft$ είναι $3109\ sec$, μια από τις μικρότερες που γνωρίζουμε. Αν η αρχική και η τελική κατάσταση είναι πραγματικά ισοβαρείς καταστάσεις, η τιμή του στοιχείου μήτρας $Fermi$ μπορεί να εξαχθεί χρησιμοποιώντας την εξ. (5.52) χωρίς να γνωρίζουμε ρητά τις κυματοσυναρτήσεις.

Ο προσδιορισμός του g_A, θα προέρθει κατά τον ίδιο τρόπο από μεταπτώσεις που έχουν καθαρά χαρακτήρα $Gamow-Teller$. Η γνωστότερη τιμή της είναι:

$$ g_A = \frac{G_A}{G_V} = -1.259 \pm 0.0004. \tag{5.62}$$

Εν γένει, η αποδιέγερση β^- των νετρονίων αποτελεί την ιδανική αντίδραση για την περίπτωση αυτή, καθώς μόνο η σπιν κυματοσυνάρτηση των ελεύθερων νετρονίων εμπεριέχεται στους υπολογισμούς. Το στοιχείο μήτρας $Gamow - Teller$ μπορεί να υπολογιστεί τότε με την βοήθεια της σχέσης:

$$ \sum_{\mu m_f} \left| \langle x_{m_f} | \vec{\sigma}_\mu | x_{m_i} \rangle \right|^2 = 3. \tag{5.63}$$

Παρόλα αυτά, περιοριζόμαστε από την γνώση μας για το χρόνο ημιζωής των νετρονίων. Η τιμή που χρησιμοποιείται σήμερα είναι $613.9\,(0.6)\ s$.

5.7 Απαγορευμένες Αποδιεγέρσεις

Από τους κανόνες επιλογής που δίνονται στης εκφράσεις (5.53) και (5.54) παρατηρούμε ότι, για επιτρεπτές β αποδιεγέρσεις, τα σπιν αρχικής και τελικής κατάστασης μπορούν να διαφέρουν το πολύ κατά μια μονάδα και οι ομοτιμία πρέπει να παραμένει αμετάβλητη. Γνωρίζουμε ωστόσο ότι μεταπτώσεις μεταξύ καταστάσεων διαφορετικής ομοτιμίας και $\Delta J > 1$ είναι υπαρκτές και εμφανίζουν σημαντικά μεγαλύτερη τιμή$-ft$. Αναφέρονται ως **απαγορευμένες αποδιεγέρσεις**. Όπως μπορούμε να δούμε από την εξ. (5.8), οι τελεστές για απαγορευμένες αποδιεγέρσεις περιλαμβάνουν σφαιρικές αρμονικές τάξης μεγαλύτερης του μηδενός.

Οι απαγορευμένες αποδιεγέρσεις ταξινομούνται σε διαφορετικές ομάδες ανάλογα με την τάξη ℓ των σφαιρικών αρμονικών. Για δοσμένη τάξη ℓ, οι δυνατοί τελεστές με καθορισμένες τάξεις σφαιρικού τανυστή είναι $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ και $(Y_\ell(\theta,\phi)\times\vec{\sigma})_{\lambda\mu}$. Οι κανόνες επιλογής για την γωνιακή στροφορμή και την ομοτιμία για $\ell-$τάξης απαγορευμένη μετάπτωση θα είναι επομένως:

$$\begin{array}{c}\Delta J = \ell or\,(\ell\pm 1)\\ \Delta\pi = (-1)^{\ell}.\end{array} \tag{5.64}$$

Ο κανόνας επιλογής για το ισοτοπικό σπιν παραμένει ίδιος με τις επιτρεπτές αποδιεγέρσεις:

$$\Delta T_0 = 1,\quad \Delta T = 0 \quad \text{ή} \quad 1 \text{ αλλά } T_i = 0 \to T_f = 0 \text{ απαγορευμένη}\ , \tag{5.65}$$

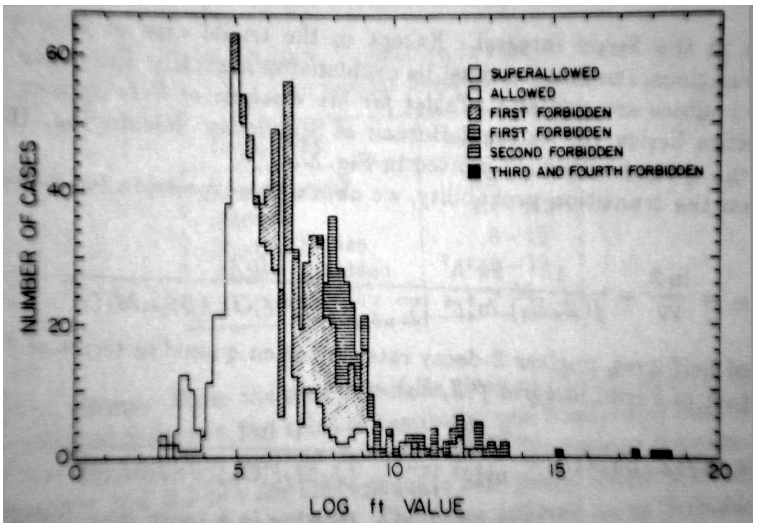
καθώς τίποτε δεν αλλάζει στην ισοσπίν δομή του τελεστή για τις απαγορευμένες αποδιεγέρσεις από αυτόν για τις επιτρεπτές. Έτσι, για πρώτης τάξης απαγορευμένες μεταπτώσεις, ο τελεστής θα είναι $rY_{1m}(\theta,\phi)$ (ανάλογος του r) και $(\vec{\sigma}\times rY_1(\theta,\phi))_{\lambda\mu}$ με $\lambda = 0, 1$ και 2.

Η αιτία για τις μεγάλες τιμές$-ft$ των απαγορευμένων αποδιεγέρσεων προέρχεται από το γεγονός ότι, με $\ell > 0$, υπάρχει ένα φράγμα γωνιακής στροφορμής που παρακωλύει την εκπομπή λεπτονίων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση του μεγέθους του στοιχείου μήτρας και επομένως την αύξηση των τιμών$-ft$. Τυπικές τιμές για τις διάφορες τάξης αποδιέγερσης δίνονται στον πίνακα 5.2. Ωστόσο, όπως μπορεί να φανεί και από το σχήμα 5.4, η διάκριση στις παρατηρούμενες τιμές$-ft$ για μεταπτώσεις διαφορετικής τάξης δεν είναι τόσο ξεκάθαρη, όπως στον πίνακα 5.2. Εν γένει, είναι εξαιρετικά δύσκολο να υπολογίσει κανείς τα στοιχεία μήτρας για απαγορευμένες αποδιεγέρσεις β με

κάποια σχετική αξιοπιστία, και έτσι είναι πολύ λίγες οι θεωρητικές προσπάθειες που μπορούμε να βρούμε στη βιβλιογραφία.

Μετάπτωση	$Log_{10}fT_{1/2}$
Υπερεπιτρεπτή	$2.9 - 3.7$
Επιτρεπτή	$4.4 - 6.0$
Πρώτη Απαγορευμένη	$6 - 10$
Δεύτερη Απαγορευμένη	$10 - 13$
Τρίτη Απαγορευμένη	> 15

Πίνακας 5.2: Τυπικές $LogfT-$τιμές της αποδιέγερσης β.



Σχήμα 5.4: Η συστηματική των παρατηρούμενων $LogfT-$τιμών για τους διάφορους τύπους αποδιέγερσης β. [30]

Κεφάλαιο 6

Περιοχές και Γενικευμένα Μοντέλα της Αποδιέγερσης β

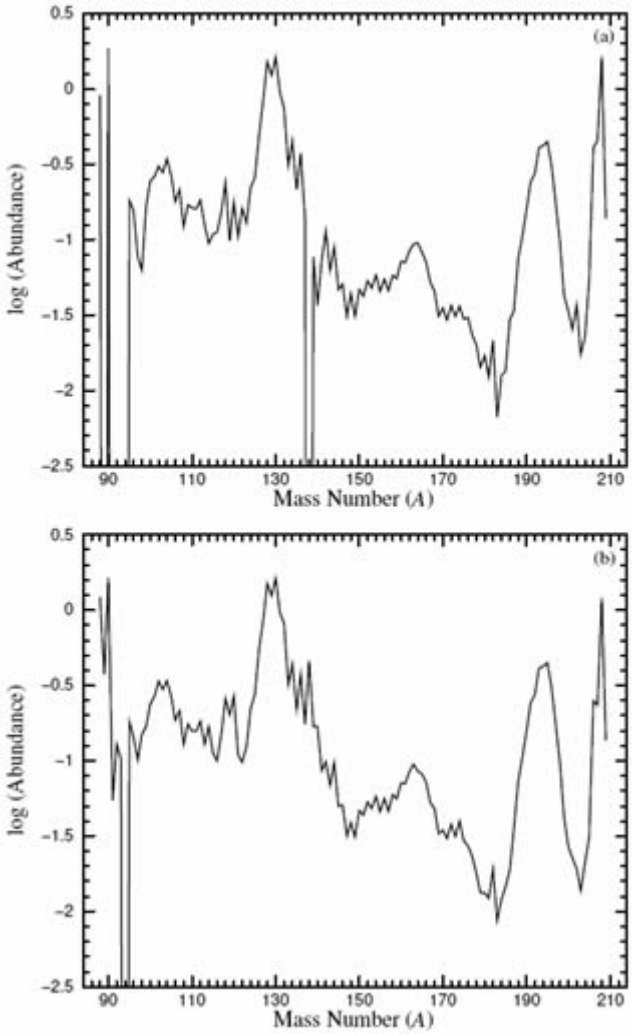
6.1 Η r-process

Η r-process (ταχεία σύλληψη νετρονίων) προτάθηκε από τους B^2FH [25], το 1957, ως ο κύριος μηχανισμός παραγωγής πυρήνων πέραν του σιδήρου (Fe). Σήμερα πλέον γνωρίζουμε ότι είναι μια από τις σημαντι-κότερες διαδικασίες της νουκλεοσύνθεσης, καθώς ευθύνεται για περίπου την μισή αφθονία πυρήνων με μαζικό αριθμό $A > 70$ του ηλιακού μας συστήματος [84]. Η σχετική αφθονία των $r - process$ πυρήνων στο ηλιακό σύστημα φαίνεται στο σχήμα (6.1). Μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι αυτή η r-process όψη της ηλιακής αφθονίας − το ηλιακό δηλαδή $r-$πρότυπο − παρουσιάζει δυο διακεκριμένες κορυφές στα $A \sim 130$ και 195 αντίστοιχα, και παρέχει μια σημαντική βάση για την μελέτη της r-process. Οι αιχμές $A = 130$ και 195 σε αυτό το πρότυπο μπορούν να εξηγηθούν από τις πυρηνικές ιδιότητες που συνδέονται με τους μαγικούς αριθμούς νετρονίων $N = 82$ και 126, αντίστοιχα.

Κατά την r-process παρατηρείται σύλληψη νετρονίων, τα οποία παρέχονται από το περιβάλλον της διαδικασίας, από πυρήνες σύμφωνα με την αντίδραση:

$$ {}^{A}_{Z}X_N + n \rightarrow {}^{A+1}_{Z}X^{*}_{N+1} + \gamma \tag{6.1} $$

Εξαιτίας του μεγάλου αριθμού νετρονίων τα οποία είναι διαθέσιμα για σύλληψη από κάθε πυρήνα, η πυρηνική ροή τείνει γρήγορα προς την γραμμή διαφυγής νετρονίων. Σε κάποιο σημείο η ενέργεια διαχωρισμού του επομένου νετρονίου που θα συλληφθεί είναι τόσο μικρή, που αμέσως θα αποσυνδεθεί από τα φωτό-



Σχήμα 6.1: Ο λογάριθμος των ηλιακών αφθονιών (κανονικοποιημένος έτσι, ώστε η αφθονία του Si να είναι 10^6) ως συνάρτηση του ατομικού αριθμού A. (α) από φαινομενολογική προσέγγιση, (β) από μοντέλα δύο AGB άστρων. (C. Arlandini, C., F. Käppeler, K. Wisshak, R. Gallino, M. Lugaro, M. Busso, and O. Straniero,Astrophys. J. 525 (1999) 886).

να του περιβάλλοντος. Στο σημείο δε που αποκαλείται **σημείο αναμονής**[4] (waiting point), η πυρηνική ροή χαρακτηρίζεται από μία διελκυστίνδα μεταξύ νετρονικής σύλληψης και φωτονικής αποδίεγερσης. Οι βαρύτεροι πυρήνες δεν μπορούν να παραχθούν πριν ο πυρήνας που βρίσκεται στο σημείο αναμονής με β^- διάσπαση μετατραπεί στον θυγατρικό του με μεγαλύτερο αριθμό πρωτονίων. Τότε η διελκυστίνδα επαναλαμβάνεται στο επόμενο σημείο αναμονής. Μέσω μιας τέτοιας αλληλουχίας νετρονικής σύλληψης και β αποδιέγερσης, πυρήνες πολύ πλούσιοι σε νετρόνια παράγονται μακριά από την κοιλάδα στα-

θερότητας. Προφανώς, για συγκεκριμένο ατομικό αριθμό Z, η αφθονία σε νετρόνια συγκεντρώνεται στον αντίστοιχο πυρήνα σημείου αναμονής. Όταν η σύλληψη νετρονίων τερματίζεται, αυτοί οι πυρήνες επιτυχώς διασπώνται (β^- διάσπαση) σε σταθερούς και δίνουν την αύξηση στις κορυφές $A \sim 130$ και 195 στο ηλιακό $r-$πρότυπο.

Ενώ σε γενικές γραμμές ο μηχανισμός γίνεται σχετικά καλά κατανοητός − μια ακολουθία από ταχείες συλλήψεις νετρονίου διανθισμένη με β^- διασπάσεις − η αστροφυσική περιοχή που πραγματοποιείται αυτή η διαδικασία δεν έχει ακόμη αποσαφηνιστεί [15]. Αυτό είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην σύγχρονη πυρηνική αστροφυσική. Όπως έχει ήδη γίνει κατανοητό, για να πραγματοποιηθεί μια $r-process$ απαιτείτε ένα περιβάλλον πλούσιο σε νετρόνια. Το πρότυπο λοιπόν της κατάρρευσης του πυρήνα των υπερκαινοφανών αστέρων και της συγχώνευσης αστέρων νετρονίων είναι οι δύο πιθανότερες περιοχές στις οποίες μπορεί να συμβαίνει η $r-process$ στο συμπάν [12].

Μια λεπτομερής μελέτη της $r-process$, απαιτεί τη γνώση αρκετών παραμέτρων, όπως οι μάζες των πυρήνων (από τις οποίες μπορούν να υπολογιστούν οι ενέργειες διαχωρισμού νετρονίων S_n και οι β τιμές$-Q$), οι χρόνοι ημιζω-ής της αποδιέγερσης β $T_{1/2}$ και οι πιθανότητες εκπομπής $\beta-$καθυστερημένων νετρονίων P_{vn}. Πιο εμπεριστατωμένες μελέτες ωστόσο, απαιτούν επιπρόσθετες γνώσεις, όπως τις εξαρτήσεις από τους ρυθμούς αντιδράσεων και τις θερμοκρασίες.

Ποσοτικοποιημένες λοιπόν εκτιμήσεις των χρόνων ημίσειας ζωής των πολύ πλούσιων σε νετρόνια β^-−ασταθών πυρήνων που λαμβάνουν μέρος στην $r-process$ είναι εξαιρετικά σημαντικές, τόσο για την κατανόηση της ίδιας της διαδικασίας, όσο και για την μοντελοποίησή της. Η αποδιέγερση β^-, όπως είδαμε, παίζει καθοριστικό ρόλο στην διαδικασία, καθώς οδηγεί στην παραγωγή στοιχείων με μεγαλύτερο ατομικό αριθμό, ενώ οι χρόνοι ημιζωής της καθορίζουν την χρονική κλίμακα της διαδικασίας. Οι $\beta-$ρυθμοί τέλος επηρεάζουν τους υπολογισμούς του $r-$ηλιακού προτύπου αφθονίας των στοιχείων.

6.2 Καθολικά Πρότυπα β Αποδιέγερσης

Τις τελευταίες δεκαετίες λοιπόν, αναπτύχθηκαν αρκετά πρότυπα γενικευμένων υπολογισμών της αποδιέγερσης β, με κοινό στόχο την μελέτη πυρηνικών χαρακτηριστικών, όπως οι χρόνοι ημίσειας ζωής και οι πιθανότητες εκπομπής $\beta-$καθυστερημένων νετρονίων. Βασική φιλοδοξία των προτύπων αυτόν είναι, τόσο η μοντελοποίηση της συστηματικής της αποδιέγερσης β, όσο και η πρόβλεψη χαρακτηριστικών σε περιοχές όπου δεν υπάρχουν διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα (π.χ.$r-process$). Τα μοντέλα αυτά μπορούν

να χωριστούν σε τρεις βασικές κατηγορίες: τα παραμετρικά, τύπου"θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης" μοντέλα, τα μικροσκοπικά μοντέλα με εμπειρικά δυναμικά μέσου πεδίου και τα αυτοσυνεπή μοντέλα μέσου πεδίου. Θα μελετήσουμε στην συνέχεια λοιπόν περιληπτικά την φιλοσοφία της κάθε κατηγορίας, καθώς και τα εκάστοτε πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των σημαντικότερων εκπροσώπων της.

6.3 Θεωρία Μέσης Τελικής Κατάστασης

Το πρώτο παραμετρικό μοντέλο της αποδιέγερσης β, αναπτύχθηκε πριν 40 περίπου χρόνια, από Ιάπωνες ερευνητές. Οι Takahashi, Yamada και Kondoh, επιχείρησαν να συνδυάσουν φαινομενολογικά το *μοντέλο ενός σωματιδίου* με κάποιες στατιστικές τεχνικές. Η θεωρία που προέκυψε ονομάστηκε *gross theory* (GT)[57]. Μια ελεύθερη απόδοση του όρου στα ελληνικά είναι *θεωρία μέσης τελικής κατάστασης*.

Η θεωρία μέσης τελικής κατάστασης, αναπτύχθηκε με σκοπό να προ-βλέψει "χονδρικά" πυρηνικές ιδιότητες, με τη βοήθεια του μέσου όρου των τελικών καταστάσεων. Σε αυτά τα πλαίσια, η β συνάρτηση ισχύος του ακραίου μονοσωματιδιακού μοντέλου θεωρείται ως το άθροισμα των μονοσωματιδιακών συναρτήσεων ισχύος. Φαινόμενα ζευγοποίησης και φλοιώδους δομής λαμβάνονται υπ' όψη, ενώ περιλαμβάνονται και παραμετρικές διορθώσεις λό-γω πυρηνικών συντονισμών. Για την παραμετροποίηση του μοντέλου χρησιμοποιήθηκαν τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα, ενώ για την πρόβλεψη των χρόνων ημιζωής νέων νουκλιδίων χρησιμοποιήθηκαν εμπειρικά μοντέλα μάζας.

Μεταγενέστερες βελτιώσεις ($GT2$ [81]) περιλαμβάνουν έναν πιο ακριβή προσδιορισμό της συνάρτησης ισχύος ενός νουκλεονίου, ενώ και σε πιο πρόσφατες εκδοχές (SGT [35]), λαμβάνονται υπ' όψην ορισμένα φαινόμενα φλοιώδους δομής μέσω των διακριτικών ενεργειακών σταθμών ενός σωματιδίου του μητρικού πυρήνα. Παράλληλα, στη μονοσωματιδιακή συνάρτηση ισχύος συνυπολογίζεται και η εξάρτηση από τους κβαντικούς αριθμούς της αρχι-κής κατάστασης του νουκλεονίου που διασπάται. Στους υπολογισμούς πλέον χρησιμοποιούνται πιο ενημερωμένα μοντέλα μάζας και δίνεται μεγαλύτερη βα-ρύτητα στα φαινόμενα ζευγοποίησης και φλοιώδους δομής.

Οι περιορισμοί αυτής της μεθοδολογίας σχετίζονται εγγενώς με την "μικρο−στατιστική" της φύση. Όσο για την συγκεκριμένη θεώρηση της πυρηνικής δομής, το μοντέλο, παρουσιάζει μια σοβαρή έλλειψη, καθώς παραβλέπει φαινόμενα συνοχής λόγω της αλληλεπίδρασης νουκλεονίου−νουκλεονίου. Το μονοσωματιδιακό μοντέλο τελικά υπερεκτιμά τις ενέργειες και τις συναρτήσεις ισχύος της αποδιέγερσης β για μεταπτώσεις υψηλών ενεργειών, με αποτέλε-

σμα να τείνει να υπερεκτιμά και τους χρόνους ημιζωής της αποδιέγερσης β. Παρόλα αυτά, οι τελευταίες εκδοχές της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης έχουν χρησιμοποιηθεί σε πρακτικές εφαρμογές λόγω της σχετικά καλής αναπαραγωγής των πειραματικών δεδομένων και τις ικανότητας απόκρισης σε άγνωστους πυρήνες.

Τέτοιες υβριδικές προσπάθειες μικροσκοπικού και στατιστικού ενδιαφέροντος, προσφέρουν επιτυχείς παραμετροποιήσεις στις περιοχές που βρίσκονται σχετικά κοντά στη γραμμή β σταθερότητας. Η αξιοπιστία ωστόσο της απόκρισης σε περιοχές μακριά από την σταθερότητα μπορεί να αμφισβητηθεί. Από γενικές εκτιμήσεις πάντως, προκύπτει ότι όσο πιο συνεπές είναι το μοντέλο, τόσο λιγότερες παραμέτρους θα περιλαμβάνει και τόσο πιο αξιόπιστη θα είναι η πρόβλεψη σε περιοχές μακριά από την σταθερότητα.

6.4 Πλήρως Μικροσκοπικά Μοντέλα

Το κενό της αλληλεπίδρασης νουκλεονίου−νουκλεονίου που παρατηρείται στα παραπάνω μοντέλα, καλύφθηκε με την ανάπτυξη των μικροσκοπικών μοντέλων. Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί δυο κατηγορίες πλήρως μικροσκοπικών μοντέλων για ευρείας κλίμακας υπολογισμούς των ασθενών ρυθμών αποδιέγερσης, τα οποία βρίσκουν πρακτική εφαρμογή κυρίως στην Πυρηνική Αστροφυσική. Η πρώτη κατηγορία βασίζεται στο **Πρότυπο των Φλοιών** και η δεύτερη στην **Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης** πρωτονίου-νετρονίου ($pn-QRPA$). Το πλεονέ-κτημα του προτύπου των φλοιών είναι η δυνατότητα συνυπολογισμού της λε-πτομερούς δομής της $\beta-$συνάρτησης ισχύος. Από την άλλη μεριά όμως, τα μοντέλα $QRPA$ υπερτερούν στην δυνατότητα πρόβλεψης βαρέων ή και υπερβαρέων πυρήνων.

6.4.1 Το Πρότυπο των Φλοιών

Μέχρι τώρα, έχουν πραγματοποιηθεί υπολογισμοί βασιζόμενοι στο Πρότυπο των Φλοιών (SM), των ρυθμών ηλεκτρονικής σύλληψης και $\beta-$αποδιέγερσης [54] σε πυρήνες που ενδιαφέρουν την μοντελοποίηση του προ-υπερκαινοφανούς σταδίου των αστέρων πολύ μεγάλης μάζας. Έχουν επίσης πραγματοποιηθεί τέτοιοι υπολογισμοί για συγκεκριμένους πλούσιους σε νετρόνια πυρήνες κατά μήκος των ισοτοπικών αλυσίδων $N = 28, 50$ [32] και $N = 126$ [31]. Αυτοί οι υπολογισμοί με την χρήση της ενεργούς αλληλεπίδρα-σης και του χώρου του μοντέλου πολυ$-\hbar\Omega$ είναι εφικτοί για την μετάπτωση $Gamow-Teller$ των ελαφρών πυρήνων [23]. Για βαρύτερους πυρήνες, ο προσδιορισμός της κα-

τανομής της $Gamow-Teller$ ισχύος απαιτεί μια τόσο μεγάλη διαγωνιοποίηση, που ο περιορισμός της βάσης συμπληρωμένος από την επανακανονικοποίηση του τελεστή $Gamow-Teller$ για την αποδιέγερση β είναι αναπόφευκτος. Καθώς οι πρώτης τάξης απαγορευμένες μεταπτώσεις περι-λαμβάνουν διαφορετικούς ταλαντωτικούς φλοιούς, είναι απαραίτητη η προσέγγιση πολυ$-\hbar\Omega$.

Σε αντιδιαστολή με τους ευρείας κλίμακας προβλέψεις των χρόνων ημίσειας ζωής των πυρήνων αναμονής στο $N = 28, 50$ και 126, τελευταία, εφαρμόστηκε το Μη Σκληρού-Κέντρου Πρότυπο των Φλοιών [22] και το ενσωματωμένο στο συνεχές Πρότυπο των Φλοιών [65] στην αποδιέγερση β των ελαφρών πυρήνων. Τα μοντέλα αυτά όμως αδυνατούν να εφαρμοστούν στους βαρύτερους πυρήνες που συμμετέχουν στην $r-process$.

Το κυριότερο πλεονέκτημα του μοντέλου που βασίζεται στο Πρότυπο των Φλοιών, όπως είπαμε και νωρίτερα, είναι η ικανότητα του να λαμβάνει υπ' όψην του την λεπτομερή δομή της $\beta-$συνάρτησης ισχύος. Το βασικό ωστόσο πρόβλημα του μοντέλου, σχετίζεται με την αυτοσυνέπεια των πολυ$-\hbar\Omega$ υπολογισμών στα πλαίσια του Προτύπου των Φλοιών.

6.4.2 Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης

Καθώς στην Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης απουσιάζουν τέτοιου είδους περιορισμοί, είναι μάλλον η πιο κατάλληλη για τον χειρισμό των βαρύτερων πυρήνων και ειδικότερα για την πρόβλεψη των χρόνων ημίσειας ζωής τους. Τελευταία λοιπόν, έχουν αναπτυχθεί αρκετά μοντέλα ευρείας κλίμακας υπολογισμών τύπου $QRPA$. Τα πρώτα τύπου $QRPA$ μοντέλα για τους χρόνους ημίσειας ζωής των $\beta^{\pm}$ αποδιεγέρσεων, στηρίζονταν σε σχηματικές (διαχωρίσιμες) ενεργές αλληλεπιδράσεις νουκλεονίου$-$νουκλεονίου και εμπειρικά παραμορφωμένα δυναμικά ενός σωματιδίου [48]. Αυτό αποτέλεσε ένα σημαντικό βήμα που έκανε τους ευρείας κλίμακας υπολογισμούς των ασθενών ρυθμών εφικτούς ακόμα και στην περιορισμένη υπολογιστική ισχύ της εποχής εκείνης.

Το Μοντέλο $FRDM+QRPA$

Το μετέπειτα $FRDM+QRPA$ μοντέλο ψευδοσωματιδιακής προσέγγισης τυχαίας φάσης της επιτρεπτής αποδιέγερσης β των $Möller\ et\ al.$[70] βασίστηκε στο μικρο$-$μακροσκοπικό **Πεπερασμένης Εμβέλειας Πρότυπο Σταγόνας** ($FRDM$) για τον υπολογισμό της μάζας και το συμπτυγμένο $Yukawa$ δυναμικό ενός σωματιδίου, το οποίο χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των πυρηνικών μαζών της θεμελιώδους κατάστασης και των παραμορφώσεων. Το

μοντέλο χρησιμοποιεί μόνο την αλληλεπίδραση σωματιδίου−οπής, η ισχύς της οποίας είναι μια ομαλή συνάρτηση του μαζικού αριθμού.

Μια προσεκτική αντιπαράθεση των χαρακτηριστικών της αποδιέγερσης β με τα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα βραχύβιων πυρήνων όμως, αντανακλά την γενικότερη ανεπάρκεια των δύο παραπάνω μοντέλων. Εν πρώτης, η ανεπάρ-κεια αυτή αφορά τον υπολογισμό των χρόνων ημίσειας ζωής σε σχέση με την ενέργεια διέγερσης της θεμελιώδους κατάστασης του θυγατρικού πυρήνα. Προφανώς το τελευταίο δεν μπορεί να οριστεί με ακρίβεια για εμπειρικά δυναμικά μέσου πεδίου, καθώς η ολική ενέργεια σύνδεσης του μητρικού και του θυγατρικού πυρήνα στην εξίσωση που δίνει τον ολικό χρόνο ημίσειας ζωής σύμφωνα με τον φορμαλισμό της $\beta-$συνάρτησης ισχύος για την αποδιέγερση β^-:

$$1/T_{1/2} = D^{-1} \left(G_A/G_V\right)^2 \int_0^{Q_\beta} d\omega f_0 \left(Z,\omega\right) \sum_n \langle k,j\rangle \, S_n \left(\omega,\gamma\right) \tag{6.2}$$

θα πρέπει να υπολογιστεί αυτοσυνεπώς. ($Q_{\beta^-} = \Delta B + 0,782\ MeV$ είναι το ενεργειακό παράθυρο της αποδιέγερσης β^-, και γ είναι το εύρος των επιμέρους διεγέρσεων που μπορεί να εισαχθεί για να απλοποιηθούν οι αριθμητικοί υπολογισμοί.)

Επιπλέον η ανεπάρκεια των μοντέλων αυτών οφείλεται στην παράλειψη της ισοσινγκλετικής ενεργής αλληλεπίδρασης νουκλεονίου−νουκλεονίου (ζευγοποίηση πρωτονίου−νετρονίου $T = 0$ ή αλληλεπίδραση σωματιδίου−σωματιδίου $[pp]$), η οποία θα έπρεπε να εμφανίζεται στις δυναμικές $QRPA$ εξισώσεις ανταλλαγής φορτίου παράλληλα με την ενεργή αλληλεπίδραση σωματιδίου−οπής $[ph]$. (Σημειώστε ότι η ισοτριπλέτα $T = 1$ για την ζευγοποίηση μεταξύ όμοιων σωματιδίων έχει ήδη ενσωματωθεί στο BCS σκέλος). Παραλείπουμε έτσι αυτό ακριβώς το κανάλι αλληλεπίδρασης νουκλεονίου−νουκλεονίου που οδηγεί σε πλαστές διευρύνσεις των άρτιων−περιττών φαινομένων στους ολικούς χρόνους ημίσειας ζωής. Αντίθετα, με την αλληλεπίδραση σωματιδίου−σωματιδίου $[pp]$ ενεργή, η κλίμακα των παρατηρούμενων άρτιων−περιττών επιδράσεων των χρόνων ημίσειας ζωής μπορεί να αναπαραχθεί επιτυχώς. Ο λόγος είναι ότι η $T = 0$ ζευγοποίηση αυξάνει δραστικά τους β^+ [46, 50] και ελαττώνει αισθητά τους β^- χρόνους ημίσειας ζωής λόγω της μικρής μείωσης του στοιχείου μήτρας του γιγαντιαίου $Gamow-Teller$ συντονισμού, ο οποίος με την σειρά του προκαλεί μια αύξηση της $Gamow-Teller$ ισχύος στο παράθυρο Q_β [41].

Το Μοντέλο $Nilsson + BCS + QRPA$

Ένα δεύτερο $QRPA$ μοντέλο είναι το μοντέλο των *Staudt et al.*[8], το οποίο βασίζεται στον παραμορφωμένο $Nilsson + BCS$ φορμαλισμό, όπου οι πλήρεις $QRPA$ εξισώσεις επιλύονται χρησιμοποιώντας την περιορισμένη βάση ενός σωματιδίου και διαχωρίσιμες αλληλεπιδράσεις νουκλεονίου−νουκλεονίου και στο κανάλι σωματιδίου−οπής και στο κανάλι σωματιδίου−σωματιδίου. Καθώς όμως είναι προβληματική η καθολική περαμετροποίηση αυτών των αλληλεπιδράσεων σε μια ευρεία περιοχή μαζών, πραγματοποιείται μια απ' ευθείας προσαρμογή, διαφορετική για κάθε ισοτοπική αλυσίδα, στους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής. Έτσι το συγκεκριμένο μοντέλο κατηγορείται ως υπερπαραμετροποιημένο.

Μια σημαντική επέκταση του μοντέλου αυτού που πραγματοποιήθηκε από την ομάδα του *Klapdor* [51], ενσωματώνει την συνεισφορά των σχηματισμών πιο σύνθετα από τον σχηματισμό $1p1h$ (ένα σωματίδιο, μια οπή) και αποφεύγει την διαφορετική προσαρμογή κάθε ισοτοπικής αλυσίδας. Λίγο αργότερα προστεθήκαν στο μοντέλο και οι μοναδικές πρώτες απαγορευμένες μεταπτώσεις με μικροσκοπικό τρόπο [34].

6.5 Το Υβριδικό $QRPA + ffGT$ Μικρο-Μακροσκοπικό Μοντέλο

Πιο πρόσφατα, το βασισμένο στο $FRDM + QRPA$ μοντέλο επεκτάθηκε ώστε να συμπεριλάβει και τις πρώτες απαγορευμένες μεταπτώσεις (ff). Το προκύπτον $QRPA + ffGT$ υβριδικό μοντέλο της ομάδας του *Möller* [72], αντιμετωπίζει τις $Gamow - Teller$ μεταπτώσεις μικροσκοπικά, στα πλαίσια της προσέγγισης τυχαίας φάσης $QRPA$ και τις πρώτες απαγορευμένες μεταπτώσεις στα στατιστικά πλαίσια της θεωρίας Μέσης Τελικής Κατάστασης. Αυτή η διαδικασία επιφέρει μακροσκοπικές διορθώσεις στο αρχικό μικροσκοπικό RPA μοντέλο [48].

Τα πειραματικά δεδομένα δείχνουν ότι η ισχύς της πρώτης απαγορευμένης μετάπτωσης σε κάποιο δοσμένο ενεργειακό εύρος, αντιπροσωπεύεται από πυκνής αριθμητικά διάταξης κορυφές, ενώ η επιτρεπτή $Gamow - Teller$ ισχύς εστιάζεται σε μερικές μόνο έντονες κορυφές. Αυτό το υβριδικό μικρο−μακροσκοπικό μοντέλο αποδιέγερσης β λοιπόν, αποτελεί μια λογική προσέγγιση σε αναλογία με το μικρο−μακροσκοπικό μοντέλο των επιφανειών πυρηνικής δυναμικής ενέργειας.

6.6 Τα Αυτοσυνεπή Μοντέλα

Το τελικό μοντέλο, το οποίο θα είναι σε θέση να περιγράφει τις ιδιότη-τες της αποδιέγερσης β, θα πρέπει να είναι **αυτοσυνεπές**. Τα βασικά συστα-τικά της προσέγγισης αυτής πιστεύεται πλέον ότι θα είναι το αυτο-συνεπές δυναμικό μέσου πεδίου (για την θεμελιώδη κατάσταση) και η καθο-λική ενερ-γώς αλληλεπίδραση νουκλεονίου−νουκλεονίου (NN) (για την περιγραφή των διεγερμένων καταστάσεων), όπου αμφότερα θα προέρχονται από την μοναδική πυρηνική συναρτησιακή σχέση ενέργειας−πυκνότητας. Η ιδέα είναι εμπνευ-σμένη από την θεωρία της συναρτησιακής σχέσης ενέργειας−πυκνό-τητας, η οποία βασίζεται στην γενικότερη ιδιότητα συστημάτων αλληλεπιδρώ-ντων ηλε-κτρονίων και είναι γνωστή ως θεώρημα $Hoheneberg-Kohn$ [5]. Για πυρηνικά συστήματα πολλών σωματιδίων, η φαινομενολογική συναρτησιακή πυκνότητας μπορεί να κατασκευαστεί σύμφωνα με την προσέγγιση τοπι-κής πυκνότητας, η οποία, κατ' αρχήν, δίνει μια πιθανότητα *ab initio* περιγρα-φής των ιδιοτήτων των διεγερμένων καταστάσεων και της θεμελιώδους κα-τάστασης.

Το Μοντέλο $HFBCS + CQRPA$

Το πρώτο αυτοσυνεπές μοντέλο για τους χρόνους ημιζωής της αποδιέγερ-σης β κατασκευάστηκε από την ομάδα του $Borzov$ και ονομάζεται $HFBCS+CQRPA$ [43]. Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε στα πλαίσια της αυτοσυνεπούς Θεωρίας Πεπερασμένου Συστήματος $Fermi$ ($SFFS$) [3]. Οι ιδιότητες της θεμελιώδους κατάστασης υπολογίζονται από το αυτοσυνεπές μέσο πεδίο που δίνεται από την πρώτη συναρτησιακή παράγωγο της ενέργειας της αλληλεπί-δρασης ως προς την ομαλή πυκνότητα, ενώ ως δυναμικό ζευγοποίησης θεω-ρείται η συναρτησιακή παράγωγος της ενέργειας ζευγοποίησης ως προς την ανώμαλη πυκνότητα νουκλεονίου. Οι υπολογισμοί του μοντέλου περιορίζο-νται όμως σε συγκεκριμένους πλούσιους σε νετρόνια πυρήνες κατά μήκος των ισοτοπικών αλυσίδων $N = 28, 50$ [32] και $N = 126$

Το Μοντέλο $ETFSI + CQRPA$

Μεταγενέστερα, ακολούθησε το μοντέλο $ETFSI+CQRPA$ των $Borzov$ και $Goriely$ [42], το οποίο οδήγησε σε πιο ευρείας κλίμακας υπολογισμούς των χρονών ημίσειας ζωής. Το μοντέλο αυτό στηρίχθηκε στην αυτοσυνεπή αποκαλούμενη **Εκτεταμένη Ολοκληρωτική Μέθοδο** $Tomas-Fermi$ **και** $Strutinsky$ $ETFSI$ για την περιγραφή των ιδιοτήτων της θεμελιώδους κατάστασης και την Συνεχή Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης $CQRPA$. Η βασική επίτευξη με την βοήθεια της μεθόδου αυτής είναι η

ανάπτυξη ενός μοντέλου μαζών, που βασίζεται εξ' ολοκλήρου σε μια μικροσκοπική δύναμη, το επονομαζόμενο $ETFSI-1$ μοντέλο μά-ζας. Η αυτοσυνεπής μεταχείριση των ιδιοτήτων της θεμελιώδους κατάστασης μέσω του μοντέλου $ETFSI$ και η θεώρηση της ενεργούς αλληλεπίδρασης σωματιδίου−σωματιδίου οδήγησαν σε μια πιο ρεαλιστική εκτίμηση των άρτι-ων−περιττών φαινομένων στους χρόνους ημίσειας ζωής σε σχέση με τα μη αυτοσυνεπή μοντέλα.

6.7 Ρελατιβιστική Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης

Αυτοσυνεπή ρελατιβιστικά μοντέλα μέσου πεδίου έχουν ήδη εφαρμοστεί επιτυχώς στην πυρηνική δομή, όχι μόνο σε πυρήνες κοντά στη γραμμή σταθερότητας, αλλά και σε εξωτικούς πυρήνες με ακραίες τιμές ισοτοπικού σπιν και κοντά στις γραμμές διαφυγής. Τελευταία λοιπόν έχει εφαρμοστεί το πρόσφατα ανεπτυγμένο μοντέλο Ρελατιβιστικής Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγισης Τυχαίας Φάσης πρωτονίου−νετρονίου [66] και στους υπολογισμούς των ρυθμών διάσπασης της αποδιέγερσης β^- πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων. Το προκύπτων πλήρως αυτοσυνεπές $RHB+RQRPA$ μοντέ-λο [79], περιλαμβάνει την ρελατιβιστική επέκταση του πλαισίου $Hartee-Fock-Bogoliubov$ για τους υπολογισμούς της θεμελιώδους κατάστασης και παρέχει μια ενιαία περιγραφή των αλληλεπιδράσεων σωματιδίου−οπής και σωματιδίου−σωματιδίου. Οι υπολογισμοί παρ' όλα αυτά περιορίζεται σε πυρή-νες της περιοχής $N\approx 50$ και $N\approx 82$ και δεν μπορούν να εφαρμοστούν προς το παρόν στην περιοχή $N\approx 126$, επειδή δεν υπάρχουν επαρκή δεδομένα για τον υπολογισμό της ισχύος της $T=0$ αλληλεπίδρασης ζευγοποίησης.

Το ρελατιβιστικό $pn-QRPA$ μοντέλο ωστόσο αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο για τους υπολογισμούς των ασθενών ρυθμών αλληλεπιδράσεων πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μικροσκοπικούς υπολογισμούς όχι μόνο των $Gamow-Teller$, αλλά και των πρώτων απαγορευμένων μεταπτώσεων, οι οποίες παίζουν εξέχοντα ρόλο στις περιοχές $N\approx 82$ και $N\approx 126$.

6.8 Οι Εξωτικοί Πυρήνες

Ο όρος "*εξωτικοί πυρήνες*" χρησιμοποιείται συχνά ως συντόμευση για τους πολύ απομακρυσμένους από την κοιλάδα σταθερότητας πυρήνες. Αναφορικά με την β διάσπαση τον χρησιμοποιούμε κυρίως για την περιγραφή πυρήνων με μεγάλες τιμές−Q, έτσι ώστε τα $\beta-$καθυστερημένα εκπεμπόμενα σωματίδια να καθίστανται κυρίαρχα στην διάσπαση [10].

Κάποια γενικά σχόλια στις διαφορές μεταξύ β διάσπασης των πυρήνων που βρίσκονται κοντά στην κοιλάδα σταθερότητας και των εξωτικών πυρήνων θα φανούν χρήσιμα. Για β διασπάσεις κοντά στην κοιλάδα σταθερότητας λοιπόν, οι μεταπτώσεις πραγματοποιούνται όπως γνωρίζουμε, μεταξύ διακριτών ενεργειακών σταθμών και συνεπώς ακτίνες γ, ακτίνες Q και ηλεκτρόνια είναι εδώ οι σημαντικές πειραματικές παρατηρήσεις. Καθώς πλησιάζουμε στους εξωτικούς πυρήνες όμως, η συνεχής πυρηνική δομή γίνεται όλο και περισσότερο σημαντική. Ένα παράδειγμα είναι οι $\beta-$καθυστερημένες διαδικασίες που σε πολλούς πυρήνες κοντά στην γραμμή διαφυγής θα κυριαρχούν των διασπάσεων προς τις δέσμιες καταστάσεις. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι πυρήνες της άλλους, όπου οι βαθμοί ελευθερίας του συνεχούς αρχίζουν να παίζουν βασικό ρόλο για την κατανόηση των καταστάσεων διάσπασης. Για τους εξωτικούς πυρήνες εκπεμπόμενα σωματίδια είναι οι σημαντικές πειραματικές παρατηρήσεις, αλλά και οι ακτίνες γ συχνά παραμένουν ενδιαφέρουσες.

Μέρος II

Νευρωνικά Δίκτυα

Κεφάλαιο 7

Μηχανική Μάθηση

7.1 Εισαγωγή

Η ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ (ΕΞΥΠΝΩΝ) ΜΗΧΑΝΩΝ, ικανών να μαθαίνουν από την εμπειρία, έχει αποτελέσει για μεγάλο χρονικό διάστημα το αντικείμενο φιλοσοφικού και τεχνολογικού ενδιαφέροντος. Η τεχνολογική διάσταση ωθήθηκε από την έλευση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Κατασκευάστηκαν έτσι μηχανές τέτοιες, που επιδεικνύουν σημαντική ικανότητα μάθησης, έστω και αν τα όρια αυτής της ικανότητας δεν είναι ακόμα σαφέστατα ορισμένα. Η προσέγγιση αυτή ανάγεται σε μια γενικότερη επιστήμη που είναι ευρύτερα γνωστή ως *Τεχνητή Νοημοσύνη*. Με τον όρο Τεχνητή Νοημοσύνη (Τ.Ν.) αναφέρεται η μελέτη και η εφαρμογή τεχνικών και διεργασιών που δίνουν σε μια μηχανή τη δυνατότητα να αποκτά διανοητικές ικανότητες, ανάλογες με αυτές που διαθέτει ο ανθρώπινος εγκέφαλος. Ένα σύστημα τεχνητής νοημοσύνης πρέπει να μπορεί να κάνει τρία πράγματα (1) να αποθηκεύει γνώση, (2) να εφαρμόζει την γνώση που έχει αποθηκεύσει ώστε να λύνει προβλήματα, (3) να αποκτά νέα γνώση μέσω της εμπειρίας.

Η διαθεσιμότητα αξιόπιστων συστημάτων εκμάθησης είναι καίριας σημασίας, καθώς υπάρχουν πολλά προβλήματα που αδυνατούν να επιλυθούν από τις κλασικές μεθόδους προγραμματισμού, εφόσον δεν υπάρχει το μαθηματικό μοντέλο του προβλήματος. Έτσι για παράδειγμα, δεν γνωρίζουμε πώς να φτιάξουμε ένα πρόγραμμα που να πραγματοποιεί αναγνώριση χειρόγραφων χαρακτήρων, έστω και αν υπάρχει αφθονία διαθέσιμων δειγμάτων. Είναι επομένως φυσικό να αναρωτηθούμε αν ένας υπολογιστής μπορεί να εκπαιδευτεί να αναγνωρίζει το γράμμα A από παραδείγματα – αυτός είναι στο ουσία ο τρόπος με

τον οποίο ο άνθρωπος μαθαίνει να διαβάζει. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν την προσέγγιση επίλυσης προβλημάτων με τον όρο *εκπαιδευτική μεθοδολογία*.

Η ίδια συλλογιστική εφαρμόζεται σε μια πληθώρα σύγχρονων προβλημάτων, από την ανάλυση της δομής των συστατικών των χημικών ενώσεων του ανθρώπινου οργανισμού, (π.χ. δομή του DNA, δομή των πρωτεϊνών), την οπτική αναγνώριση αντικειμένων (π.χ. computer vision , ραντάρ αεροσκαφών και πλοίων, αναγνώριση σωματιδίων σε επιταχυντές στοιχειωδών σωματιδίων κ.τ.λ.), την ταξινόμηση αντικειμένων, έως την πρόβλεψη της εξέλιξης στατιστικών μοντέλων (π.χ. μετοχές, αστροφυσικά – ατμοσφαιρικά μοντέλα ή μοντέλα πυρηνικής φυσικής και φυσικής υψηλών ενεργειών).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τα σημαντικότερα στοιχεία της εκπαιδευτικής μεθοδολογίας και θα κάνουμε μια επισκόπηση των διαθέσιμων μεθόδων εκμάθησης. Οι όροι που δίνονται εδώ είναι χρήσιμοι για την κατανόηση της θεωρίας των νευρωνικών δικτύων που θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

7.2 Εκπαιδευτική Μεθοδολογία

Οι υπολογιστές, συνήθως, χρησιμοποιούνται στην επίλυση ενός πρακτικού προβλήματος όταν η μέθοδος για να οδηγηθούμε στην απαιτούμενη έξοδο (δηλ. το αποτέλεσμα) από ένα σύνολο εισόδων μπορεί πλήρως να περιγραφεί. Όταν όμως οι υπολογιστές καλούνται να επιλύσουν περισσότερο σύνθετα προβλήματα, προκύπτουν καταστάσεις στις οποίες δεν γνωρίζουμε τη μέθοδο υπολογισμού της επιθυμητής εξόδου από ένα σύνολο εισόδων ή ο υπολογισμός μπορεί να αποβεί εξαιρετικά δαπανηρός.

Αυτές οι περιπτώσεις δεν μπορούν να επιλυθούν με τις παραδοσιακές προγραμματιστικές τεχνικές, καθώς το σύστημα αδυνατεί να προσδιορίσει τη μέθοδο με την οποία θα προκύψει η σωστή έξοδος από τα δεδομένα εισόδου. Μια εναλλακτική στρατηγική επίλυσης τέτοιου τύπου προβλημάτων, είναι να επιχειρήσουμε να "μάθουμε"στον υπολογιστή την συναρτησιακή σχέση εισόδου\εξόδου από παραδείγματα. Η προσπάθεια χρήσης παραδειγμάτων στην επίλυση προβλημάτων είναι γνωστή ως *εκπαιδευτική μεθοδολογία*. Τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται για την εκμάθηση της συναρτησιακής σχέ-σης εισόδου\εξόδου καλούνται *δεδομένα εκμάθησης*. (*learning data* ή *training data*).

Τα ζεύγη εισόδου\εξόδου στην ουσία αντικατοπτρίζουν μια συναρτησιακή σχέση που συσχετίζει τις εισόδους με τις εξόδους. Η συνάρτηση που υποκρύπτεται από την σχέση εισόδου\εξόδου καλείται *συνάρτηση στόχου*. Η εκτίμηση της συνάρτησης στόχου από τον αλγόριθμο εκπαίδευσης είναι η *λύση* του

προβλήματος εκμάθησης. Ο αλγόριθμος που δέχεται τα δεδομέ-να εκμάθησης ως είσοδο και προσδιορίζει την συνάρτηση στόχου, ονομάζεται *αλγόριθμος εκμάθησης*.

Οι μορφές προβλημάτων που καλούνται να επιλύσουν οι μηχανές εκμάθησης μπορούν να χωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες. Όταν η έξοδος είναι δυαδική, έχουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα *δυαδικής ταξινόμησης*. Όταν οι έξοδοι αντιστοιχούν σε περισσότερα από δύο σύνολα, έχουμε πρόβλημα *ταξινόμησης σε πολυ-κλάσεις*. Όταν τέλος κάθε είσοδος αντιστοιχεί σε διαφορετική έξοδο, το πρόβλημα ονομάζεται *ενέλιξη*.

7.3 Επιτηρούμενη και Μη Επιτηρούμενη Εκμάθηση

Όταν στη διαδικασία εκμάθησης χρησιμοποιείται και η είσοδος και η έξοδος, η εκμάθηση καλείται *επιτηρούμενη εκμάθηση ή ενεργητική*. Ένα βασικό συστατικό της επιτηρούμενης εκμάθησης είναι ο εξωτερικός *εκπαιδευτής*. Από εννοιολογικής απόψεως, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο εκπαιδευτής έχει επίγνωση του περιβάλλοντος που αντιπροσωπεύεται από ένα σύνολο παραδειγμάτων εισόδου\εξόδου. Πρακτικά δεν είναι τίποτε άλλο, παρά η επιθυμητή έξοδος των εισόδων με τις οποίες θέλουμε να εκπαιδεύσουμε τη συγκεκριμένη μηχανή. Το περιβάλλον, ωστόσο, είναι άγνωστο στην εκάστοτε μηχανή εκμάθησης. Υποθέτουμε λοιπόν ότι εκπαιδευτής και μηχανή εκτίθενται μαζί σε ένα σύνολο δεδομένων εκμάθησης. Ο ρόλος του εκπαιδευτής είναι να παρέχει στη μηχανή την επιθυμητή απόκριση του συνόλου των δεδομένων εκμάθη-σης. Η διαδικασία της επιτηρούμενης εκμάθησης πραγματοποιείται μέσω απευθείας συγκρίσεων της εξόδου της μηχανής και των σωστών απαντήσεων που βρίσκονται στον εκπαιδευτή.

Η επιτηρούμενη εκμάθηση περιλαμβάνει την ειδική περίπτωση της *ενισχυτικής διδασκαλίας* όπου η μόνη απόκριση του εκπαιδευτή είναι αν κάθε έξοδος είναι σωστή ή λανθασμένη και όχι πιο είναι το σωστό αποτέλεσμα της συγκεκριμένης εξόδου.

Μερικές φορές ωστόσο, ο σκοπός της εκπαίδευσης δεν προσδιορίζεται πλήρως από συγκεκριμένα σωστά παραδείγματα. Η μόνη διαθέσιμη πληροφορία που έχουμε είναι ο συσχετισμός των εισόδων. Με βάση αυτόν το συσχετισμό ζητάμε από την μηχανή να δημιουργήσει κατηγορίες και να παράγει εξόδους που να αντιστοιχούν στις δεδομένες εισόδους. Στην ουσία, της ζητάμε να αντιληφθεί την διαδικασία με την οποία παράγονται οι είσοδοι. Στην εκμάθηση αυτή λοιπόν συμμετέχουν μόνο είσοδοι και δεν παρίσταται εκπαιδευτής, γι' αυτό και αναφέρεται ως *μη επιτηρούμενη εκμάθηση*.

7.4 Παράλληλη και Σειριακή Εκπαίδευση

Ανάλογα με τον τρόπο που εισάγονται τα δεδομένα στη μηχανή, προκύπτουν δύο κατηγορίες εκμάθησης: η *εκμάθηση δεσμίδας* και η *ανά πρότυπο εκμάθηση*. Οι όροι προκύπτουν από την αγγλική ορολογία *off-line* ή *batch learning* και *on-line* ή *pattern-by-pattern learning* αντίστοιχα. Ίσως θα ήταν περισσότερο σαφείς και πιο εύγλωττοι οι όροι *παράλληλη* και *σειριακή* αντίστοιχα *εκπαίδευση*. Κατά την παράλληλη εκπαίδευση, ο αλγόριθμος εκμάθησης εφαρμόζεται εφόσον περάσει ολόκληρο το σετ των δεδομένων εκμάθησης από την μηχανή, ενώ κατά την σειριακή εκπαίδευση η μηχανή δέχεται ένα παράδειγμα την φορά και δίνει την εκτίμηση της για την έξοδο, πριν λάβει την σωστή τιμή αυτής της εξόδου. Έτσι κατά την σειριακή εκπαίδευση οι παράμετροι της μηχανής ενημερώνονται μετά από κάθε παράδειγμα και η ποιότητα της εκπαίδευσης εκτιμάται από το συνολικό αριθμό λαθών που έγιναν κατά την διάρκεια της διαδικασίας της εκμάθησης.

7.5 Εκμάθηση και Γενίκευση

Είδαμε παραπάνω πως η ποιότητα της σειριακής εκπαίδευσης μπορεί να εκτιμηθεί από την άποψη του αριθμού των λαθών που γίνονται κατά την φάση της εκπαίδευσης. Δεν είναι άμεσα εμφανές ωστόσο, πως θα εκτιμηθεί αυτή η ποιότητα κατά την διαδικασία της παράλληλης εκπαίδευσης. Κάθε αλγόριθμος εκμάθησης επιδιώκει να διδαχθεί απεικονίσεις απλών συναρτήσεων από τις οποίες θα προσδιορίσει τη συνάρτηση στόχου. Υπάρχουν όμως δύο προ-βλήματα κατά την διαδικασία αυτή.

Το πρώτο είναι ότι η ζητούμενη συνάρτηση μπορεί να μην έχει κάποια απλή απεικόνιση και έτσι μπορεί να μην είναι εύκολος ο προσδιορισμός της με αυτόν τον τρόπο. Το δεύτερο πρόβλημα είναι ότι συνήθως τα δεδομένα εκμάθησης είναι "παραμορφωμένα", περιέχουν δηλαδή και κάποιο "θόρυβο". Δεν μπορούμε τότε να εγγυηθούμε ότι υπάρχει κάποια υποκρύπτουσα συνάρτηση που να αναπαριστά σωστά αυτά τα δεδομένα.

Η μορφή των δεδομένων που επικεντρώνει το ενδιαφέρον των μηχανών εκμάθησης είναι όλο και περισσότερο αυτών των δύο τύπων και έτσι το μέτρο ποιότητας της εκπαίδευσης είναι δύσκολο να εφαρμοστεί. Υπάρχει ωστόσο ένα πιο θεμελιώδες πρόβλημα σε αυτή την προσπάθεια ακόμα και όταν μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση που σχετίζεται με τα δεδομένα εκμάθησης. Δεν γνωρίζουμε την συμπεριφορά της σε νέα δεδομένα. Η ικανότητα των μηχανών εκμάθησης να δίνουν σωστές εξόδους για δεδομένα τα οποία δεν

περιέχο-νται στο σετ εκμάθησης είναι ευρύτερα γνωστή ως *γενίκευση**. Όταν τα νέα δεδομένα περιορίζονται στο πεδίο τιμών που προσδιορίζεται από τα δεδομένα εκμάθησης, μιλάμε για *παρεμβαλλόμενη γενίκευση*, ενώ όταν τα νέα δεδομένα βρίσκονται εκτός αυτού του πεδίου τιμών, μιλάμε για *συμπερασμό*. Αντικείμενο του συμπερασμού στην ουσία είναι η πρόβλεψη, η συμπεριφορά δηλαδή της συνάρτησης στόχου σε άγνωστες περιοχές.

7.6 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Εκμάθησης

Η μεθοδολογία της εκμάθησης φαίνεται να είναι πολλά υποσχόμενη. Πρώτον, γιατί το εύρος των εφαρμογών που μπορούν να επιλυθούν από μια τέτοια προσέγγιση είναι πολύ μεγάλο. Δεύτερον, μπορούμε να αποφύγουμε την επίπονη σχεδίαση και τα εγγενή σφάλματα προγραμματισμού της παραδοσι-ακής μεθοδολογίας. Επιπρόσθετα, λόγω της δυνατότητας συμπερασμού. Τέλος είναι ελκυστική η εξερεύνηση της δυνατότητας αντίληψης των μηχανών εκμάθησης όπως και του τρόπου λειτουργίας του ανθρώπινου εγκεφάλου.

Η πρακτική εφαρμογή της μεθοδολογίας εκμάθησης ωστόσο ενέχει προβλήματα που ανάγονται σε συγκεκριμένες δυσκολίες εκμάθησης. Το πρώτο είναι ότι ο αλγόριθμος εκμάθησης μπορεί να αποδειχθεί ανεπαρκής, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση αδυναμίας προσδιορισμού του τοπικού ελαχίστου. Ένα δεύτερο πρόβλημα είναι ότι αν υπάρχει ένα περιορισμένο δείγμα παραδειγμάτων εκμάθησης για τον προσδιορισμό της συνάρτησης στόχου, θα οδηγηθούμε σε *υπερπροσαρμογή* (overfitting), και άρα ανεπαρκή γενίκευση. Συχνά τέλος, ο αλγόριθμος εκμάθησης ελέγχεται από έναν μεγάλο αριθμό παραμέτρων, οι οποίες πολλές φορές επιλέγονται εμπειρικά κάνοντας το σύστημα δύσχρηστο.

*Ο όρος είναι δανεισμένος από την Ψυχολογία

Κεφάλαιο 8

Νευρωνικά Δίκτυα

8.1 Εισαγωγή

ΤΑ ΤΕΧΝΗΤΑ ΝΕΥΡΩΝΙΚΑ ΔΙΚΤΥΑ δίκτυα είναι μηχανές εκμάθησης βασισμένες στην ιδέα της παράλληλης, κατανεμημένης επεξεργασίας. Η αρχιτεκτονική του κάθε δικτύου βασίζεται σε εφάμιλλες δομικές μονάδες που πραγματοποιούν την επεξεργασία. Κάθε μονάδα εκτελεί μια σχετικά απλή εργασία: δέχεται ένα σήμα στην είσοδο από γειτονικές μονάδες ή εξωτερικές πηγές και το χρησιμοποιεί για να παράγει ένα σήμα εξόδου, το οποίο διαδίδεται σε άλλες μονάδες. Το σύστημα είναι έμφυτα παράλληλο, υπό την έννοια ότι πολλές μονάδες μπορούν να εργάζονται ταυτόχρονα. Οι μονάδες αυτές είναι εμπνευσμένες από βιολογικά νευρικά συστήματα και καλούνται *νευρώνες*. Σε αντιστοιχία με τη φύση, η λειτουργία του δικτύου καθορίζεται κυρίως από τις συνδέσεις (συνάψεις) των νευρώνων που το απαρτίζουν. Μπορούμε να εκπαιδεύσουμε ένα νευρωνικό δίκτυο να εκτελέσει μια συγκεκριμένη λειτουργία, ρυθμίζοντας απλά τις τιμές των συνάψεων μεταξύ των νευρώνων.

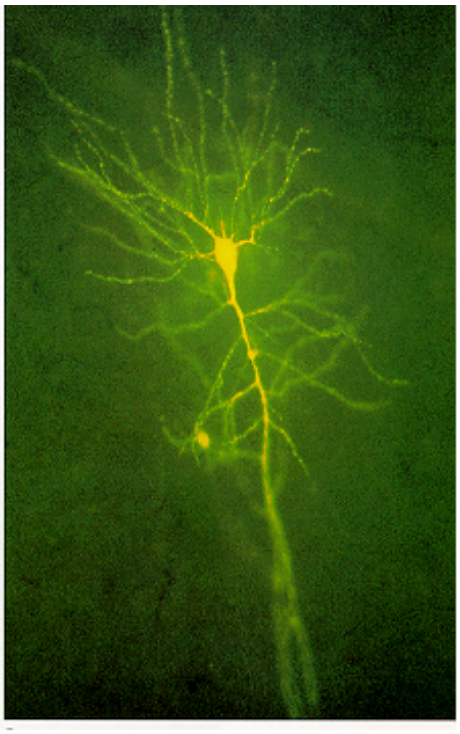
8.2 Φυσιολογία Βιολογικού Νευρώνα

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελείται από 100 δισεκατομμύρια περίπου νευρικά κύτταρα, τα οποία καλούνται *νευρώνες* και από δεκαπλάσια στηρικτικά-βοηθητικά κύτταρα, τα *νευρογλοιακά κύτταρα*. Η σύνδεση μεταξύ δύο νευρώνων καλείται *σύναψη*. Κάθε νευρώνας συνδέεται με τους άλλους νευρώνες κατά μέσο όρο με 10000 συνάψεις. Οι νευρώνες είναι εξειδικευμένοι σε μια σημαντική λειτουργία: την επικοινωνία. Κάθε σύναψη είναι ένας δίαυλος επι-

κοινωνίας. Το νευρωνικό δίκτυο του εγκεφάλου διαμορφώνει έτσι ένα ισχυρό, παράλληλο σύστημα επεξεργασίας πληροφοριών σε αντιδιαστολή με έναν συμβατικό υπολογιστή, στον οποίο ένας απλός επεξεργαστής εκτελεί σειριακά απλές οδηγίες.

Ένα απλό νευρικό κύτταρο ποικίλει σε σχήμα και διαστάσεις και αποτελείται σε γενικές γραμμές από το σώμα, τους δενδρίτες και τον άξονα. Το σώμα μοιάζει με ένα απλό κύτταρο. Περικλείεται από την κυτταρική μεμβράνη και εμπεριέχει κυτταρόπλασμα σε ρευστή μορφή, μέσα στο οποίο επιπλέουν ο πυρήνας του κυττάρου, όπου εκεί βρίσκεται αποθηκευμένο το γενετικό υλικό, και ορισμένες μοριακές δομές, όπως τα μιτοχόνδρια, το ενδοπλασματικό δίκτυο κ.α. που συμμετέχουν στις βασικές κυτταρικές εργασίες, δηλαδή την πρωτεϊνοσύνθεση και την παραγωγή ενέργειας. Αποτελεί την μονάδα επεξεργασίας των βιολογικών νευρωνικών δικτύων.

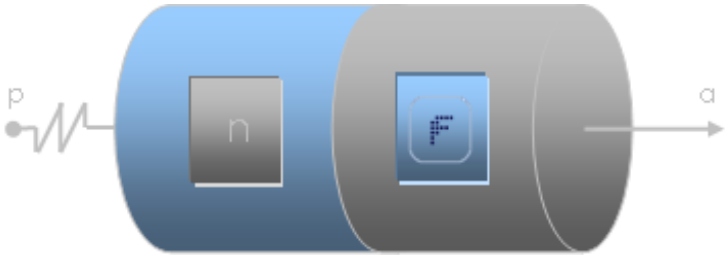
Οι δενδρίτες είναι εκείνοι που δέχονται ερεθίσματα από τους άξονες των άλλων νευρώνων και τα μεταφέρουν προς το σώμα. Ο μικρός χώρος μεταξύ του δενδρίτη του ενός νευρώνα με τον άξονα του άλλου νευρώνα είναι η σύναψη. Μια τέτοια σύναψη καλείται αξοδενδρική και είναι ηλεκτροχημικής φύσεως.



Σχήμα 8.1: Μορφολογία βιολογικού νευρώνα.

8.3 Μορφολογία Τεχνητού Νευρώνα

Ένας τεχνητός νευρώνας, κατ' αντιστοιχία με τον βιολογικό, αποτελείται από την είσοδο p που καλείται *στοιχείο εισόδου*, το *συναπτικό βάρος* ή απλά βάρος w, το οποίο καθορίζεται από την σύναψη της εισόδου με τον νευρώνα, την *συνάρτηση εισόδου* n, την *συνάρτηση ενεργοποίησης* f και την έξοδο a που καλείται *στοιχείο εξόδου*. Η μορφολογία λοιπόν ενός νευρώνα δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.

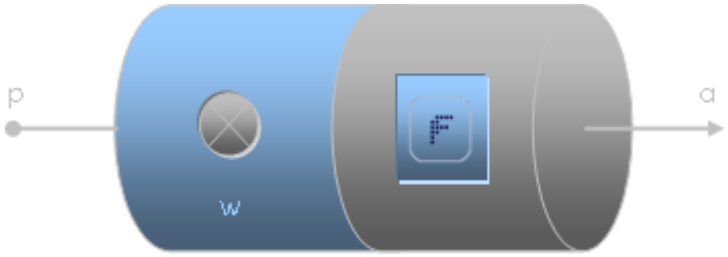


Σχήμα 8.2: Μορφολογία τεχνητού νευρώνα.

Η συνάρτηση εισόδου n, καθορίζεται από τις παραμέτρους που υπάρχουν στην είσοδο του νευρώνα και είναι το *όρισμα*, της συνάρτησης ενεργοποίησης f.

8.3.1 Απλός Νευρώνας

Κάθε νευρώνας με *βαθμωτή* (μονόμετρη) είσοδο καλείται **απλός νευρώνας**. Ένας απλός νευρώνας απεικονίζεται στο σχήμα 8.3. Η βαθμωτή



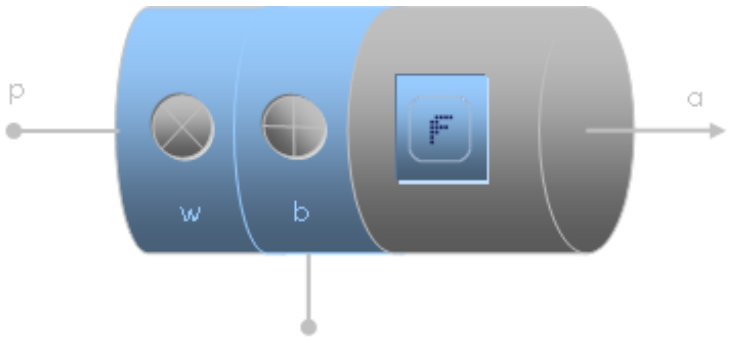
Σχήμα 8.3: Απλός νευρώνας.

είσοδος p διαδίδεται μέσω μιας σύναψης, όπου η έντασή της πολλαπλασιάζεται από το βαθμωτό βάρος w, και έτσι διαμορφώσει το γινόμενο wp, επίσης βαθμωτό. Επομένως η συνολική είσοδος της μονάδας j θα είναι $n = wp$. Εδώ η βεβαρημένη είσοδος wp είναι το μόνο όρισμα της συνάρτησης ενεργοποίησης

f, η οποία παράγει την βαθμωτή έξοδο a, σύμφωνα με την σχέση:

$$\alpha = f\left(wp\right). \tag{8.1}$$

8.3.2 Απλός Νευρώνας με Κατώφλι Ενεργοποίησης



Σχήμα 8.4: Απλός νευρώνας με κατώφλι ενεργοποίησης.

Στο σχήμα 8.4 παρατηρούμε έναν απλό νευρώνα, ο οποίος έχει επιπλέον μια βαθμωτή παράμετρο b. Η παράμετρος αυτή ονομάζεται **κατώφλι ενεργοποίησης** και είναι μια μόνιμη, ανεξάρτητη "είσοδος", δεν προέρχεται δηλαδή από την σύνδεση με κάποιον άλλο νευρώνα. Μπορούμε να την δούμε ως μια μεταβολή της συνάρτησης f κατά ένα ποσό b ή ως ένα κατώφλι της συνάρτησης εισόδου n. Το κατώφλι ενεργοποίησης μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με το συναπτικό βάρος, αλλά έχει σταθερή τιμή εισόδου το 1. Η έξοδος του νευρώνα αυτού θα δίνεται από την έκφραση:

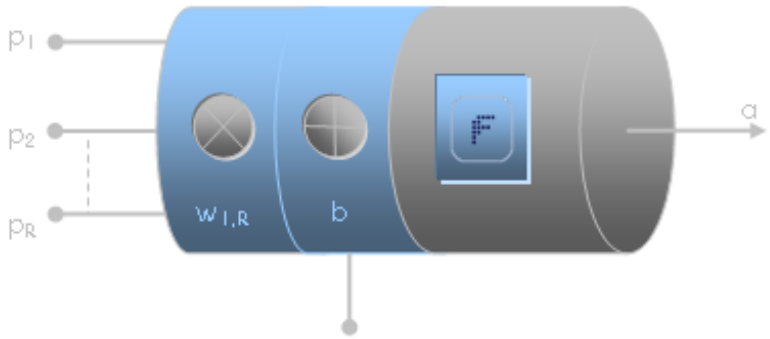
$$\alpha = f\left(wp + b\right), \tag{8.2}$$

όπου b το βάρος του κατωφλιού ενεργοποίησης.

8.3.3 Νευρώνας με Διανυσματική Είσοδο

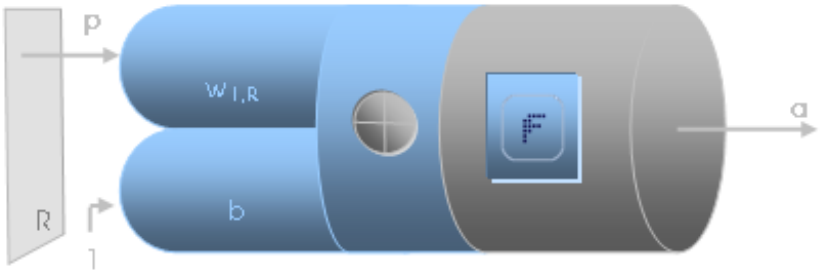
Ένας νευρώνας που έχει στη είσοδο του R στοιχεία φαίνεται στο σχήμα 8.5. Εδώ τα διαφορετικά στοιχεία R που εισάγονται: $p_1, p_2, \ldots p_R$ πολλαπλασιάζονται με τα βάρη $w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots w_{1,R}$ και οι τιμές βάρους που προκύ-πτουν συγκεντρώνονται αθροιστικά στη διακλάδωση. Το όρισμα n επομένως της συνάρτησης ενεργοποίησης στη περίπτωση αυτή, συνυπολογίζοντας και το βάρος του κατωφλιού ενεργοποίησης, θα είναι:

$$n = w_{1,1}p_1, w_{1,2}p_2, \ldots w_{1,R}p_R + b. \tag{8.3}$$



Σχήμα 8.5: Νευρώνας με διανυσματική είσοδο.

Το σχήμα ενός νευρώνα με διανυσματική είσοδο που φαίνεται παραπάνω περιέχει αρκετά επιμέρους στοιχεία. Όταν μελετάμε δίκτυα με πολλούς νευρώνες και ίσως διακλαδώσεις με πολλούς νευρώνες υπάρχουν τόσα πολλά επιμέρους στοιχεία που η κεντρική ιδέα τείνει να χαθεί. Έτσι συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε μια πιο συνεπτυγμένη μορφή για τον κάθε νευρώνα. Αυτή η μορφή, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί αργότερα σε κυκλώματα πολλών νευρώνων, απεικονίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα. Εδώ το άνυσμα εισόδου



Σχήμα 8.6: Νευρώνας με διανυσματική είσοδο σε συνεπτυγμένη μορφή.

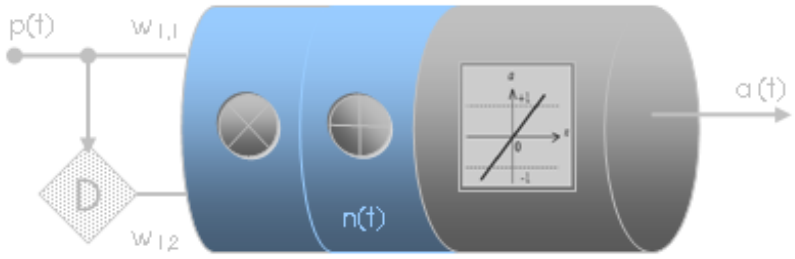
$\vec{p}$ παριστάνεται από το γκρίζο κάθετο επίπεδο στα αριστερά. Οι διαστάσεις του $\vec{p}$ είναι $R \times 1$. Έτσι το $\vec{p}$ είναι το διάνυσμα των στοιχείων εισόδου R. Από τα αντίστοιχα βάρη κατασκευάζουμε τον πίνακα $\vec{w}$ που έχει R στήλες και 1 γραμμή. Όπως και πριν, η σταθερά 1 που προέρχεται από το κατώφλι ενεργοποίησης, εισάγεται στον νευρώνα ως είσοδος. Η συνάρτηση εισόδου n εδώ, είναι το άθροισμα του βάρους του κατωφλιού ενεργοποίησης b και του γινομένου $\vec{w}\vec{p}$. Αυτό το άθροισμα περνά στην συνάρτηση μεταφοράς f για να δώσει την έξοδο α του νευρώνα, η οποία σε αυτή την περίπτωση είναι βαθμωτή,

$$\alpha = f\left(\vec{w}\vec{p} + b\right). \tag{8.4}$$

Αν είχαμε περισσότερους από έναν νευρώνες η έξοδος του δικτύου θα ήταν διάνυσμα.

8.3.4 Νευρώνας με Βρόγχο Υστέρησης

Όταν ένας νευρώνας περιέχει βρόγχους υστέρησης, η είσοδος τυπικά θα είναι μια ακολουθία από ανύσματα εισόδου που εφαρμόζονται με συγκεκριμένη χρονική σειρά. Κατ' αναλογία και η έξοδος θα είναι μια ακολουθία που θα εξαρτάται ισχυρά από την καθυστέρηση που προκαλεί ο βρόγχος υστέρησης. Ένας νευρώνας με βρόγχο υστέρησης D απεικονίζεται στο σχήμα 8.7.



Σχήμα 8.7: Νευρώνας με βρόγχο υστέρησης.

8.4 Αρχιτεκτονική Δικτύου

Δύο ή περισσότεροι νευρώνες μπορούν να συνδυαστούν και να δημιουργήσουν ένα επίπεδο δίκτυο. Κάθε δίκτυο μπορεί να περιέχει ένα ή και περισσότερα τέτοια επίπεδα. Ας δούμε λοιπόν την αρχιτεκτονική ενός τέτοιου δικτύου.

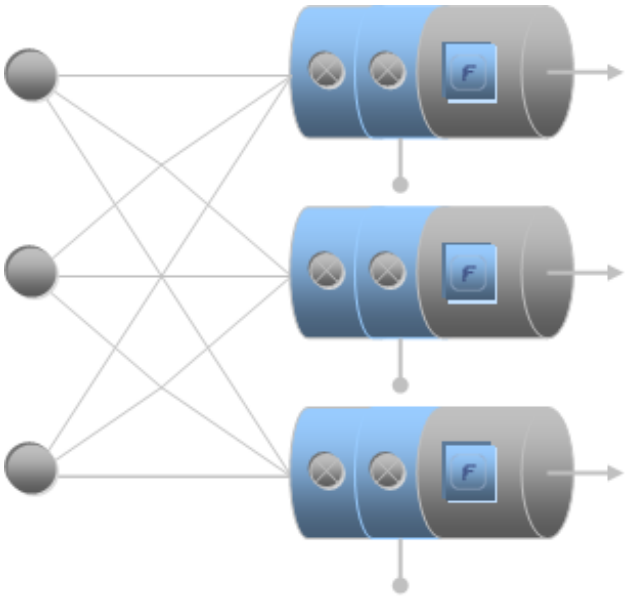
8.4.1 Επίπεδο Δίκτυο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα **επίπεδο δίκτυο** που αποτελείται από S νευρώνες και R στοιχεία εισόδου. Σε αυτό το δίκτυο, κάθε διανυσματικό στοιχείο εισόδου $\vec{p}$ συνδέεται στις εισόδους των νευρώνων μέσω του πίνακα $\vec{w}$. Ο πίνακας $\vec{w}$ λοιπόν θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \cdots & w_{1,R} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \cdots & w_{2,R} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{S,1} & w_{S,2} & \cdots & w_{S,R} \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

Έτσι το δίκτυο στην έξοδο θα δίνει ένα άνυσμα στήλη $\vec{\alpha}$:

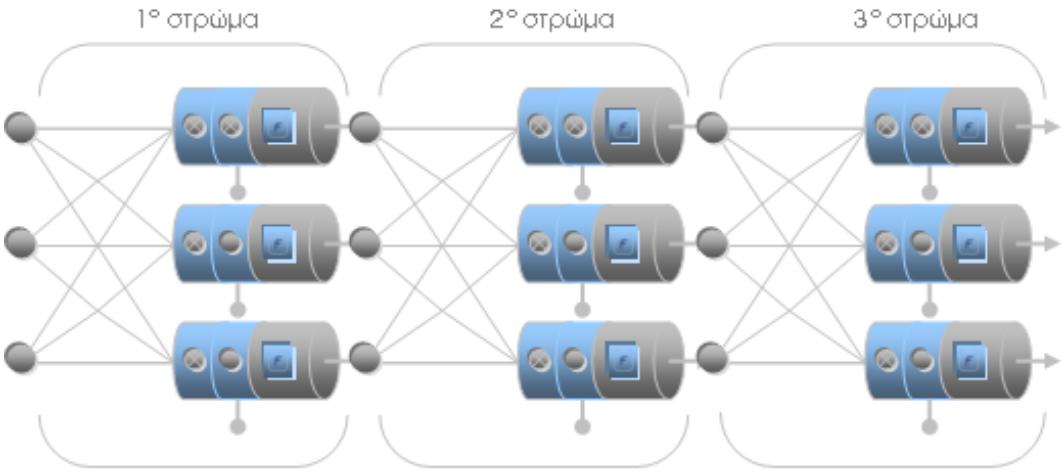
$$\vec{\alpha} = f\left(\vec{w}\vec{p} + \vec{b}\right). \tag{8.6}$$



Σχήμα 8.8: Επίπεδο δίκτυο.

8.4.2 Δίκτυο Πολλών Στρωμάτων

Ένα δίκτυο μπορεί να έχει πολλά επίπεδα, τα οποία καλούνται **στρώματα**. Κάθε στρώμα, χαρακτηρίζεται από έναν πίνακα βαρών $\vec{w}$, ένα διανυσματικό κατώφλι ενεργοποίησης $\vec{b}$ και ένα διάνυσμα εξόδου $\vec{a}$. Το δί-κτυο που φαίνεται στο σχήμα 8.12 έχει R^1 εισόδους, S^1 νευρώνες στο πρώτο επίπεδο, S^2 νευρώνες στο δεύτερο επίπεδο κ.τ.λ. Συχνά σε διαφορετικά επίπεδα συναντούμε διαφορετικό αριθμό νευρώνων. Σημειώστε ότι οι έξοδοι από κάθε ενδιάμε-



Σχήμα 8.9: Δίκτυο πολλών στρωμάτων.

σο στρώμα, αποτελούν τις εισόδους του επόμενου στρώματος. Το δεύτερο στρώμα π.χ. μπορεί να θεωρηθεί ως ένα επίπεδο δίκτυο με S^1 εισόδους, S^2 νευρώνες και έναν $S^2 \times S^1$ πίνακα βαρών w^2. Το κάθε στρώμα ενός τέτοιου δικτύου έχει διαφορετική χρησιμότητα. Το στρώμα που παράγει την έξοδο του δικτύου, καλείται **στρώμα εξόδου**. Όλα τα άλλα στρώματα, ονομάζονται **αφανή στρώματα**. Έτσι, σε ένα δίκτυο τριών στρωμάτων για παράδειγμα, το τρίτο στρώμα θα είναι το στρώμα εξόδου και τα άλλα δύο θα είναι αφανή στρώματα.

8.5 Τοπολογία Δικτύου και Δομές Δεδομένων

Ανάλογα με την ροή των δεδομένων τους ή το είδος των συνδέσεων, τα νευρωνικά δίκτυα μπορούν να καταταχθούν σε δύο βασικές κατηγορίες, τα **δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας** και τα **δίκτυα ανάδρομης διάδοσης**.

Στο δίκτυο ευθείας τροφοδοσίας τα δεδομένα ρέουν (αυστηρά και μόνο) από τις μονάδες εισόδου προς τις μονάδες εξόδου. Το δίκτυο μπορεί να εκτείνεται σε πολλά επίπεδα υπό τον όρο να μην υπάρχουν συνδέσεις **ανάδρασης**, συνδέσεις δηλαδή, οι οποίες να εκτείνονται από την έξοδο ενός νευρώνα και να καταλήγουν στην είσοδο ενός νευρώνα του ίδιου ή προηγούμενου επιπέδου. Στο δίκτυο ανάδρομης διάδοσης αντίθετα, περιλαμβάνονται τέτοιες συνδέσεις ανάδρασης.

Τα δεδομένα εισόδου ενός δικτύου όπως είδαμε, μπορεί να συμπίπτουν χρονικά (πιο συγκεκριμένα να εισάγονται στο δίκτυο χωρίς χρονική αλληλουχία), ή να εισάγονται διαδοχικά το ένα μετά το άλλο, δηλαδή με κάποια χρονική ακολουθία. Για τα ανύσματα που δεν συμπίπτουν χρονικά, η σειρά δεν παίζει ρόλο. Όταν έχουμε χρονική αλληλουχία όμως, η σειρά με την οποία εμφανίζεται το κάθε άνυσμα είναι σημαντική. Ανάλογα λοιπόν με την δομή του ανύσματος εισόδου, μπορούμε να διακρίνουμε τα δίκτυα σε δυο βασικές κατηγορίες: τα στατικά και τα δυναμικά δίκτυα.

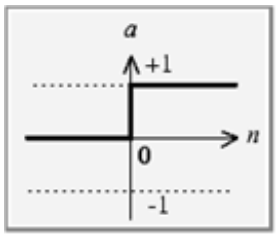
Με τον όρο **στατικό δίκτυο** επομένως, περιγράφουμε το δίκτυο που δεν παρουσιάζει ανάδραση ή βρόγχους υστέρησης, ενώ με τον όρο **δυναμικό δίκτυο**, εννοούμε το δίκτυο που παρουσιάζει ανάδραση ή βρόγχους υστέρησης. Ένα στατικό δίκτυο είναι κατά συνέπεια δίκτυο ευθείας τροφοδοσίας, ενώ ένα δυναμικό δίκτυο είναι δίκτυο ανάδρομης διάδοσης.

8.6 Συναρτήσεις Ενεργοποίησης

Αρκετές είναι οι συναρτήσεις ενεργοποίησης που είναι διαθέσιμες για τον σχεδιασμό ενός νευρωνικού δικτύου. Στον πίνακα 8.1 δίνεται μια λίστα αυτών.

Εδώ θα αναλύσουμε τρεις από τις κυριότερες, την συνάρτηση σκληρού ορίου, την γραμμική και την σιγμοειδή συνάρτηση.

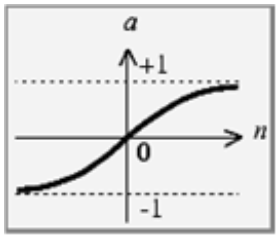
8.6.1 Η Συνάρτηση Σκληρού Ορίου



Σχήμα 8.10: Συνάρτηση σκληρού ορίου.

Η συνάρτηση σκληρού ορίου που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα περιορίζει την έξοδο του νευρώνα είτε στο 0, αν το εισερχόμενο όρισμα είναι μικρότερο του μηδενός, είτε στο 1, αν το εισερχόμενο όρισμα είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός. Χρησιμοποιήσουμε ευρέως σε δίκτυα όπου οι νευρώνες παίρνουν αποφάσεις ταξινόμησης.

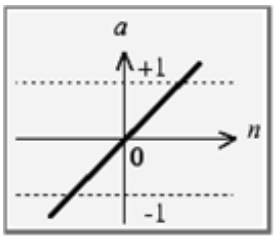
8.6.2 Η Σιγμοειδής Συνάρτηση Υπερβολικής Εφαπτομένης



Σχήμα 8.11: Σιγμοειδής συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης.

Οι **σιγμοειδείς συναρτήσεις** αποτελούν την πιο κοινή μορφή συνάρτησης ενεργοποίησης για την κατασκευή τεχνητών νευρωνικών δικτύων. Ορίζονται ως αυστηρά αύξουσες συναρτήσεις που παρουσιάζουν ομαλή και ασυμπτωτική συμπεριφορά. Μια χαρακτηριστική σιγμοειδής συνάρτηση είναι η **σιγμοειδής συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης** ($tanh$) και χρησιμοποιείτε κυρίως στα αφανή στρώματα δικτύων οπισθοδιάδοσης επειδή είναι διαφορίσημη. Επιπλέον έχει νευροφυσιολογική βάση και προσεγγίζει την καμπύλη απόκρισης των πραγματικών νευρώνων σε εγκεφάλους έμβιων όντων.

8.6.3 Η Γραμμική Συνάρτηση



Σχήμα 8.12: Γραμμική συνάρτηση.

Η **γραμμική συνάρτηση** (lin), $\alpha(n) = n$, λόγω της μορφής της, χρησιμοποιείται κατά κόρον στο στρώμα εξόδου των δικτύων ευθείας τροφοδοσίας. Νευρώνες του τύπου αυτού επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για γραμμική προσέγγιση.

Στην παράγραφο 9.3, όπου θα συζητήσουμε τα βασικά στοιχεία του κλασσικού, εκπαιδευτικού αλγόριθμου οπισθοδιάδοσης, θα συναντήσουμε κάποια τυπικά κριτήρια, τα οποία θα πρέπει να μια πληρεί μια συνάρτηση, ώστε να μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση ενεργοποίησης.

8.7 Διαδικασία Αποκατάστασης της Απόκλισης

Θεωρούμε ότι $t_k(n)$ είναι η επιθυμητή απόκριση του νευρώνα k τη χρονική στιγμή n. Θεωρούμε επίσης ότι $\alpha_k(n)$ είναι η αντίστοιχη τιμή της τρέχουσας απόκρισης του νευρώνα k. Η απόκριση $\alpha_k(n)$ παράγεται από ένα *ερέθισμα* (άνυσμα) που εφαρμόζεται στην είσοδο του δικτύου που εμπεριέχει τον νευρώνα k. Το άνυσμα εισόδου μαζί με την επιθυμητή απόκριση $t_k(n)$ συνιστούν ένα συγκεκριμένο **παράδειγμα** που εμφανίζεται στο δίκτυο τη χρονική στιγμή n. Θεωρούμε δεδομένο ότι το παράδειγμα αυτό, καθώς και όλα τα άλλα παραδείγματα που εμφανίζονται στο δίκτυο παράγονται από ένα περιβάλλον εκ φύσεως πιθανοκρατικό, όπου η υποκείμενη κατανομή πιθανότητας είναι άγνωστη.

Τυπικά, η τρέχουσα απόκριση $\alpha_k(n)$ του νευρώνα k διαφέρει από την επιθυμητή απόκριση $t_k(n)$. Ως εκ τούτου, μπορούμε να ορίσουμε ως σήμα απόκλισης τη διαφορά μεταξύ της επιθυμητής απόκρισης $t_k(n)$ και της τρέχουσας απόκρισης $\alpha_k(n)$:

$$e_k(n) = t_k(n) - \alpha_k(n). \tag{8.7}$$

Ο στόχος τότε της επιτηρούμενης εκπαιδευτικής διαδικασίας θα είναι η ελαχιστοποίηση της αποκαλούμενης **συνάρτησης κόστους** νε βάση το σήμα

Συνάρτηση	Σχέση εισόδου\εξόδου
Σκληρού Ορίου	$\alpha(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$
Συμμετρικά Σκληρού Ορίου	$\alpha(n) = \begin{cases} -1, & n < 0 \\ +1, & n \geq 0 \end{cases}$
Γραμμική	$\alpha(n) = n$
Κορεσμένη Γραμμική	$\alpha(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & 0 \leq n \leq 1 \\ 1, & n > 1 \end{cases}$
Συμμετρικά Κορεσμένη Γραμμική	$\alpha(n) = \begin{cases} -1, & n < 0 \\ n, & 0 \leq n \leq 1 \\ 1, & n > 1 \end{cases}$
Λογαριθμική Σιγμοειδής	$\alpha(n) = \frac{1}{1+e^{-n}}$
Σιγμοειδής Υπερβολικής Εφαπτομένης	$\alpha(n) = \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}}$
Θετικά Γραμμική	$\alpha(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & n \geq 0 \end{cases}$
Ακτινικής Βάσης	$\alpha(n) = e^{-n^2}$

Πίνακας 8.1: Οι κυριότερες συναρτήσεις ενεργοποίησης.

απόκλισης, έτσι ώστε η τρέχουσα απόκριση κάθε νευρώνα εξόδου του δικτύου να προσεγγίζει υπό στατιστική έννοια την επιθυμητή απόκριση αυτού του νευρώνα. Πράγματι, επιλεγείσας μιας συνάρτησης κόστους, η εκπαίδευση αποκατάστασης της απόκλισης δεν είναι τίποτε άλλο, παρά ένα πρόβλημα **βελτιστοποίησης**, στο οποίο τα συνήθη εργαλεία μπορούν να αποδειχτούν χρήσιμα.

8.7.1 Το Κριτήριο Μέσης − Τετραγωνικής − Απόκλισης

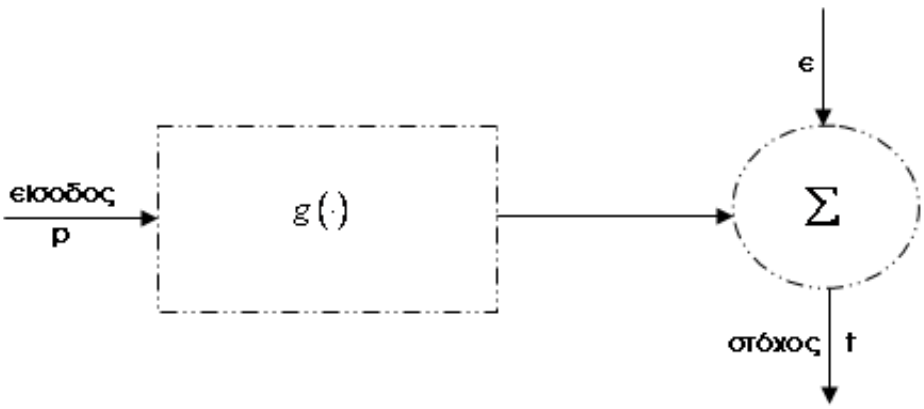
Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο κριτήριο για την συνάρτηση κόστους είναι το *κριτήριο μέσης − τετραγωνικής − απόκλισης*, το οποίο ορίζεται ως η μέση − τετραγωνική τιμή του αθροίσματος των τετραγωνικών αποκλίσεων:

$$E_D = T\left[\frac{1}{2}\sum_k e_k^2(n)\right] \tag{8.8}$$

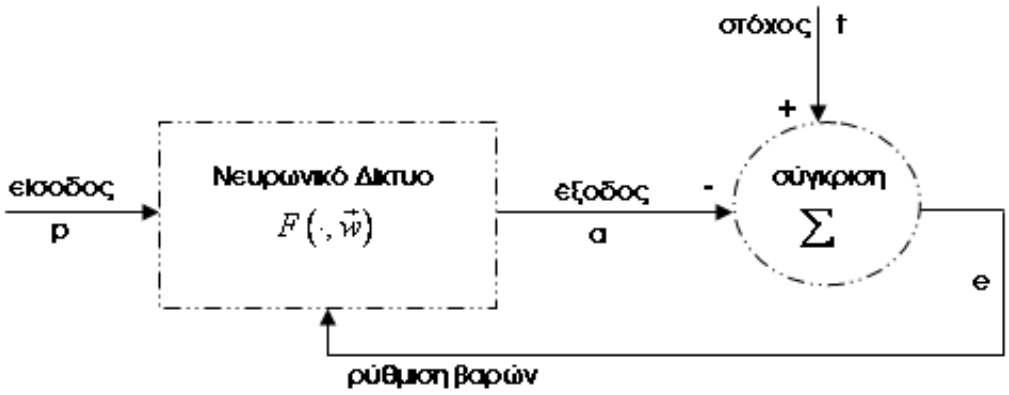
όπου T ο αναμενόμενος στατιστικός τελεστής και η άθροιση πραγματοποιείται σε όλους τους νευρώνες του στρώματος εξόδου του δικτύου. Ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ χρησιμοποιείται στην εξ. (8.8) έτσι ώστε να απλοποιηθούν μεταγενέστερες παράγωγοι που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους E_D ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους του δικτύου. Η ελαχιστοποίηση αυτή οδηγεί στην αποκαλούμενη *μέθοδο πτώσης της κλίσης*.

8.8 Η Στατιστική Φύση της Εκπαιδευτικής Διαδικασίας

Η εκπαιδευτική διαδικασία που πραγματοποιείται από ένα νευρωνικό δίκτυο είναι μια *στοχαστική* διαδικασία. Η στοχαστικότητα αυτή εδραιώνεται από το



Σχήμα 8.13: Μαθηματικό μοντέλο ενέλιξης.



Σχήμα 8.14: Μοντέλο νευρωνικού δικτύου (Φυσικό μοντέλο).

περιβάλλον στο οποίο κείται το δίκτυο. Σε αυτή την παράγραφο θα εστιάσουμε στην στατιστική διάσταση της διαδικασίας. Αρχικά, σημειώνουμε ότι ένα νευρωνικό δίκτυο είναι αποκλειστικά και μόνο μια δομή στην οποία μπορεί να κωδικοποιηθεί *εμπειρική γνώση* ενός φυσικού φαινομένου (περιβάλλον). Με τον όρο εμπειρική γνώση εννοούμε ένα σύνολο μετρήσεων που χαρα-κτηρίζουν το φαινόμενο. Για να γίνει αυτό περισσότερο σαφές, θεωρούμε το παράδειγμα ενός φαινομένου που περιγράφεται από το άνυσμα $\vec{p}$ αντιπροσωπεύοντας ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταβλητών, και ένα βαθμωτό μέγεθος t που αντιπροσωπεύει μια εξαρτημένη μεταβλητή. Τα στοιχεία του ανύσματος $\vec{p}$ μπορούν να έχουν διαφορετική φυσική ερμηνεία. Η υπόθεση ότι η εξαρτημένη μεταβλητή είναι βαθμωτό μέγεθος έγινε μόνο και μόνο για να απλοποιήσουμε την ανάλυσή μας χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν μπορούμε να γενικεύσουμε την διαδικασία. Υποθέτουμε επίσης ότι έχουμε N μετρήσεις ή παρατηρήσεις του $\vec{p}$ τις $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \ldots, \vec{p}_N$, και ένα αντίστοιχο σύνολο από παρατηρήσεις του t τις $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_N$.

Συνήθως δεν έχουμε καμία γνώση της ακριβούς συναρτησιακής σχέσης μεταξύ των $\vec{p}$ και t. Θεωρούμε έτσι ότι:

$$t = g(\vec{p}) + \epsilon, \tag{8.9}$$

όπου $g(\vec{p})$ είναι κάποια συνάρτηση του ανυσματικού ορίσματος $\vec{p}$ και ϵ τυχαίο αναμενόμενο σφάλμα που αντιπροσωπεύει την άγνοιά μας για την εξάρτηση του t από το $\vec{p}$. Το στατιστικό μοντέλο που περιγράφεται από την εξ. (8.9) ονομάζεται *μοντέλο απόκλισης εξαρτημένης στατιστικής μεταβλητής* ή **μοντέλο ενέλιξης** και απεικονίζεται σχηματικά στο σχ. 8.13. Σε αυτό το μοντέλο η συνάρτηση $g(\vec{p})$ καθορίζεται από την σχέση

$$g(\vec{p}) = E[t|\vec{p}] \tag{8.10}$$

όπου E ο αναμενόμενος στατιστικός τελεστής.

Το μοντέλο απόκλισης εξαρτημένης στατιστικής μεταβλητής του σχήματος 8.13 είναι ένα *μαθηματικό* μοντέλο, ο σκοπός του οποίου είναι η χρήση του $\vec{p}$ για την εξήγηση ή την πρόβλεψη του t. Τα νευρωνικά δίκτυα μας παρέχουν μια *φυσική* διάταξη για την εφαρμογή αυτής της επιδίωξης. Το κάνουν αυτό κωδικοποιώντας την εμπειρική γνώση που αντιπροσωπεύεται από το εκπαιδευτικό σετ $\{\vec{p}_i, t_i \,|i = 1, 2, ...N\}$ σε ένα σύνολο συναπτικών βαρών. Υπό αυτό το πρίσμα, το άνυσμα $\vec{p}_i$ αντιπροσωπεύει το άνυσμα εισόδου και το βαθμωτό μέγεθος t_i αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη τιμή της επιθυμητής απόκρισης. Θα συμβολίζουμε εφεξής με $\vec{w}$ το άνυσμα των **ελεύθερων παραμέτρων** (δηλ. των συναπτικών βαρών και των βαρών των κατωφλιών ενεργοποίησης) του νευρωνικού δικτύου που επιλέγουμε για να προσεγγίσουμε το μοντέλο του σχήματος 8.13. Η τρέχουσα απόκριση του δικτύου λοιπόν θα ορίζεται ως εξής:

$$\alpha = F(\vec{p}, \vec{w}) \tag{8.11}$$

Το άνυσμα $\vec{w}$ τότε των συναπτικών βαρών του δικτύου, κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, θα προσαρμόζεται με επαναληπτικό τρόπο ανάλογα με την απόκριση του σήματος απόκλισης e.

Στο σχήμα 8.14 απεικονίζεται η ιδέα με την οποία η προσαρμοστική διαδικασία χρησιμοποιείται για να βελτιστοποιήσει την επιλογή ενός ανύσματος συναπτικών βαρών $\vec{w}$.

Κεφάλαιο 9

Αλγόριθμοι Εκπαίδευσης

9.1 Η Θεωρίας της Βελτιστοποίησης

ΕΙΝΑΙ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝ ΝΑ ΣΗΜΕΙΩΣΟΥΜΕ πως παρά το γεγονός ότι τα νευρωνικά δίκτυα αναπτύχθηκαν πριν από μερικές δεκαετίες, οι περισσότεροι από τους αλγόριθμους που θα συζητήσουμε στο κεφάλαιο αυτό κατασκευάστηκαν εκατοντάδες χρόνια πριν. Οι βασικές αρχές **βελτιστοποίησης** ανακαλύφθηκαν κατά τον 17^o αιώνα, από φυσικούς και μαθηματικούς, όπως ο *Kepler*, ο *Fermat*, ο *Newton* και ο *Leibniz*. Μετά το 1950 όμως, αυτές οι αρχές επανεξετάστηκαν, ώστε να προσαρμοστούν σε εφαρμογές ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπως τα νευρωνικά δίκτυα. Η επιτυχία αυτών των προσπαθειών ανέγειρε αξιόλογες έρευνες σε νέους αλγόριθμους και έτσι το πεδίο της θεωρίας της βελτιστοποίησης αναγνωριστικέ ως ένας μείζων κλάδος της μαθηματικής επιστήμης. Σήμερα πλέον όσοι ασχολούνται με τα νευρωνικά δίκτυα έχουν πρόσβαση σε μια τεράστια πηγή γνώσεων γύρω από την θεωρία και την εφαρμογή της βελτιστοποίησης, που μπορεί να εφαρμοστεί κατά την εκπαίδευση των νευρωνικών δικτύων.

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η κατασκευή αλγορίθμων για την βελτιστοποίηση του δείκτη απόδοσης $F(\vec{w})$ των τρεχόντων τιμών των ελεύθερων παραμέτρων $\vec{w}$ ενός νευρωνικού δικτύου. Για τα νευρωνικά δίκτυα λοιπόν η λέξη "βελτιστοποίηση" θα σημαίνει εύρεση της κατάλληλης τιμής των παραμέτρων $\vec{w}$ ώστε να ελαχιστοποιείται η συνάρτηση κόστους $F(\vec{w})$. Όλοι οι αλγόριθμοι βελτιστοποίησης είναι επαναληπτικοί. Ξεκινάμε από κάποια αρχική υπόθεση, $\vec{p_0}$ και στην συνέχεια προσαρμόζουμε την υπόθεσή μας σε στάδια

σύμφωνα με μια εξίσωση της μορφής:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k + \alpha_k \vec{p}_k, \tag{9.1}$$

ή

$$\Delta\vec{w}_k = (\vec{w}_{k+1} - \vec{w}_k) = \alpha_k \vec{p}_k, \tag{9.2}$$

όπου το άνυσμα $\vec{p_k}$ αντιπροσωπεύει μια κατεύθυνση αναζήτησης, και το θετικό βαθμωτό μέγεθος α_k είναι η **σταθερά ρυθμού εκπαίδευσης**, που καθορίζει το μήκος του βήματος προς την κατεύθυνση αυτή. Οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται στις ακόλουθες παραγράφους διαχωρίζονται από την επιλογή της κατεύθυνσης αναζήτησης, $\vec{p_k}$.

9.2 Η Μέθοδος της πιο Απότομης Πτώσης

Όταν ενημερώνουμε την υπόθεση για το βέλτιστο (ελάχιστο) σημείο χρησιμοποιώντας την εξ. (9.1), επιθυμούμε η συνάρτηση να ελαττώνεται σε κάθε επανάληψη. Με άλλα λόγια,

$$F(\vec{w}_{k+1}) < F(\vec{w}_k). \tag{9.3}$$

Το πρόβλημα λοιπόν είναι πως μπορούμε να επιλέξουμε μια κατεύθυνση, $\vec{p_k}$, έτσι ώστε για αρκούντος μικρή σταθερά ρυθμού εκπαίδευσης, α_k, να μετακινούμαστε "κατηφορικά"προς αυτό το δρόμο. Έτσι θεωρούμε το πρωτοβάθμιο ανάπτυγμα σε σειρά $Taylor$ γύρω από την προηγούμενη υπόθεση $\vec{w}_k$:

$$F(\vec{w}_{k+1}) = F(\vec{w}_k + \Delta\vec{w}_k) \approx F(\vec{w}_k) + \vec{g}_k^T \Delta\vec{w}_k \tag{9.4}$$

όπου $\vec{g}_k$ είναι η κλίση, αποτιμημένη στην προηγούμενη υπόθεση $\vec{w}_k$.

$$\vec{g}_k \equiv \nabla F(\vec{w})|_{\vec{w}=\vec{w}_k}. \tag{9.5}$$

Για να είναι η συνάρτηση $F(\vec{w}_{k+1})$ μικρότερη από την $F(\vec{w}_k)$, ο δεύτερος όρος στο β μέλος της εξ. (9.4) θα πρέπει να είναι αρνητικός:

$$\vec{g}_k^T \Delta\vec{w}_k = \alpha_k \vec{g}_k^T \vec{p}_k < 0. \tag{9.6}$$

Επιλέγουμε κάποιο μικρό $\alpha_k > 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\vec{g}_k^T \vec{p}_k < 0. \tag{9.7}$$

9.2.1 Η Κατεύθυνση Πτώσης

Κάθε άνυσμα $\vec{p_k}$ που ικανοποιεί την εξ. (9.7) καλείται **κατεύθυνση πτώσης**. Η συνάρτηση πρέπει λοιπόν να ελαττώνεται για αρκούντος μικρό βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Θα εντοπίσουμε λοιπόν στη συνέχεια την κατεύθυνση με την πιο απότομη πτώση, την κατεύθυνση εκείνη δηλαδή, κατά την οποία η συνάρτηση θα ελαττώνεται ταχύτερα. Αυτό θα συμβαίνει όταν η ποσότητα:

$$\vec{g_k}^T \vec{p_k} \tag{9.8}$$

είναι η πιο αρνητική. (Υποθέτουμε βέβαια ότι μεταβάλλεται μόνο το μέτρο του $\vec{p_k}$ και όχι η διεύθυνση.) Αυτό δεν είναι τίποτε άλλο, παρά το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ της κλίσης και του ανύσματος κατεύθυνσης, δηλαδή η παράγωγος κατά κατεύθυνση. Έτσι ένα άνυσμα με διεύθυνση προς την κατεύθυνση της πιο απότομης πτώσης θα είναι το:

$$\vec{p_k} = -\vec{g_k} \tag{9.9}$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν την τελευταία σχέση στην εξ. (9.1), παίρνουμε την έκφραση προσαρμογής των παραμέτρων της **μεθόδου της πιο απότομης πτώσης**:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k - \alpha_k \vec{g}_k. \tag{9.10}$$

9.2.2 Η Σταθερά Ρυθμού Εκπαίδευσης

Στη μέθοδο της πιο απότομης πτώσης μπορούν να εφαρμοστούν δύο γενικές τεχνικές προσδιορισμού της σταθεράς του ρυθμού εκπαίδευσης, α_k. Μια προσέγγιση είναι η ελαχιστοποίηση του δείκτη απόδοσης $F(\vec{w})$ ως προς το α_k σε κάθε επανάληψη. Σε αυτή την περίπτωση η ελαχιστοποίηση πραγματοποιείται κατά μήκος της γραμμής:

$$\vec{w}_k - \alpha_k \vec{g}_k. \tag{9.11}$$

Η δεύτερη τεχνική επιλογής του α_k είναι η χρήση συγκεκριμένης τιμής (π.χ. $\alpha_k = 0.02$), ή η χρήση μεταβλητών, αλλά προκαθορισμένων τιμών (π.χ. $\alpha_k = 1/k$).

Η μεταβολή της σταθεράς του ρυθμού εκπαίδευσης παίζει καθοριστικό ρόλο στην απόδοση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Έτσι για πολύ μικρές τιμές του α_k η τροχιά που ακολουθείται από την μέθοδο της πιο απότομης πτώσης στον χώρο των παραμέτρων θα είναι πάντα ομαλή και κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες, αφού η κλίση είναι ορθογώνια με τις ισοδυναμικές επιφάνειες. Το βήμα είναι πολύ μικρό, οπότε η εκπαιδευτική διαδικασία θα καθυστερεί, αλλά η

σύγκλιση είναι σίγουρη. Για μεγαλύτερες τιμές του α_k, η τροχιά θα διακρίνεται από μια ταλαντωτική συμπεριφορά στο χώρο των παραμέτρων, ενώ η σύγκλιση θα είναι ταχύτερη. Για πολύ μεγάλες τιμές της σταθεράς α_k όμως, το βήμα είναι μεγάλο, οι ταλαντωτική συμπεριφορά οξυμμένη και ο αλγόριθμος καθίσταται ασταθής, καθώς αδυνατεί να εντοπίσει μια περιοχή πολύ κοντά στο ζητούμενο ελάχιστο.

9.3 Ο Αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης

Όπως είδαμε στην παράγραφο 8.4.2, για πολυστρωματικά δίκτυα, η έξοδος ενός στρώματος γίνεται η είσοδος του επόμενου στρώματος. Αυτή η λειτουργία μπορεί να περιγραφεί από την ακόλουθη έκφραση:

$$\vec{a}^{m+1} = \vec{f}^{m+1}\left(\vec{w}^{m+1}\vec{a}^{m} + \vec{b}^{m+1}\right), \tag{9.12}$$

για $m = 0, 1, \ldots, M-1$, όπου M ο αριθμός των στρωμάτων του δικτύου. Οι νευρώνες του πρώτου αφανούς στρώματος, λαμβάνουν ως είσοδο το σήμα που προέρχεται από εξωτερικές πηγές:

$$\vec{a}^{0} = \vec{p}, \tag{9.13}$$

η οποία παρέχει το σημείο έναρξης της εξ. 9.12. Οι έξοδοι των νευρώνων του στρώματος εξόδου αποτελούν την έξοδο του δικτύου:

$$a = a^{M}. \tag{9.14}$$

Δείκτης Απόδοσης

Ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης, δεν είναι τίποτε άλλο, παρά μια γενίκευση της μεθόδου βελτιστοποίησης Μέσων Ελαχίστων Τετραγώνων, η οποία εντοπίζει το ζητούμενο $minimum$, ελαχιστοποιώντας την συνάρτηση κόστους F, με βάση το κριτήριο − μέσης − τετραγωνικής απόκλισης (παρ. 8.7.1) . Ο αλγόριθμος εφοδιάζεται με ένα σετ παραδειγμάτων ενός κατάλληλου δικτύου:

$$\left\{\vec{p}_1, \vec{t}_1\right\}, \quad \left\{\vec{p}_2, \vec{t}_2\right\}, \quad \ldots, \quad \left\{\vec{p}_Q, \vec{t}_Q\right\} \tag{9.15}$$

όπου $\vec{p}_i$ είναι οι είσοδοι του δικτύου και $\vec{t}_i$ οι αντίστοιχοι στόχοι. Κάθε φορά που μια είσοδος εφαρμόζεται στο δίκτυο, η παραγόμενη έξοδος του δικτύου συγκρίνεται, όπως είδαμε, με τον στόχο. Ο αλγόριθμος πρέπει λοιπόν να προσαρμόσει τις τιμές των ελεύθερων παραμέτρων, προκειμένου να ελαχιστοποιήσει τις μέσες τετραγωνικές αποκλίσεις·

$$F\left(\vec{w}\right) = T\left[e^2\right] = T\left[\left(a-t\right)^2\right]. \tag{9.16}$$

Αν το δίκτυο έχει διανυσματική έξοδο, η παραπάνω έκφραση γίνεται:

$$F(\vec{w}) = T\left[\vec{e}^T\vec{e}\right] = T\left[\left(\vec{a}-\vec{t}\right)^T\left(\vec{a}-\vec{t}\right)\right]. \tag{9.17}$$

Προσεγγίζουμε στην συνέχεια την μέση τετρα-γωνική απόκλιση από την:

$$\hat{F}(\vec{x}) = \left[\vec{a}_k-\vec{t}_k\right]^T\left[\vec{a}_k-\vec{t}_k\right] = \vec{e}_k^T\vec{e}_k, \tag{9.18}$$

όπου η αναμενόμενη τετραγωνική απόκλιση αντικαθίσταται από την τετραγωνική απόκλιση της επανάληψης (**εποχής**) k.

Έτσι ο αλγόριθμος της πιο απότομης πτώσης σύμφωνα με την προσέγγιση μέσης τετραγωνικής απόκλισης θα έχει τη μορφή:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k - \eta\frac{\partial\hat{F}}{\partial w_{i,j}^m}. \tag{9.19}$$

όπου η η παράμετρος του ρυθμού εκπαίδευσης.

9.3.1 Ο Αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης για Γραμμικούς Νευρώνες Εξόδου

Για ένα μονοστρωματικό γραμμικό δίκτυο λοιπόν, ή για το στρώμα εξόδου πολυστρωματικού δικτύου ευθείας τροφοδοσίας με γραμμική έξοδο, αυτές οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται εύκολα από τις εκφράσεις:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k + 2\eta e_k\vec{p}_k, \tag{9.20}$$

για τα συναπτικά βάρη και:

$$\vec{b}_{k+1} = \vec{b}_k + 2\eta e_k, \tag{9.21}$$

για τα βάρη των κατωφλιών ενεργοποίησης. Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν, αν αντικαταστήσουμε στην εξ. (9.19) τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial w_{1,j}^m} = \frac{\partial e_k^2}{\partial w_{1,j}^m} = 2e_k\frac{\partial e_k}{\partial w_{1,j}^m}, \tag{9.22}$$

$$\frac{\partial\hat{F}}{\partial b} = \frac{\partial e_k^2}{\partial b} = 2e_k\frac{\partial e_k}{\partial b}, \tag{9.23}$$

$$\frac{\partial e_k}{\partial w_{1,j}} = \frac{\partial\left[t_k-a_k\right]}{\partial w_{1,j}} = \frac{\partial\left[t_k-\left(\vec{w}^T\vec{p}_k+b\right)\right]}{\partial w_{1,j}} = \frac{\partial\left[t_k-\left(\sum_{i=1}^{R}w_{1,j}p_k^i+b\right)\right]}{\partial w_{1,j}}, \tag{9.24}$$

όπου R ο αριθμός των εισόδων του στρώματος και j ο αριθμός των νευρώνων του στρώματος,

$$\Rightarrow \frac{\partial e_k}{\partial w_{1,j}} = -p_k^j, \tag{9.25}$$

και

$$\frac{\partial e_k}{\partial b} = -1. \tag{9.26}$$

9.3.2 Ο Αλγόριθμος Οπισθοδιάδοσης για Μη−Γραμμικούς Αφανείς Νευρώνες

Για τα αφανή στρώματα πολυστρωματικού δικτύου, η απόκλιση δεν σχετίζεται ρητά με τα βάρη και επομένως οι παράγωγοι δεν μπορούν να υπολογιστούν τόσο εύκολα. Η σύγκριση και άρα ο υπολογισμός των αποκλίσεων μεταξύ απόκρισης του δικτύου και στόχου λαμβάνει χώρα στο στρώμα εξόδου, οπότε η απόκλιση θα είναι έμμεση συνάρτηση των βαρών των αφανών στρωμάτων. Για να υπολογίσουμε λοιπόν τις παραγώγους χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας. Για συνάρτηση f, αναλυτική μόνο ως προς μεταβλητής n, η μερική παράγωγος ως προς μια τρίτη μεταβλητή w θα δίνεται σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας ως:

$$\frac{df\left(n\left(w\right)\right)}{dw} = \frac{df\left(n\right)}{dn} \times \frac{dn\left(w\right)}{dw} \tag{9.27}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα στις μερικές παραγώγους των σχέσεων (9.20) και (9.21) λοιπόν παίρνουμε:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial w_{i,j}^m} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^m} \times \frac{\partial n_i^m}{\partial w_{i,j}^m}, \tag{9.28}$$

και

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial b_i^m} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^m} \times \frac{\partial n_i^m}{\partial b_i^m}. \tag{9.29}$$

Ο δεύτερος όρος σε κάθε μια από αυτές τις εξισώσεις μπορεί να υπολογιστεί εύκολα., αφού η συνολική είσοδος του στρώματος m είναι αναλυτική συνάρτηση των βαρών και των κατωφλιών ενεργοποίησης του στρώματος αυτού:

$$n_i^m = \sum_{j=1}^{s^{m-1}} w_{i,j}^m a_j^{m-1} + b_i^m. \tag{9.30}$$

Επομένως:

$$\frac{\partial n_i^m}{\partial w_{i,j}^m} = a_j^{m-1}, \qquad \frac{\partial n_i^m}{\partial b_i^m} = 1 \tag{9.31}$$

Αν λοιπόν τώρα ορίσουμε:

$$s_i^m \equiv \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^m}, \tag{9.32}$$

(την **ευαισθησία** της $\hat{F}$ να μεταβάλλει τη συνολική είσοδο του $i^ου$ στοιχείου του στρώματος m), τότε οι εξ. (9.28) και (9.29) μπορούν να απλοποιηθούν ως εξής:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial w_{i,j}^m} = s_i^m a_j^{m-1}, \tag{9.33}$$

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial b_i^m} = s_i^m. \tag{9.34}$$

Είμαστε λοιπόν σε θέση να εκφράσουμε τον προσεγγιστικό αλγόριθμο της πιο απότομης πτώσης ως:

$$\vec{w}_{k+1}^m = \vec{w}_k^m - \eta \vec{s}^m \left(\vec{a}^{m-1}\right)^T \tag{9.35}$$

για τα συναπτικά βάρη και

$$\vec{b}_{k+1}^m = \vec{b}_k^m - \eta \vec{s}^m \tag{9.36}$$

για την περίπτωση των βαρών των κατωφλιών ενεργοποίησης, όπου:

$$\vec{s}^m \equiv \frac{\partial \hat{F}}{\partial \vec{n}^m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_1^m} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_2^m} \\ \vdots \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_{s^m}^m} \end{bmatrix}. \tag{9.37}$$

Οπισθοδιάδοση των Ευαισθησιών

Απομένει λοιπόν τώρα να υπολογίσουμε τις ευαισθησίες $\vec{s}^m$, οι οποίες απαιτούν μια διαφορετική εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας. Σε αυτή τη διαδικασία οφείλεται ο όρος *οπισθοδιάδοση*, καθώς περιγράφει μια αναδρομική σχέση, όπου η ευαισθησία του στρώματος m υπολογίζεται από την ευαισθησία του στρώματος $m+1$.

Για να εξάγουμε την αναδρομική σχέση των ευαισθησιών, θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο Ιακωβιανό πίνακα:

$$\frac{\partial \vec{n}^{m+1}}{\partial \vec{n}^m} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial n_1^{m+1}}{\partial n_1^m} & \frac{\partial n_1^{m+1}}{\partial n_2^m} & \cdots & \frac{\partial n_1^{m+1}}{\partial n_{s^m}^m} \\ \frac{\partial n_2^{m+1}}{\partial n_1^m} & \frac{\partial n_2^{m+1}}{\partial n_2^m} & \cdots & \frac{\partial n_2^{m+1}}{\partial n_{s^m}^m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial n_{s^{m+1}}^{m+1}}{\partial n_1^m} & \frac{\partial n_{s^{m+1}}^{m+1}}{\partial n_2^m} & \cdots & \frac{\partial n_{s^{m+1}}^{m+1}}{\partial n_{s^m}^m} \end{bmatrix}. \tag{9.38}$$

Κατόπιν, θέλουμε να βρούμε μια έκφραση για αυτόν τον πίνακα. Θεωρήστε το i, j στοιχείο του πίνακα:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_i^{m+1}}{\partial n_j^m} &= \frac{\partial\left(\sum_{l=1}^{s^m} w_{i,l}^{m+1} a_l^m + b_i^{m+1}\right)}{\partial n_j^m} = w_{i,j}^{m+1}\frac{\partial a_j^m}{\partial n_j^m} \\ &= w_{i,j}^{m+1}\frac{\partial f^m\left(n_j^m\right)}{\partial n_j^m} = w_{i,j}^{m+1} f^m\left(n_j^m\right),\end{aligned} \tag{9.39}$$

όπου:

$$f^m\left(n_j^m\right) = \frac{\partial f^m\left(n_j^m\right)}{\partial n_j^m}. \tag{9.40}$$

Επομένως, ο Ιακωβιανός πίνακας μπορεί να γραφτεί ως:

$$\frac{\partial \vec{n}^{m+1}}{\partial \vec{n}^m} = \vec{w}^{m+1}\dot{f}^m\left(\vec{n}^m\right), \tag{9.41}$$

όπου:

$$\dot{f}^m\left(\vec{n}^m\right) = \begin{bmatrix} f^m\left(n_1^m\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f^m\left(n_2^m\right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f^m\left(n_{s^m}^m\right) \end{bmatrix}. \tag{9.42}$$

Μπορούμε έτσι τώρα να πάρουμε την αναδρομική σχέση ευαισθησίας χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας σε μορφή πίνακα:

$$\vec{s}_m = \frac{\partial \hat{F}}{\partial \vec{n}^m} = \left(\frac{\partial \vec{n}^{m+1}}{\partial \vec{n}^m}\right)^T \frac{\partial \hat{F}}{\partial \vec{n}^{m+1}} = \dot{f}^m\left(\vec{n}^m\right)\left(\vec{w}^{m+1}\right)^T \frac{\partial \hat{F}}{\partial \vec{n}^{m+1}} \tag{9.43}$$

Γίνεται λοιπόν πλέον φανερή η πηγή της ονομασίας αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης. Οι ευαισθησίες διαδίδονται κατά μήκος του δικτύου προς τα πίσω, από το τελευταίο δηλ. στρώμα, προς το πρώτο δικτυακό στρώμα:

$$\vec{s}^M \to \vec{s}^{M-1} \to \ldots \to \vec{s}^2 \to \vec{s}^1. \tag{9.44}$$

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειώσουμε ότι ο αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης χρησιμοποιεί την ίδια προσεγγιστική τεχνική απότομης πτώσης με τον αλγόριθμο Μέσων Ελαχίστων Τετραγώνων. Η μόνη επιπλοκή, είναι ότι προκειμένου να υπολογιστούν οι κλίσεις, πρέπει πρώτα να οπισθοδιαδόσουμε τις ευαισθησίες. Το καλό με την οπισθοδιάδοση αυτή είναι ότι έχουμε μια αποδοτική εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας.

Μας μένει λοιπόν ένα ακόμα βήμα, για να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό του αλγορίθμου. Χρειαζόμαστε το αρχικό σημείο $\vec{s}_m$, για την αναδρομική σχέση 9.43. Αυτό λαμβάνεται από το τελευταίο στρώμα:

$$s_i^M = \frac{\partial \hat{F}}{\partial n_i^M} = \frac{\partial \left(\vec{t}-\vec{a}\right)^T \left(\vec{t}-\vec{a}\right)}{\partial n_i^M} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{s^M} \left(t_j - a_j\right)^2}{\partial n_i^M} = -2\left(t_i - a_i\right)\frac{\partial a_i}{\partial n_i^M}. \tag{9.45}$$

Καθώς τώρα:

$$\frac{\partial a_i}{\partial n_i^M} = \frac{\partial a_i^M}{\partial n_i^M} = \frac{\partial f^M\left(n_i^M\right)}{\partial n_i^M} = f^M\left(n_i^M\right), \tag{9.46}$$

μπορούμε τελικά να γράψουμε:

$$\vec{s}^M = -2\left(\vec{t}-\vec{a}\right)\dot{\vec{f}}^M\left(\vec{n}^M\right). \tag{9.47}$$

Ανακεφαλαίωση του Αλγορίθμου

Ας συνοψίσουμε λοιπόν τα όσα συζητήσαμε για τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης. Το πρώτο βήμα είναι η διάδοση της εισόδου προς τα εμπρός κατά μήκος του δικτύου:

$$\vec{a}^0 = \vec{p}, \tag{9.48}$$

$$\vec{a}^{m+1} = \vec{f}^{m+1}\left(\vec{w}^{m+1}\vec{a}^m + \vec{b}^{m+1}\right), \tag{9.49}$$

$$a = a^M. \tag{9.50}$$

Το επόμενο βήμα είναι η διάδοση των ευαισθησιών προς τα πίσω:

$$\vec{s}^M = -2\left(\vec{t}-\vec{a}\right)\dot{\vec{f}}^M\left(\vec{n}^M\right), \tag{9.51}$$

$$\vec{s}_m = \dot{\vec{f}}^m\left(\vec{n}^m\right)\left(\vec{w}^{m+1}\right)^T\vec{s}^{m+1}. \tag{9.52}$$

Τελικά, τα συναπτικά βάρη και τα βάρη των κατωφλιών ενεργοποίησης ενημερώνονται σύμφωνα με τον προσεγγιστικό κανόνα της πιο απότομης πτώσης:

$$\vec{w}_{k+1}^m = \vec{w}_k^m - \eta\vec{s}^m\left(\vec{a}^{m-1}\right)^T, \tag{9.53}$$

$$\vec{b}_{k+1}^m = \vec{b}_k^m - \eta\vec{s}^m. \tag{9.54}$$

Προκειμένου λοιπόν ο αλγόριθμος να μπορεί να υπολογίσει τις μερικές παραγώγους, θα πρέπει οι συναρτήσεις ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων να πληρούν ορισμένα τυπικά κριτήρια. Σε γενικές γραμμές η ύπαρξη της παραγώγου είναι η βασική απαίτηση την οποία θα πρέπει να πληρεί μια συνάρτηση για να αποτελεί συνάρτηση ενεργοποίησης αφανούς στρώματος. Πιο συγκεκριμένα, μια συνάρτηση θα πρέπει να είναι συνεχής, διαφορίσιμη και μη−γραμμική.

9.3.3 Ο Παράγοντας Ορμής

Διάφορες παραλλαγές του αλγορίθμου οπισθοδιάδοσης έχουν πραγματοποιηθεί, προκειμένου να βελτιωθεί η απόδοσή του. Μια από τις πιο δημοφιλής είναι η μέθοδος της πιο απότομης πτώσης με όρο ορμής, η οποία έχει το πλεονέκτημα της ταχύτερης σύγκλισης. Ο όρος ορμής επιτρέπει σε ένα δί-κτυο να αποκρίνεται όχι μόνο με βάση την τοπική κλίση, αλλά και τις πρόσφατες τάσεις της επιφάνειας των αποκλίσεων. Δρώντας ως φίλτρο "*χαμηλής επιδεκτικότητας*", ο όρος ορμής επιτρέπει στο δίκτυο να αγνοεί μικρές ιδιομορφίες της επιφάνειας αποκλίσεων. Χωρίς ορμή, ένα δίκτυο μπορεί να ολισθαίνει γύρω από ένα *minimum*.

Ο όρος ορμής λοιπόν, μπορεί να ενσωματωθεί στον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης κάνοντας τις αλλαγές των βαρών ίσες με το άθροισμα ενός κλάσματος των τελευταίων βαρών και των νέων βαρών που προτείνονται από τον κανό-να οπισθοδιάδοσης. Αυτή η επίδραση στην τελευταία αλλαγή των βαρών, επιτυγχάνεται μέσω μια σταθερής παραμέτρου ορμής ζ:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k - \eta \vec{s}\,(\vec{a})^T + \zeta \Delta \vec{w}_k, \tag{9.55}$$

η οποία μπορεί να παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Όταν ο όρος ορμής είναι μηδενικός, η ενημέρωση των βαρών βασίζεται αποκλειστικά στην κλίση. Όταν η σταθερά ορμής από την άλλη παίρνει την τιμή 1, η νέα αλλαγή των βαρών εξισώνεται με την προηγούμενη αλλαγή και η κλίση απλά αγνοείται. Αν ο δείκτης απόδοσης σε κάποια εποχή, υπερβαίνει τον δείκτη της προηγούμενης εποχής κατά τουλάχιστον έναν προκαθορισμένο παράγοντα (τυπικά 1.04), τα νέα βάρη παραβλέπονται και ο όρος ορμής μηδενίζεται.

9.3.4 Μεταβλητή Παράμετρος Ρυθμού Εκπαίδευσης

Με την κλασική μέθοδο της πιο απότομης πτώσης, η παράμετρος του ρυθμού εκπαίδευσης παραμένει σταθερή καθ' όλη τη διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Η απόδοση του αλγορίθμου όμως, είναι πολύ ευαίσθητη στην κατάλληλη ρύθμιση της παραμέτρου αυτής. Αν η παράμετρος είναι μεγάλη, ο αλγόριθμος μπορεί να ταλαντώνεται και να γίνει ασταθής. Αν από την άλλη, είναι πολύ μικρή, η διαδικασία σύγκλισης θα είναι χρονοβόρα. Δεν είναι λοιπόν πρακτικό να καθορίσουμε την βέλτιστη ρύθμιση της παραμέτρου του ρυθμού εκπαίδευσης εκ των προτέρων, καθώς στην πραγματικότητα, η βέλτιστη τιμή μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της εκπαιδευτικής διαδικασίας, καθώς ο αλγόριθμος κινείται κατά μήκος της επιφάνειας των αποκλίσεων.

Έτσι, η απόδοση του αλγόριθμου μπορεί να βελτιωθεί, αν επιτρέψουμε στην παράμετρο ρυθμού εκπαίδευσης να μεταβάλλεται κατά την εκπαίδευση

του δικτύου. Μια μεταβλητή λοιπόν παράμετρος, θα προσπαθεί να κρατήσει το βήμα εκπαίδευσης, όσο το δυνατόν μεγαλύτερο, αποφεύγοντας παράλληλα την αστάθεια της διαδικασίας. Η παράμετρος ρυθμού εκπαίδευσης γίνεται επομένως ανταποδοτική με την πολυπλοκότητα της τοπικής επιφάνειας αποκλίσεων.

Μια μεταβλητή λοιπόν παράμετρος του ρυθμού εκπαίδευσης απαιτεί κάποιες αλλαγές στην εκπαιδευτική διαδικασία σε σχέση με τον απλό αλγόριθμο οπι-σθοδιάδοσης. Πρώτον, υπολογίζονται η αρχική απόκριση του δικτύου και οι αντίστοιχες αποκλίσεις. Σε κάθε **εποχή** (επανάληψη του αλγορίθμου δηλ.), υπολογίζονται τα νέα βάρη με την βοήθεια της τρέχουσας τιμής της παραμέτρου. Οι νέες έξοδοι και οι αποκλίσεις υπολογίζονται στη συνέχεια εκ νέου.

Αν οι νέες αποκλίσεις υπερβαίνουν την προηγούμενη τιμή κατά έναν προκαθορισμένο παράγοντα (τυπικά 1.04), τα νέα βάρη απορρίπτονται. Επιπλέον, η παράμετρος μικραίνει (συνήθως πολλαπλασιάζεται με την τιμή 0.7) . Διαφορετικά, τα νέα βάρη κρατούνται. Αν από την άλλη τα νέα βάρη είναι μικρότερα από την προηγούμενο υπολογισμό τους, η παράμετρος ρυθμού εκπαίδευσης αυξάνεται (συνήθως πολλαπλασιάζεται με την τιμή 1.05). Αυτή η διαδικασία λοιπόν αυξάνει την παράμετρο ρυθμού εκπαίδευσης, αλλά μόνο στο μέτρο που το δίκτυο μπορεί να εκπαιδεύεται χωρίς οι αποκλίσεις να οξύνονται.

9.4 Μέθοδοι Συζυγούς Κλίσης

Ο βασικός αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης προσαρμόζει τις παραμέτρους κατά την κατεύθυνση της πιο απότομης πτώσης (αρνητική κατεύθυνση της κλί-σης). Αυτή είναι η κατεύθυνση κατά την οποία δείκτης απόδοσης ελαττώνεται ταχύτερα. Προκύπτει ωστόσο το εξής πρόβλημα: παρόλο που η συνάρτηση κόστους μειώνεται πιο γρήγορα προς την κατεύθυνση αυτή, δεν έχουμε απαραίτητα και την πιο γρήγορη σύγκλιση. Κατά τη **μέθοδο συζυγούς κλίσης** λοιπόν, πραγματοποιείται μια αναζήτηση συζυγών κατευθύνσεων, η οποία οδηγεί εν γένει σε ταχύτερη σύγκλιση σε σχέση με τις κατευθύνσεις τις πιο απότομης πτώσης.

Στους περισσότερους από τους αλγόριθμους που παρουσιάσαμε έως τώρα, χρησιμοποιήσαμε την σταθερά ρυθμού εκπαίδευσης για να καθορίσουμε το μέγεθος της προσαρμογής των παραμέτρων (το μήκος του βήματος). Στους περισσότερους από τους αλγόριθμους συζυγούς κλίσης ωστόσο, το μήκος του βήματος προσαρμόζεται σε κάθε επανάληψη. Η αναζήτηση γίνεται προς την κατεύθυνση της συζυγούς κλίσης για τον προσδιορισμό του μήκους αυτού, το οποίο ελαχιστοποιεί την συνάρτηση κόστους κατά μήκος αυτής της γραμμής.

Έτσι, όλοι οι αλγόριθμοι συζυγούς κλίσης ξεκινούν με την αναζήτηση της

κατεύθυνσης της πιο απότομης πτώσης από την πρώτη επανάληψη.

$$\vec{p}_0 = -\vec{g}_0 \tag{9.56}$$

όπου $\vec{p}_0$ η πρώτη κατεύθυνση αναζήτησης και:

$$\vec{g}_k \equiv \nabla F(\vec{w})|_{\vec{w}=\vec{w}_k}, \tag{9.57}$$

η κλίση. Μια γραμμική αναζήτηση πραγματοποιείται τότε για τον προσδιορισμό της βέλτιστης απόστασης για μετακίνηση κατά μήκος της τρέχουσας κατεύθυνσης αναζήτησης:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k + \alpha_k \vec{p}_k, \tag{9.58}$$

όπου α_k η σταθερά ρυθμού εκπαίδευσης. Η επόμενη κατεύθυνση αναζήτησης προσδιορίζεται έτσι ώστε να είναι συζυγής στις προηγούμενες κατευθύνσεις αναζήτησης. Η γενική διαδικασία καθορισμού της νέας αυτής κατεύθυνσης είναι ο συνδυασμός της νέας κατεύθυνσης της πιο απότομης πτώσης με την προηγούμενη κατεύθυνση αναζήτησης:

$$\vec{p}_k = -\vec{g}_k + \beta_k \vec{p}_{k-1}. \tag{9.59}$$

Οι διάφορες εκδοχές της μεθόδου συζυγούς κλίσης διακρίνονται από τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η σταθερά β_k.

9.4.1 Προσαρμογή $Fletcher - Reeves$

Σύμφωνα με την προσαρμογή $Fletcher - Reeves$ [1], η σταθερά β_k θα δίνεται από την έκφραση:

$$\beta_k = \frac{\vec{g}_k^T \vec{g}_k}{\vec{g}_{k-1}^T \vec{g}_{k-1}}. \tag{9.60}$$

Αυτός είναι ο λόγος της τετραγωνικής νόρμας της τρέχουσας κλίσης προς την τετραγωνική νόρμα της προηγούμενης κλίσης. Μια πιο αναλυτική συζήτηση του αλγορίθμου $Fletcher - Reeves$ μπορεί κανείς να βρει στην αναφορά [74].

9.4.2 Προσαρμογή $Polak - Ribiére$

Μια δεύτερη εκδοχή του αλγόριθμου συζυγούς κλίσης προτάθηκε από τους $Polak$ και $Ribiére$. Όπως και στην προσαρμογή $Fletcher - Reeves$, η κατεύθυνση αναζήτησης σε κάθε επανάληψη θα καθορίζεται από την σταθερά β_k:

$$\beta_k = \frac{\Delta \vec{g}_{k-1}^T \vec{g}_k}{\vec{g}_{k-1}^T \vec{g}_{k-1}}. \tag{9.61}$$

Αυτό είναι το εσωτερικό γινόμενο της προηγούμενης μεταβολής της κλίσης με την τρέχουσα κλίση, διαιρεμένο με την τετραγωνική νόρμα της προηγούμενης κλίσης. Περαιτέρω ανάλυση της προσαρμογής $Polak-Ribiére$ υπάρχει επίσης στην αναφορά [74].

9.4.3 Επανεκκίνηση $Powell-Beale$

Σε όλους τους αλγόριθμους συζυγούς κλίσης, η κατεύθυνση αναζήτη-σης θα ρυθμίζεται περιοδικά εκ νέου, αντίθετα της κλίσης. Το βασικό σημείο επανεκκίνησης απαντάται όταν ο αριθμός των επαναλήψεων είναι ίσος προς τον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων του δικτύου. Υπάρχουν ωστόσο διάφορες μέθοδοι επανεκκίνησης που μπορούν να βελτιώσουν την αποδοτικότητα της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Μια τέτοια μέθοδος προτάθηκε από τον $Powell$ [59] και βασίζεται σε μια προγενέστερη εκδοχή του $Beale$ [24]. Θα αναφερόμαστε σε αυτήν με την σύντμηση $CGPB$. Σύμφωνα με την τεχνική $CGPB$ λοιπόν, το σημείο επανεκκίνησης προσδιορίζεται όταν έχει απομείνει πολύ μικρή ορθογωνιότητα μεταξύ της παρούσας κλίσης και της προηγούμενης κλίσης. Αυτό ελέγχεται μέσω της ακόλουθης ανισότητας:

$$\left|\vec{g}_{k-1}^{T}\vec{g}_k\right| \geq 0.2\left\|\vec{g}_k\right\|^2. \tag{9.62}$$

Αν λοιπόν αυτό το κριτήριο ικανοποιείται, η κατεύθυνση αναζήτησης επακαθορίζεται αντίθετα της κλίσης.

9.5 Η Μέθοδος του $Newton$

Η μέθοδος του $Newton$ είναι ένας εναλλακτικός αλγόριθμος των μεθόδων συζυγούς κλίσης για την επίτευξη ταχύτερης βελτιστοποίησης. Η παραγώγιση της μεθόδου της πιο απότομης πτώσης βασίζεται στο πρωτοβάθμιο ανάπτυγμα σε σειρά $Taylor$. Η μέθοδος του $Newton$ βασίζεται στο δευτεροβάθμιο ανάπτυγμα $Taylor$:

$$F\left(\vec{w}_{k+1}\right) = F\left(\vec{w}_k + \Delta\vec{w}_k\right) \approx F\left(\vec{w}_k\right) + \vec{g}_k^{T}\Delta\vec{w}_k + \frac{1}{2}\Delta\vec{w}_k^{T}H_k\Delta\vec{w}_k, \tag{9.63}$$

όπου:

$$\vec{H}_k \equiv \nabla^2 F\left(\vec{w}\right)\big|_{\vec{w}=\vec{w}_k}, \tag{9.64}$$

είναι ο $Hessian$ πίνακας (δεύτεροι παράγωγοι) του δείκτη απόδοσης $F\left(\vec{w}\right)$ των τρεχόντων τιμών των ελεύθερων παραμέτρων $\vec{w}$ του δικτύου και:

$$\vec{g}_k \equiv \nabla F\left(\vec{w}\right)\big|_{\vec{w}=\vec{w}_k} \tag{9.65}$$

η κλίση. Το ζητούμενο της μεθόδου αυτής είναι ο εντοπισμός του *minimum* της συνάρτησης κόστους (ή πιο μαθηματικοποιημένα, του στατικού σημείου αυτής της δευτεροβάθμιας προσέγγισης) $F(\vec{w})$. Αν υπολογίσουμε την κλίση αυτής της δευτεροβάθμιας συνάρτησης ως προς το $\Delta\vec{w}_k$ και την εξισώσουμε με το μηδέν θα πάρουμε:

$$\vec{g}_k + \vec{H}_k \Delta\vec{w}_k = 0. \tag{9.66}$$

Το βασικό βήμα της μεθόδου του *Newton* τότε, ορίζεται ως:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k - \vec{H}_k^{-1}\vec{g}_k. \tag{9.67}$$

9.6 Αλγόριθμοι Τύπου *Newton*

Η μέθοδος του *Newton* συνήθως συγκλίνει ταχύτερα από τις μεθόδους συζυγούς κλίσης. Δυστυχώς όμως είναι αρκετά περίπλοκος και ασύμφορος ο υπολογισμός του *Hessian* πίνακα για δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας. Έ-τσι έχει δημιουργηθεί μια τάξη αλγορίθμων, η οποία βασίζεται στην μέθοδο *Newton* και δεν απαιτεί υπολογισμούς δευτέρων παραγώγων. Αυτοί οι αλγόριθμοι καλούνται **μέθοδοι τύπου** *Newton*. Ενημερώνουν έναν προσεγγιστικό *Hessian* πίνακα σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου. Η ενημέρωση υπολογίζεται ως συνάρτηση της κλίσης.

9.6.1 Η Μέθοδος *BFGS*

Η πιο γνωστή μέθοδος τύπου *Newton* είναι η προσέγγιση των *Broyden*, *Fletcher*, *Goldfarb*, και *Shanno* (*BFGS*) [45]:

$$\vec{G}_{k+1} = \vec{G}_k + \frac{\vec{p}\vec{p}^T}{\vec{p}^T\vec{v}} - \frac{\left(\vec{G}_k\vec{v}\right)\vec{v}^T\vec{G}_k}{\vec{v}^T\vec{G}_k\vec{v}} + \left(\vec{v}^T\vec{G}'_k\vec{v}\right)\vec{u}\vec{u}^T, \tag{9.68}$$

όπου:

$$\vec{p} = \vec{w}_{k+1} - \vec{w}_k, \tag{9.69}$$

$$\vec{v} = \vec{g}_{k+1} - \vec{g}_k, \tag{9.70}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{p}}{\vec{p}^T\vec{v}} - \frac{\vec{G}_k\vec{v}}{\vec{v}^T\vec{G}_k.\vec{v}} \tag{9.71}$$

Αν ξεκινώντας τη διαδικασία χρησιμοποιήσουμε τον ταυτοτικό πίνακα, είναι σαν να παίρνουμε το πρώτο βήμα κατά την κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης. Έτσι σε κάθε βήμα του αλγορίθμου, η κατεύθυνση $-\vec{G}\vec{g}$ είναι εγγυημένα μια

κατεύθυνση καθόδου, καθώς ο πίνακας $\vec{G}$ είναι θετικά ορισμένος. Η ενημέρωση των ελεύθερων παραμέτρων, σύμφωνα με την μέθοδο αυτή λοιπόν, θα δίνεται από την έκφραση:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k + \alpha_k \vec{G}_k^{-1} \vec{g}_k, \tag{9.72}$$

όπου η παράμετρος α_k υπολογίζεται μέσω γραμμικής ελαχιστοποίησης. Αυτός ο αλγόριθμος απαιτεί περισσότερο αποθηκευτικό χώρο και υπολογιστική ισχύ από τις μεθόδους συζυγούς κλίσης, αλλά, εν γένει, συγκλίνει σε λιγότερες επαναλήψεις.

9.7 Σύγκριση Μεταξύ Αλγορίθμων Τύπου *Newton* και Μεθόδων Συζυγούς Κλίσης

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου τύπου $Newton$ έναντι στη μέθοδο συζυγούς κλίσης είναι ότι η γραμμική αναζήτηση δεν είναι απαραίτητο να πραγματοποιηθεί με τόσο μεγάλη ακρίβεια, καθώς δεν αποτελεί σημα-ντικό παράγοντα του αλγορίθμου. Για τις συζυγείς κλίσεις όμως, η γραμμική ελαχιστοποίηση πρέπει να πραγματοποιείται με μεγάλη ακρίβεια, για να διασφαλιστεί ότι το σύστημα των συζυγών κατευθύνσεων και των ορθογώνιων κλίσεων είναι σωστά στοιχειοθετημένο.

Ένα πιθανό μειονέκτημα της μεθόδου τύπου $Newton$ είναι ότι απαιτεί την αποθήκευση και την ενημέρωση του πίνακα $\vec{G}$ διαστάσεων $N \times N$. Για μικρά δίκτυα αυτό είναι ήσσονος σημασίας, αλλά για δίκτυα με περισσότερες από λίγες εκατοντάδες παραμέτρους, μπορεί να οδηγήσει σε απαγορευτικές απαιτήσεις μνήμης. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τεχνικές όπως οι μέθοδοι συζυγούς κλίσης, έχουν σημαντικό πλεονέκτημα.

9.8 Ο Αλγόριθμος *Levenberg − Marquardt*

Ο αλγόριθμος $Levenberg - Marquardt$ (LM) [61], [17] (σελ. 290), [62] (σελ. 12-20), είναι μια παραλλαγή της μεθόδου του $Newton$ που σχεδιάστηκε για να ελαχιστοποιεί συναρτήσεις που είναι αθροίσματα τετραγώνων άλλων μη−γραμμικών συναρτήσεων. Αυτή η μέθοδος βρίσκει πρακτική εφαρμογή στην περίπτωση της εκπαίδευσης των νευρωνικών δικτύων με εξαιρετικά καλά αποτελέσματα, όταν ο δείκτης απόδοσης είναι η μέση−τετραγωνική−απόκλιση.

9.8.1 Η Μέθοδος $Gauss - Newton$

Αν στα πλαίσια της μεθόδου του $Newton$, θεωρήσουμε τη συνάρτηση κόστους $F(\vec{w})$ ως άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων:

$$F(\vec{w}) = \sum_{i=1}^{N} e_i^2(\vec{w}) = \vec{e}^T(\vec{w})\,\vec{e}(\vec{w}), \tag{9.73}$$

τότε το j στοιχείο της κλίσης θα είναι:

$$[\nabla F(\vec{w})]_j = \frac{\partial F(\vec{w})}{\partial w_j} = 2\sum_{i=1}^{N} e_i^2(\vec{w})\frac{\partial e_i(\vec{w})}{\partial w_j}. \tag{9.74}$$

Η κλίση επομένως μπορεί να γραφτεί υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$\nabla F(\vec{w}) = 2\vec{J}(\vec{w})\,\vec{e}(\vec{w}), \tag{9.75}$$

όπου:

$$J(\vec{w}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial e_1(\vec{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial e_1(\vec{w})}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial e_1(\vec{w})}{\partial w_n} \\ \frac{\partial e_2(\vec{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial e_2(\vec{w})}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial e_2(\vec{w})}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial e_N(\vec{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial e_N(\vec{w})}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial e_N(\vec{w})}{\partial w_n} \end{bmatrix}. \tag{9.76}$$

είναι ο **Ιακωβιανός πίνακας**.

Στη συνέχεια λοιπόν θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τον $Hessian$ πίνακα. Το k,j στοιχείο του $Hessian$ πίνακα θα είναι:

$$\left[\nabla^2 F(\vec{w})\right]_{k,j} = \frac{\partial^2 F(\vec{w})}{\partial w_k \partial w_j} = 2\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial e_i(\vec{w})}{\partial w_k}\frac{\partial e_i(\vec{w})}{\partial w_j} + e_i(\vec{w})\frac{\partial^2 e_i(\vec{w})}{\partial w_k \partial w_j}\right\}. \tag{9.77}$$

Ο $Hessian$ πίνακας επομένως μπορεί να εκφραστεί υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$\nabla^2 F(\vec{w}) = 2\vec{J}^T(\vec{w})\,\vec{J}(\vec{w}) + 2\vec{S}(\vec{w}), \tag{9.78}$$

όπου:

$$S(\vec{w}) = \sum_{i=1}^{N} e_i(\vec{w})\,\nabla^2 e_i(\vec{w}). \tag{9.79}$$

Αν θεωρήσουμε ότι το $S(\vec{w})$ είναι μικρό, μπορούμε να προσεγγίσουμε τον $Hessian$ πίνακα ως:

$$\nabla^2 F(\vec{w}) \cong 2\vec{J}^T(\vec{w})\,\vec{J}(\vec{w}). \tag{9.80}$$

Η τελευταία αυτή σχέση είναι γνωστή ως **προσέγγιση** $Gauss-Newton$. Αντικαθιστώντας λοιπόν τις εξ. (9.80) και (9.75) στην εξ. (9.67) παίρνουμε την μέθοδο $Gauss-Newton$:

$$\begin{aligned}\vec{w}_{k+1} &= \vec{w}_k - \left[2\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{J}(\vec{w}_k)\right]^{-1} 2\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{e}(\vec{w}_k) \\ &= \vec{w}_k - \left[\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{J}(\vec{w}_k)\right]^{-1} \vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{e}(\vec{w}_k)\,. \end{aligned} \tag{9.81}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι το πλεονέκτημα της μεθόδου $Gauss-Newton$ έναντι της απλής μεθόδου του $Newton$ είναι ότι δεν προϋποθέτει υπολογισμούς δευτέρων παραγώγων.

9.8.2 Ο Βασικός Αλγόριθμος

Ένα πρόβλημα με την μέθοδο $Gauss-Newton$ είναι ότι ο πίνακας $\vec{H} = \vec{J}^T\vec{J}$ μπορεί να μην είναι αντιστρέψιμος. Αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί χρησιμοποιώντας την ακόλουθη τροποποίηση στον προσεγγιστικό $Hessian$ πίνακα:

$$\vec{G} = \vec{H} + \mu\vec{I}. \tag{9.82}$$

Για να καταλάβουμε πως αυτός ο πίνακας μπορεί να γίνει αντιστρέψιμος, υποθέτουμε ότι οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του $\vec{H}$ είναι $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$ και $\{\vec{z}_1,\vec{z}_2,\ldots,\vec{z}_n\}$. Τότε:

$$\vec{G}\vec{z}_i = \left[\vec{H}+\mu\vec{I}\right]\vec{z}_i = \vec{H}\vec{z}_i + \mu\vec{z}_i = \lambda_i\vec{z}_i + \mu\vec{z}_i = (\lambda_i+\mu)\,\vec{z}_i. \tag{9.83}$$

Επομένως τα ιδιοδιανύσματα του $\vec{G}$ είναι ίδια με τα ιδιοδιανύσματα του $\vec{H}$και οι ιδιοτιμές του $\vec{G}$ είναι $(\lambda_i+\mu)$. Ο πίνακας $\vec{G}$ μπορεί να γίνει θετικά ορισμένος αυξάνοντας το μ όσο $(\lambda_i+\mu)>0$ για όλα τα i και επομένως ο πίνακας θα είναι αντιστρέψιμος.

Η εξ. (9.82) οδηγεί λοιπόν στον αλγόριθμο $Levenberg-Marquardt$:

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{w}_k - \left[\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{J}(\vec{w}_k) + \mu_k\vec{I}\right]^{-1}\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{e}(\vec{w}_k)\,, \tag{9.84}$$

ή

$$\vec{\Delta}w_k = -\left[\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{J}(\vec{w}_k) + \mu_k\vec{I}\right]^{-1}\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{e}(\vec{w}_k)\,. \tag{9.85}$$

Αυτός ο αλγόριθμος παρουσιάζει ένα εξαιρετικά χρήσιμο χαρακτηριστικό: όσο το μ_k αυξάνει προσεγγίζει την μέθοδο της πιο απότομης πτώσης με μικρό ρυθμό εκπαίδευσης:

$$\vec{w}_{k+1} \cong \vec{w}_k - \frac{1}{\mu_k}\vec{J}^T(\vec{w}_k)\,\vec{e}(\vec{w}_k) = \vec{w}_k - \frac{1}{2\mu_k}\nabla F(\vec{w}_k)\,, \tag{9.86}$$

για μεγάλα μ_k, ενώ όσο το μ_k τείνει στο μηδέν ο αλγόριθμος μετατρέπεται σε $Gauss - Newton$.

Ο αλγόριθμος ξεκινά με κάποια μικρή τιμή του μ_k (π.χ. $\mu_k = 0.01$). Αν ένα βήμα δεν οδηγεί σε μικρότερη τιμή της $F(\vec{w})$, τότε το βήμα αυτό επαναλαμβάνεται με το μ_k πολλαπλασιασμένο επί έναν παράγοντα $\theta > 1$ (π.χ. $\theta = 10$). Εν τέλει η $F(\vec{w})$ θα πρέπει να μικραίνει, καθώς θα προχωράμε κατά ένα μικρό βήμα προς την κατεύθυνση της πιο απότομης πτώσης. Αν ένα βήμα οδηγεί σε μικρότερη τιμή της $F(\vec{w})$, τότε το μ_k θα διαιρείται με το θ για το επόμενο βήμα, έτσι ώστε ο αλγόριθμος να προσεγγίζει την μέθοδο $Gauss - Newton$, η οποία θα παρέχει ταχύτερη σύγκλιση. Έτσι ο αλγόριθμος αυτός παρέχει έναν επιτυχημένο συνδυασμό μεταξύ της ταχύτητας της μεθόδου του $Newton$ και την εγγυημένη σύγκλιση της μεθόδου της πιο απότομης πτώσης.

9.8.3 Εφαρμογή του Αλγορίθμου σε Δίκτυο Πολλών Στρωμάτων

Θα δούμε στην παράγραφο αυτή πως μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο $Levenberg - Marquardt$ στο πρόβλημα της εκπαίδευσης ενός δικτύου πολλών στρωμάτων. Ως δείκτης απόδοσης του δικτύου θεωρείται η μέση τετραγωνική απόκλιση. Αν κάθε στόχος συμβαίνει με την ίδια πιθανότητα, η μέση τετραγωνική απόκλιση θα είναι ανάλογη του αθροίσματος των τετραγωνικών αποκλίσεων των Q στόχων του εκπαιδευτικού σετ:

$$F(\vec{w}) = \sum_{q=1}^{Q} \left(\vec{t}_q - \vec{\alpha}_q\right)^T \left(\vec{t}_q - \vec{\alpha}_q\right) = \sum_{q=1}^{Q} \vec{e}_q^T \vec{e}_q = \sum_{q=1}^{Q} \sum_{j=1}^{S^M} (e_{j,q})^2 = \sum_{i=1}^{N} (e_i)^2,$$

όπου $e_{j,q}$ είναι το j στοιχείο της απόκλισης του q ζεύγους εισόδου\στόχου.

9.8.4 Υπολογισμός του Ιακωβιανού Πίνακα

Το κλειδί στον αλγόριθμο $Levenberg - Marquardt$ είναι ο υπολογι-σμός του Ιακωβιανού πίνακα. Για να πραγματοποιήσουμε αυτόν τον υπολογισμό, θα χρησιμοποιήσουμε μια παραλλαγή του αλγόριθμου οπισδοδιάδοσης. Στη βασική προσέγγιση οπισθοδιάδοσης, υπολογίζουμε τις παραγώγους των τετραγωνικών αποκλίσεων ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους του δικτύου. Για να κατασκευάσουμε τον Ιακωβιανό πίνακα όμως, πρέπει να υπολογίσουμε τις παραγώγους των αποκλίσεων και όχι τις παραγώγους των τετραγώνων των αποκλίσεων.

Είναι απλούστερο εννοιολογικά να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο οπισθοδιάδοσης για να υπολογίσουμε τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα. Δυστυχώς όμως, παρόλο που η βασική ιδέα είναι απλή, η πρακτική της εφαρμογή απαιτεί

λεπτούς χειρισμούς. Προτού λοιπόν παρουσιάσουμε την διαδικασία υπολογισμού του Ιακωβιανού πίνακα, είναι σκόπιμο να δούμε πιο προσεκτικά την μορφή του. Σημειώστε ότι το άνυσμα της απόκλισης είναι:

$$\vec{e}^T = \left[\begin{array}{cccccccc} e_{1,1} & e_{2,1} & ... & e_{S^M,1} & e_{1,2} & ... & e_{S^M,Q} \end{array} \right], \tag{9.87}$$

και το άνυσμα των ελεύθερων παραμέτρων:

$$\vec{w}^T = \left[\begin{array}{cccccccccc} w^1_{1,1} & w^1_{1,2} & .. & w^1_{S^1,R} & b^1_1 & .. & b^1_{S^1} & w^2_{1,1} & .. & b^M_{S^M} \end{array} \right], \tag{9.88}$$

όπου: $N = Q \times S^M$ και $n = S^1 (R+1) + S^2 (S^1+1) + \cdots + S^M \left(S^{M-1}+1\right)$.

Αν επομένως αντικαταστήσουμε τις εξ. (9.87) και (9.88) στην εξ. (9.76), ο Ιακωβιανός πίνακας για δίκτυο πολλών στρωμάτων θα έχει την μορφή:

$$\vec{J}(\vec{w}) = \left[\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial e_{1,1}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{1,1}}{\partial w^1_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial e_{1,1}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{1,1}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \frac{\partial e_{2,1}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{2,1}}{\partial w^1_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial e_{2,1}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{2,1}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial w^1_{1,21}} & \cdots & \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{S^M,1}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \frac{\partial e_{1,2}}{\partial w^1_{1,1}} & \frac{\partial e_{1,2}}{\partial w^1_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial e_{1,2}}{\partial w^1_{S^1,R}} & \frac{\partial e_{1,2}}{\partial b^1_1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{array} \right]. \tag{9.89}$$

Επομένως οι όροι αυτού του πίνακα μπορούν να υπολογιστούν από μια απλή τροποποίηση του τυπικού αλγόριθμου οπισθοδιάδοσης.

Έτσι, ενώ ο βασικός αλγόριθμος απισθοδιάδοσης υπολογίζει όρους της μορφής:

$$\frac{\partial \hat{F}(\vec{w})}{\partial w_i} = \frac{\partial \vec{e}^T_q \vec{e}_q}{\partial w_i}, \tag{9.90}$$

για τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα, με βάση τον αλγόριθμο $Levenberg - Marquardt$, χρειάζεται να υπολογίσουμε όρους του τύπου:

$$\left[\vec{J}\right]_{h,l} = \frac{\partial e_h}{\partial w_i} = \frac{\partial e_{k,q}}{\partial w_i}. \tag{9.91}$$

Κεφάλαιο 10

Ειδικές Τεχνικές

10.1 Τεχνική Διατεκμηρίωσης

ΔΙΑΤΕΚΜΗΡΙΩΣΗ ΕΙΝΑΙ ΜΙΑ καλά καθιερωμένη στατιστική τεχνική για την έγκαιρη παύση της εκπαιδευτικής διαδικασίας, έτσι ώστε να αποφεύγονται τα ανεπιθύμητα φαινόμενα υπερπροσαρμογής. Η εφαρμογή της στην περίπτωση των νευρωνικών δικτύων είναι εξαιρετικά απλή. Βασίζεται στο διαχωρισμό των διαθέσιμων δεδομένων σε τρία υποσύνολα που θα τα αποκαλούμε σετ. Το πρώτο είναι το γνωστό μας *εκπαιδευτικό σετ* και χρησιμοποιείται για την πραγματοποίηση της εκπαιδευτικής διαδικασίας (π.χ. υπολογισμός των κλίσεων και ενημέρωση των παραμέτρων του δικτύου). Το δεύτερο καλείται *σετ τεκμηρίωσης* και χρησιμοποιείται για την αποτίμηση της απόδοσης του μοντέλου. Οι αποκλίσεις E_V του σετ τεκμηρίωσης παρακολουθούνται από το δίκτυο κατά την φάση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Όταν το δίκτυο τείνει να οδηγηθεί σε κατάσταση υπερπροσαρμογής, οι αποκλίσεις του σετ τεκμηρίωσης τυπικά θα οξύνονται. Αν αυτό συνεχίζει να συμβαίνει για κάποιον προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων, η εκπαιδευτική διαδικασία διακόπτεται και ανακαλούνται οι τιμές των παραμέτρων στο $minimum$ της E_D, ώστε να αποφεύγεται η υπερπροσαρμογή. Το τρίτο υποσύνολο τέλος ονομάζεται *δοκιμαστικό σετ*. Οι αποκλίσεις του δοκιμαστικού σετ δεν λαμβάνουν μέρος στην εκπαιδευτική διαδικασία. Χρησιμοποιούνται μόνο για να επαληθεύσουν την απόδοση της γενίκευσης του μοντέλου και για την σύγκριση διαφορετικών μοντέλων. Το βασικό μειονέκτημα ωστόσο της μεθόδου αυτής, είναι ότι η απόκριση του δικτύου στο τέλος της εκπαιδευτικής διαδικασίας δεν είναι αρκετά ομαλή.

10.2 Μπαϊεσιανή Εξομάλυνση

Μια πιο πρόσφατη εναλλακτική τεχνική, για την αποτροπή των φαινομένων υπερπροσαρμογής είναι η αποκαλούμενη *Μπαϊεσιανή Εξομάλυνση*. Τα πλεονεκτήματα της τεχνικής αυτής είναι δύο. Αφενός μεν είναι σε θέση να αποτρέπει φαινόμενα υπερπροσαρμογής αλλά και μη ομαλότητας της απόκρισης του δικτύου, αφετέρου δε, δεν απαιτεί την ύπαρξη του σετ τεκμηρίωσης, με αποτέλεσμα να παίρνουμε τελικά σημαντικά μεγαλύτερο εκπαιδευτικό σετ. Στη συνέχεια λοιπόν παραθέτουμε τις βασικές αρχές της τεχνικής αυτής.

Τυπικά η εκπαιδευτική διαδικασία στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγωνικών αποκλίσεων $F = E_D$. Στην περίπτωση της εξομάλυνσης ωστόσο, προστίθεται στην συνάρτηση κόστους μια επιπλέον εξάρτηση από το τρέχοντα βάρη του δικτύου. Αντικειμενικός σκοπός της εκπαίδευσης τώρα, γίνεται η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $F = \alpha E_D + \beta E_W$, όπου E_W είναι το άθροισμα των τετραγώνων των βαρών και α και β μεταβλητές *υπερπαράμετροι* της νέας αυτής συνάρτησης κόστους. Το μέγεθος αυτών των υπερπαραμέτρων καθορίζει την έμφαση της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Έτσι εάν $\alpha \ll \beta$, ο αλγόριθμος εκπαίδευσης θα οδηγήσει σε ελάττωση των απο-κλίσεων. Αν $\alpha \gg \beta$, η εκπαίδευση θα επικεντρωθεί στην μείωση των συναπτι-κών βαρών επιβαρύνοντας τις αποκλίσεις, έτσι ώστε τελικά να παράγεται από το δίκτυο ομαλότερη απόκριση.

Το κύριο πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε κατά την εφαρμογή της τεχνικής της εξομάλυνσης είναι ο προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών των δύο υπερπαραμέτρων α και β. Ο *David MacKay* [19] το 1992, πρότεινε την εφαρμογή του κανόνα του *Bayes* για την βελτιστοποίηση της τεχνικής της εξομάλυνσης. Στην συνέχεια θα δούμε τα βασικά αποτελέσματα των μελετών του, όπως αυτά εφαρμόζονται στην περίπτωση της εκπαίδευσης των νευρωνικών δικτύων.

Στο Μπαϊεσιανό πλαίσιο λοιπόν τα βάρη του δικτύου θεωρούνται τυχαίες μεταβλητές. Αφού παρθούν τα δεδομένα, η συνάρτηση πυκνότητας των βαρών μπορεί να ενημερώνεται σύμφωνα με τον κανόνα του *Bayes*:

$$P\left(\vec{w}\middle| D, \alpha, \beta, M\right) = \frac{P\left(D\middle| \vec{w}, \beta, M\right) P\left(\vec{w}\middle| \alpha, M\right)}{P\left(D\middle| \alpha, \beta, M\right)}, \tag{10.1}$$

όπου το D αντιπροσωπεύει το σετ δεδομένων, M είναι το συγκεκριμένο μοντέλο νευρωνικού δικτύου που χρησιμοποιείται και $\vec{w}$ είναι το άνυσμα των συναπτικών βαρών. Η $P\left(\vec{w}\middle| \alpha, M\right)$ είναι η αρχική πυκνότητα, η οποία αντιπροσωπεύει την προγενέστερη γνώση μας για τα βάρη πριν την εισαγωγή των δεδομένων. Η $P\left(D\middle| \vec{w}, \beta, M\right)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας και εκφράζει

την πιθανότητα να συμβούν τα δεδομένα για τα συγκεκριμένα βάρη $\vec{w}$. Τέλος η $P(D|\alpha,\beta,M)$ είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης που εγγυάται ότι η συνολική πιθανότητα θα είναι 1.

Αν θεωρήσουμε ότι ο θόρυβος στο σετ των δεδομένων εκμάθησης είναι Γκαουσιανός και ότι η αρχική κατανομή των βαρών είναι επίσης Γκαουσιανή, η πυκνότητες πιθανότητας μπορούν να γραφτούν στην μορφή:

$$P(D|\vec{w},\beta,M) = \frac{1}{Z_D(\beta)}\exp(-\beta E_D) \qquad (10.2\alpha')$$

$$P(\vec{w}|\alpha,M) = \frac{1}{Z_W(\alpha)}\exp(-\alpha E_W) \qquad (10.2\beta')$$

όπου $Z_D(\beta) = (\pi/\beta)^{n/2}$ και $Z_W(\alpha) = (\pi/\alpha)^{N/2}$. (n είναι ο αριθμός των προτύπων που χρησιμοποιούνται στην εκπαιδευτική διαδικασία και N ο συνολικός αριθμός των βαρών του δικτύου). Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες αυτές στον κανόνα του *Bayes* (εξ. (10.1» παίρνουμε:

$$P(\vec{w}|D,\alpha,\beta,M) = \frac{\frac{1}{Z_D(\beta)Z_W(\alpha)}\exp(-(\beta E_D + \alpha E_D))}{\Pi\alpha\varrho\alpha\gamma.\quad K\alpha\nu o\nu\iota\kappa.} \Rightarrow \qquad (10.3)$$

$$P(\vec{w}|D,\alpha,\beta,M) = \frac{1}{Z_F(\alpha,\beta)}\exp(-F(\vec{w})) \qquad (10.4)$$

Μέσα σε αυτά λοιπόν τα Μπαϊεσινά πλαίσια λοιπόν, τα βέλτιστα βάρη θα πρέπει να μεγιστοποιούν την *εκ των υστέρων* πιθανότητα $P(\vec{w}|D,\alpha,\beta,M)$. Μεγιστοποίηση της εκ των υστέρων πιθανότητας ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της εξομαλυμένης συνάρτησης κόστους $F = \alpha E_D + \beta E_W$.

10.2.1 Βελτιστοποίηση των Υπερπαραμέτρων Εξομάλυνσης

Θα εφαρμόσουμε λοιπόν στη συνέχεια τον κανόνα του *Bayes* για να βελτιστοποιήσουμε τις δύο παραμέτρους α και β της συνάρτησης κόστους. Εδώ θα έχουμε:

$$P(\alpha,\beta|D,M) = \frac{P(D|\alpha,\beta,M)\,P(\alpha,\beta|M)}{P(D|M)}. \qquad (10.5)$$

Θεωρώντας ομοιόμορφη αρχική πυκνότητα $P(\alpha,\beta|D,M)$ για τις υπερπαραμέτρους εξομάλυνσης α και β, η μεγιστοποίηση της *εκ των υστέρων* πιθανότητας πραγματοποιείται με την μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανότητας $P(D|\alpha,\beta,M)$. Σημειώστε ωστόσο, ότι αυτή η συνάρτηση πιθανότητας είναι ο παράγοντας κανονικοποίησης της εξ. (10.1). Καθώς όλες οι πιθανότη-τες

έχουν Γκαουσιανή μορφή, μπορούμε να γνωρίζουμε την μορφή της *εκ των υστέρων* πυκνότητας της εξ. (10.1). Αυτή φαίνεται στην εξ. (10.3). Μπορούμε λοιπόν να λύσουμε της εξ. (10.1) ως προς τον παράγοντα κανονι-κοποίησης:

$$P\left(D\left|\alpha,\beta,M\right.\right)=\frac{P\left(\alpha,\beta\left|D,M\right.\right)P\left(D\left|M\right.\right)}{P\left(\alpha,\beta\left|M\right.\right)}=$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{Z_D(\beta)}\exp\left(-\beta E_D\right)\right]\left[\frac{1}{Z_W(\alpha)}\exp\left(-\alpha E_W\right)\right]}{\frac{1}{Z_F(\alpha,\beta)}\exp\left(-F\left(w\right)\right)}=$$

$$=\frac{\frac{Z_F(\alpha,\beta)}{Z_D(\beta)Z_W(\alpha)}\exp\left(-\beta E_D-\alpha E_W\right)}{\exp\left(-F\left(w\right)\right)}=\frac{Z_F\left(\alpha,\beta\right)}{Z_D\left(\beta\right)Z_W\left(\alpha\right)}. \tag{10.6}$$

Τις σταθερές $Z_D\left(\beta\right)$ και $Z_W\left(\alpha\right)$ τις γνωρίζουμε από τις εξ. (10.2α′) και (10.2β′). Ο μοναδικός μας άγνωστος είναι η ποσότητα $Z_F\left(\alpha,\beta\right)$. Μπορούμε εντούτοις να τον προσδιορίσουμε με την βοήθεια του αναπτύγματος $Taylor$. Εφόσον η συνάρτηση κόστους είναι δευτέρου βαθμού σε κάποια μικρή περιοχή που περιβάλει ένα $minimum$, μπορούμε να αναπτύξουμε την $F(\vec{w})$ γύρω από αυτό το $minimum$ της *εκ των υστέρων* πυκνότητας $\vec{w}^{MP}$, όπου η κλίση είναι μηδέν. Λύνοντας ως προς τη σταθερά κανονικοποιήσης θα έχουμε:

$$Z_F\approx\left(2\pi\right)^{N/2}\left(det\left(\left(\vec{H}^{MP}\right)^{-1}\right)\right)^{1/2}exp\left(-F\left(\vec{w}^{MP}\right)\right), \tag{10.7}$$

όπου $\vec{H}=\beta\nabla^2E_D+\alpha\nabla^2E_W$ είναι ο $Hessian$ πίνακας της συνάρτησης κόστους. Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα αυτά στην εξ. (10.6), μπορούμε πλέον να την επιλύσουμε ως προς τις βέλτιστες υπερπαραμέτρους α και β για αυτό το $minimum$. Θα το κατορθώσουμε αυτό, αν θεωρήσουμε την παράγωγο ως προς κάθε λογάριθμο της εξ. (10.6) και την εξισώσουμε με το μηδέν. Παίρνουμε λοιπόν τα εξής αποτελέσματα:

$'opouhpos'otht a\gamma=N-2\alpha^{MP}tr\left(\vec{H}^{MP}\right)^{-1}$ ονομλαζεται *αριθμός ενεργών παραμέτρων* και N είνα

10.2.2 Προσέγγιση $Gauss-Newton$ στον $Hessian$ Πίνακα

Η Μπαϊεσιανή βελτιστοποίηση των παραμέτρων εξομάλυνσης απαιτεί τον υπολογισμό του $Hessian$ πίνακα της $F(\vec{w})$ στο $minimum$ $\vec{w}^{MP}$. Όπως όμως είδαμε στον αλγόριθμο $Levenberg-Marquardt$, μπορούμε να παρακάμψουμε τον απευθείας υπολογισμό του πίνακα $\vec{H}$ χρησιμοποιόντας την προσέγγιση $Gauss-Newton$. Στη συνέχεια λοιπόν παρατίθενται τα βήματα που απαιτούνται για την Μπαϊεσιανή βελτιστοποίηση των παραμέτρων εξομάλυνσης, με την χρήση της προσέγγιση $Gauss-Newton$ στον πίνακα $Hessian$.

1. Αρχικοποιούμε τα α και β και τις παραμέτρων του δικτύου. Θέτουμε αξιωματικά $\alpha = 0$ και $\beta = 1$ και χρησιμοποιούμε κάποια μέθοδο αρχικοποίησης για τις αρχικές τιμές των βαρών. Έπειτα λοιπόν από το πρώτο βήμα της εκπαιδευτικής διαδικασίας, οι παράμετροι της συνάρτησης κόστους θα ανακτηθούν από την αρχική ρύθμιση.

2. Εκτελούμε ένα βήμα από κάποιον αλγόριθμο εκπαίδευσης για να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση κόστους $F = \alpha E_D + \beta E_W$.

3. Υπολογίζουμε τον αριθμό των ενεργών παραμέτρων:

$$\gamma = N - 2\alpha^{MP} tr\left(\vec{H}^{MP}\right)^{-1},$$

κάνοντας χρήση της προσέγγισης $Gauss - Newton$ για τον $Hessian$ πίνακα: $\vec{H} = \nabla^2 F(\vec{w}) \approx 2\beta\vec{J}^T\vec{J} + 2\alpha\vec{I}_N$, όπου $\vec{J}$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας των αποκλίσεων του σετ των δεδομένων εκπαίδευσης [εξ. (9.89)].

4. Υπολογίζουμε τις νέες εκτιμήσεις των υπερπαραμέτρων της συνάρτησης κόστους: $\alpha^{MP} = \frac{\gamma}{2E_W(\vec{w}^{MP})}$ $\kappa\alpha\iota$ $\beta^{MP} = \frac{n-\gamma}{2E_D(\vec{w}^{MP})}$.

5. Επαναλαμβάνουμε τώρα τα βήματα 1 έως 3 μέχρι την σύγκλιση.

Έχουμε κατά νου, ότι κάθε επανεκτίμηση των υπερπαραμέτρων α και β μεταβάλλει την συνάρτηση κόστους. Επομένως το $minimum$ θα μετακινείται διαρκώς. Αν διατρέχοντας την επιφάνεια απόδοσης τείνει στο επόμενο $minimum$, τότε οι νέες εκτιμήσεις των υπερπαραμέτρων θα είναι περισσότερο ακριβείς. Τελικά, η ακρίβεια θα είναι αρκετά καλή ώστε η συνάρτηση κόστους να μη μεταβάλλεται αισθητά σε επακόλουθες επαναλήψεις. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνουμε τη σύγκλιση.

Σημειώνουμε εδώ, ότι όταν χρησιμοποιείται αυτή η προσέγγιση $Gauss - Newton$ στην τεχνική της Μπαϊεσιανής εξομάλυνσης (εν συντομία η μέθοδος αναφέρεται ως $GNBR$), πετυχαίνουμε τα καλύτερα αποτελέσματα μόνο αν τα δεδομένα εκπαίδευσης μεταφερθούν με κατάλληλο μετασχηματισμό στο διάστημα $[-1, 1]$ (ή σε κάποιο παρόμοιο διάστημα).

10.2.3 Προσδιορισμός της Βέλτιστης Αρχιτεκτονικής του Δικτύου με την Βοήθεια της Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης

Με το πέρας της εκπαιδευτικής διαδικασίας μπορούμε να πραγματοποιήσουμε κάποιους πρόχειρους ελέγχους για να προσδιορίσουμε την βέλτιστη αρχιτεκτονική του νευρωνικού δικτύου για συγκεκριμένο εκπαιδευτικό σετ.

Αρχικά, ελέγχουμε τον αριθμό των ενεργών παραμέτρων γ. Αν αυτός είναι πολύ κοντά στον αριθμό των συνολικών παραμέτρων του δικτύου N, τότε συμπεραίνουμε ότι το δίκτυο μάλλον δεν είναι επαρκώς μεγάλο για να αναπαραστήσει σωστά την συνάρτηση στόχου. Στην περίπτωση αυτή, απλά προσθέτουμε νευρώνες στα αφανή στρώματα και επαναλαμβάνουμε την εκπαιδευτική διαδικασία. Αν το μεγαλύτερο αυτό δίκτυο επιδεικνύει παρόμοια συμπεριφορά ως προς τον τελικό αριθμό των ενεργών παραμέτρων, τότε μπο-ρούμε να αποφανθούμε ότι το αρχικό δίκτυο είναι τελικά επαρκές. Διαφορετικά, ίσως απαιτούνται περισσότερα ενδιάμεσα αφανή στρώματα στο δίκτυο.

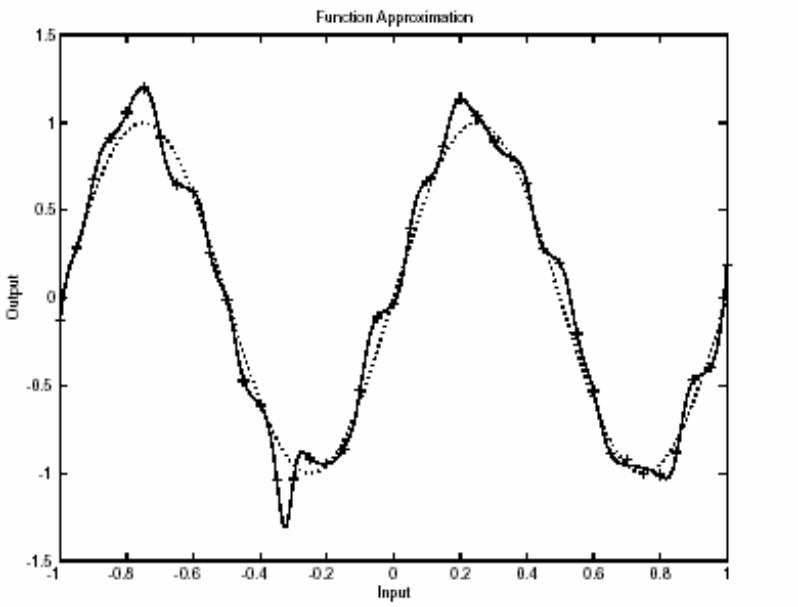
Ένας δεύτερος έλεγχος είναι αυτός της συνέπειας των αποτελεσμάτων. Αν το δίκτυο είναι επαρκώς μεγάλο, τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, ένα δεύτερο δίκτυο ίδιου αριθμού αφανών στρωμάτων, αλλά με περισσότερους νευρώνες σε αυτά, θα πρέπει να δίνει συγκρίσιμες τιμές για τα γ, E_D και E_W.

10.3 Εφαρμογή Διατεκμηρίωσης Και Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης

Μια απλή τεχνική αποφυγής της υπερπροσαρμογής και βελτίωσης της γενίκευσης είναι η χρήση ενός δικτύου που να είναι επαρκώς μεγάλο ώστε να παρέχει κάποια ικανοποιητική προσέγγιση της συνάρτησης στόχου. Όσο μεγαλύτερο είναι το δίκτυο που χρησιμοποιούμε, τόσο πιο σύνθετη είναι η συνάρτηση που μπορεί να παράγει. Αν χρησιμοποιήσουμε ένα επαρκώς μικρό δίκτυο ωστόσο, δεν θα έχει την δυναμική να οδηγηθεί σε υπερπροσαρμογή. Δυστυχώς όμως, είναι δύσκολο να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το κατάλληλο μέγεθος του δικτύου για κάθε συγκεκριμένη εφαρμογή. Έτσι καταφεύγουμε σε πιο εξειδικευμένες τεχνικές όπως αυτές που περιγράψαμε νωρίτερα.

Θα δούμε λοιπόν ένα παράδειγμα εφαρμογής της διατεκμηρίωσης και της τεχνικής $GNBR$. Στο σχήμα 10.1 δίνεται η απόκριση ενός $1-20-1$ νευρωνικού δικτύου που εκπαιδεύτηκε με τον αλγόριθμο GDX για να προσεγγίσει δεδομένα που πάρθηκαν από μια ημιτονοειδή συνάρτηση προσθέτοντας κάποιο θόρυβο. Επιλέγουμε τα δεδομένα εισόδου x να κυμαίνονται από -1 έως 1 με βήμα 0.05 και συνάρτηση στόχου: $t(x) = \sin(2\pi \cdot x) + 0.1 \cdot rand(size(x))$. Η υποκείμενη ημιτονοειδής συνάρτηση δίνεται με διακεκομμένη γραμμή, η θορυβώδης επιθυμητή απόκριση δίνεται με το σύμβολο $+$ και η απόκριση του δικτύου δίνεται από την συνεχή γραμμή. Από το σχήμα φαίνεται ξεκάθαρα ότι το δίκτυο έχει υποστεί υπερπροσαρμογή, με αποτέλεσμα να μην είναι σε θέση να γενικεύει σωστά.

Κατασκευάζουμε στη συνέχεια ένα δίκτυο $1-20-1$ όμοιο με το προηγούμενο και χρησιμοποιούμε την τεχνική της διατεκμηρίωσης. Χωρίζουμε το αρχικό σετ σε δύο υποσύνολα, το εκπαιδευτικό σετ και το σετ τεκμηρίωσης.



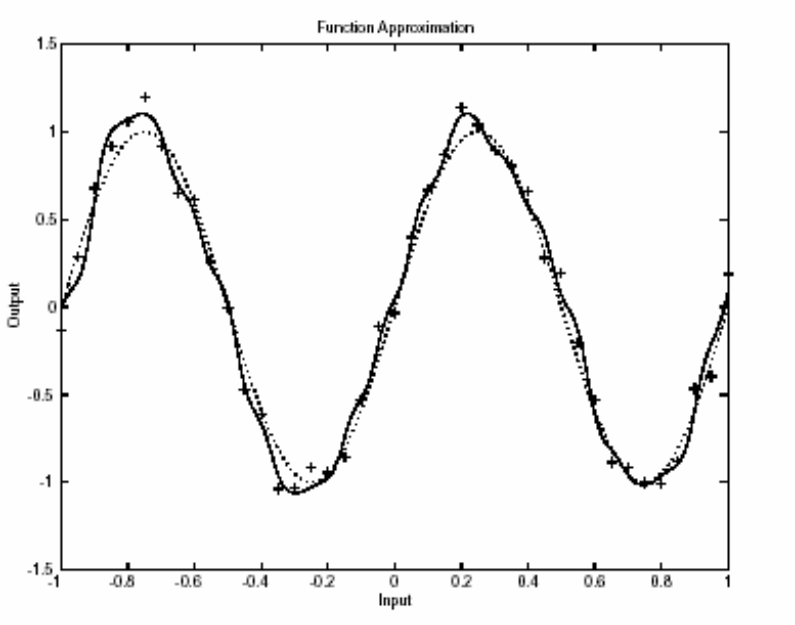
Σχήμα 10.1: Απόκριση $1-20-1$ δικτύου. Η υποκείμενη ημιτονοειδής συνάρτηση δίνεται με διακεκομμένη γραμμή, η θορυβώδης επιθυμητή απόκριση δίνεται με το σύμβολο $+$ και η απόκριση του δικτύου δίνεται από την συνεχή γραμμή.

Το σχήμα 10.2 μας δίνει το γράφημα της απόκρισης του δικτύου αυτού. Παρατηρούμε ότι το δίκτυο έχει υποστεί υπερπροσαρμογή σε πολύ μικρότερο βαθμό από ότι το αρχικό μοντέλο, παρόλα αυτά όμως η απόκριση δεν είναι ικανοποιητικά ομαλή. Αυτό είναι όπως είδαμε το βασικό χαρακτηριστικό της τεχνικής αυτής.

Τέλος, δοκιμάζουμε την τεχνική της Μπαϊεσιανής εξομάλυνσης. Με το ίδιο δίκτυο και το αρχικό σετ δεδομένων εκπαίδευσης παίρνουμε την απόκριση του σχήματος 10.3. Εδώ παρατηρούμε ότι η απόκριση του δικτύου είναι πολύ κοντά στην υποκείμενη ημιτονοειδή συνάρτηση, οπότε μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι το δίκτυο γενικεύει σωστά σε νέες εισόδους. Δοκιμάζοντας μερικά κάπως μεγαλύτερα δίκτυα, βλέπουμε ότι η απόκριση ποτέ δεν θα υποστεί υπερπροσαρμογή. Με τον τρόπο αυτό λοιπόν παρακάμπτουμε και τον απαιτούμενο προσδιορισμό του βέλτιστου μεγέθους του δικτύου.

10.4 Η Μέθοδος $Nguyen - Widrow$

Η ανάθεση αρχικών τιμών στις ελεύθερες παραμέτρους του δικτύου είναι ένα, σπουδαίας σημασίας, άλλα και εξαιρετικά περίπλοκο ζήτημα. Θέλουμε να επιτύχουμε ένα αρχικό σημείο στο χώρο των αποκλίσεων, όσο το δυνατόν πλησιέστερα στο ολικό ελάχιστο και ταυτόχρονα η έξοδος κάθε νευρώνα να



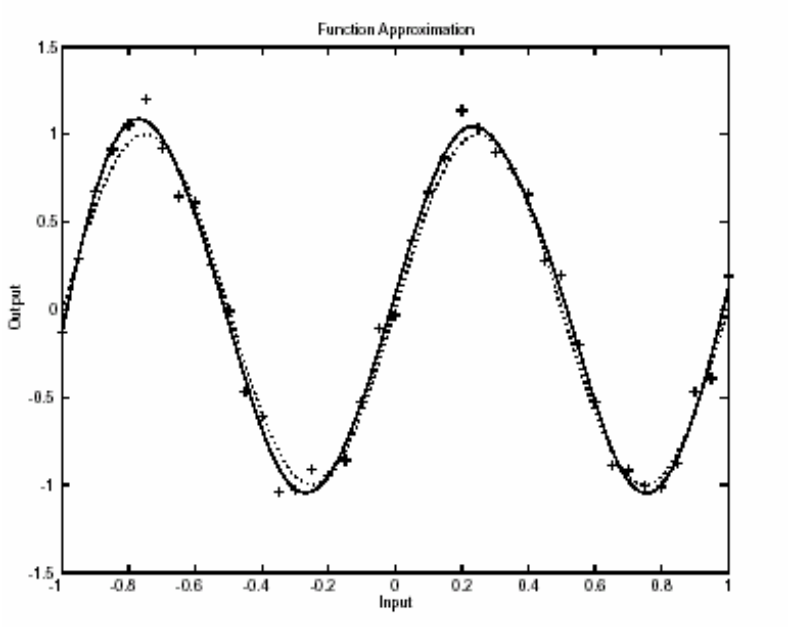
Σχήμα 10.2: Απόκριση $1-20-1$ δικτύου με την τεχνική της διατεκμηρίωσης. Η υποκείμενη ημιτονοειδής συνάρτηση δίνεται με διακεκομμένη γραμμή, η θορυβώδης επιθυμητή απόκριση δίνεται με το σύμβολο $+$ και η απόκριση του δικτύου δίνεται από την συνεχή γραμμή.

μην υπερβαίνει το ενεργό εύρος της συνάρτησης ενεργοποίησης. Διάφορες τεχνικές έχουν προταθεί για τον προσδιορισμό του αρχικού σημείου του χώρου των αποκλίσεων. Μπορούμε να καθορίσουμε ως αρχικά βάρη, για παράδειγμα, μικρούς τυχαίους αριθμούς σε κάποιο διάστημα., π.χ.$[-1,1]$ ή $[0,1]$ ανάλογα με το εύρος της συνάρτησης ενεργοποίησης. Μια κάπως πιο εκλεπτυσμένη τεχνική είναι να θεωρήσουμε τα αρχικά βάρη ανάλογα του $1\Big/\sqrt{|j_{\leftarrow}|}$, όπου $|j_{\leftarrow}|$ είναι ο αριθμός των νευρώνων που συνδέονται στον j [17] (σελ. 262).

Οι *Nguyen* και *Widrow* [20] πρότειναν μια μέθοδο για την ανάθεση των αρχικών παραμέτρων έτσι ώστε το ενεργό εύρος κάθε νευρώνα να κατανέμεται σχεδόν ομοιόμορφα σε όλο το χώρο εισόδων του στρώματός του. Τα αρχικά βάρη καθορίζονται λοιπόν για κάθε νευρώνα με τον ακόλουθο τρόπο: Εάν $p > 2$ και το εύρος των εισόδων και της απόκρισης της συνάρτησης ενεργοποίησης βρίσκεται στο διάστημα $[-1,1]$, θέτουμε:

$$\Omega = k\sqrt[p-1]{m} \tag{10.10}$$

όπου η σταθερά k καλείται *παράγοντας επικάλυψης* και συνήθως παίρνει την τιμή 0.7, m είναι ο συνολικός αριθμός των νευρώνων στο τρέχων στρώμα και p ο αριθμός των νευρώνων του προηγούμενου στρώματος ή των εισόδων όταν



Σχήμα 10.3: Απόκριση $1-20-1$ δικτύου με την τεχνική της Μπαϊεσιανής εξομάλυνσης. Η υποκείμενη ημιτονοειδής συνάρτηση δίνεται με διακεκομμένη γραμμή, η θορυβώδης επιθυμητή απόκριση δίνεται με το σύμβολο $+$ και η απόκριση του δικτύου δίνεται από την συνεχή γραμμή.

πρόκειται για το πρώτο αφανές στρώμα. Για p τυχαίους αριθμούς $\alpha_j \in [-1,1]$ τότε, τα βάρη των συνάψεων του νευρώνα j κανονικοποιούνται από την νόρμα του διανύσματος $\vec{a}$:

$$w_j = \Omega \frac{a_j}{\|\vec{a}\|}. \tag{10.11}$$

Τα βάρη των κατωφλιών ενεργοποίησης θα δίνονται από την έκφραση: $b_i = sgn\,(w_1)\,\Omega\xi_i$, για τυχαία ξ_i στο δίαστημα: $[-1:2/m-1:1]$.

10.5 Μέθοδοι Μετασχηματισμού των Δεδομένων σε Κατάλληλο Διάστημα

Η εκπαίδευση ενός νευρωνικού δικτύου μπορεί να γίνει περισσότερο αποδοτική εάν εφαρμοστούν ορισμένα προεκπαιδευτικά βήματα στις εισόδους και τους στόχους του δικτύου. Σε αυτήν την παράγραφο θα περιγράψουμε λοιπόν κάποιες βασικές τέτοιες προεκπαιδευτικές τεχνικές.

Πριν την έναρξη της εκπαιδευτικής διαδικασίας, είναι συχνά σκόπιμο να μετασχηματίσουμε τις τιμές των εισόδων και των στόχων έτσι ώστε πάντα να εμπίπτουν σε ένα συγκεκριμένο διάστημα. Το διάστημα αυτό μπορεί να προσδιοριστεί από το είδος των συναρτήσεων ενεργοποίησης που χρησιμο-

ποιούμε στα αφανή στρώματα και το εκάστοτε πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε. Αν για παράδειγμα η συνάρτηση ενεργοποίησης του στρώματος εξόδου είναι η υπερβολική εφαπτομένη, τότε θα πρέπει να μετασχηματίσουμε τους στόχους στο διάστημα $[-1, 1]$, έτσι ώστε να μην υπερβαίνει η απόκριση του δικτυού το ενεργό εύρος της συνάρτησης αυτής. Στην περίπτωση της λο-γαριθμικής σιγμοειδούς συνάρτησης, οι στόχοι θα πρέπει να μετασχηματιστούν στο διάστημα $[0, 1]$. Από την άλλη, αν έχουμε τοποθετήσει στην έξοδο την γραμμική συνάρτηση, έχουμε μάλλον τη δυνατότητα να μην μετασχηματίσουμε τους στόχους, καθώς το εύρος ενεργοποίησής της είναι άπειρο. Πρακτικά όμως επιλέγουμε να μετασχηματίσουμε τους στόχους στο διάστημα που υ-ποδεικνύει η συνάρτηση ενεργοποίησης του τελευταίου τουλάχιστον αφανούς στρώματος. Ως τώρα δώσαμε έμφαση στους μετασχηματισμούς των στόχων. Αποτελεί πάγια τακτική όμως και ο μετασχηματισμός των εισόδων. Το κατάλληλο διάστημα μετασχηματισμού, προκύπτει από το είδος της συνάρτη-σης ενεργοποίησης του πρώτου αφανούς στρώματος, αλλά και το εύρος των αρχικών βαρών των αντίστοιχων συνάψεων. Έτσι για παράδειγμα όταν τα αρχικά βάρη των εισόδων κυμαίνονται μεταξύ -1 και 1 και η συνάρτηση ενερ-γοποίησης του πρώτου αφανούς στρώματος είναι η υπερβολική εφαπτομένη, θα προτιμήσουμε να μετασχηματίσουμε τις εισόδους στο διάστημα $[-1, 1]$. Με τους μετασχηματισμούς αυτούς κατορθώνουμε να περιορίζουμε την μεταβολή των παραμέτρων σε μικρά διαστήματα, οπότε και η εκπαιδευτική διαδικασία να προχωρά με τον ρυθμό που καθορίζουμε από τις σταθερές των αλγόριθμων εκμάθησης.

Τέλος αξίζει να σημειώσουμε ότι το εκάστοτε πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε παίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό των διαστημάτων μετασχηματισμού. Αν ενδιαφερόμαστε μόνο για παρεμβαλλόμενη γενίκευση, τότε τα παραπάνω ισχύουν ως έχουν. Αν όμως ενδιαφερόμαστε για συμπερασμό, τότε θα πρέπει να καθορίσουμε το εύρος των εισόδων που θα μετασχηματίσουμε, λαμβάνοντας υπόψη και το εύρος των εισόδων συμπερασμού, ενώ παράλληλα θα πρέπει στο εύρος των στόχων να συνεκτιμήσουμε και το εύρος της απόκρισης του συμπερασμού που αναμένουμε. Αυτή η διαδικασία δεν είναι πάντοτε εύκολη, καθώς στην πράξη δεν γνωρίζουμε την συμπεριφορά της συνάρτησης στόχου σε αυτές τις άγνωστες περιοχές. Μια συνήθης τα-κτική είναι η δοκιμή διαφόρων διαστημάτων, και ο καθορισμός του διαστήματος μετασχηματισμού των στόχων, ανάλογα με τα αποτελέσματα που προκύπτουν.

Αφού λοιπόν καθορίσουμε το εύρος των εισόδων και τον στόχων και τα διαστήματα μετασχηματισμού με έναν απλό αλγόριθμο κάνουμε την κανονικοποίηση, έτσι ώστε η μέγιστη τιμή του κάθε εύρους να αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή του επιθυμητού διαστήματος μετασχηματισμού και αντίστοιχα η

ελάχιστη τιμή του εύρους να αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή του διαστήματος μετασχηματισμού. Η μέθοδος αυτή απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε την τεχνική της διατεκμηρίωσης. Θα πρέπει ο μετασχηματισμός να είναι ο ίδιος και για τα τρία σετ που θα χρησιμοποιήσουμε, διαφορετικά η επικύρωση της εκπαιδευτικής διαδικασίας και ο έλεγχος δεν θα ανταποκρίνονται σε σωστά αποτελέσματα. Μια εναλλακτική ωστόσο προσέγγιση μετασχηματισμού των εισόδων και των στόχων του δικτύου είναι η κανονικοποίηση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης του εκπαιδευτικού σετ. Αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται κανονικοποιώντας τα δεδομένα έτσι ώστε να έχουν μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1 [40](σελ. 5-61). Μπορεί να εφαρμοστεί σε αρκετές περιπτώσεις με πρακτικότερη ενδεχομένως την χρήση της στην περίπτωση που η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι η συνάρτηση ακτινικής βάσης.

Μέρος III

Μοντελοποίηση και Πρόβλεψη

Κεφάλαιο 11

Δοκιμαστικό Πείραμα

11.1 Εισαγωγή

ΙΣΩΣ Η ΠΙΟ ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΑ ιδιότητα των τεχνητών νευρωνικών δικτύων είναι η ικανότητα πρόγνωσης (συμπερασμός). Μέχρι τώρα έχουμε επιτυχώς ελέγξει επιτηρούμενα νευρωνικά δίκτυα σε προβλήματα παρεμβαλλόμενης γενίκευσης, ταξινόμησης και αναγνώρισης προτύπων, αλλά δεν γνωρίζουμε πλήρως πως συμπεριφέρνονται ως εργαλεία πρόβλεψης. Φαίνεται πάντως πως υφίσταται πράγματι αυτή η δυνατότητα και μάλιστα χωρίς συγκεκριμένους περιορισμούς. Κανόνες και μέθοδοι ωστόσο για την βέλτιστη πρόβλεψη δεν έχουν, προς το παρόν τουλάχιστον, διαμορφωθεί.

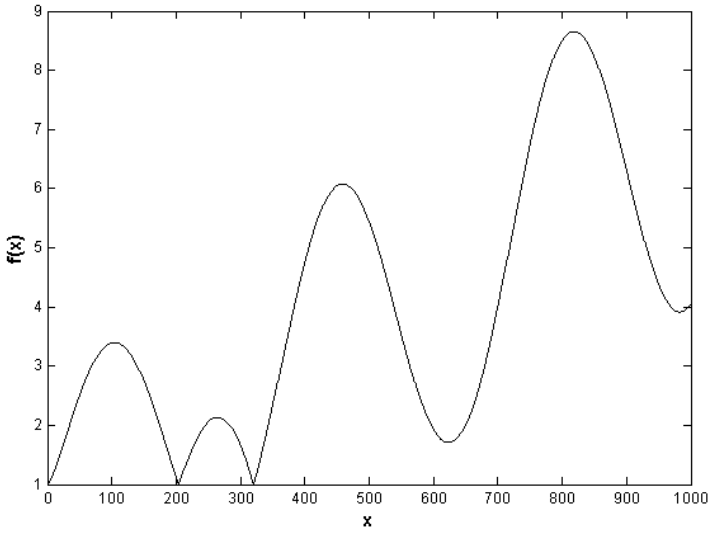
Πριν λοιπόν εφαρμόσουμε τα νευρωνικά δίκτυα στο πρόβλημα της πρόγνωσης των χρόνων ημιζωής των $\beta-$ασταθών πυρήνων, ασχοληθήκαμε για αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα με ένα πιο απλό πρόβλημα. Προσπαθήσαμε συγκεκριμένα να προβλέψουμε τις τιμές μιας γνωστής συνάρτησης σε κάποια περιοχή, γνωρίζοντας την συμπεριφορά της σε κάποια άλλη περιοχή. Θα αποκαλούμε την διαδικασία αυτή στο εξής ως **δοκιμαστικό πείραμα**. Ως πλεονεκτήματα του δοκιμαστικού αυτού πειράματος, πέρα από την εξοικείωση τόσο με τα ίδια τα νευρωνικά δίκτυα και τους διάφορους αλγόριθμους εκπαίδευσης, θεωρούνται τα πολύτιμα συμπεράσματα που βγάλαμε για την συμπεριφορά των διάφορων αρχιτεκτονικών και τεχνικών σε σχέση με τον συμπερασμό. Στις επόμενες παραγράφους λοιπόν θα περιγράψουμε τις διαδικασίες λήψης των αποτελεσμάτων, τα κυριότερα αποτελέσματα και τα βασικά συμπεράσματα που προέκυψαν από το πείραμα αυτό.

11.2 Η Δοκιμαστική Συνάρτηση

Η συνάρτηση που χρησιμοποιήθηκε στο δοκιμαστικό πείραμα είναι η ακόλουθη:

$$f(x) = 1 + \log(5 + x)\left|\frac{x}{500} + \sin(x)\right| \tag{11.1}$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης αυτής στο διάστημα [0-1000] δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η συγκεκριμένη συνάρτηση παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, καθώς εμφανίζει αρκετές αλλαγές στη μονοτονία της και διαφορετικές τιμές στα μέγιστα.



Σχήμα 11.1: Η συμπεριφορά της δοκιμαστικής συνάρτησης για $x \in [0, 1000]$.

Θεωρούμε τις τιμές της $f(x)$ γνωστές στην περιοχή $x \in [0:1:499]$ και ζητάμε να προβλέψουμε τις τιμές της συνάρτησης στην περιοχή $x \in [500:5:1000]$, όπου η ποσότητα $:i:$ αντιπροσωπεύει το βήμα επιλογής των x. Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην παράγραφο 10.1, θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της διατεκμηρίωσης για να αποφύγουμε κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, τα ανεπιθύμητα φαινόμενα υπερπροσαρμογής. Από τις 500 γνωστές τιμές της συνάρτησης λοιπόν, επιλέγουμε τυχαία το 60% (ήτοι 300 παραδείγματα) για το εκπαιδευτικό σετ, το 20% (ήτοι 100 παραδείγματα) για το σετ τεκμηρίωσης και το υπόλοιπο 20% (ήτοι 100 επίσης παραδείγματα) για το δοκιμαστικό σετ. Η περιοχή από $[500 - 1000]$ με βήμα 5, αποτελεί το **σετ πρόγνωσης** (100 πρότυπα).

Είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον λοιπόν να ελέγξουμε κατά πόσο θα μπορέσει ένα νευρωνικό δίκτυο να προσεγγίσει την γνωστή περιοχή της συνάρτησης και πολύ περισσότερο να προβλέψει αξιόπιστα αυτήν την "περίεργη" συμπεριφορά.

11.3 Χρήσιμα Εργαλεία

11.3.1 Δείκτες Απόδοσης της Εκπαιδευτικής Διαδικασίας

Οι καμπύλες απόδοσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας για τα δίκτυα που θα περιγράψουμε στις ακόλουθες παραγράφους θα εκτιμώνται με την βοήθεια της μέσης τετραγωνικής απόκλισης MSE, η οποία δίνεται από την σχέση:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{k}(e_k)^2, \tag{11.2}$$

όπου e_k η απόκλιση μεταξύ τρέχουσας και επιθυμητής απόκρισης [εξ. (8.7)]. Ως δείκτης απόδοσης του κάθε σετ που εφαρμόζουμε στο εκάστοτε δίκτυο θα θεωρείται ο κοινά αποδεκτός στατιστικός δείκτης της τετραγωνικής ρίζας της μέσης τετραγωνικής απόκλισης $RMSE$ που δίνεται από την έκφραση:

$$RMSE = \left[\frac{1}{N}\sum_{k}(e_k)^2\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{N}E_D\right]^{1/2}. \tag{11.3}$$

Σημειώστε ότι οι δείκτες αυτοί, παρά το δεύτερο σκέλος της έκφρασης (11.3), είναι, εν γένει, ανεξάρτητοι της συνάρτησης κόστους, καθώς ως συνάρτηση κόστους μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση μεταξύ των αποκλίσεων κριθεί καταλληλότερη για το μοντέλο μας, και της αρχιτεκτονικής του εκάστοτε δικτύου. Έτσι το MSE και το $RMSE$ είναι δύο καθολικοί δείκτες που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για σύγκριση μεταξύ διαφορετικών μοντέλων.

11.3.2 Συμβολισμός Δικτύων

Η αρχιτεκτονική ενός δικτύου μπορεί να συνοψιστεί στον ακόλουθο συμβολισμό:

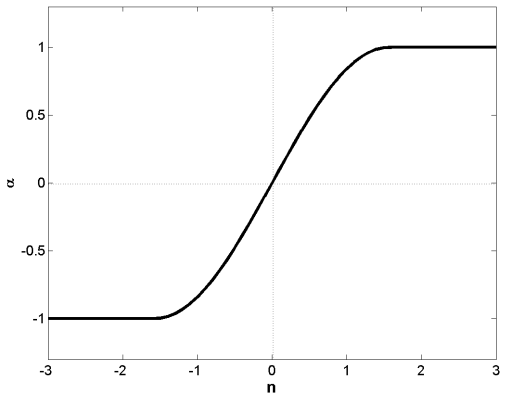
$$[I - H_1 - H_2 - \cdots - H_L - O\,|C] \tag{11.4}$$

όπου I είναι ο αριθμός των εισόδων, H_i είναι ο αριθμός των νευρώνων του $i^{ου}$ αφανούς στρώματος, O είναι ο αριθμός των νευρώνων του στρώματος εξόδου και C είναι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του δικτύου, δηλαδή των συναπτικών βαρών και των βαρών των κατωφλιών ενεργοποίησης. Έτσι ένα δίκτυο ευθείας τροφοδοσίας με μια είσοδο, δύο αφανή στρώματα των 5 νευρώνων και έναν νευρώνα εξόδου, θα δίνεται συμβολικά ως: $1-5-5-1|46$.

11.3.3 Το Δίκτυο Ανατροφοδότησης

Στην γενικότερη κατηγορία των δικτύων ευθείας τροφοδοσίας εμπίπτουν και τα **δίκτυα ανατροφοδότησης** (AT.). Το πρώτο αφανές στρώμα σε αυτά τα δίκτυα έχει βάρη που προέρχονται από την είσοδο. Κάθε επακόλουθο αφανές στρώμα έχει βάρη που προέρχονται από την είσοδο και όλα τα προηγούμενα αφανή στρώματα. Στο δίκτυο εξόδου τέλος υπάρχουν βάρη μόνο από το τελευταίο αφανές στρώμα, δεν προστίθεται σε αυτό δηλαδή και η είσοδος. Τα δίκτυα μπορούν να φανούν χρήσιμα σε αρκετά προβλήματα ενέλιξης, όπως αυτό της προσέγγισης κάποιας συνάρτησης.

11.3.4 Η Συμμετρικά Κορεσμένη Ημιτονοειδής Συνάρτηση Ενεργοποίησης



Σχήμα 11.2: Η συμμετρικά κορεσμένη ημιτονοειδής συνάρτηση ενεργοποίησης.

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε μια νέα σιγμοειδή συνάρτηση ενεργοποίησης, καθώς θα την χρησιμοποιήσουμε εκτεταμένα στην συνέχεια, την **συμμετρικά κορεσμένη ημιτονοειδή συνάρτηση** (*satsins*):

$$\alpha(n) = \begin{cases} -1, & n < -1.5708 \\ sin(n), & -1.5708 \leq n \leq 1.5708 \\ 1, & n > 1.5708 \end{cases} \tag{11.5}$$

Η συνάρτηση αυτή, όπως φαίνεται και στο σχήμα έχει αρκετά παρόμοια συμπεριφορά με τη σιγμοειδή συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης. Η ουσιαστική διαφορά τους είναι ότι η νέα αυτή συνάρτηση αυξάνει το εύρος εισόδου του νευρώνα από το $|1|$ στο $|1.5708|$.

11.4 Εφαρμογή Της Τεχνικής Της Διατεκμηρίωσης

Με βάση λοιπόν την τεχνική της διατεκμηρίωσης, θα πειραματιστούμε με ορισμένους από τους σημαντικότερους αλγόριθμους εκπαίδευσης και κάποιες βασικές συναρτήσεις ενεργοποίησης. Πιο συγκεκριμένα θα δούμε πως επηρεάζεται η συμπεριφορά της απόκρισης του δικτύου και ειδικότερα η γενίκευση, με την εφαρμογή του αλγόριθμου $Levenberg - Marquardt$, της μεθόδου τύπου $Newton$ $BFGS$, και του κλασικού αλγόριθμου ανάδρομης διάδοσης με μεταβλητό συντελεστή του ρυθμού εκπαίδευσης και όρο ορμής. Θα δοκιμάσουμε δε, τις συναρτήσεις ενεργοποίησης $tanh$, $satsins$, $radbas$, $satlins$ και lin. Παράλληλα, μελετάμε την ικανότητα προσαρμογής με βάση των αριθμό των αφανών στρωμάτων αλλά και τον αριθμό των αντίστοιχων νευρώνων. Τέλος προσπαθούμε να παρακολουθήσουμε την απόδοση των μοντέλων μας για διαφορετικές τιμές μέγιστης αποτυχίας τεκμηρίωσης. Οι αποδόσεις των δι-κτύων που κατασκευάσαμε λοιπόν για μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 5 εποχές εκπαίδευσης, συγκεντρώνονται στον πίνακα 11.1. Οι πίνακες 11.2 και 11.3 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα για τα ίδια μοντέλα με μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 500 και 5000 εποχές εκπαίδευσης αντίστοιχα. Τα δεδομένα εισόδου και στόχου κλιμακοποιήθηκαν σε όλες τις περιπτώσεις στο διάστημα [-1, 1], ώστε να αποφεύγονται φαινόμενα κορεσμού των συναρτήσεων ενεργοποίησης. Έτσι η θεωρούμενη ως γνωστή περιοχή [0, 500] μετασχηματίζεται στο διάστημα [-1, 0] και η άγνωστη περιοχή [500, 1000] στο διάστημα [0, 1]. Χρησιμοποιείται δε η παράλληλη εκπαίδευση, ενώ ως μέθοδος αρχικοποίησης των βαρών υιοθετήθηκε, η μέθοδος $Nguyen - Widrow$.

11.5 Εναλλακτική Τεχνική Συμπερασμού

Λόγω της ομοιότητας μεταξύ παρεμβαλλόμενης γενίκευσης και συμπερασμού, τείνουμε να εξομοιώνουμε τις δύο αυτές καταστάσεις. Η εμπειρία από την παρεμβαλλόμενη γενίκευση έχει δείξει ότι ένα δίκτυο γενικεύει σωστά, όταν η σχέση εισόδου/εξόδου (i/o) που υπολογίζεται από το δίκτυο επαληθεύεται για δεδομένες (i/o), οι οποίες δεν έχουν χρησιμοποιηθεί κατά την εκπαιδευτική διαδικασία (δοκιμαστικό σετ). Η εκπαιδευτική διαδικασία θεωρείται ως ένα πρόβλημα προσαρμογής μιας καμπύλης $(curve - fitting)$ και η καλύτερη προσαρμογή οδηγεί στην καλύτερη γενίκευση. Μια επιφανειακή προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε ως δεδομένο ότι η καλύτερη προσαρμογή (και κατ' επέκταση η καλύτερη παρεμβαλλόμενη γενίκευση), οδηγεί και στον ορθότερο συμπερασμό. Για γραμμικά προβλήματα μια τέτοια υπόθεση θα ήταν αληθής, αλλά σε πιο σύνθετα προβλήματα, λόγω της μη−γραμμικότητας

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.				Μέγιστη Αποτυχία Τεκμηρίωσης: 5 Εποχές.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	**Συναρτήσεις Ενεργοποίησης**	*RMSE*				**Αλγόρ. Εκπαίδ.**	**Εποχές Εκπαίδ.**
			Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ	Σετ Προγ.		
ET. 001	1-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-lin*	0.0025	0.0032	0.0403	1.5406	*LM*	678
ET. 002	1-5-5-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
ET. 003	1-5-5-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
AT. 004	1-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-lin*						
AT. 005	1-5-5-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
AT. 006	1-5-5-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
ET. 007	1-10-10-1 | 46	*tanh-tanh-lin*						
ET. 008	1-10-10-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
ET. 009	1-10-10-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
ET. 010	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
ET. 011	1-5-5-5-1 | 46	*radbas- radbas-radbas-lin*						
ET. 012	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
AT. 013	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
ET. 015	1-3-3-3-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						

Πίνακας 11.1: Δείκτες απόδοσης των δοκιμαστικών μοντέλων για μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 5 εποχές εκπαίδευσης.

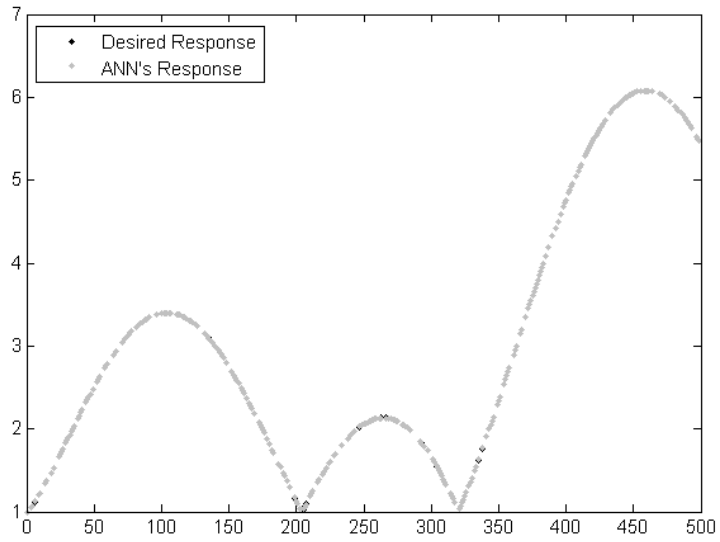
Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.				Μέγιστη Αποτυχία Τεκμηρίωσης: 500 Εποχές.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	**Συναρτήσεις Ενεργοποίησης**	*RMSE*				**Αλγόρ. Εκπαίδ.**	**Εποχές Εκπαίδ.**
			Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ	Σετ Προγ.		
ET. 001	1-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-lin*	0.0025	0.0032	0.0403	1.5406	*LM*	678
ET. 002	1-5-5-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
ET. 003	1-5-5-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
AT. 004	1-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-lin*						
AT. 005	1-5-5-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
AT. 006	1-5-5-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
ET. 007	1-10-10-1 | 46	*tanh-tanh-lin*						
ET. 008	1-10-10-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
ET. 009	1-10-10-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
ET. 010	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
ET. 011	1-5-5-5-1 | 46	*radbas- radbas-radbas-lin*						
ET. 012	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
AT. 013	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
ET. 015	1-3-3-3-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						

Πίνακας 11.2: Δείκτες απόδοσης των δοκιμαστικών μοντέλων για μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 500 εποχές εκπαίδευσης.

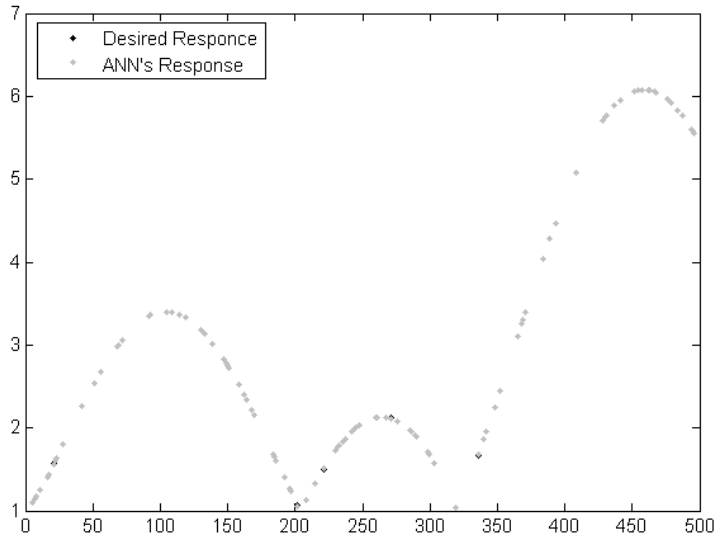
Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.				Μέγιστη Αποτυχία Τεκμηρίωσης: 5000 Εποχές.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	**Συναρτήσεις Ενεργοποίησης**	*RMSE*				**Αλγόρ. Εκπαίδ.**	**Εποχές Εκπαίδ.**
			Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ	Σετ Προγ.		
ET. 001	1-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-lin*	0.0025	0.0032	0.0403	1.5406	*LM*	678
ET. 002	1-5-5-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
ET. 003	1-5-5-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
AT. 004	1-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-lin*						
AT. 005	1-5-5-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
AT. 006	1-5-5-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
ET. 007	1-10-10-1 | 46	*tanh-tanh-lin*						
ET. 008	1-10-10-1 | 46	*radbas-radbas-lin*						
ET. 009	1-10-10-1 | 46	*satsins-satsins-lin*						
ET. 010	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
ET. 011	1-5-5-5-1 | 46	*radbas- radbas-radbas-lin*						
ET. 012	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
AT. 013	1-5-5-5-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						
ET. 015	1-3-3-3-1 | 46	*tanh-tanh-tanh-lin*						

Πίνακας 11.3: Δείκτες απόδοσης των δοκιμαστικών μοντέλων για μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 5000 εποχές εκπαίδευσης.

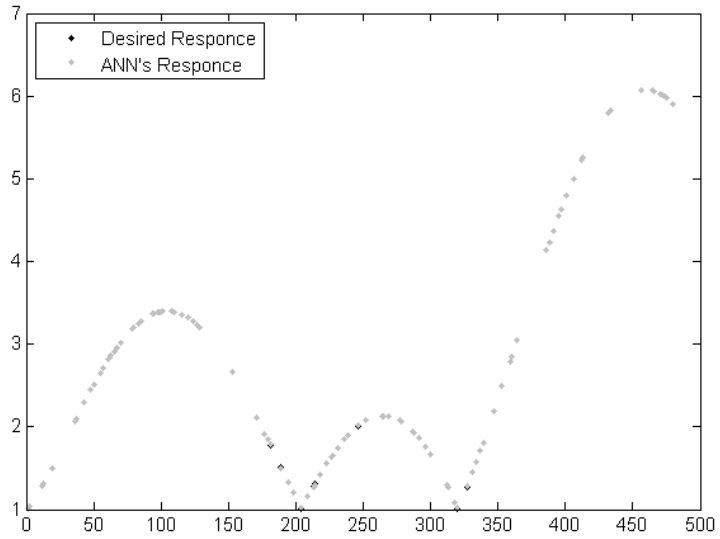
φαίνεται ότι, αυτός ο κανόνας δεν εφαρμόζεται. Κοιτάξτε για παράδειγμα τα σχήματα: 11.3 - 11.6 και 11.9 - 11.12. Τα αποτελέσματα πάρθηκαν από δί-κτυα με διαφορετική αρχιτεκτονική και διαφορετικά αρχικά βάρη. Φαίνεται λοιπόν ξεκάθαρα ότι ο συμπερασμός δεν είναι απευθείας ανάλογος της παρεμβαλλομένης γενίκευσης.



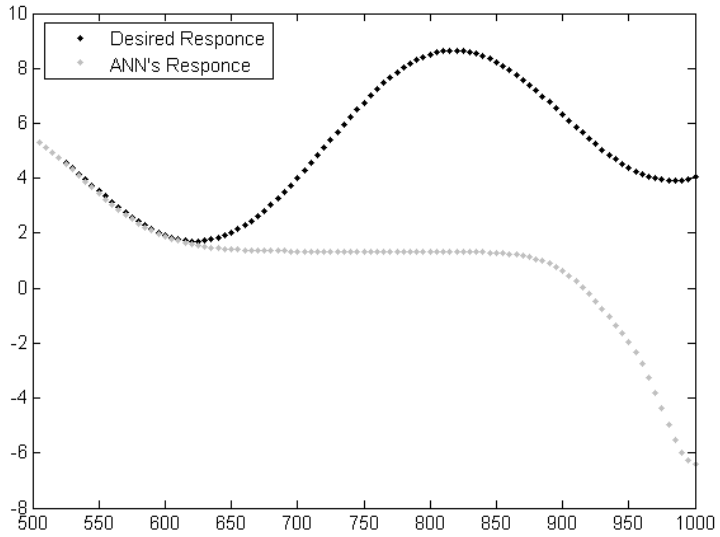
Σχήμα 11.3: Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$.



Σχήμα 11.4: Σετ τεκμηρίωσης. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$.



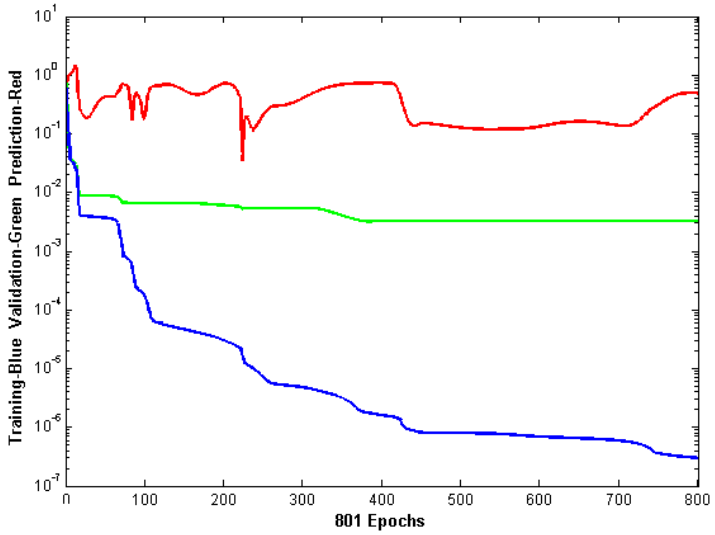
Σχήμα 11.5: Δοκιμαστικό σετ. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$.



Σχήμα 11.6: Σετ πρόγνωσης. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$.

11.5.1 Σταθεροποίηση της Πρόβλεψης

Ο συμπερασμός, όπως και η παρεμβαλλόμενη γενίκευση, επηρεάζονται κυρίως από τέσσερις παράγοντες: το μέγεθος και την επάρκεια του εκπαιδευτικού σετ, την αρχιτεκτονική του δικτύου, τις αρχικές συνθήκες των ελεύθερων παραμέτρων (συναπτικά βάρη και βάρη κατωφλιών ενεργοποίησης) και την φυσική πολυπλοκότητα του προβλήματος που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε [78] (σελ. 178). Προκύπτει εμπειρικά ωστόσο, ότι δεν ικανοποιούν οι ίδιοι



Σχήμα 11.7: Καμπύλες απόδοσης του δικτύου. Μέση τετραγωνική απόκλιση (MSE) ανά εποχή εκπαίδευσης για το εκπαιδευτικό σετ (*μπλε καμπύλη*), το σετ τεκμηρίωσης (*πράσινη καμπύλη*) και το σετ πρόγνωσης (*κόκκινη καμπύλη*). Δίκτυο $A.1$: $1-5-5-1|66$.

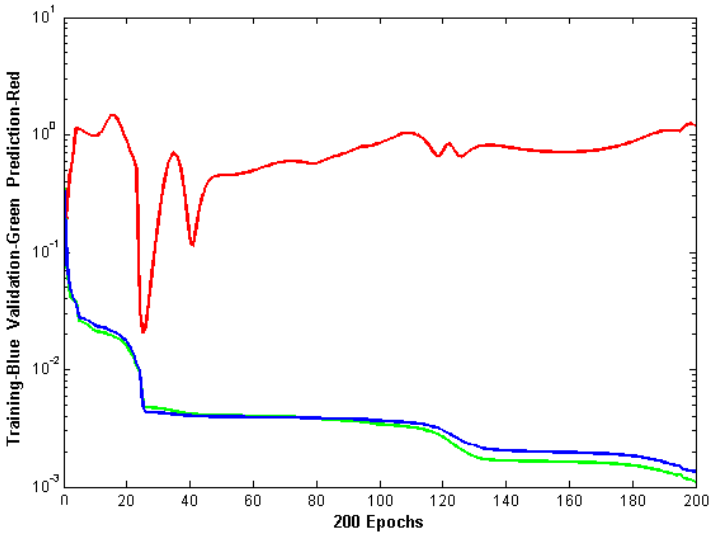
παράγοντες ταυτόχρονα αμφότερα τον συμπερασμό και την παρεμβαλλόμενη γενίκευση. Επιλέγοντας τις σωστές παραμέτρους, ερχόμαστε αντι-μέτωποι με μια κατάσταση εξαιρετικά αβέβαιης εξέλιξης. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, όπως φαίνεται και σχήμα 11.7 η μέση τετραγωνική απόκλιση του εκπαιδευτικού σετ, του σετ τεκμηρίωσης και του δοκιμαστικού σετ είναι σταθερά πτωτική, καθώς η μέση τετραγωνική απόκλιση του σετ πρόγνωσης παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις. Το ελάχιστο δε της απόδοσης του εκπαιδευτικού σετ, δεν ταυτίζεται καν με το ελάχιστο του σετ τεκμηρίωσης, που καθορίζει το σημείο ολοκλήρωσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Με το πέρας λοιπόν της εκπαιδευτικής διαδικασίας, θα έχουμε μια αρκετά καλή προσαρμογή στην περίπτωση της παρεμβαλλόμενης γενίκευσης και έναν μάλλον αναξιόπιστο συμπερασμό. Πιστεύουμε ότι, παρόλο που φαντάζει ιδεατό, το βασικό μέλημά μας θα πρέπει να είναι η σταθεροποίηση της συμπεριφοράς του συμπερασμού και όχι η επίτευξη της βέλτιστης πρόβλεψης. Στην συνέχεια λοιπόν προτείνονται κάποιες τεχνικές για μια κατά κάποιο τρόπο σταθεροποίηση της συμπεριφοράς του συμπερασμού.

11.5.2 Αρχικοποίηση και Σύγκλιση

Οι αρχικές συνθήκες διαδραματίζουν καθοριστικό ρόλο στην σχεδίαση ενός επιτυχημένου δικτύου. Είναι γνωστό άλλωστε ότι διαφορετικά σετ αρχι-

κών βαρών μπορούν να οδηγήσουν σε εκ διαμέτρου αντίθετες συμπεριφορές σύγκλισης. Διάφοροι τρόποι έχουν προταθεί κατά καιρούς για την αρχικοποίηση των ελευθέρων παραμέτρων του δικτύου, όπως η εμπειρική φόρμουλα του *Russo*, η προσέγγιση των $Nguyen-Widrow$ (*βλέπε* πρ.10.4) για την αρχικοποίηση των αφανών βαρών και η τεχνική των *Lee et al.* που εφαρμόζεται στην περίπτωση της παράλληλης εκπαίδευσης, για την αποφυγή του κορεσμού των νευρώνων. Κάποιες πιο πρόσφατες μελέτες καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι αρχικές τιμές των παραμέτρων πρέπει να είναι μικρές (< 0.5), ενώ κάποιες άλλες δείχνουν ότι αρχικά βάρη περιορισμένα στο 0.5 ή στο 1.0 ή στο 2.0 δεν επηρεάζουν στην ουσία το σετ εκπαίδευσης.

Το καίριο ερώτημα στο δικό μας πρόβλημα είναι αν η επιλογή των αρχικών τιμών των ελεύθερων παραμέτρων του δικτύου θα μπορούσε να σταθεροποιήσει τον συμπερασμό. Έτσι μετά από έναν μεγάλο αριθμό πειραμάτων με ποικίλες αρχικές συνθήκες σε συγκεκριμένο δίκτυο $(1-5-5-1)$, παρατηρήσαμε ότι αρχικά βάρη περιορισμένα στο 10^{-2} για τα βάρη εισόδου και στο 10^{-3} για τους νευρώνες των αφανών στρωμάτων και του στρώματος εξόδου, οδηγούν στο ελάχιστο MSE του σετ πρόγνωσης, για σχεδόν συγκεκριμένο αριθμό (μεταξύ 20 και 30) εποχών εκπαίδευσης, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.8. Η επιλογή των βαρών αυτών πραγματοποιείται αν διαιρέσουμε τα αρχικά βάρη που δίνει η μέθοδος $Nguyen-Widrow$ για δεδομένα εισόδου μετασχηματισμένα στο διάστημα [-1,1] με το 10^3.



Σχήμα 11.8: Καμπύλες απόδοσης του δικτύου. Μέση τετραγωνική απόκλιση (MSE) ανά εποχή εκπαίδευσης για το εκπαιδευτικό σετ (*μπλε καμπύλη*), το σετ τεκμηρίωσης (*πράσινη καμπύλη*) και το σετ πρόγνωσης (*κόκκινη καμπύλη*). Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$.

Όπως παρατηρούμε στις καμπύλες απόδοσης του δικτύου, η ελάχιστη μέση τετραγωνική απόκλιση του σετ πρόγνωσης, δηλαδή ο βέλτιστος συμπερασμός, εμφανίζεται περίπου στην $25^{η}$ εποχή εκπαίδευσης και συμβαίνει έπειτα από απότομη ελάττωση της μέσης τετραγωνικής απόκλισης των σετ εκπαίδευσης και τεκμηρίωσης. Συνεχιζόμενης όμως της εκπαιδευτικής διαδικασίας, η μέση τετραγωνική απόκλιση του σετ τεκμηρίωσης ελαττώνεται στην $130^{η}$ εποχή εκπαίδευσης. Η απόκριση λοιπόν που θα πάρουμε στο τέλος της εκπαιδευτικής διαδικασίας δεν θα δίνει τον βέλτιστο συμπερασμό, αλλά έναν συμπερασμό με ιδιαίτερα μεγάλη μέση τετραγωνική απόκλιση (περίπτωση α). Ο στόχος μας έτσι είναι να σταματήσουμε την εκπαιδευτική διαδικασία όσο πιο κοντά γίνεται στον βέλτιστο συμπερασμό. Αυτό μπορούμε να το κατορθώσουμε πολύ απλά, θέτοντας ως ανεκτό όριο μη πτωτικής τάσης της απόκλισης του σετ τεκμηρίωσης τις 5 εποχές εκπαίδευσης (περίπτωση β). Έτσι περιορίζουμε την εκπαιδευτική διαδικασία πολύ κοντά στον βέλτιστο συμπερασμό. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόκριση του δικτύου $A.2$ που παρουσιάζεται εδώ είναι ενδεικτική, καθώς έπειτα από έναν μεγάλο αριθμό πειραμάτων με διαφορετικές αρχικές παραμέτρους παρατηρήσαμε την ίδια συμπεριφορά με εξαιρετικά μεγάλη συχνότητα. Το μόνο που διαφοροποιείται είναι η ακριβής εποχή που θα εμφανιστεί η απότομη αυτή πτώση και οι τιμές των αποδόσεων του κάθε σετ. Στον πίνακα 11.4 παρουσιάζεται η απόδοση του δικτύου στις περιπτώσεις (α) και (β).

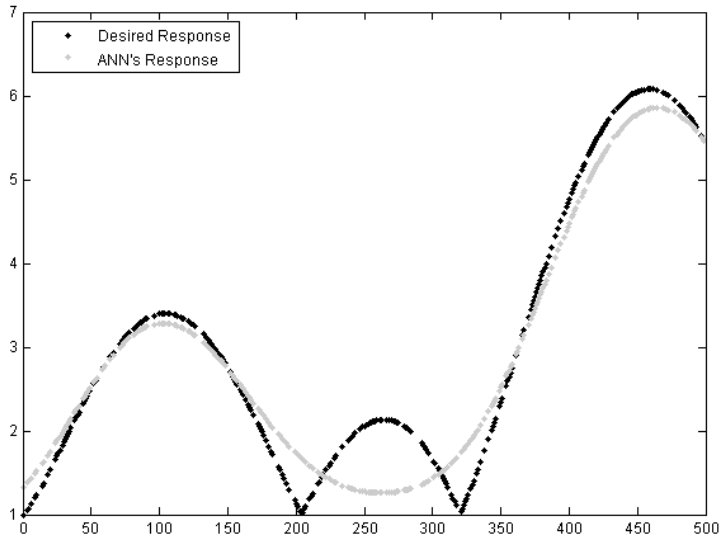
Σετ	$RMSE$	
	Περίπτωση (α)	**Περίπτωση (β)**
Εκπαιδευτικό	0.1869	0.3533
Τεκμηρίωσης	0.1679	0.3611
Δοκιμαστικό	0.1861	0.3550
Πρόγνωσης	5.5416	0.7318

Πίνακας 11.4: Δείκτες απόδοσης του δικτύου $A.2$: $1-5-5-1|66$.

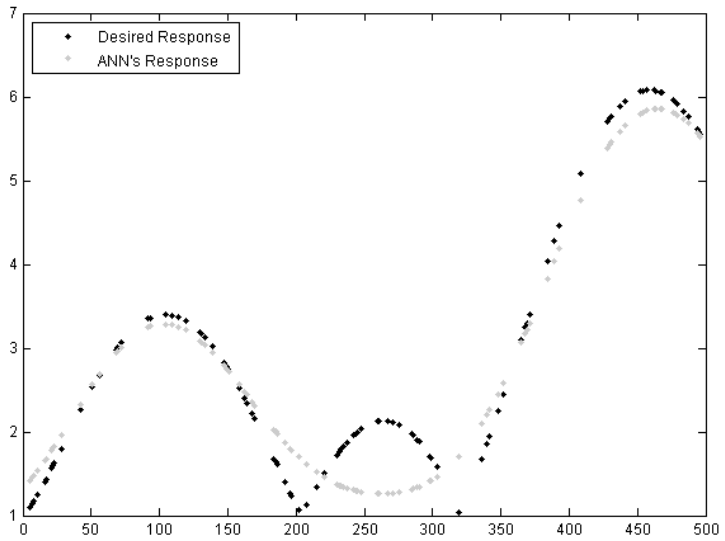
Στα σχήματα 11.9 - 11.12 απεικονίζεται η απόκριση του δικτύου σε αντιδιαστολή προς την επιθυμητή απόκριση για κάθε σετ δεδομένων.

11.5.3 Βελτιστοποίηση της Πρόγνωσης

Παρατηρώντας το σχήμα 11.12 οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι με την μέθοδο αυτή έχουμε κατορθώσει να πάρουμε έναν αξιόπιστο συμπερασμό. Ο όρος αξιόπιστος, ναι μεν αναφέρεται στην τιμή της απόδοσης του σετ συμπερασμού, αλλά αφορά σε μεγάλο βαθμό και την μορφή της απόκρισης του



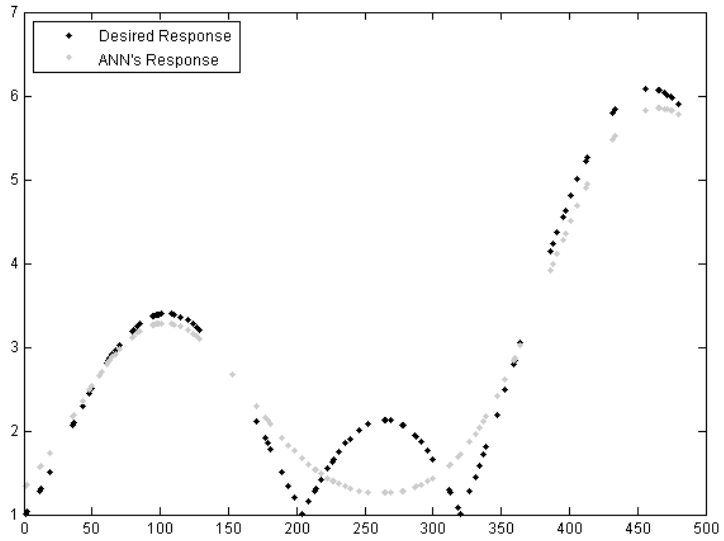
Σχήμα 11.9: Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$.



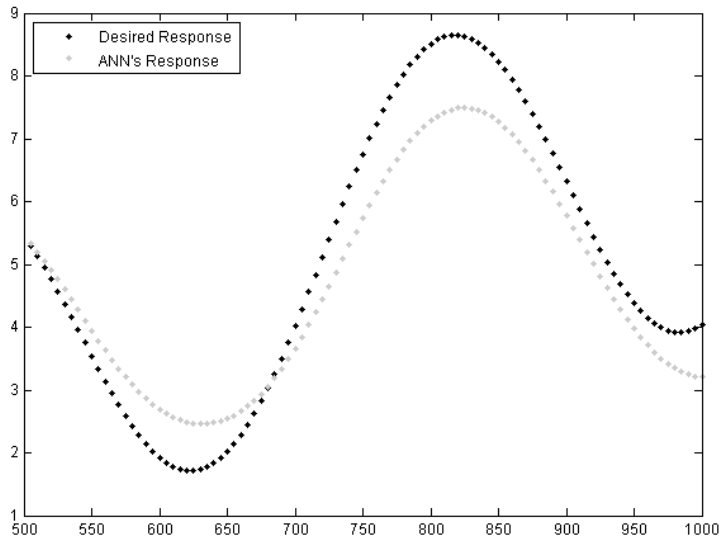
Σχήμα 11.10: Σετ τεκμηρίωσης. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$.

δικτύου. Παρατηρούμε λοιπόν στο σχήμα ότι η προσαρμογή είναι αρκετά ικανοποιητική. Το δίκτυο είναι πλέον σε θέση να προβλέψει την συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$ και να ακολουθήσει την μονοτονία της, σε όλο το εύρος του σετ πρόγνωσης.

Μια πιο προσεκτική εξέταση της απόκρισης του δικτύου στα υπόλοιπα σετ (σχήματα 11.9 - 11.12) ωστόσο, μπορεί να μας βοηθήσει να παρατηρήσουμε ότι με την μέθοδο αυτή, το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ, αποτυγχάνουν να προσεγγίσουν την συνάρτηση στην περιοχή



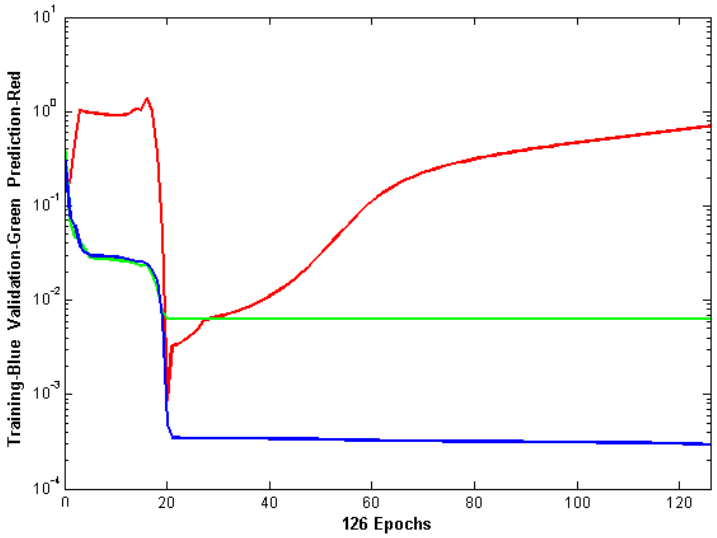
Σχήμα 11.11: Δοκιμαστικό σετ. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$.



Σχήμα 11.12: Σετ πρόγνωσης. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$.

$x \in [150-350]$. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να μας οδηγήσει σε μια νέα τεχνική βελτιστοποίησης. Θα αποπειραθούμε λοιπόν να αποκόψουμε αυτήν την περιοχή από το εκπαιδευτικό σετ. Ξεκινώντας έτσι από το ίδιο αρχικό σημείο του χώρου των αποκλίσεων (με ίδιες δηλαδή αρχικές παραμέτρους), θα επαναλάβουμε την εκπαιδευτική διαδικασία, αλλά αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας το τροποποιημένο εκπαιδευτικό σετ. Οι νέες καμπύλες απόδοσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας δίνονται στο σχήμα 11.13.

Στον πίνακα 11.5 παρουσιάζονται οι αποδόσεις του συγκεκριμένου δικτύου



Σχήμα 11.13: Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$.

για κάθε σετ.

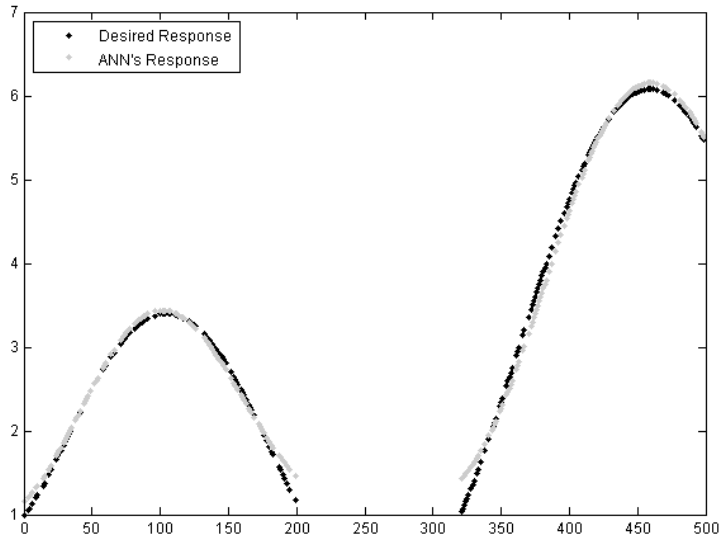
Σετ	$RMSE$
Εκπαιδευτικό	0.1108
Τεκμηρίωσης	0.4061
Δοκιμαστικό	0.3724
Πρόγνωσης	0.1491

Πίνακας 11.5: Δείκτες απόδοσης του δικτύου $A.3$: $1-5-5-1|66$.

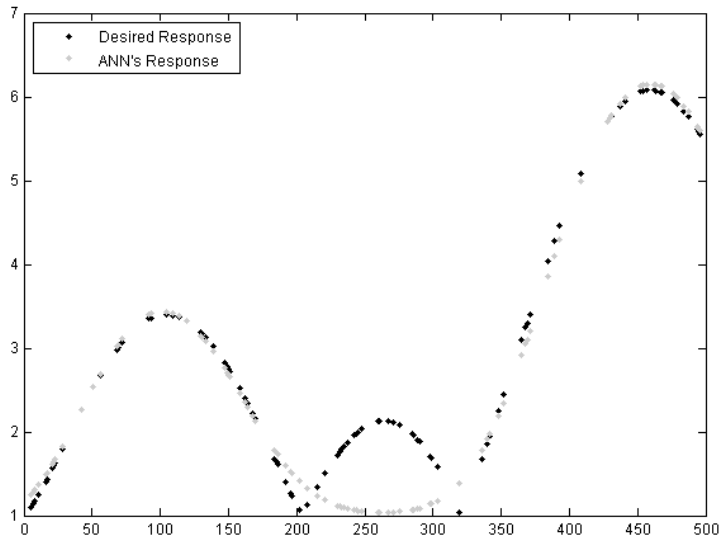
Η νέα επίσης απόκριση του δικτύου σε αντιδιαστολή προς την επιθυμητή απόκριση για κάθε σετ δεδομένων δίνεται στα σχήματα 11.14 - 11.17. Αν επαναλάβουμε την διαδικασία ξεκινώντας κάθε φορά από διαφορετικό αρχικό σημείο του χώρου των αποκλίσεων, θα παρατηρήσουμε την ίδια περίπου συμπεριφορά. Έχουμε κατορθώσει λοιπόν με τον τρόπο αυτό να σταθεροποιήσουμε την συμπεριφορά της πρόγνωσης και παράλληλα να βελτιστοποιήσουμε την απόδοση του συμπερασμού.

11.5.4 Διαστάσεις του Δικτύου και Αξιοπιστία της Πρόβλεψης

Με αυτό το τέχνασμα λοιπόν, μπορέσαμε να επιτύχουμε βέλτιστη απόδοση συμπερασμού της τάξης του 0.1 με 66 ελεύθερες παραμέτρους. Ο στόχος μας πλέον είναι η ελαχιστοποίηση των ελεύθερων παραμέτρων του δικτύου. Αυτό επιτυγχάνεται με την μείωση των νευρώνων των αφανών στρωμάτων. Στα σχήματα 11.18 και 11.19, εμφανίζεται η έξοδος των νευρώνων των δύο

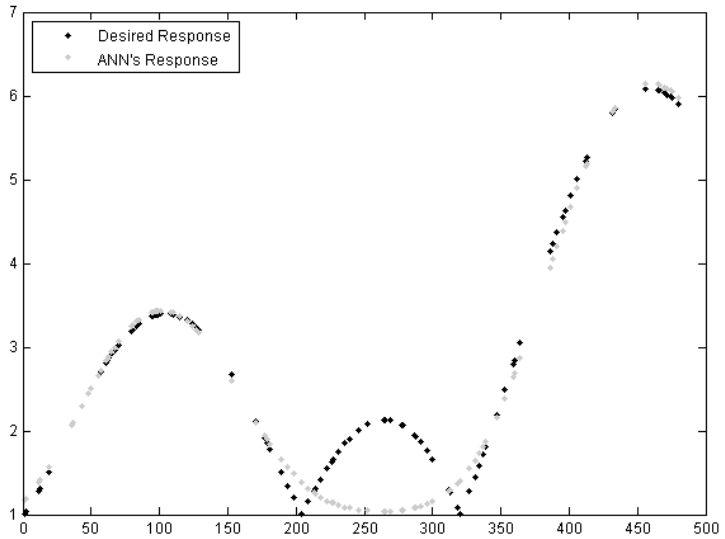


Σχήμα 11.14: Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$.

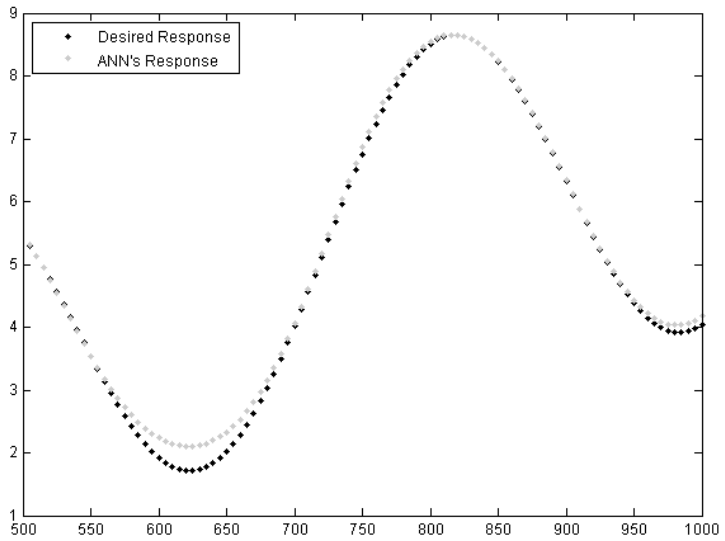


Σχήμα 11.15: Σετ τεκμηρίωσης. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$.

αφανών στρωμάτων πριν την έναρξη της εκπαιδευτικής διαδικασίας και μετά το πέρας της εκπαίδευσης. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση λοιπόν, προκύπτει από το σχήμα 11.19. Συγκρίνοντας τις εξόδους του δεύτερου αφανούς στρώματος με την απόκριση του δικτύου, μπορούμε να αποφανθούμε ότι το τελικό αποτέλεσμα στην ουσία καθορίζεται από έναν μόνο νευρώνα του στρώματος αυτού. Οι υπόλοιποι νευρώνες προσδίδουν απλά κάποιες διορθώσεις στο τελικό αποτέλεσμα. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να μειώσουμε τις διαστάσεις του δικτύου, και κατ' επέκταση τις ελεύθερες παραμέτρους, όσο περισσότερο γί-



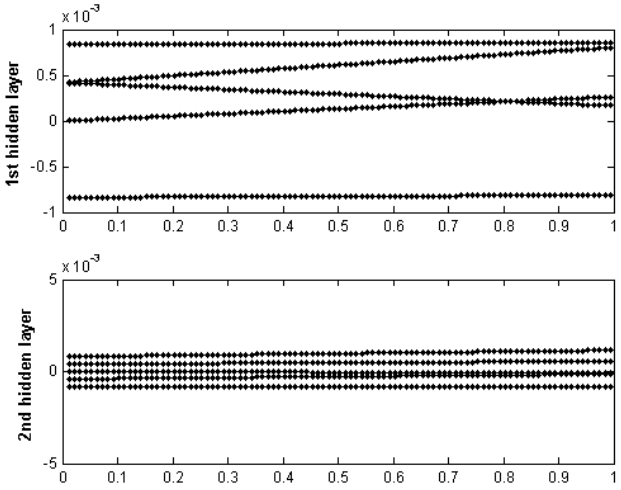
Σχήμα 11.16: Δοκιμαστικό σετ. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$.



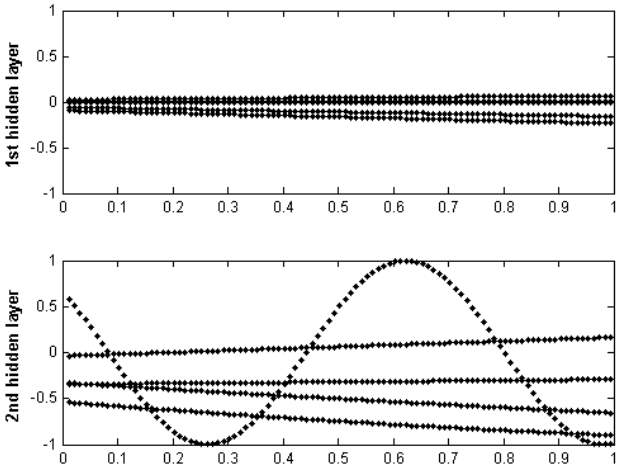
Σχήμα 11.17: Σετ πρόγνωσης. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$.

νεται. Δεχόμαστε ότι ένα $RMSE$ για το διάστημα $[500, 1000]$, μικρότερο του 0.7 είναι ικανοποιητικό, ώστε να οδηγεί σε αξιόπιστο συμπερασμό. Οι πιθανότητες λοιπόν μιας αξιόπιστης πρόβλεψης ανάλογα με το μέγεθος του δικτύου δίνο-νται στον πίνακα 11.6. Αντιλαμβανόμαστε ωστόσο, ότι όσο μικρότερο είναι το δίκτυο, τόσο μικρότερη θα είναι και η πιθανότητα μιας αξιόπιστης πρόβλεψης.

Για μεγαλύτερα δίκτυα παρατηρούμε ότι η αύξηση του αριθμού των παραμέτρων αρχίζει να περιορίζει την ικανότητα προσαρμογής. Σημειώστε επίσης



Σχήμα 11.18: Έξοδοι των νευρώνων των αφανών στρωμάτων πριν την έναρξη της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$.



Σχήμα 11.19: Έξοδοι των νευρώνων των αφανών στρωμάτων πριν και μετά το πέρας της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$.

ότι το κατώφλι της τάξης του 0.7 που υιοθετήθηκε για το $RMSE$ του σετ συμπερασμού, είναι αρκετά αυστηρό.

11.5.5 Αρχιτεκτονική Δικτύου

Το δίκτυο που χρησιμοποιήσαμε στις παραπάνω περιπτώσεις είναι δίκτυο ανατροφοδότησης. Στην είσοδο επιπλέον όμως, έχουν προστεθεί και τρεις

Αρχιτεκτονική	**Π**ιθανότητα
$1-2-2-2\|21$	6.76
$1-3-3-1\|34$	25.45
$1-4-4-1\|49$	32.9
$1-5-5-1\|66$	89.6
$1-6-6-1\|85$	65.5

Πίνακας 11.6: Η πιθανότητα αξιόπιστης πρόβλεψης.

βρόγχοι υστέρησης (*βλέπε* πρ. 8.3.4). Έτσι κάθε φορά, εκτός από την τρέχουσα τιμή εισάγονται και οι τρεις προηγούμενες. Τονίζουμε βέβαια το γεγονός ότι η κατανομή των παραδειγμάτων στα σετ είναι όπως είπαμε τυχαία. Προφανώς εκτός από όσο αναφέρθηκαν παραπάνω και η συγκεκριμένη αρχιτεκτονική συνεισφέρει ουσιαστικά στην ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων και την σταθεροποίηση του συμπερασμού.

11.6 Συμπεράσματα

Αν δούμε λοιπόν συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που δίνονται στους πίνακες 11.1, 11.2 και 11.3 για τις αποδόσεις του δοκιμαστικού αυτού πειράμα-τος, μπορούμε να καταλήξουμε στις ακόλουθες διαπιστώσεις:

Κεφάλαιο 12

Μοντελοποίηση των Χρόνων Ημίσειας Ζωής

12.1 Εισαγωγή

ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΡΚΕΙΑ των τελευταίων χρόνων, μια στατιστική προσέγγιση της συστηματικής των ιδιοτήτων των πυρήνων, βασισμένη σε μηχανές εκμάθησης, όπως τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και τα $SVMs$, βρίσκεται υπό εξέλιξη. Η αλματώδης ανάπτυξη της στατιστικής θεωρίας εκμάθησης, έδωσε τη δυνατότητα κατασκευής στατιστικών μοντέλων κβαντικών συστημάτων πολλών σωματιδίων, τα οποία αξιοποιούν την πλούσια υπάρχουσα συλλογή πυρηνικών δεδομένων και επιδεικνύουν μια αξιοσημείωτη ικανότητα πρόβλεψης. Η δυναμική τέτοιων "λεπτών−θεωρητικών" προσπαθειών παρουσιάζεται εδώ με την εφαρμογή των τεχνιτών νευρωνικών δικτύων στην μοντελοποίηση των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β.

Στόχος της παρούσας προσπάθειας λοιπόν, είναι η γενικευμένη μοντελοποίηση της παρατηρούμενης συστηματικής των χρόνων ημίσειας ζωής της πυρηνικής αποδιέγερσης β^- με την βοήθεια της στατιστικής μεθοδολογίας των τεχνητών νευρωνικών δικτύων και η πρόβλεψη των χρόνων ημίσειας ζωής εξωτικών πυρήνων. Για να το κατορθώσουμε αυτό, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο, ικανό να αναπαράγει τα τρέχοντα πειραματικά δεδομένα με μεγάλη ακρίβεια και ταυτόχρονα να προβλέπει αξιόπιστα τους χρόνους ημίσειας ζωής άγνωστων πυρήνων με όσο το δυνατόν λιγότερους βαθμούς ελευθερίας, ελεύθερες δηλαδή παραμέτρους.

12.2 Σετ Δεδομένων

Τα πειραματικά δεδομένα για την μοντελοποίηση της συστηματικής των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- έχουν παρθεί από την βάση δεδομένων $Nubase2003$ των *G. Audi et al.* [29] του Κέντρου Δεδομένων Ατομικών Μαζών (*Atomic Mass Data Center*).

Από το σύνολο των δεδομένων αυτών, διαμορφώσαμε ένα σετ απομονώνοντας τις περιπτώσεις εκείνες όπου η θεμελιώδης κατάσταση του μητρικού πυρήνα αποδιεγείρεται 100% στο κανάλι β^-. Τα νουκλίδια που ικανοποιούν αυτήν την προϋπόθεση ανέρχονται σε 905 και οι χρόνοι ημιζωής τους κυμαίνονται από $0,15 \cdot 10^{-2}$ sec για το ^{35}Na έως $2,43 \cdot 10^{23}$ sec για το ^{113}Cd. Προκειμένου λοιπόν να εφαρμόσουμε την τεχνική της διατεκμηρίωσης θα χωρίσουμε το αρχικό αυτό σετ σε τρία υποσέτ. Έτσι 543 νουκλίδια (60%) θα επιλεγούν για να αποτελέσουν το εκπαιδευτικό σετ, 181 (20%) για το σετ τεκμηρίωσης και τα εναπομείναντα 181 (20% επίσης) για το δοκιμαστικό σετ.

Η επιλογή των νουκλιδίων που θα αποτελέσουν το κάθε υποσέτ έγινε με την εξής μεθοδολογία. Ταξινομήσαμε αρχικά τα νουκλίδια κατά αύξουσα σειρά ως προς Z και N. Χρησιμοποιήσαμε στη συνέχεια μια ομοιόμορφη κατανομή και μια τυχαία κατανομή (με την βοήθεια γεννήτριας τυχαίων αρι-θμών) στα τρία υποσέτ. Έτσι πήραμε αντίστοιχα τα $\mathbf{\Sigma\varepsilon\tau-3}$ και $\mathbf{\Sigma\varepsilon\tau-4}$. Επαναλάβαμε την διαδικασία, αλλά έχοντας ταξινομήσει τα νουκλίδια αυτή τη φορά ως προς τον χρόνο ημίσειας ζωής. Έτσι πήραμε και τα $\mathbf{\Sigma\varepsilon\tau-1}$ και $\mathbf{\Sigma\varepsilon\tau-2}$. Η ομοιόμορφη κατανομή υιοθετήθηκε έτσι ώστε, αμφότερα το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ να αντιπροσωπεύονται ισομερώς σε όλο το εύρος των χρόνων ημίσειας ζωής ή του χώρου Z, N αντίστοιχα. Για να προσδιορίσουμε το καταλληλότερο σετ πραγματοποιήσαμε την **δοκιμασία** X^2. Από τα αποτελέσματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το $\mathbf{\Sigma\varepsilon\tau\ -2}$, παρουσιάζει την καλύτερη κατανομή, όπως άλλωστε και αναμενόταν. Θα αναφερόμαστε στο εξής λοιπόν σε αυτό το σετ δεδομένων με την κωδική ονομασία $NuSet-A$. Στον πίνακα 12.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της Δοκιμασίας X^2 για το $NuSet-A$, ενώ το σχήμα 12.1 απεικονίζει σχηματικά την κατανομή των νουκλιδίων του $NuSet-A$ στα τρία υποσέτ. Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει μια αρκετά ομοιόμορφη αντιπροσώπευση του δοκιμα-στικού σετ και του σετ τεκμηρίωσης σε όλες τις ισοτοπικές (και ισοτονικές) αλυσίδες.

Ακολουθώντας παρόμοιες θεωρητικές προσπάθειες πρόβλεψης των χρόνων ημιζωής στη συνέχεια, κατασκευάσαμε ένα μικρότερο σετ ($NuSet-B$), αποκλείοντας από το $NuSet-A$ τους πυρήνες εκείνους που ο χρόνος ημίσειας ζωής τους υπερβαίνει τα 10^6 sec. Αυτό το δεύτερο σετ αποτελείται από 838 νουκλίδια: 503 ($\sim 60\%$) για το εκπαιδευτικό σετ, 167 ($\sim 20\%$) για το σετ

τεκμηρίωσης και 168 ($\sim 20\%$) για το δοκιμαστικό σετ. Ο πίνακας 12.1 συνοψίζει την κατανομή των νουκλιδίων και για τα δύο σετ, ενώ ο πίνακας 12.3 περιέχει τα αποτελέσματα της Δοκιμασίας X^2 για το δεύτερο αυτό σετ. Τα σχήματα 12.3 και 12.4 τέλος, δίνουν με μορφή ραβδογραμμάτων την κατανομή στις διάφορες υποδιαιρέσεις του χρόνου για το $NuSet-A$ και το $NuSet-B$ αντίστοιχα.

Από τα πειραματικά λοιπόν δεδομένα προκύπτει ότι το 56% των πυρήνων που η θεμελιώδης τους κατάσταση αποδιεγείρεται 100% με β^-, είναι εξαιρετικά ασταθείς, αποδιεγείρονται δηλαδή με χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 60 *sec*. Παράλληλα διαπιστώνουμε ότι μόνο 67 σε σύνολο 905 νουκλιδίων, δηλαδή περίπου το $7,5\%$, εμφανίζουν χρόνους ημίσειας ζωής μεγαλύτερους από 10^6 *sec*.

(α) $NuSet-A$. **Ταξινόμηση ως προς** $T_{1/2}$. **Ομοιόμορφη κατανομή.**

Σύνολο	Εκπαιδευτικό	543	Σετ	181	Δοκιμαστικό	181
905	Σετ	60%	Τεκμηρίωσης	20%	Σετ	20%

(β) $NuSet-B$. **Το** $NuSet-A$ **κομμένο στα** 10^6 s.

Σύνολο	Εκπαιδευτικό	503	Σετ	167	Δοκιμαστικό	168
838	Σετ	60.02%	Τεκμηρίωσης	19.93%	Σετ	20.05%

Πίνακας 12.1: Κατανομή των νουκλιδίων στο εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ για (α) το $NuSet-A$ και (β) το $NuSet-B$.

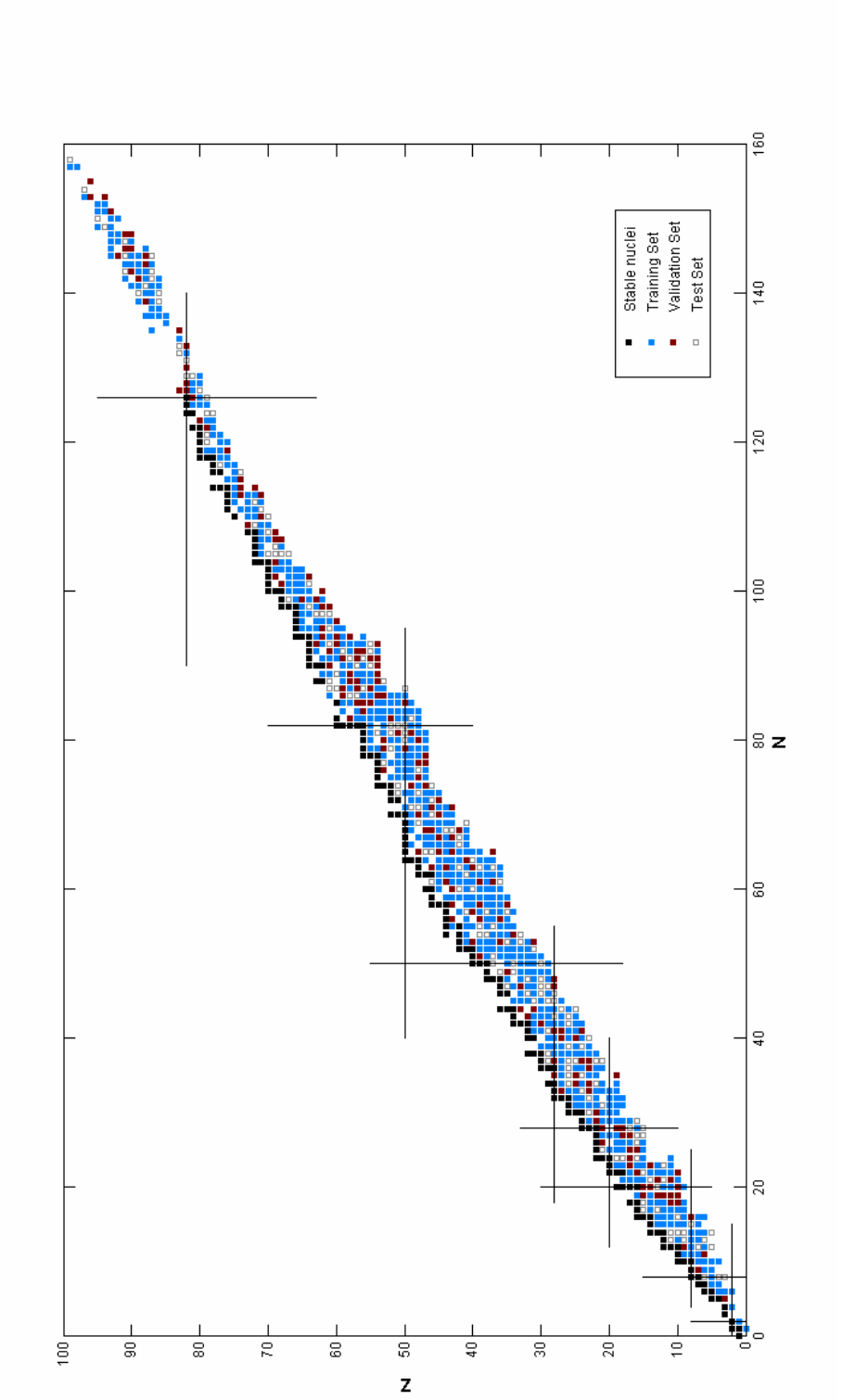
12.3 Πρόσθετοι Δείκτες Απόδοσης

12.3.1 Στατιστικές Μετρικές

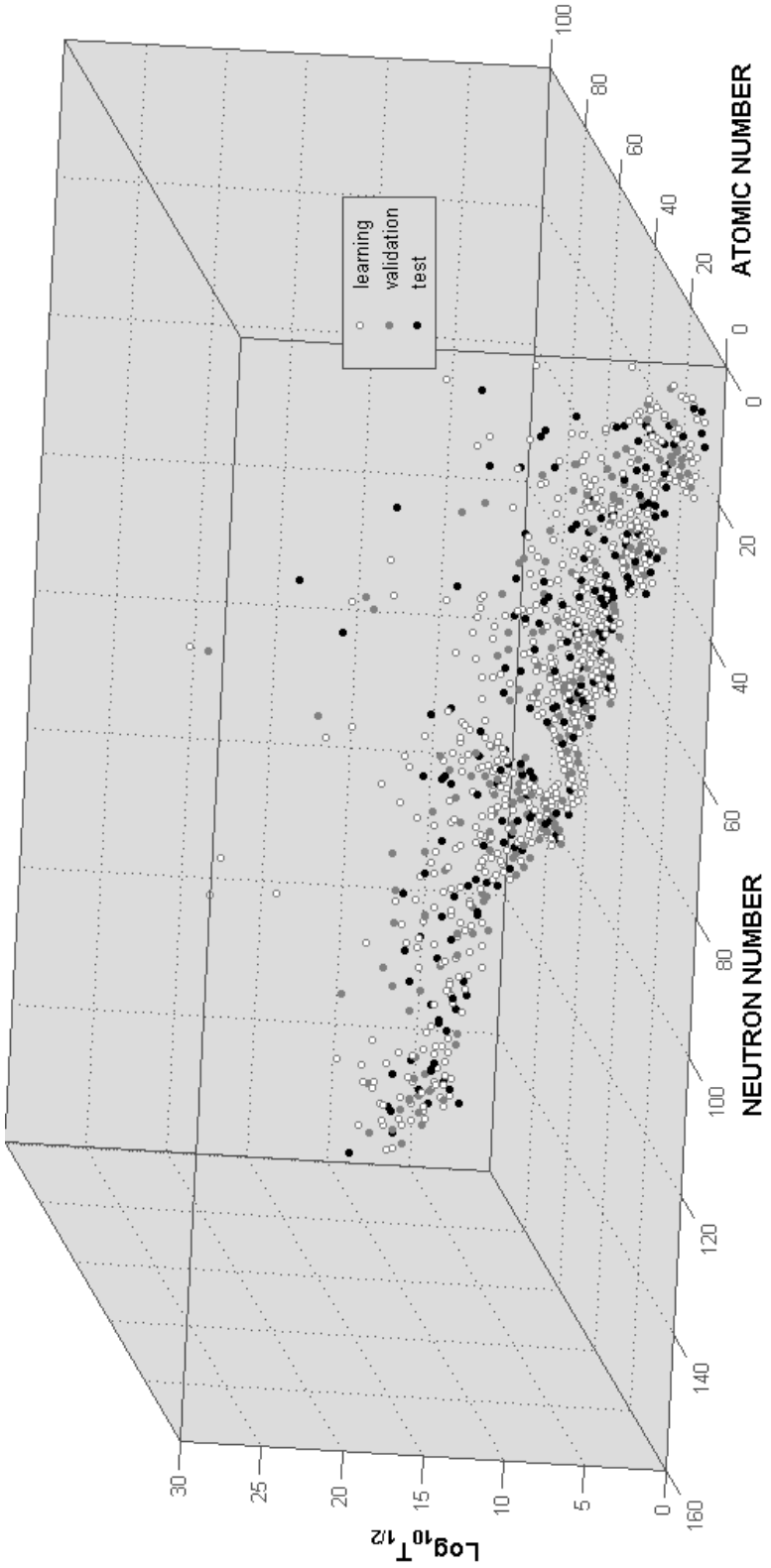
Η απόδοση των μοντέλων που θα συναντήσουμε στην συνέχεια θα αποτιμάται εκτός από το $RMSE$ και μέσω κάποιον πρόσθετων ευρύτατα αποδε-κτών στατιστικών μεγεθών, όπως η **Μέση Απόλυτη Απόκλιση** (MAE), η **Κανονικοποιημένη Μέση Τετραγωνική Απόκλιση** ($NMSE$) και ο **Συντελεστής Συσχέτησης**, που προκύπτει από γραμμική παλινδρόμηση. Τα μεγέθη $RMSE$, $NMSE$ και MAE εκτιμούν την απόκλιση μεταξύ του λογάριθμου με βάση το 10 των παρατηρούμενων τιμών $\hat{x}_k$ και την απόκριση του δικτύου x_k. Μικρότερες τιμές των αυτών των μετρικών φανε-ρώνουν μεγαλύτερη ακρίβεια των υπολογισμών.

		Εκπαιδ.	Σετ	Δοκιμ.	Εκπαιδ.	Σετ	Δοκιμ.	Εκπαιδ.	Σετ	Δοκιμ.
	$NuSet-A$	Σετ	Τεκμηρ.	Σετ	Σετ	Τεκμηρ.	Σετ	Σετ	Τεκμηρ.	Σετ
ms	252	152	50	50	151.2	50.4	50.4	0.0042	0.0032	0.0032
sec	256	153	51	52	153.6	51.2	51.2	0.0023	0.0008	0.0125
min	198	119	40	39	118.8	39.6	39.6	0.0003	0.0040	0.0091
$hours$	84	50	17	17	50.4	16.8	16.8	0.0032	0.0024	0.0024
$days$	59	36	11	12	35.4	11.8	11.8	0.0102	0.0542	0.0034
$months$	19	11	4	4	11.4	3.8	3.8	0.0140	0.0105	0.0105
$years$	19	12	4	3	11.4	3.8	3.8	0.0316	0.0105	0.1684
Ky	5	3	1	1	3	1	1	0.0000	0.0000	0.0000
My	8	4	2	2	4.8	1.6	1.6	0.1333	0.1000	0.1000
Gy	3	2	0	1	1.8	0.6	0.6	0.0222	0.6000	0.2667
Ty	1	0	1	0	0.6	0.2	0.2	0.6000	3.2000*	0.2000
Py	1	1	0	0	0.6	0.2	0.2	0.2667	0.2000	0.2000
Σύνολο	905	543	181	181	543	181	181	1.0881	4.1857	0.9762
		Τρέχουσες Τιμές			Θεωρητικές Τιμές			Δοκιμασία X^2		

Πίνακας 12.2: Δοκιμασία X^2 για την εκτίμηση της ομοιομορφίας της κατανομής του $NuSet-A$ στα τρία υποσέτ.



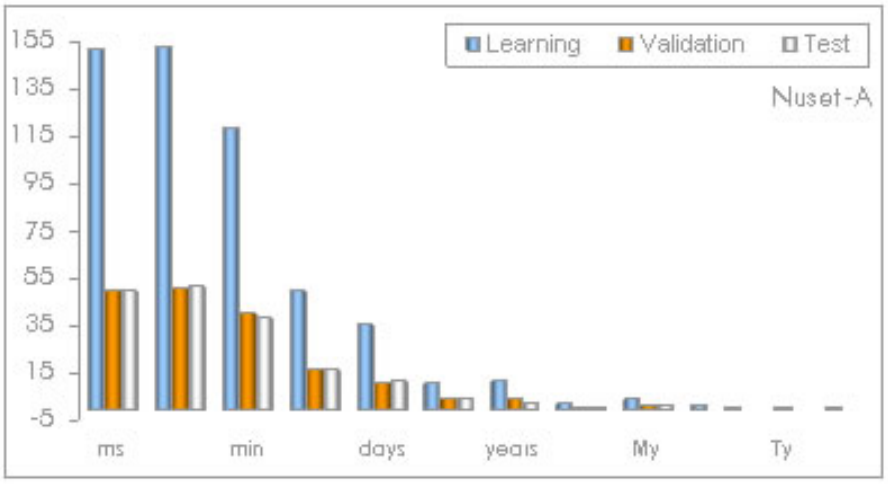
Σχήμα 12.1: Κατανομή των νουκλιδίων στο εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ για το $NuSet - A$.



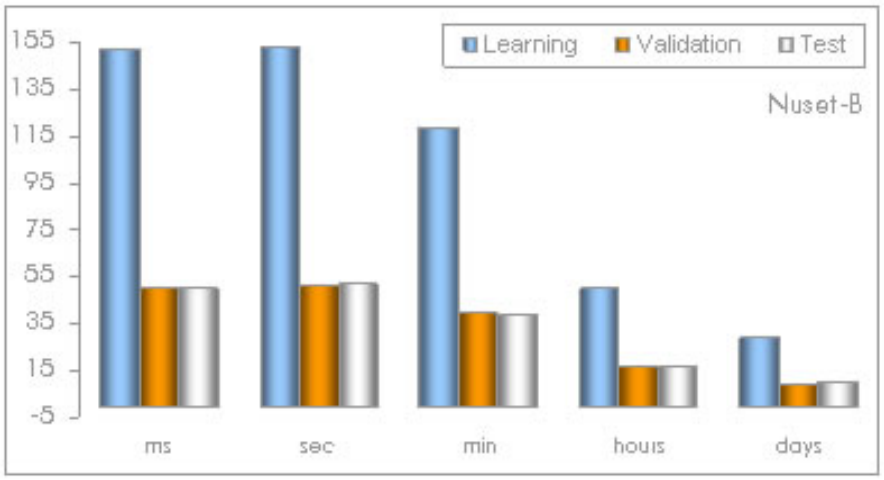
Σχήμα 12.2: Τρισδιάστατο γράφημα των νουκλιδίων του εκπαιδευτικού σετ, του σετ τεκμηρίωσης και του δοκιμαστικού σετ για το $NuSet - A$. Ο $z-$άξονας αντιπροσωπεύει το λογάριθμο των παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής.

		Εκπαιδ. Σετ	Σετ Τεχμηρ.	Δοκιμ. Σετ	Εκπαιδ. Σετ	Σετ Τεχμηρ.	Δοκιμ. Σετ	Εκπαιδ. Σετ	Σετ Τεχμηρ.	Δοκιμ. Σετ
	$NuSet - B$	Τρέχουσες Τιμές			Θεωρητικές Τιμές			Δοκιμασία X^2		
ms	252	152	50	50	151.3	50.2	50.5	0.0036	0.0010	0.0054
sec	256	153	51	52	153.7	51.0	51.3	0.0028	0.0000	0.0090
min	198	119	40	39	118.8	39.5	39.7	0.0002	0.0074	0.0122
$hours$	84	50	17	17	50.4	16.7	16.8	0.0035	0.0040	0.0015
$days$	48	29	9	10	28.8	9.6	9.6	0.0012	0.0334	0.0148
Σύνολο	838	503	167	168	503	167	168	0.0114	0.0459	0.0428

Πίνακας 12.3: Δοκιμασία X^2 για την εκτίμηση της ομοιομορφίας της κατανομής του $NuSet - B$ στα τρία υποσέτ.



Σχήμα 12.3: Κατανομή των πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής του $NuSet - A$ στις διάφορες υποδιαιρέσεις του χρόνου για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.



Σχήμα 12.4: Κατανομή των πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής του $NuSet - B$ στις διάφορες υποδιαιρέσεις του χρόνου για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.

Μέση Τετραγωνική Απόκλιση ($RMSE$)

$$RMSE = \left[\frac{1}{N}\sum_k (x_k - \hat{x}_k)^2\right]^{1/2} = \left[\frac{1}{N}E_D\right]^{1/2} \tag{12.1}$$

Κανονικοποιημένη Μέση Τετραγωνική Απόκλιση ($NMSE$)

$$NMSE = \frac{\sum_k (x_k - \hat{x}_k)^2}{\sum_k (x_k - \bar{x}_k)^2} = \frac{1}{\sigma^2 N}\sum_k (x_k - \hat{x}_k)^2 = \frac{E_D}{\sigma^2 N} \tag{12.2}$$

Μέση Απόλυτη Απόκλιση (MAE)

$$MAE = \frac{1}{N}\sum_k |x_k - \hat{x}_k| \tag{12.3}$$

Γραμμική Παλινδρόμιση

$$\hat{x}_k = a \cdot x_k + b \tag{12.4}$$

όπου a είναι η κλίση και b η Y απόκλιση της παλινδρόμησης. Ο συντελεστής συσχέτισης ($R-$τιμή)

$$R = \frac{\sum_k y_k \hat{y}_k}{\left(\sum_k (y_k - \langle y_k\rangle)^2 \sum_k (\hat{y}_k - \langle \hat{y}_k\rangle)^2\right)^{1/2}} \tag{12.5}$$

όπου $y_k = x_k - \langle x\rangle$ και $\hat{y}_k = \hat{x}_k - \langle \hat{x}\rangle$, θα υπολογίζεται επίσης. ($R = 1$, $a = 1$ και $b = 0$ σημαίνει τέλεια συσχέτιση).

12.3.2 Μετρικές *Klapdor*

Οι παραπάνω δείκτες απόδοσης ωστόσο, μπορούν να μας δώσουν μια γενική μόνο εκτίμηση της σύγκλισης με τα πειραματικά δεδομένα. Μια περαιτέ-ρω ανάλυση των υπολογισμών που αφορούν τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β προτάθηκε από την ομάδα του *Klapdor* [36, 34, 37, 38, 21, 55, 8]. Η μέση απόκλιση $Klapdor(\bar{x}_K)$ ορίζεται από την έκφραση:

$$\bar{x}_K = \frac{1}{N}\sum_i x_i, \tag{12.6}$$

όπου:

$$x_i = \begin{cases} T_{\beta,\exp}/T_{\beta,calc}, & if \quad T_{\beta,\exp} \geq T_{\beta,calc} \\ T_{\beta,calc}/T_{\beta,\exp}, & if \quad T_{\beta,\exp} < T_{\beta,calc} \end{cases} \tag{12.7}$$

Η αντίστοιχη δε τυπική απόκλιση θα δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_K = \left[\frac{1}{N} \sum_i \left(x_i - \bar{x}_K \right)^2 \right]^{1/2} . \tag{12.8}$$

($\bar{x}_K = 1$ και $\sigma_K = 0$ υπονοούν μέγιστη ακρίβεια).

Μια περισσότερο ποσοτικοποιημένη ανάλυση επιτυγχάνεται, υπολογίζοντας την εκατοστιαία αναλογία m των νουκλιδίων που έχουν πειραματικό χρόνο ημίσειας ζωής $T_{\beta,exp}$ μέσα σε κάποια προκαθορισμένη περιοχή (π.χ., όχι μεγαλύτερο από 10^6, 60 ή 1 s), για τους οποίους ο χρόνος ζωής που προκύπτει από το δίκτυο βρίσκεται μεταξύ κάποιου προκαθορισμένου παράγο-ντα ανεκτικότητας (συγκεκριμένα 2, 5 ή 10) της πειραματικής τιμής.

12.3.3 Μετρικές *Möller*

Ένα μέγεθος παρόμοιο του $\bar{x}_K$, αλλά που ορίζεται με τον λογάριθμο με βάση το δέκα του χρόνου ημίσειας ζωής $log_{10}T_\beta$ και όχι απλά με το T_β, έχει χρησιμοποιηθεί από την ομάδα του *Möller* [70, 72]. Όσο:

$$r_k = \frac{x_k}{\hat{x}_k} \tag{12.9}$$

η μέση θέση M_r, των σημείων των σχημάτων που θα συναντήσουμε παρακάτω και τα οποία θα δίνουν το λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής, όπως π.χ. το σχ. 14.2, θα δίνεται από την μέση απόκλιση r_k:

$$M_r = \frac{1}{N} \sum_k r_k \tag{12.10}$$

και η διασπορά γύρω από αυτόν τον μέσο θα ορίζεται από την τυπική απόκλιση:

$$\sigma_r = \left[\frac{1}{N} \sum_k \left(r_k - M_r \right)^2 \right]^{1/2} , \tag{12.11}$$

Ως "ολική" απόκλιση θεωρείται η μέση τετραγωνική απόκλιση του r_k:

$$\Sigma_r = \left[\frac{1}{N} \sum_k \left(r_k \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{N} E_D \right]^{1/2} , \tag{12.12}$$

ταυτόσημη με το $RMSE$ που ορίσαμε στην παράγραφο 12.3.1. Η ίδια ομάδα εισήγαγε επιπλέον τις ποσότητες:

[Μέση Απόκλιση (σε κάποια περιοχή)]

$$M_r^{10} = 10^{M_r}, \tag{12.13}$$

[Μέση Διακύμανση (σε κάποια περιοχή)]

$$\sigma_r^{10} = 10^{\sigma_r}, \tag{12.14}$$

και [Ολική Απόκλιση (σε κάποια περιοχή)]

$$\Sigma_r^{10} = 10^{\Sigma_r}, \tag{12.15}$$

που επίσης εφαρμόζονται μεταξύ προκαθορισμένων περιοχών των πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής. (M_r, σ_r και $\Sigma_r = 0$ και προφανώς M_r^{10}, σ_r^{10} και $\Sigma_r^{10} = 1$ υπονοούν μέγιστη ακρίβεια).

Κεφάλαιο 13

Δοκιμαστικά Μοντέλα Νευρωνικών Δικτύων

13.1 Μοντέλα $Z - N$

ΘΕΩΡΟΥΜΕ ΜΙΑ ΟΜΑΔΑ από κβαντικά προβλήματα πολλών σωματιδίων τέτοια ώστε κάθε μέλος της ομάδας να χαρακτηρίζεται από X_1 σωματίδια του τύπου 1 και X_2 σωματίδια ενός διαφορετικού τύπου 2, και από τις αλληλεπιδράσεις που πραγματοποιούνται μεταξύ οποιουδήποτε υποσέτ σωματιδίων. Αφήνοντας κατά μέρος τις αλληλεπιδράσεις, όλες οι καταστάσεις και όλες οι παρατηρούμενες ποσότητες οποιοδήποτε δείγματος της ομάδας θα καθορίζεται από τους ακέραιους X_1 και X_2. Συγκεκριμένα, για κάθε παρατηρήσιμο Y που ορίζεται από την ομάδα, θα υπάρχει μια φυσική αντιστοιχία μεταξύ των (X_1, X_2) και του Y. Αυτή η κίνηση είναι επουσιωδώς εκτεταμένη σε περισσότερους από δύο τύπους συστατικών. Εντελώς παρόμοια λοιπόν, το πρόβλημα πολλών σωμάτων αναφορικά με το πυρηνικά σύστημα, ορίζει μια τέτοια ομάδα, με X_1 και X_2 τον αριθμό των πρωτονίων Z και των νετρονίων N αντίστοιχα, που απαρτίζουν κάθε νουκλίδιο.

Απόπειρες υπολογισμού ή πρόβλεψης των ιδιοτήτων διαφορετικών συστημάτων που ανήκουν σε μια τέτοια ομάδα, γεφυρώνουν ένα ευρύ φάσμα από καθαρά *ab initio* μικροσκοπικές θεωρήσεις έως φαινομενολογικά μοντέλα λίγων ή πολλών παραμέτρων, με υβριδικές μακροσκοπικές*η*μικροσκοπικές και μικροστατιστικής φύσεως μεθόδους στο ενδιάμεσο. Αυτές οι απόπειρες σχετίζονται σε διάφορα επίπεδα, με τις *ab initio* να βασίζονται κατ' αρχήν σε κατ' εξοχήν θεωρία και τις φαινομενολογικές να επικαλούνται φυσικό περιεχόμενο,

ημικλασσικές εικόνες και ελεύθερες παραμέτρους.

Το καίριο ερώτημα λοιπόν είναι σε ποιο βαθμό τα υπάρχοντα δεδομένα για την ιδιότητα Y των μελών των συστημάτων της ομάδας, και μόνο τα δεδομένα, καθορίζουν την αντιστοιχία $(X_1, X_2) \to Y$. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω στο πρόβλημα των χρόνων ημίσειας ζωής των πυρήνων επομένως θα πρέπει να διερευνήσουμε την αντιστοιχία $(Z, N) \to T_{1/2}$.

Στα αρχικά στάδια της προσπάθειας μοντελοποίησης της αποδιέγερσης β^- λοιπόν, υποθέσαμε, σύμφωνα με τα παραπάνω, αλλά και όσα συζητήσαμε στην παράγραφο 8.8 για το μοντέλο απόκλισης εξαρτημένης στατιστικής μεταβλητής, ότι η συστηματική των χρόνων ημίσειας ζωής θα ακολουθεί μια αντιστοιχία της μορφής:

$$log_{10}\left(T_\beta^i\right) = g\left(Z_i, N_i\right) + \varepsilon_i, \tag{13.1}$$

όπου $g\left(Z_i, N_i\right)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση που αποκωδικοποιεί την συστηματική της αποδιέγερσης β και ε_i είναι κάποιος Γκαουσιανός θόρυβος που αντιπροσωπεύει την *άγνοιά* μας για την εξάρτηση του $T_\beta{}^*$ από τα Z_i και N_i. Εκφράσεις της μορφής αυτής μας θυμίζουν έντονα τον ημιεμπειρικό τύπο της μάζας του $Weizsacker$, όπου η ενέργεια σύνδεσης δίνεται ως συνάρτηση των Z και N.

Τα πλεονεκτήματα μιας τέτοιας προσέγγισης είναι: (α) δεν παρουσιάζονται περιορισμοί στην πρόβλεψη, καθώς γνωρίζουμε πάντα τον ατομικό και νετρο-νικό αριθμό του νουκλιδίου που μας ενδιαφέρει και (β) παρακάμπτουμε υπο-λογισμούς μεγεθών όπως οι τιμές $-Q$ και οι ενέργειες διαχωρισμού νετρονίων S_n, τα οποία πρέπει να παρθούν, στις περιπτώσεις εκείνες που δεν είναι διαθέσιμα πειραματικά, από αντίστοιχα θεωρητικά μοντέλα, επιβαρύνοντας τα αποτελέσματά μας με επιπρόσθετα σφάλματα. Από την άλλη μεριά, μια τέτοια απόπειρα, ενέχει σημαντικές δυσκολίες, όπως: (α) δεν έχουμε, τουλάχιστον προς το παρόν, κάποια οφθαλμοφανή ένδειξη μιας τέτοιας εξάρτησης και (β) δεν υπάρχει κάποια διαθέσιμη θεωρία από την οποία μπορούμε να εξάγουμε την μορφή της συνάρτησης $g(Z, N)$, μικροσκοπικά ή έστω και φαινομενολογικά. Έτσι, αντικειμενικός στόχος αυτής της αρχικής προσπάθειας είναι να προσεγγίσουμε την συνάρτηση $g(Z, N)$ μέσω ενός κατάλληλου μοντέλου τεχνιτών νευρωνικών δικτύων, τέτοιου ώστε να αποκωδικοποιήσουμε καθολικά την συστηματική των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β.

---

*Χρησιμοποιούμε τον λογάριθμο, καθώς όπως είδαμε, οι χρόνοι ημιζωής της αποδιέγερσης β^- εκτείνονται σε πολλές τάξεις μεγέθους.

13.1.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N$

Χρησιμοποιούμε λοιπόν δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας και ανατροφοδότησης που εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg-Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης. Στα πλαίσια επομένως της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης, οι είσοδοι και οι στόχοι του δικτύου έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{gathered}\left\{\begin{pmatrix} Z_1 \\ N_1 \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^1_{\beta,\exp}\right)\right\}, \\ \left\{\begin{pmatrix} Z_2 \\ N_2 \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^2_{\beta,\exp}\right)\right\}, \ldots, \\ \left\{\begin{pmatrix} Z_n \\ N_n \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^n_{\beta,\exp}\right)\right\},\end{gathered} \tag{13.2}$$

όπου Z_i και N_i είναι ο ατομικός αριθμός και ο αριθμός νετρονίων αντίστοιχα σε αναλογική μορφή, και $log_{10}\left(T^i_{\beta,exp}\right)$ είναι ο λογάριθμος με βάση το 10 των πειραματικών τιμών των χρόνων ημίσειας ζωής. Για το $NuSet-A$ λοιπόν τα αποτελέσματα του παρόντος μοντέλου συνοψίζονται στον πίνακα 13.1.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE*		
		Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 001	2-5-5-1 | 51	1.47	1.63	1.66
AT. 002	2-5-5-1 | 68	1.44	1.68	1.66
ET. 003	2-12-6-6-1 | 163	1.39	1.40	1.64

Πίνακας 13.1: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N$ για το $NuSet-A$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$ στα δίκτυα ET. 001 και ET. 003 και $radbas$ στο δίκτυο AT. 002. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin.

13.1.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec

Εφαρμόζουμε στην συνέχεια την παραπάνω διαδικασία στο $NuSet-B$, το οποίο όπως είδαμε διαμορφώθηκε αποκλείοντας από το $NuSet-A$ τους πυρήνες εκείνους που ο χρόνος ημίσειας ζωής τους υπερβαίνει τα 10^6 sec. Για το $NuSet-B$ λοιπόν, οι αποδόσεις του παρόντος μοντέλου από δίκτυα διαφορετικής αρχιτεκτονικής, συνοψίζονται στον πίνακα 13.2.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE*		
		Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 004	2-5-5-1 | 51	0.78	0.76	0.73
AT. 005	2-5-5-1 | 68	0.69	0.71	0.71
ET. 006	2-12-6-6-1 | 163	0.69	0.71	0.73

Πίνακας 13.2: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6 ($NuSet-B$). Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin.

13.1.3 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^3 sec

Παρατηρώντας την βελτίωση που επέρχεται στα αποτελέσματα από την εφαρμογή ενός ανώτατου κατωφλιού των χρόνων ημίσειας ζωής, σκεφτήκαμε να εφαρμόσουμε την διαδικασία αυτή και σε ένα σετ με ακόμη μικρότερο μέσο χρόνο ημίσειας ζωής. Διαμορφώσαμε έτσι ένα τρίτο σετ δεδομένων, το $NuSet-C$, το οποίο προκύπτει αποκλείοντας από το $NuSet-A$ τους πυρήνες εκείνους που ο χρόνος ημίσειας ζωής τους υπερβαίνει τα 10^3 sec. Αυτό το τρίτο σετ αποτελείται από 653 νουκλίδια: 392 ($\sim 60\%$) για το εκπαιδευτικό σετ, 130 ($\sim 20\%$) για το σετ τεκμηρίωσης και 131 ($\sim 20\%$) για το δοκιμαστικό σετ. Για το $NuSet-C$ αντίστοιχα λοιπόν, τα αποτελέσματα του παρόντος μοντέλου δίνονται στον πίνακα 13.3.

Μπορούμε να δούμε λοιπόν συγκρίνοντας τους παραπάνω πίνακες, ότι όσο περισσότερο περιορίζουμε την βάση δεδομένων μας ως προς τους χρόνους ημί-

σειας ζωής, τόσο περισσότερο βελτιώνονται οι αποδόσεις των δικτύων. Προφανώς όμως μας ενδιαφέρει μια σωστή προσαρμογή της συστηματικής των χρόνων ημίσειας ζωής και όχι απλά η ελαχιστοποίηση των μέσων τετρα-γωνικών αποκλίσεων. Μας ενδιαφέρει, επιπλέον, και η ικανότητα αξιόπιστης γενίκευσης των μοντέλων μας. Χρειαζόμαστε επομένως μια βάση, που να περιέχει όσο το δυνατόν περισσότερα νουκλίδια, ώστε η προσαρμογή και η γενίκευση να ανταποκρίνονται στις παραπάνω απαιτήσεις. Παρατηρήσαμε λοιπόν, ύστερα από εμπεριστατωμένο έλεγχο των μοντέλων μας, τόσο με τις μετρικές $Klapdor$ και $Möller$, όσο και με επιμέρους διερεύνηση σε ισοτοπικές και ισότονες αλυσίδες, ότι τα 843 νουκλίδια του $NuSet-B$ και το κατώφλι των 10^6 sec είναι επαρκή και οδηγούν σε πιο σωστούς υπολογισμούς. Έτσι, εκτός από κάποια μοντέλα που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο, τα οποί-α για λόγους κυρίως σύγκρισης στηρίζονται στα $NuSet-A$ και $NuSet-C$, στην συνέχεια θα παρουσιάζουμε αποδόσεις μοντέλων που αναφέρονται απο-κλειστικά στο $NuSet-B$.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE*		
		Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 007	2-5-5-1 | 51	0.47	0.48	0.55
AT. 008	2-5-5-1 | 68	0.43	0.47	0.52
ET. 009	2-12-6-6-1 | 163	0.41	0.46	0.52

Πίνακας 13.3: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^3 ($NuSet-C$). Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin.

13.1.4 Το Ψηφιακό Μοντέλο $Z-N$

Ακολουθώντας στην συνέχεια προγενέστερες μελέτες των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- μέσω νευρωνικών δικτύων από τους συγγραφείς των [26] και [52], αποφασίσουμε να δοκιμάσουμε την επίδοση των μοντέλων μας αν πλέον η είσοδος από "αναλογική" μετατραπεί σε "ψηφιακή". Έτσι λοιπόν μετατρέψαμε τις εισόδους του αναλογικού μοντέλου $Z-N$ σε δυαδική μορφή. Καθώς ο μέγιστος αριθμός πρωτονίων των νουκλιδίων της βάσης μας

είναι 99 και ο μέγιστος αριθμός νετρονίων είναι 158, θεωρούμε 16 ψηφιακές πλέον εισόδους, αφού θα παίρνουν την τιμή 0 ή 1. Οι πρώτες 8 θα αντιστοιχούν στην δυαδική μορφή του ατομικού αριθμού Z και οι υπόλοιπες 8 στη δυαδική μορφή του αριθμού νετρονίων N. Έτσι το μοντέλο μας θεωρητικά, θα μπορεί να υπολογίσει χρόνους ημιζωής νουκλιδίων που αποτελούνται από $2^8 = 256$ νετρόνια και 256, αντίστοιχα, πρωτόνια. Λέμε βέβαια θεωρητικά, γιατί δεν έχουμε επαρκή πειραματικά δεδομένα για την προσαρμογή των παραμέτρων στις περιπτώσεις όπου η είσοδος ξεπερνά τα 99 πρωτόνια και τα 158 νετρόνια. Στο αναλογικό βέβαια μοντέλο δεν αντιμετωπίζουμε τέτοιο πρόβλημα, εφόσον η είσοδος είναι μια για κάθε αριθμό νουκλεονίων, οπότε η προσαρμογή γίνεται πάντα με βάση τον ίδιο αριθμό (μη μηδενικών) εισόδων. Η απόδοση λοιπόν του μοντέλου αυτού δίνεται στον πίνακα 13.4. Για την περίπτωση του $NuSet - B$, όπου ο χρόνος ημίσειας ζωής δεν υπερβαίνει τα 10^6 sec δε, οι αντίστοιχες αποδόσεις δίνονται στον πίνακα 13.5.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE*		
		Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 010	16-10-1 | 181	1.38	1.52	1.57

Πίνακας 13.4: *RMSE* του ψηφιακού μοντέλου $Z - N$ για το $NuSet - A$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: *LM*. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: *tanh*. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: *lin*.

Μπορεί λοιπόν κανείς να παρατηρήσει ότι αν και η εκπαιδευτική διαδικασία έχει την δυνατότητα να προχωρήσει λίγο περισσότερο από ότι στα αντίστοιχα αναλογικά μοντέλα, εμφανίζεται κάποια αδυναμία στην περίπτωση της γενίκευσης.

Στον πίνακα 13.6 τέλος, δίνονται προς σύγκριση τα αποτελέσματα από τις προσπάθειες των *E. Mavrommatis et al.* [26]. Τα αποτελέσματα αυτά προέκυψαν από ψηφιακά μοντέλα $16 - 10 - 1|181$ με νουκλίδια όπου ο χρόνος ημίσειας ζωής τους δεν ξεπερνά τα 10^6 *sec*. Εύλογα είναι σκόπιμη μια άμεση σύγκριση τους με τα αντίστοιχα παρόντα αποτελέσματα που δίνονται στον πίνακα 13.5. Το πλεονέκτημα των μοντέλων που παρουσιάζονται εδώ είναι η χρήση της τεχνικής της διατεκμηρίωσης, που όπως επανειλημμένα έχουμε τονίσει, έχει ως στόχο την αποφυγή φαινομένων υπερπροσαρμογής. Επιπλέον,

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE*		
		Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 011	16-5-5-1 | 121	0.48	0.81	0.67
ET. 012	16-5-5-5-1 | 151	0.43	0.75	0.75

Πίνακας 13.5: *RMSE* του ψηφιακού μοντέλου $Z - N$ για το $NuSet - B$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: *LM*. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: *tanh*. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: *satlins*.

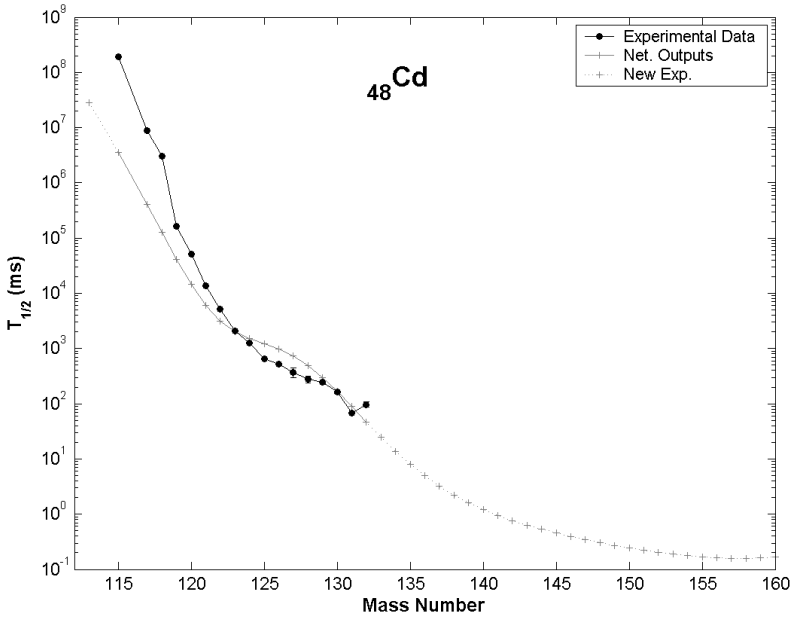
η βάση δεδομένων μας είναι περισσότερο ενημερωμένη σε σχέση με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε από τους συγγραφείς της [26].

E. Mavrommatis et al. [26]			
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE*	
		Εκπ. Σετ	Δοκ. Σετ
ET.	16-10-1 | 181	1.08	1.82

Πίνακας 13.6: *RMSE* του ψηφιακού μοντέλου $Z - N$ των *E. Mavrommatis et al.* [26].

13.2 Μοντέλα $Z - N - \delta$

Όπως φαίνεται στα σχήματα 13.1 και 13.2 η ικανότητα αναπαραγωγής του μοντέλου $Z - N$ συνίσταται σε μια σχετικά ομαλή, χοντρική προσαρμογή της συνάρτησης $g(Z, N)$. Η ικανότητα πρόβλεψης δε, βασίζεται σε ένα τυπικό συμπερασμό αυτής της προσαρμογής. Χρειαζόμαστε παρόλα αυτά ένα περισσότερο αντιπροσωπευτικό μοντέλο, στο οποίο να λαμβάνονται υπόψη φαινόμενα ζευγοποίησης και φλοιώδους δομής, έτσι ώστε οι υπολογισμοί να ακολουθούν τις φυσικές διακυμάνσεις. Δίνουμε ιδιαίτερη προσοχή, έτσι ώστε να επινοήσουμε έναν κατάλληλο τρόπο εισαγωγής αυτών των φαινομένων στο δίκτυο που να οδηγεί σε πιο αξιόπιστα αποτελέσματα αλλά να αποφεύγονται ταυτόχρονα

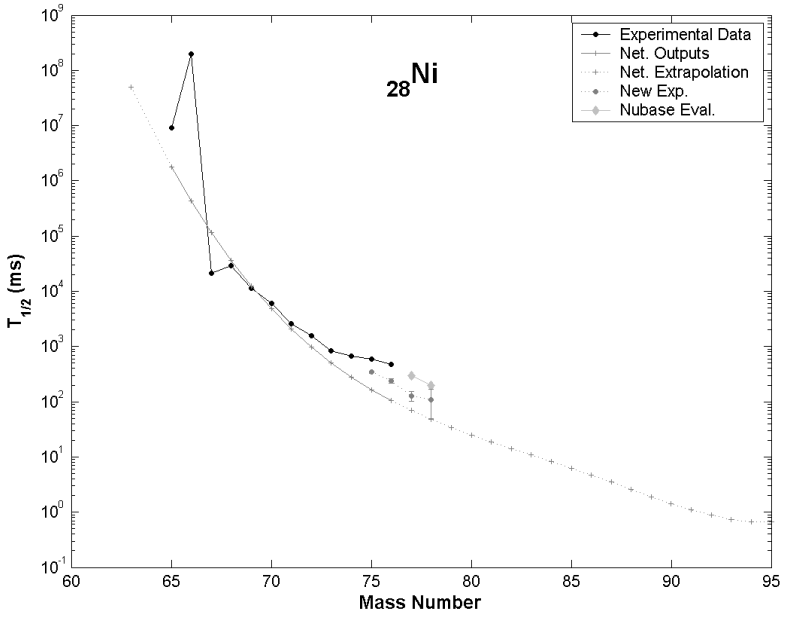


Σχήμα 13.1: Γράφημα των υπολογισμένων από το μοντέλο μας και των αντίστοιχων πειραματικών χρόνων ημιζωής της αποδιέγερσης β^- για την ισοτοπική αλυσίδα του ${}_{48}Cd$. Μοντέλο: $Z-N$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6. Με μαύρο χρώμα σημειώνονται τα πειραματικά δεδομένα, ενώ οι γκρι σταυροί αντιπροσωπεύουν τους υπολογισμούς του μοντέλου μας. Οι διακεκομμένη γραμμή παριστάνει τέλος τιμές των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του ${}_{48}Cd$ που προέρχονται από συμπερασμό. Δίκτυο: AT. 005.

τυχών επιπρόσθετοι περιορισμοί. Πετύχαμε αυτόν τον σκοπό εισάγοντας μια επιπλέον παράμετρο εισόδου, που θα την αποκαλούμε **σταθερά ζευγοποίησης** δ. Ο όρος αυτός περιγράφει ικανοποιητικά το μέγεθος που καθορίζει τον άρτιο−άρτιο, περιττό−περιττό, και άρτιο−περιττό χαρακτήρα των πυρήνων, μέσω της σχέσης:

$$\delta = \begin{cases} +1, & \text{για } \alpha-\alpha \text{ πυρήνες} \\ 0, & \text{για } \pi-\text{Μαζικό Αρ. πυρήνες} \\ -1, & \text{για } \pi-\pi \text{ πυρήνες} \end{cases} \tag{13.3}$$

Αναμένουμε λοιπόν ότι με αυτήν την αντιμετώπιση, θα λαμβάνονται υπόψη στην μοντελοποίηση κάποια φαινόμενα φλοιώδους δομής που μπορεί να επηρεάζουν την συμπεριφορά των χρόνων ημίσειας ζωής καθώς επίσης και επιτρεπτές ή απαγορευμένες μεταπτώσεις σε κάποιο βαθμό από την νέα αυτή



Σχήμα 13.2: Ίδιο με το σχ. 13.1, αλλά για την ισοτοπική αλυσίδα του $_{28}Ni$. Με σκούρο γκρι παριστάνονται πειραματικοί υπολογισμού των χρόνων ημίσειας ζωής νέων νουκλιδίων ή πιο ακριβείς επαναυπολογισμοί από την ομάδα των *Hosmer et al.* [71]. Δίκτυο: AT. 005.

μορφή εισόδου\στόχου:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_1 \\ N_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^1_{\beta,\mathrm{exp}}\right) \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_2 \\ N_2 \\ \delta_2 \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^2_{\beta,\mathrm{exp}}\right) \right\}, \ldots, \tag{13.4}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_n \\ N_n \\ \delta_n \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^n_{\beta,\mathrm{exp}}\right) \right\},$$

και από την προσαρμογή των αυξημένων ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου.

13.2.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N - \delta$

Σύμφωνα λοιπόν με όσα είπαμε στην παρ. 13.1.3, θα δώσουμε κάποια αποτελέσματα του αναλογικού μοντέλου $Z - N - \delta$ με σκοπό την σύγκριση τους με το αναλογικό μοντέλο $Z - N$ της παρ. 13.1.1, για την περίπτωση όπου τα δεδομένα εκπαίδευσης προέρχονται από το $NuSet - A$. Οι μέσες τετραγωνικές αποκλίσεις λοιπόν από δίκτυα διαφορετικής αρχιτεκτονικής για αυτή την περίπτωση δίνονται στον πίνακα 13.7.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 013	3-12-6-6-1 | 175	1.35	1.39	1.42
AT. 014	3-5-5-1 | 79	1.28	1.30	1.48
ET. 015	3-5-5-1 | 56	1.33	1.40	1.40
ET. 016	3-5-5-1 | 56	1.23	1.48	1.39
ET. 017	3-10-10-1 | 161	0.91	1.47	1.50

Πίνακας 13.7: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z - N - \delta$ για το $NuSet - A$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tanh$ για τα δίκτυα ET. 013 - 015 και $radbas$ για τα δίκτυα ET. 016 - 017. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$.

13.2.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N - \delta$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec

Για την περίπτωση τώρα της περιορισμένης στα 10^6 sec βάσης δεδομένων $NuSet - B$, δίνουμε τις αντίστοιχες αποδόσεις των δεικτών μας στον πίνακα 13.8, όταν ως συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων έχει θεωρηθεί η σιγμοειδής συνάρτηση $satsins$ και στον πίνακα 13.9, όταν ως συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων έχει θεωρηθεί η σιγμοειδής συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
AT. 018	3-5-5-1 | 79	0.60	0.63	0.66
ET. 019	3-5-5-1 | 86	0.61	0.62	0.63
ET. 020	3-5-5-1 | 56	0.61	0.62	0.66

Πίνακας 13.8: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για το $NuSet-B$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: *satsins*. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: *satlins*.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 021	3-5-5-5-1 | 86	0.55	0.62	0.66
AT. 022	3-5-5-1 | 79	0.55	0.70	0.63
ET. 023	3-5-5-1 | 56	0.54	0.64	0.64

Πίνακας 13.9: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για το $NuSet-B$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: *tanh*. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: *satlins*.

13.2.3 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N-\delta$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^3 sec

Τέλος, στον πίνακα 13.10 παρουσιάζουμε κάποιες αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^3 sec, για σύγκριση με τις αντίστοιχες των μοντέλων της παραγράφου 13.1.3.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE*		
		Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 024	3-5-5-1 | 56	0.42	0.46	0.47
AT. 025	3-5-5-1 | 79	0.34	0.41	0.48
ET. 026	3-12-6-6-1 | 175	0.31	0.44	0.46

Πίνακας 13.10: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για το $NuSet-C$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tanh$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$.

13.2.4 Συμπεράσματα

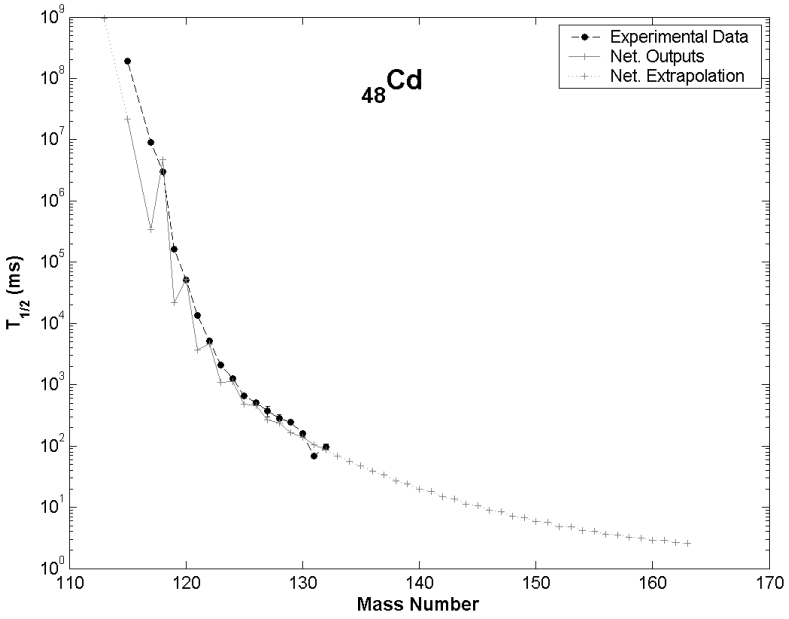
Αν λοιπόν συγκρίνουμε την μέση τετραγωνική απόκλιση των μοντέλων τύπου $Z-N$ με τις αντίστοιχες των μοντέλων τύπου $Z-N-\delta$, μπορούμε να αποφανθούμε ότι η σταθερά ζευγοποίησης δ συνεισφέρει σε μια πιο ρεαλιστική προσαρμογή και γενίκευση των δικτύων. Στα σχήματα 13.3 και 13.4 επιπλέον, δίνονται οι υπολογισμοί των χρόνων ημιζωής των ισοτόπων του ${}_{48}Cd$ και του ${}_{28}Ni$, αντίστοιχα από το δίκτυο ET. 021. Μια απευθείας αντιπαραβολή με τα σχήματα 13.1 και 13.2, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τελικά η εισαγωγή της επιπλέον εισόδου με την μορφή της σταθεράς ζευγοποίησης δ βοηθά στον συνυπολογισμό της παρατηρούμενης διακύμανσης των χρόνων ημίσειας ζωής.

13.3 Μοντέλα με την Χρήση της Τιμής$-Q$

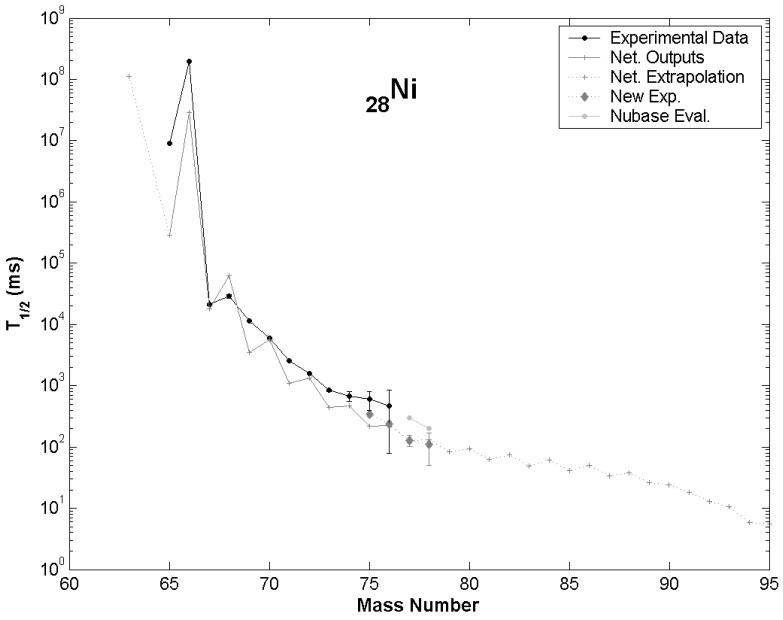
Στην τρίτη φάση ανάπτυξης δοκιμαστικών προτύπων καθολικής μοντελοποίησης των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β, αποφασίσαμε να ερευνήσουμε την στατιστική φύση της εξάρτησης του χρόνου ημιζωής από την τιμή$-Q$ της αντίδρασης ($\beta\lambda\acute{\epsilon}\pi\epsilon$ πρ. 2.6). Ήδη από την θεωρία του $Fermi$ γνωρίζουμε ότι οι χρόνοι ημίσειας ζωής είναι αντιστρόφως ανάλογοι της συνάρτησης $Fermi$ $f(Z,E)$, η οποία, σε πρώτη τάξη, είναι ανάλογη της τιμής$-Q$ της αντίδρασης υψωμένης στην πέμπτη δύναμη:

$$T_{1/2} \sim 1/f\,(Z,E) \sim Q_{\beta}^{-5} \tag{13.5}$$

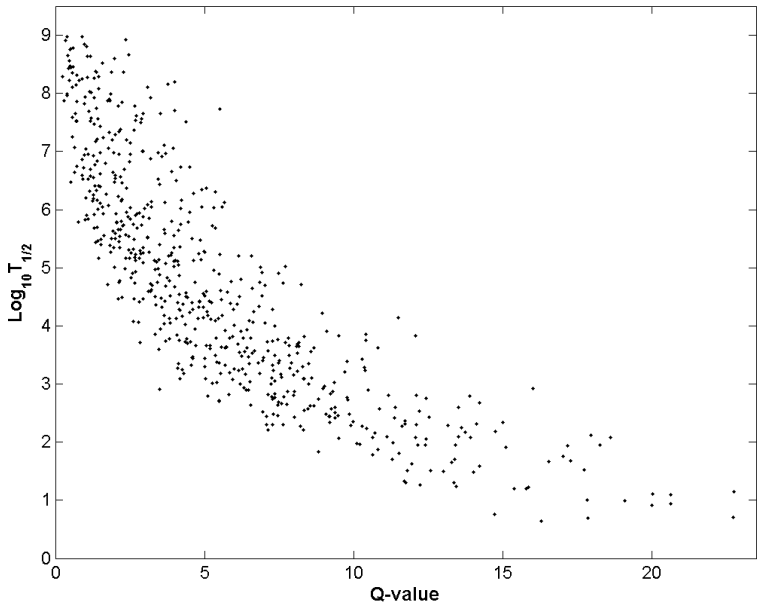
Επομένως, σε ένα λογαριθμικό διάγραμμα των χρόνων ημίσειας ζωής $T_{1/2}$



Σχήμα 13.3: Ίδιο με το σχ. 13.1. Δίκτυο: ET. 021.



Σχήμα 13.4: Ίδιο με το σχ. 13.2. Δίκτυο: ET. 021.



Σχήμα 13.5: Διάγραμμα των χρόνων ημίσειας ζωής με την τιμή$-Q$

με την τιμή$-Q$, θα περίμενε κανείς τα σημεία να διασπείρονται γύρω από μια γραμμή κλίσης $-(1/5)$. Χοντρικά αυτή η συμπεριφορά, μπορεί να παρατηρηθεί στο σχήμα 13.5.

13.3.1 Ο Προσεγγιστικός Νόμος της Θεωρίας Μέσης Τελικής Κατάστασης

Ένας ενδιαφέρον προσεγγιστικός νόμος προκύπτει και από την Θεωρίας Μέσης Τελικής Κατάστασης (παρ. 6.3) σχετικά με την εξάρτηση των χρόνων ημίσειας ζωής από την τιμή$-Q$. Παρατηρήθηκε λοιπόν από τους συγγραφής της [57] ότι οι χρόνοι ημιζωής που υπολογίστηκαν για το β^- κανάλι ακολουθούν σε σχέση με τις τιμές$-Q$ μερικών MeV τον προσεγγιστικό νόμο:

$$T_{1/2} \approx aQ^{-b}, \quad b \approx 5. \tag{13.6}$$

Σημειώνεται ότι η παρατηρούμενη ασυμπτωτική μορφή των $T_{1/2}$ για $Q \to \infty$ είναι κάπως διαφορετική από αυτήν που προκύπτει από τον παραπάνω νόμο. Παρ' όλα αυτά στην περιοχή φυσικού ενδιαφέροντος των τιμών$-Q$ δεν υπάρχει ένδειξη τέτοιας ασυμπτωτικής συμπεριφοράς. Αν και ο προσεγγιστικός αυτός νόμος είναι παρόμοιος με την εξ. (13.5), η εξήγηση δεν είναι η ίδια. Προφανώς, όταν η αποδιέγερση συμβαίνει μόνο στην θεμελιώδη κατάσταση

από μια επιτρεπτή μετάπτωση με σταθερό πυρηνικό στοιχείο μήτρας, ο νόμος της εξ. (13.6) προκύπτει από την εξ. (13.5). Ωστόσο, το αντίστροφο δεν είναι απαραιτήτως αληθές, και ειδικά, στην περίπτωση των χρόνων ημίσειας ζωής, όπου κυριαρχούν μεταπτώσεις σε διεγερμένες καταστάσεις έναντι της μετάπτωσης προς την θεμελιώδη κατάσταση όταν οι τιμές−Q είναι μεγάλες, και επιπλέον πρώτες απαγορευμένες μεταπτώσεις συχνά ανταγωνίζονται τις επιτρεπτές.

13.3.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z-N-\delta-Q$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec

Διερευνώντας λοιπόν τον τρόπο με τον οποίο η τιμή−Q μπορεί να επηρεάσει την εκπαιδευτική διαδικασία και κατ' επέκταση την ποιότητα της μοντελοποίησης, αποφασίσαμε να ενσωματώσουμε αναλογικά την τιμή−Q στην είσοδο του μοντέλου $Z-N-\delta$. Οι διαθέσιμες πειραματικές τιμές−Q, πάρθηκαν επίσης από την βάση δεδομένων $Nubase2003$ των *G. Audi et al.* [29] του Κέντρου Δεδομένων Ατομικών Μαζών (*Atomic Mass Data Center*). Κρατήσαμε έτσι από την βάση δεδομένων μας $NuSet-B$, τα νουκλίδια εκείνα για τα οποία είναι γνωστή η πειραματική τιμή−Q. Έμειναν λοιπόν τελικά 435 νουκλίδια στο εκπαιδευτικό σετ, 109 στο σετ τεκμηρίωσης και 110 στο δοκιμαστικό σετ. Θα αναφερόμαστε σε αυτό το σετ με την κωδική ονομασία $QuSet-B$, για να το διαχωρίζουμε από το πιο διευρυμένο $NuSet-B$.

Για τα γνωστά μας λοιπόν δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας που εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg-Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης, με παραδείγματα της μορφής:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i \\ N_i \\ \delta_i \\ Q_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\} \tag{13.7}$$

δίνεται στον πίνακα 13.11, η βέλτιστη απόδοση του μοντέλου.

13.3.3 Το Ψηφιακό Μοντέλο $Z-N$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec με Αναλογική Τιμή−Q

Ακολουθώντας ξανά κατόπιν την φιλοσοφία μοντελοποίησης προγενέστερων μελετών όπως αυτή των συγγραφέων της [52], αποφασίσουμε να δοκιμάσουμε την επίδοση του ψηφιακού μοντέλου $Z-N$, αν πλέον στην είσοδο προστεθεί αναλογικά και η τιμή $-Q$. Για την περίπτωση του $QuSet-B$

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος	**Αρχιτεκτονική**	*RMSE*		
Δικτύου	**Δικτύου**	Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 027	4-5-5-1 | 61	0.56	0.68	0.69

Πίνακας 13.11: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta-Q$ για το $QuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$.

λοιπόν, όπου ο χρόνος ημίσειας ζωής δεν υπερβαίνει τα 10^6 sec, οι αντίστοιχες αποδόσεις δίνονται στον πίνακα 13.5. Αξίζει να παρατηρήσει κανείς την αρκετά καλή απόδοση του εκπαιδευτικού σετ. Φαίνεται όμως, ότι όπως και στο απλούστερο ψηφιακό μοντέλο $Z-N$ της παραγράφου 13.1.4, το μοντέλο παρουσιάζει κάποια αδυναμία στην περίπτωση της γενίκευσης σε σχέση με τα αναλογικά μοντέλα.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος	**Αρχιτεκτονική**	*RMSE*		
Δικτύου	**Δικτύου**	Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 028	17-5-5-1 | 126	0.38	0.72	0.76

Πίνακας 13.12: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta-Q$ για το $QuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$.

Τα βασικότερο μειονέκτημα μοντέλων τέτοιου τύπου είναι ότι οι τιμές$-Q$ θα πρέπει, στις περιπτώσεις εκείνες που δεν είναι διαθέσιμες πειραματικά, να παρθούν από αντίστοιχες θεωρητικές φόρμουλες μάζας, όπως για παράδειγμα το μοντέλο $FRDM$, προσθέτοντας μεγαλύτερη αναξιοπιστία στα τελικά μας αποτελέσματα και ειδικά στην περίπτωση του συμπερασμού. Συγκρίνοντας λοιπόν τα αποτελέσματά των δύο τελευταίων μοντέλων με τα αντίστοιχα απο-

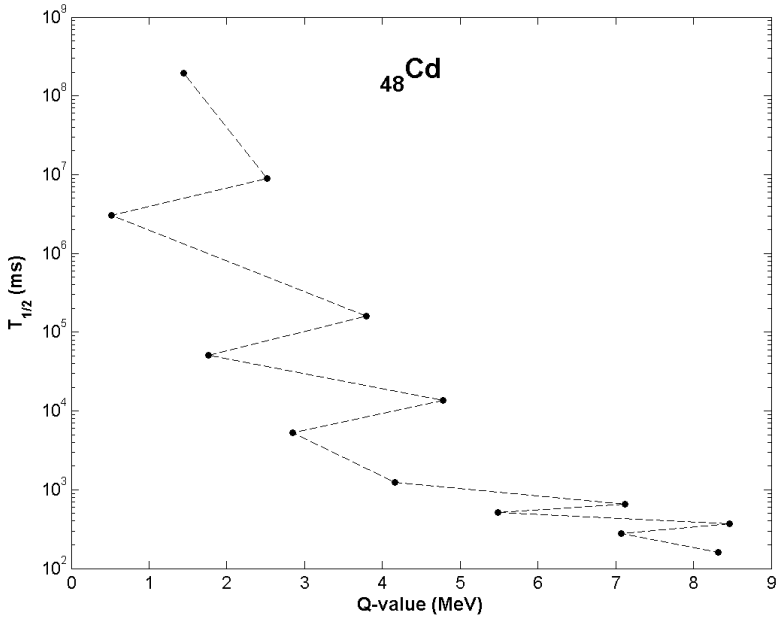
τελέσματα της παραγράφου 13.2.2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συμπερίληψη της τιμής$-Q$ στην εκπαιδευτική διαδικασία, δεν κατόρθωσε να βελτιώσει της απόδοση του μοντέλου και ειδικότερα την συμπεριφορά του συμπερασμού. Αναλογιζόμενοι δε και την έλλειψη των απαραίτητων πειραματικών δεδομένων, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα, πως τα συγκεκριμένα μοντέλα ($Z-N-\delta-Q$ και $Z-N-Q$), τουλάχιστον προς το παρόν, δεν θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμα στην πρόβλεψη των χρόνων ημίσειας ζωής απομακρυσμένων από την σταθερότητα, πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων.

13.3.4 Το Αναλογικό Μοντέλο Τύπου $Kratz-Herrmann$

Η Φόρμουλα $Kratz-Herrmann$

Στο σχήμα 13.6 δίνεται ένα λογαριθμικό τοπικό διάγραμμα των χρόνων ημίσειας ζωής $T_{1/2}$ συναρτήσει της τιμής$-Q$ για τα ισότοπα του ${}_{48}Cd$. Η ζιγκ−ζάγκ συμπεριφορά αντιπροσωπεύει κάποια άρτια−περιττή επίδραση που αντανακλά την παρατήρηση, ότι οι πρώτες διεγερμένες καταστάσεις βρίσκονται πιο πάνω από το χάσμα ζευγοποίησης.

Ορμόμενοι έτσι από τα ενθαρρυντικά αποτελέσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της φόρμουλας $Kratz-Herrmann$ στις τιμές$-P_n$, οι $Pfeiffer$



Σχήμα 13.6: Λογαριθμικό διάγραμμα των χρόνων ημίσειας ζωής συναρτήσει της τιμής$-Q$ για τα ισότοπα του ${}_{48}Cd$.

et al. [11], θεώρησαν ότι και οι χρόνοι ημίσειας ζωής $T_{1/2}$ της αποδιέγερσης β μπορούν να θεωρηθούν ως ιδιότητες "μέσης τελικής κατάστασης". Μπορεί κανείς τότε να υποθέσει ότι η στατιστικές ιδέες στις οποίες υπόκειται η φόρμουλα $Kratz - Herrmann$ μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση των χρόνων ημίσειας ζωής.

Στην περίπτωση λοιπόν της φόρμουλας $Kratz-Herrmann$, τα φαινόμενα που προκύπτουν από το χάσμα ζευγοποίησης, λαμβάνονται υπ' όψην μέσω του κατωφλιού C, με βάση τη σχέση:

$$T_{1/2} = a \cdot (Q_\beta - C)^{-b} \, [ms] \,, \tag{13.8}$$

όπου η παράμετρος κατωφλιού C υπολογίζεται σύμφωνα με την προσαρμογή των $Madlad$ και Nix, ενώ οι τιμές των παραμέτρων a και b δίνονται στον πίνακα 13.13.

γραμμική παλινδρόμηση			**προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων**		
α $[ms]$	β	$\mathbb{R}^2$	α $[ms]$	β	διωρ. $\mathbb{R}^2$
2.74E06	4.5	0.72	7.07E05 $\pm$ 5.33E05	4.0 $\pm$ 0.4	1.1E04

Πίνακας 13.13: Οι τιμές των παραμέτρων a και b, όπως προέκυψαν από τις προσαρμογές των $Pfeiffer$ *et al.* [11] για τους χρόνους ημίσειας ζωής επιλεγμένων πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων.

Η Προσαρμογή των $Madlad$ και Nix για το Χάσμα Ζευγοποίησης

Το σχετικό πλεόνασμα νετρονίων I ορίζεται ως:

$$I = \frac{N - Z}{A} \tag{13.9}$$

Έτσι, το μέσο χάσμα ζευγοποίησης νετρονίων Δ_n θα δίνεται από την έκφραση:

$$\bar{\Delta}_n = \frac{rB_s}{N^{1/3}} exp\left(-sI - tI^2\right), \tag{13.10}$$

ενώ το μέσο χάσμα ζευγοποίησης πρωτονίων Δ_p από την έκφραση:

$$\bar{\Delta}_p = \frac{rB_s}{Z^{1/3}} exp\left(sI - tI^2\right). \tag{13.11}$$

Η μέση δε λοιπή ενέργεια αλληλεπίδρασης νετρονίου−πρωτονίου δ θα έχει την μορφή:

$$\bar{\delta} = \frac{h}{A^{2/3}B_s}. \tag{13.12}$$

Με βάση τις παραπάνω εκφράσεις λοιπόν, η διόρθωση $C(Z,N)$ που προτείνεται στην μελέτη των $Madlad$ και Nix [18], λόγω του χάσματος πρωτονίων Δ_p και νετρονίων Δ_n και της λοιπής ενέργειας αλληλεπίδρασης νετρονίου−πρωτονίου δ, ανάλογα με τον άρτιο περιττό χαρακτήρα των νουκλεονίων, δίνεται στον πίνακα 13.14.

Τύπος	$D(N,Z)$
π-π	$\Delta_n + \Delta_p - \delta$
π-νετρόνιο	Δ_n
π-πρωτόνιο	Δ_p
α-α	0

Πίνακας 13.14: Η διόρθωση $C(Z,N)$ που προτείνεται λόγω του χάσματος πρωτονίων Δ_p και νετρονίων Δ_n και της λοιπής ενέργειας αλληλεπίδρασης νετρονίου −πρωτονίου δ ανάλογα με τον άρτιο περιττό χαρακτήρα των νουκλεονίων.

Οι τιμές τέλος των σταθερών που προτείνονται από τους συγγραφείς της [18], δίνονται στον πίνακα 13.15.

Σταθερά	**Τ**ιμή	**Μ**ονάδα
r	5.72	MeV
s	0.119	
t	7.89	
h	6.43	MeV
Bs	1	

Πίνακας 13.15: Οι προτεινόμενες τιμές των σταθερών του μοντέλου $Madlad$ και Nix [18].

Το Μοντέλο $Kratz - Herrmann$

Στηριζόμενοι λοιπόν σε όσα είπαμε έως τώρα, σχεδιάσαμε ένα μοντέλο στο οποίο επεκτείναμε την είσοδο του αναλογικού μοντέλου $Z - N - \delta$, προσθέτοντας μια ακόμη είσοδο με την προβλεπόμενη τιμή των χρόνων ημίσειας ζωής από την φόρμουλα $Kratz - Herrmann$. Χρησιμοποιούμε λοιπόν τη βάση δεδομένων $QuSet - B$, εφόσον χρειαζόμαστε τις τιμές−Q για τον υπολογισμό των χρόνων ημίσειας ζωής μέσω της σχέσης (13.8). Έτσι τα δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας που δοκιμάσαμε, εκπαιδεύτηκαν με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg - Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης, με παραδείγματα της μορφής:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i \\ N_i \\ \delta_i \\ \log_{10}\left(T_i^{KHF}\right) \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}, \tag{13.13}$$

Αναμένουμε λοιπόν η θεωρητική αυτή εκτίμηση των χρόνων ημιζωής, η οποία λαμβάνει υπ' όψην της τα φαινόμενα χάσματος ζευγοποίησης, να συνεισφέρει σε μια πιο ικανοποιητική προσαρμογή. Εντούτοις, όπως φαίνεται από την μέση τετραγωνική απόκλιση που δίνεται στον πίνακα 13.16, και αυτό το μοντέλο, παρά το γεγονός ότι είναι αναλογικό, εμφανίζει κάποια αδυναμία στην περίπτωση της γενίκευσης.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 029	4-5-5-5-5-1| 121	0.48	0.62	0.74

Πίνακας 13.16: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Kratz-Herrmann$ για το $QuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώ-νων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin.

Το Μοντέλο $Madlad-Nix$

Πριν λοιπόν εγκαταλείψουμε την προσπάθεια συνυπολογισμού των φαινομένων χάσματος ζευγοποίησης, αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε απ' ευθείας στην είσοδο των μοντέλων μας την σταθερά χάσματος $C(Z,N)$, με στόχο να αποφύγουμε αφενός τις τιμές$-Q$, καθώς θα μας προβληματίσουν στην περίπτωση της πρόγνωσης των χρόνων ημιζωής άγνωστων νουκλιδίων, και αφετέρου να ενισχύσουμε την γνωστή μας σταθερά ζευγοποίησης δ, δίνοντας της μια πιο λεπτομερή περιγραφή, αφού πλέον θα εξαρτάται και από τον αριθμό των νουκλεονίων του πυρήνα.

Έτσι δουλέψαμε πάλι με δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας τα οποία εκπαιδεύτηκαν με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg-Marquardt$ μέσω της τεχνι-

κής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης, με παραδείγματα της μορφής:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i \\ N_i \\ \delta_i \\ C(Z,N) \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\mathrm{exp}}\right) \right\} . \tag{13.14}$$

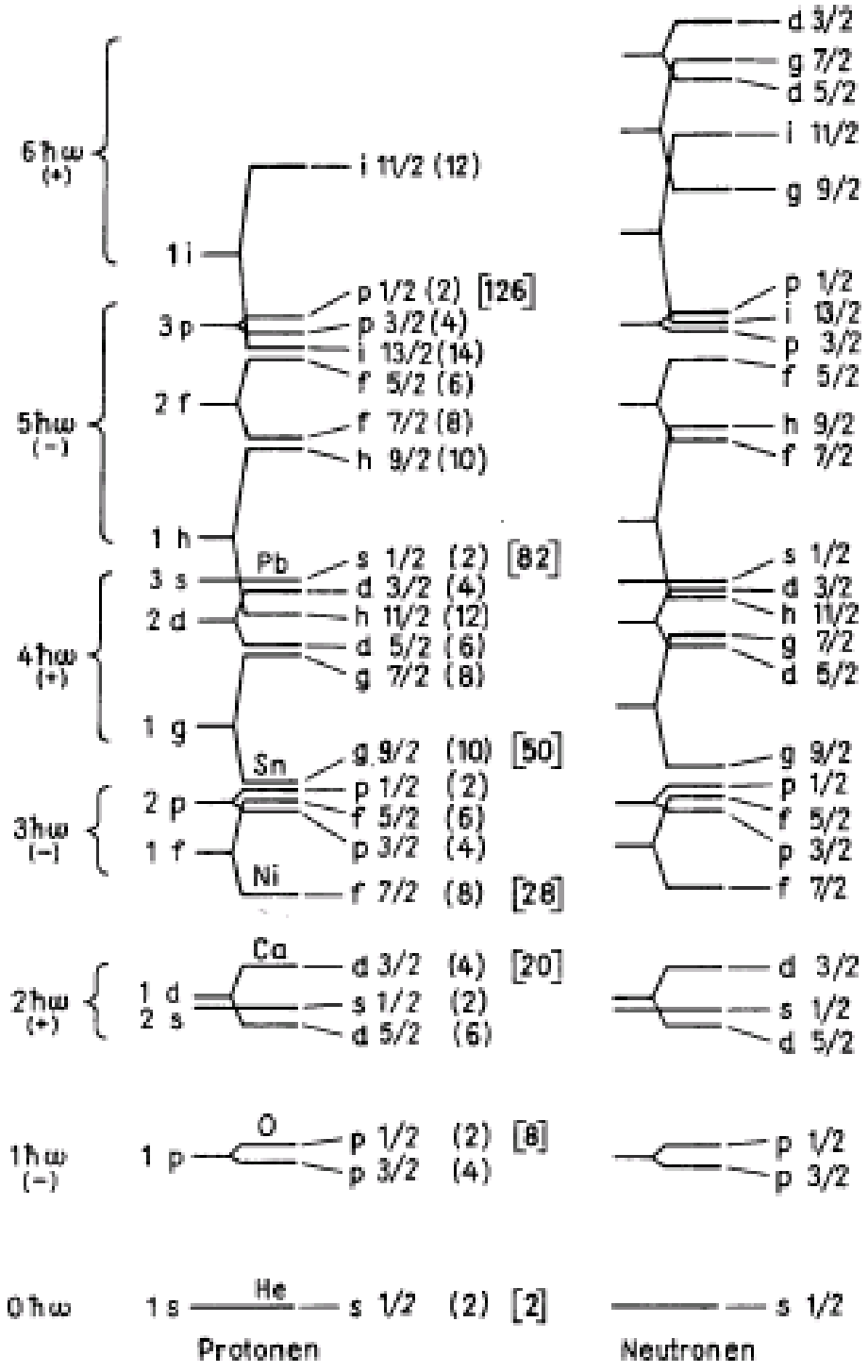
Χρησιμοποιούμε στην περίπτωση αυτή το $NuSet-B$, όμως, και όχι το $QuSet-B$, καθώς δεν χρειαζόμαστε πλέον τις τιμές$-Q$. Η καλύτερη απόδοση που καταφέραμε να εξάγουμε με την μέθοδο αυτή, δεν μας άφησε ιδιαίτερα ικανοποιημένους. Τα $RMSE$ του μοντέλου δίνονται στον πίνακα 13.17.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	$RMSE$ Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 030	4-5-5-5-5-1| 121	0.67	0.71	0.71

Πίνακας 13.17: $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Madlad-Nix$ για το $NuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin.

13.4 Μικροστατιστικά Μοντέλα του Προτύπου των Φλοιών

Με στόχο να δώσουμε στα μοντέλα μας έναν κάπως πιο μικροσκοπικό χαρακτήρα, δοκιμάσαμε να χρησιμοποιήσουμε το Πρότυπο των Φλοιών και να δώσουμε ως είσοδο στα δίκτυά μας, όχι τον ατομικό και τον νετρονικό αριθμό, αλλά την κατανομή των πρωτονίων και των νετρονίων στους αντίστοιχους ε-νεργειακούς φλοιούς. Στα πλαίσια λοιπόν του προτύπου αυτού, το πυρηνικό σύστημα δημιουργείται με σταδιακή συμπλήρωση των καταστάσεων του σχήματος 13.7. Έτσι, η βασική κατάσταση του πυρήνα που μας ενδιαφέρει, καθώς μελετάμε πυρήνες οι οποίοι αποδιεγείρονται από τη θεμελιώδη τους κατάσταση, μπορεί να περιγραφεί από την κατανομή των Z πρωτονίων και N νετρονίων στις κατώτερες δυνατές καταστάσεις.



Σχήμα 13.7: Ενεργειακές καταστάσεις ενός νουκλεονίου στο πρότυπο των φλοιών για κεντρικό δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή και φρέατος δυναμικού με σύζευξη σπιν−τροχιάς. [68]

Το φάσμα των ενεργειακών καταστάσεων του σχήματος 13.7, προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης του *Schröndinger* για ένα ρεαλιστικό δυναμικό. Στο αριστερό μέρος του σχήματος δίνεται η διάταξη των ενεργειακών καταστάσεων για ένα καθαρά κεντρικό δυναμικό με μορφή ενδιάμεση, μεταξύ αρμονικού ταλαντωτή και φρέατος. Ο χαρακτήρας της δομής φλοιών μεταβάλλεται στο δεξιό μέρος του σχήματος με την εισαγωγή της αλληλεπίδρασης σπιν−τροχιάς που επιπλέον συμβάλει στη μεγαλύτερη άρση του εκφυλισμού που προβλέπει το δυναμικό του ταλαντωτή.

Θεωρούμε ως είσοδο λοιπόν την κατανομή αυτή στους ενεργειακούς φλοιούς με στόχο να μελετήσουμε την εξάρτηση των χρόνων ημίσειας ζωής από τα φαινόμενα φλοιώδους δομής. Μια τέτοια προσέγγιση βέβαια ενέχει αρκετά προβλήματα. Εφόσον οι ελεύθερες παράμετροι του μοντέλου μας καθορίζονται από την προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα, γίνεται φανερό, ότι για τις χαμηλότερες ενεργειακές καταστάσεις θα υπάρχουν περισσότερα δεδομένα προσαρμογής, ενώ στις μεγαλύτερες ενεργειακές καταστάσεις η προσαρμογή θα είναι πιο αδύναμη. Επιπλέον, αφού μας ενδιαφέρει η πρόβλεψη των χρόνων ημίσειας ζωής άγνωστων, πολύ πλούσιων σε νετρόνια, πυρήνων, θα αντιμετωπίσουμε κάποιο πρόβλημα στην περίπτωση της γενίκευσης, καθώς όπως είπαμε στην παράγραφο 6.8 στους εξωτικούς πυρήνες, η συνεχής πυρηνική δομή γίνεται όλο και περισσότερο σημαντική.

Δοκιμάζοντας όμως τα μοντέλα που αναπτύξαμε στην γνωστή περιοχή, όπου γνωρίζουμε την κατανομή των νουκλεονίων στους ενεργειακούς φλοιούς, συνειδητοποιήσαμε ότι δεν είναι σε θέση να αναπαράγουν την παρατηρούμενη συστηματική των χρόνων ημίσειας ζωής με μεγαλύτερη ακρίβεια από ότι τα σχετικά απλοποιημένα $Z-N-\delta$ πρότυπα. Σε συνδυασμό δε και με τις δυσκολίες που αναφέραμε παραπάνω, αποφασίσαμε πολύ γρήγορα να εγκαταλείψουμε αυτήν την προσπάθεια.

Τα σημαντικότερα μοντέλα που αναπτύξαμε με βάση το Πρότυπο των Φλοιών, παρουσιάζονται στις δύο επόμενες παραγράφους.

13.4.1 Αναλογικό Μοντέλο Κατανομής των Νουκλεονίων στις Ενεργειακές Καταστάσεις

Στο πρώτο μας μοντέλο λοιπόν, θεωρούμε ως είσοδο του δικτύου την κατανομή των πρωτονίων και των νετρονίων στις αντίστοιχες ενεργειακές καταστάσεις, όπως αυτές δίνονται στο σχήμα 13.7. Θα χρησιμοποιήσουμε για την εκπαίδευση των δικτύων μας το σετ δεδομένων $NuSet-B$, στο οποίο ο μέγιστος αριθμός πρωτονίων είναι 99 και ο μέγιστος αριθμός νετρονίων είναι 158. Για την κατανομή των 99 πρωτονίων λοιπόν σύμφωνα με το σχήμα

13.7 θα απαιτούνται 18 είσοδοι και για την κατανομή των 158 νετρονίων αντίστοιχα, απαιτούνται 26 είσοδοι. Έτσι κάθε νουκλίδιο θα περιγράφεται από μια ανυσματική είσοδο 44 στοιχείων. Η είσοδος που θα δέχεται λοιπόν το δίκτυο για το $^{35}_{11}Na_{24}$ για παράδειγμα, το οποίο αποτελείται από 11 πρωτόνια και 24 νετρόνια, θα είναι:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \textit{για την κατανομή των πρωτονίων και} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \textit{για την κατανομή των νετρονίων.}$$

Για δίκτυα λοιπόν ευθείας τροφοδοσίας που εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg - Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης, οι αποδόσεις του παρόντος μοντέλου δίνονται στον πίνακα 13.18.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 031	44-5-1 | 231	0.73	0.75	0.72
ET. 032	44-5-5-1 | 261	0.71	0.73	0.72

Πίνακας 13.18: Αποδόσεις του μοντέλου κατανομής των νουκλεονίων στις ενεργειακές καταστάσεις. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

13.4.2 Αναλογικό Μοντέλο Ποσοστιαίας Κατάληψης των Ενεργειακών Καταστάσεων

Στην συνέχεια σκεφτήκαμε να αναπτύξουμε ένα μοντέλο, όπου πλέον η είσοδος των δικτύων θα δίνεται από την ποσοστιαία κατάληψη των αντί-στοιχων ενεργειακών καταστάσεων και όχι από την αναλυτική κατανομή των νουκλιδίων σε αυτές. Έτσι η πλήρης κατάληψη μιας ενεργειακής στάθμης θα αντιστοιχεί στην τιμή 1 και η μερική κατάληψη της στον λόγο του αριθμού νουκλεονίων που κατανέμονται στην στάθμη προς των αριθμό των νουκλεονίων που απαιτούνται για την πλήρη κατάληψή της. Η είσοδος που θα δέχεται λοιπόν το δίκτυο για το $^{35}_{11}Na_{24}$ π.χ., θα είναι:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau\alpha \quad \pi\rho\omega\tau\acute{o}\nu\iota\alpha \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \gamma\iota\alpha \quad \tau\alpha \quad \nu\varepsilon\tau\rho\acute{o}\nu\iota\alpha.$$

Στον πίνακα 13.19 δίνεται η απόδοση που προκύπτει από δίκτυα ευθείας επίσης τροφοδοσίας που εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Leven-berg-Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης.

13.4.3 Αναλογικό Μοντέλο Απόκλισης από τους Μαγικούς Αριθμούς

Στο τελευταίο μοντέλο που αναπτύξαμε με βάση το Πρότυπο των Φλοιών, υπολογίζουμε την απόκλιση της κατανομής των νουκλεονίων από την πλήρη συμπλήρωση του πλησιέστερου φλοιού, ή πιο απλά την απόκλιση από τον πλησιέστερο μαγικό αριθμό (2 8 20 28 50 82 126). Η ιδέα προήλθε από την παρατήρηση ότι οι πυρήνες των οποίων ο αριθμός νετρονίων ή πρωτονίων αντιστοιχεί σε κλειστούς φλοιούς παρουσιάζουν εν γένη μεγαλύτερη σταθερότητα. Έτσι η είσοδος που θα δέχεται το δίκτυο π.χ. για το $^{35}_{11}Na_{24}$, θα είναι:

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 033	44-5-1 | 231	0.67	0.76	0.75
ET. 034	44-5-5-1 | 261	0.71	0.74	0.74

Πίνακας 13.19: Αποδόσεις του μοντέλου ποσοστιαίας κατάληψης των ενεργειακών καταστάσεων. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίη-σης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ +3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{για την κατανομή των πρωτονίων και} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{για την κατανομή των νετρονίων.}$$

που σημαίνει ότι για τα πρωτόνια ο πιο κοντινός μαγικός αριθμός είναι το 8 και τον υπερβαίνει η κατανομή κατά 3 πρωτόνια (+3), ενώ για τα 24 νετρόνια συμπληρώνεται πλήρως ο πρώτος και ο δεύτερος φλοιός με 2 και 8 νετρόνια αντίστοιχα και τα υπόλοιπα 14 νετρόνια καταλαμβάνουν τον τρίτο φλοιό (20), απαιτούνται δηλαδή άλλα 6 νετρόνια για την συμπλήρωσή του, οπότε θεωρούμε την τιμή -6. Ο πίνακας 13.20 περιέχει λοιπόν τις αποδόσεις του που προέκυψαν με βάση το μοντέλο αυτό από δίκτυα επίσης ευθείας τροφοδοσίας που εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg - Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης.

13.5 Μοντέλα Υπερχώρων

Με έναυσμα την θεωρία των $SVMs$ (κεφ. 17), σκεφτήκαμε στη συνέχεια, να αναπτύξουμε ένα μοντέλο, του οποίου οι είσοδοι (Z, N) θα έχουν με κατάλληλη προεπεξεργασία μεταφερθεί σε κάποιον συγκεκριμένο μεγαλύτε-ρων

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 035	14-5-1 | 81	0.68	0.74	0.75
ET. 036	14-5-5-1 | 111	0.64	0.72	0.71

Πίνακας 13.20: Αποδόσεις του μοντέλου απόκλισης από τους μαγικούς αριθμούς. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

διαστάσεων χώρο $\mathbb{R}$. Θέλαμε με το εγχείρημα αυτό να διερευνήσουμε την επίδραση που θα έχει στην απόκριση των μοντέλων μας τόσο μια πιο διευρυμένη είσοδος, η οποία θα περιλαμβάνει επιπλέον τον ατομικό αριθμό και τον αριθμό νετρονίων υψωμένους σε κάποια δύναμη, όσο και το γινόμενό τους. Με βάση λοιπόν την συλλογιστική αυτή κατασκευάσαμε τα ακόλουθα μοντέλα.

13.5.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Θεωρώντας αρχικά την αντιστοιχία $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $\Phi(Z, N) = (Z^2, ZN, N^2$ ($\beta\lambda\acute{\epsilon}\pi\epsilon$ πρ. 17.4.1), σχεδιάσαμε μοντέλα όπου τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα έχουν την μορφή:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i^2 \\ Z_i N_i \\ N_i^2 \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}, \tag{13.15}$$

όπου, όπως φαίνεται, έχει συμπεριληφθεί και η σταθερά ζευγοποίησης δ.

Εξακολουθώντας λοιπόν να δουλεύουμε με δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας που εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg - Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης, η απόδοση του παρόντος μοντέλου φαίνεται στον πίνακα 13.21.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 037	4-5-5-1 | 61	0.57	0.62	0.69
ET. 038	4-7-7-1 |99	0.62	0.65	0.68

Πίνακας 13.21: Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

13.5.2 Το Αναλογικό Μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$

Μετέπειτα, με στόχο πάντα την βελτίωση της απόδοσης των μοντέλων μας, δοκιμάσαμε να μεταφέρουμε τις εισόδους των δικτύων μας σε έναν κάπως μεγαλύτερο χώρο. Θεωρήσαμε λοιπόν την αντιστοιχία $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ με $\Phi\left(Z,N\right)=(Z^4, Z^3N, Z^2N^2, ZN^3, N^4)$, στηριζόμενοι στο ανάπτυγμα του $(Z+N)^4$. Τα παραδείγματα που χρησιμοποιούνται τώρα στην εκπαιδευτική διαδικασία λοιπόν, θα έχουν την μορφή:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i^4 \\ Z_i^3 N_i \\ Z_i^2 N_i^2 \\ Z_i N_i^3 \\ N_i^4 \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}. \tag{13.16}$$

Έτσι, για τα δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας που εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg - Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης, η απόδοση του νέου αυτού μοντέλου φαίνεται στον πίνακα 13.22.

13.5.3 Το Αναλογικό Μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$

Τέλος, θέλαμε να δούμε την απόκριση των δικτύων αν οι είσοδοι μεταφερθούν σε κάποιον ακόμη μεγαλύτερο χώρο, όπου οι μεγιστοβάθμιοι όροι

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 039	6-5-5-1 | 71	0.59	0.64	0.74
ET. 040	6-7-7-1 | 113	0.63	0.70	0.75

Πίνακας 13.22: Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: *LM*. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: *tahn*. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: *lin*. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

θα υψώνονται πλέον σε περιττή δύναμη. Με βάση λοιπόν την αντιστοιχία $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$ με $\Phi\left(Z,N\right)=(Z^5, Z^4N, Z^3N^2, Z^2N^3, ZN^4, N^5)$, που στηρίζεται στο ανάπτυγμα του $(Z+N)^5$, η νέα μορφή των παραδειγμάτων που χρησιμοποιούνται στην εκπαιδευτική διαδικασία θα είναι:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i^5 \\ Z_i^4 N_i \\ Z_i^3 N_i^2 \\ Z_i^2 N_i^3 \\ Z_i N_i^4 \\ N_i^5 \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}. \tag{13.17}$$

Ο πίνακας 13.23 παρουσιάζει τα $RMSE$ που προκύπτουν λοιπόν από τα δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας που επίσης εκπαιδεύονται με την βοήθεια του αλγορίθμου $Levenberg - Marquardt$ μέσω της τεχνικής της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης.

Αν λοιπόν κάνει κανείς μια σύγκριση μεταξύ των αποδόσεων των μοντέλων που στηρίζονται στην μεταφορά της εισόδου σε κάποιον υπερχώρο, μπορεί εύκολα να αποφανθεί ότι όσο πιο διευρυμένος είναι εν γένει ο χώρος, τόσο δυσκολότερη είναι η προσαρμογή του μοντέλου. Αυτό οφείλεται εν μέρη στη κλιμακοποίηση των δεδομένων εισόδου στο διάστημα $[-1,1]$ προκειμένου να αποφευχθούν φαινόμενα κορεσμού των συναρτήσεων ενεργοποίησης. Όσο μεγαλύτερη είναι λοιπόν η δύναμη στην οποία υψώνεται η είσοδος, τόσο πε-

ρισσότερο η κλιμακοποίηση τείνει να οδηγήσει τις εισόδους σε μια τιμή πολύ κοντά στο 1, δυσκολεύοντας έτσι την διαφοροποίησή τους.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 041	7-5-5-1 | 76	0.91	0.89	0.90
ET. 042	7-7-7-1 | 120	0.64	0.69	0.81

Πίνακας 13.23: Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

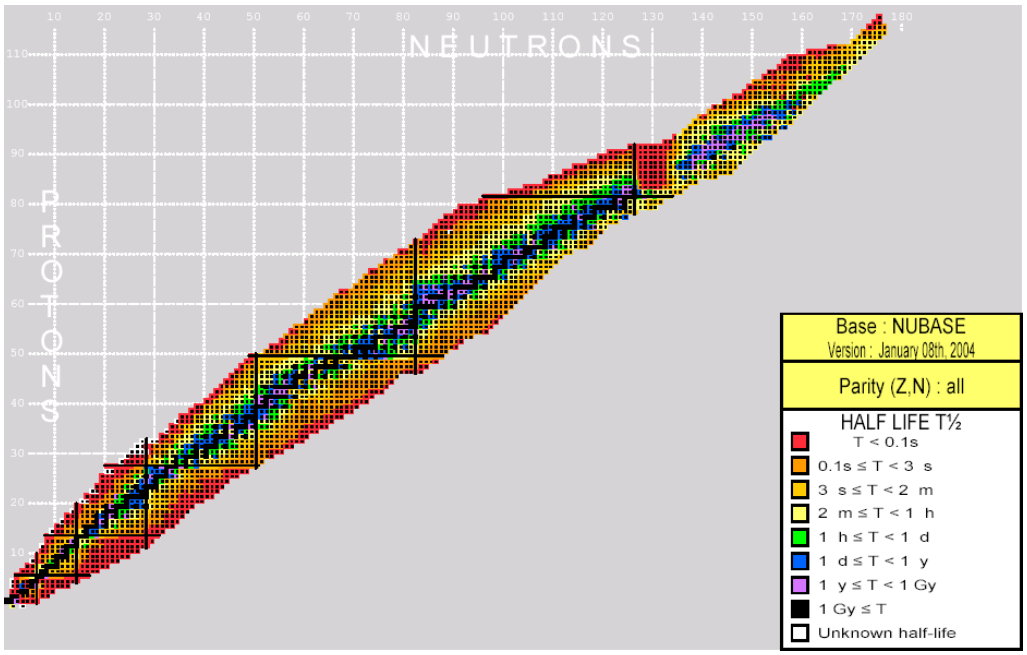
13.6 Μοντέλα Ισοαλυσίδων

Αν προσέξουμε την κατανομή των χρόνων ημίσειας ζωής στον πίνακα των νουκλιδίων (σχήμα 13.8), μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όσο απομακρυνόμαστε από την σταθερότητα κατά μήκος, τόσο των ισοτοπικών αλυσίδων, όσο και των ισοβαρών και των ισότονων, ο χρόνος ημιζωής σε γενικές γραμμές γίνεται όλο και μικρότερος. Αυτή λοιπόν η παρατήρηση, μας οδήγησε στην σκέψη να εισάγουμε στα μοντέλα τύπου $Z - N - \delta$, ένα επιπλέον μέγεθος, που να αντικατοπτρίζει την απόσταση του νουκλιδίου που μας ενδιαφέρει, από το αντίστοιχο σταθερό νουκλίδιο. Κατασκευάσαμε έτσι τέσσερα μοντέλα, ανάλογα με το είδος της αλυσίδας που μας ενδιαφέρει.

13.6.1 Το Αναλογικό Μοντέλο Z_{eff}

Το πρώτο μοντέλο αναφέρεται στην απόκλιση του αριθμού των πρωτονίων του εκάστοτε νουκλιδίου, από τον αριθμό των πρωτονίων του αντίστοιχου σταθερού ισοτόπου. Ορίζουμε λοιπόν ως Z_{eff} το μέγεθος που δίνεται από την έκφραση:

$$Z^i_{eff} = Z_i - Z_{stable} \tag{13.18}$$



Σχήμα 13.8: Πίνακας των νουκλιδίων. Κατανομή των χρόνων ημίσειας ζωής.

Εύλογα, τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία θα έχουν την μορφή:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i \\ N_i \\ Z_{eff,i} \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}. \tag{13.19}$$

Ο πίνακας 13.24 λοιπόν, παρουσιάζει τις αποδόσεις των δικτύων ευθείας τροφοδοσίας που χρησιμοποιήθηκαν. Ως αλγόριθμος εκπαίδευσης έχει πάλι θεωρηθεί ο αλγόριθμος $Levenberg-Marquardt$, ενώ επίσης έχει χρησιμοποιηθεί η τεχνική της διατεκμηρίωσης στα πλαίσια της παράλληλης επιβλεπόμενης εκμάθησης. Και σε αυτήν την περίπτωση τέλος, όπως και σε όλα τα προηγούμενα μοντέλα που συζητήθηκαν ως τώρα, αλλά και αυτά που θα ακολουθήσουν, τόσο τα δεδομένα εισόδου, όσο και οι λογάριθμοι των πειραματικών τιμών των χρόνων ημίσειας ζωής κλιμακοποιήθηκαν κατάλληλα στο διάστημα $[-1, 1]$, ώστε να αποφεύγονται φαινόμενα κορεσμού των συναρτήσεων ενεργοποίησης. Τα $RMSE$, όμως, που δίνονται στους πίνακες υπολογίζονται, αφού αποκλιμακοποιήσουμε τις εξόδους του δικτύου και τους στόχους (τους λογάριθμους δηλ. των πειραματικών τιμών των χρόνων ημίσειας ζωής).

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 043	4-6-6-5-5-1 | 143	0.46	0.60	0.63
ET. 044	4-5-5-1 | 61	0.55	0.58	0.64
ET. 045	4-10-10-1 |171	0.52	0.66	0.65
ET. 046	4-5-5-5-1 |91	0.56	0.61	0.61

Πίνακας 13.24: Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου Z_{eff}. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin για το πρώτο δίκτυο και $satlins$ για τα υπόλοιπα. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

13.6.2 Το Αναλογικό Μοντέλο N_{eff}

Στη συνέχεια, σχεδιάσαμε ένα αντίστοιχο μοντέλο, με βάση την απόκλιση του αριθμού των νετρονίων του εκάστοτε νουκλιδίου, από τον αριθμό των νετρονίων του αντίστοιχου σταθερού ισότονου. Ορίζουμε κατ' αντιστοιχία λοιπόν ως N_{eff} το μέγεθος που δίνεται από την έκφραση:

$$N^i_{eff} = N_i - N_{stable} \tag{13.20}$$

Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία με βάση τα παραπάνω επομένως θα έχουν την μορφή:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i \\ N_i \\ N_{eff,i} \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}. \tag{13.21}$$

Οι αποδόσεις των αναλογικών μοντέλων N_{eff} δίνονται στον πίνακα 13.25.

13.6.3 Το Αναλογικό Μοντέλο A_{eff}

Κατ' αναλογία με τα δύο προηγούμενα παραδείγματα, κατασκευάσαμε και ένα μοντέλο, με βάση την απόκλιση του μαζικού αριθμού A του εκάστοτε νουκλιδίου, από τον μαζικό αριθμό του αντίστοιχου σταθερού ισοβαρούς στοιχείου. Ορίζουμε έτσι ως A_{eff} το μέγεθος που δίνεται από την έκφραση:

$$A^i_{eff} = A_i - A_{stable} \tag{13.22}$$

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 047	4-5-5-1 | 61	0.60	0.66	0.68
ET. 048	4-10-10-1 |171	0.77	0.77	0.80
ET. 049	4-5-5-5-1 |91	0.57	0.66	0.68

Πίνακας 13.25: Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου N_{eff}. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

Τα παραδείγματα μας προφανώς θα είναι της μορφής:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i \\ N_i \\ A_{eff,i} \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}. \tag{13.23}$$

Ο πίνακας 13.26 παρουσιάζει λοιπόν τις αποδόσεις των αναλογικών μοντέλων A_{eff}.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 050	4-5-5-1 | 61	0.62	0.61	0.68
ET. 051	4-10-10-1 |171	0.60	0.70	0.72
ET. 052	4-5-5-5-1 |91	0.72	0.74	0.83

Πίνακας 13.26: Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου A_{eff}. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$.

13.6.4 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z_{eff} - N_{eff} - A_{eff}$

Τέλος, σκεφτήκαμε να συνδυάσουμε τα τρία αυτά ενεργά μεγέθη που ορίσαμε σε ένα δίκτυο. Έτσι θεωρήσαμε παραδείγματα της μορφής:

$$\left\{ \begin{pmatrix} Z_i \\ N_i \\ Z_{eff,i} \\ N_{eff,i} \\ A_{eff,i} \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}. \tag{13.24}$$

Στον πίνακα λοιπόν 13.27 δίνονται τα αποτελέσματα του τελευταίου αυτού μοντέλου ισοαλυσίδων.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 053	6-5-5-1 | 71	0.55	0.61	0.71
ET. 054	6-10-10-1 |191	0.78	0.76	0.73
ET. 055	6-5-5-5-1 |101	0.53	0.65	0.67

Πίνακας 13.27: Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου $Z_{eff} - N_{eff} - A_{eff}$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$.

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς τις πολύ καλές αποδόσεις του μοντέλου Z_{eff}, και αντίστοιχα τις όχι και τόσο καλές αποδόσεις των άλλων τριών μοντέλων. Φαίνεται κατά κάποιον τρόπο λοιπόν ότι η απόκλιση του αριθμού των πρωτονίων του εκάστοτε νουκλιδίου, από τον αριθμό των πρωτονίων του αντίστοιχου σταθερού ισοτόπου να παίζει κάποιον ρόλο στην παρατηρούμενη συστηματική των χρόνων ημίσειας ζωής. Το μοντέλο αυτό όμως παρουσιάζει μια σημαντική δυσκολία. Δεν μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε στοιχεία πέραν του μολύβδου, καθώς ο ^{208}Pb είναι το τελευταίο σταθερό στοιχείο που γνωρίζουμε. Το πρόβλημα βέβαια μπορεί να ξεπεραστεί, είτε χρησιμοποιώντας κάποια θεωρητική φόρμουλα υπολογισμού του σταθερότερου ισοτόπου, ή πιο

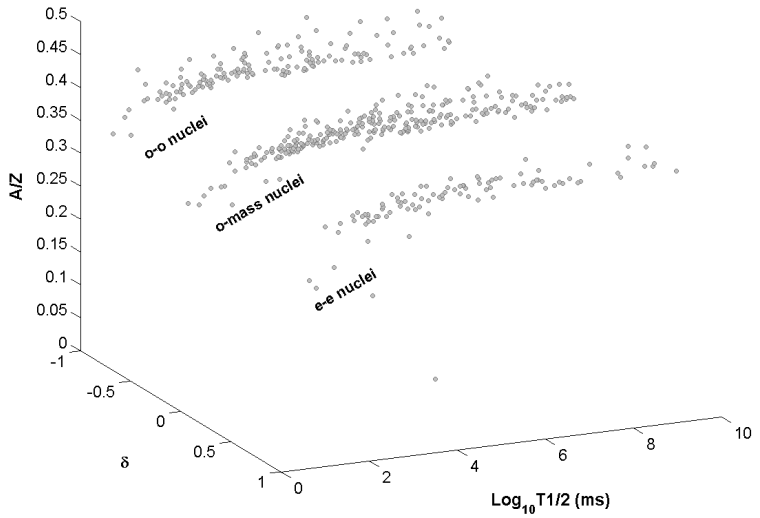
απλά θεωρώντας ως σταθερό το αμέσως προηγούμενο νουκλίδιο που δεν αποδιεγείρεται με β^- διάσπαση. Το τελευταίο το χρησιμοποιήσαμε ήδη στα μοντέλα μας, στην περίπτωση των λίγων ενδιάμεσων ισοτοπικών, ισότονων ή ισοβαρών αλυσίδων που δεν αντιστοιχούν σε κάποιο σταθερό στοιχείο.

13.7 Το Αναλογικό Μοντέλο $[A/Z]$, $[N-Z]$, $[\delta]$

Σύμφωνα με όσα συζητήθηκαν στη παράγραφο 3.2, θέλαμε να δοκιμάσουμε κατόπιν την επίδραση του λόγου του μαζικού αριθμού προς τον αριθμό πρωτονίων, σε συνδυασμό με την διαφορά μεταξύ του αριθμού των πρωτονίων και των νετρονίων των πυρήνων. Εδώ λοιπόν θα έχουμε παραδείγματα της μορφής:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A_i/Z_i \\ N_i - Z_i \\ \delta_i \end{pmatrix}, \log_{10}\left(T^i_{\beta,\exp}\right) \right\}. \tag{13.25}$$

Στο σχήμα 13.9, δίνεται ένα τρισδιάστατο γράφημα που απεικονίζει τους χρόνους ημίσειας ζωής ανάλογα με την κατανομή του άρτιου−περιττού χαρακτήρα και το λόγο A/Z των πυρήνων του $NuSet-B$.



Σχήμα 13.9: Οι χρόνοι ημίσειας ζωής ανάλογα με την κατανομή του άρτιου−περιττού χαρακτήρα και το λόγο $[A/Z]$ των νουκλιδίων του $NuSet-B$.

Η απόδοση αυτού του μοντέλου παρατίθεται στον πίνακα 13.28. Μπορεί να δει λοιπόν κανείς, ότι η εισαγωγή του λόγου A/Z, δεν βελτίωσε την ικανότητα προσαρμογής.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 056	3-5-5-5-1 | 86	0.55	0.74	0.70

Πίνακας 13.28: Απόδοση του αναλογικού μοντέλου $[A/Z]$, $[N-Z]$, $[\delta]$. Δί-κτυο: ΕΤ. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin.

13.8 Προοπτικές και Μοντέλα Αναπαράστασης της Αλληλεπίδρασης Νουκλεονίου−Νουκλεονίου

Μετά λοιπόν από αρκετές δοκιμές, αναλογικών και ψηφιακών μοντέλων, μπορούμε να καταλήξουμε σε τρία πολύ βασικά συμπεράσματα.

Η βελτίωση της ζητούμενης προσαρμογής που επήλθε από την εισαγωγή της σταθεράς ζευγοποίησης δ μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι υπάρχει, όπως και αναμέναμε, μια ισχυρή εξάρτηση της συστηματικής των χρόνων ημίσειας ζωής από τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Η μορφή ωστόσο αυτής της σταθεράς δεν είναι ικανή να συμπεριλάβει επαρκώς τα φαινόμενα ζευγοποίησης. Αυτό μπορεί εύκολα να φανεί από τα διαγράμματα ισοτοπικών αλυσίδων που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, αλλά και αυτά που θα ακολουθήσουν στο επόμενο κεφάλαια. Η αναζήτηση λοιπόν μιας εισόδου διαφορετικού τύπου, που να μπορεί να συμπεριλαμβάνει με κάποιον τρόπο την άρτια−περιττή επίδραση, θα πρέπει να μας απασχολήσει έντονα.

Η παρατήρηση πως στα ψηφιακά μοντέλα η εκπαιδευτική διαδικασία έχει την δυνατότητα να προχωρήσει λίγο περισσότερο από ότι στα αντίστοιχα αναλογικά μοντέλα, αλλά εμφανίζεται κάποια αδυναμία στην περίπτωση της γενίκευσης, φανερώνει μια γενικότερη δυναμική των μοντέλων τέτοιου τύπου, καθώς είναι μάλλον σε θέση, αν σχεδιαστούν σωστά, να συμπεριλάβουν εγγε-νώς φαινόμενα που μπορεί να καθορίζουν την αποδιέγερση των πυρήνων, όπως για

παράδειγμα τα φαινόμενα φλοιώδους δομής ή\και ζευγοποίησης, ή επιτρεπτές και απαγορευμένες μεταπτώσεις.

Τέλος, το τελικό μοντέλο της αποδιέγερσης β^-, είτε μικροσκοπικό είναι αυτό, είτε καθαρά στατιστικής φύσης, ή υβριδικό, θα πρέπει να είναι αυτοσυνεπές. Μάλλον λοιπόν αυτή θα είναι η κατεύθυνση προς την οποία θα κινηθούν τα πρότυπα που θα αναπτυχθούν τις επόμενες δεκαετίες και θα φιλοδοξούν να μοντελοποιήσουν την συστηματική πυρηνικών ιδιοτήτων. Η αναζήτηση λοιπόν ενός όσο το δυνατόν περισσότερο αυτοσυνεπούς στατι-στικού προτύπου θα πρέπει να είναι επίσης κύριο μέλημά μας.

Έχοντας λοιπόν αυτά κατά νου, στο τελικό στάδιο υπολογιστικών πειραμάτων, προσπαθήσαμε να αναπτύξουμε ένα μοντέλο, στατιστικό μεν, αυτοσυνεπές δε. Με άλλα λόγια, επιχειρήσαμε να αναπαράγουμε με την βοήθεια των νευ-ρωνικών δικτύων τις αλληλεπιδράσεις που επικρατούν μεταξύ των νουκλεονίων μέσα στον πυρήνα. Μια τέτοια προσπάθεια χρειάζεται βέβαια πολύ προσεκτικό χειρισμό, αλλά αν ευωδοθεί μπορεί πιθανών να μας δώσει κάποιες πολύτιμες πληροφορίες φυσικού περιεχομένου.

Η βασική φιλοσοφία των μοντέλων αυτών στηρίζεται στην εξής απλή ιδέα: οι είσοδοι του δικτύου θα πρέπει να αναπαριστούν με κάποιο τρόπο τα νουκλεόνια, οπότε οι αποκρίσεις των νευρώνων με τους οποίους συνδέονται θα αναπαριστούν την αλληλεπίδραση των αντίστοιχων νουκλεονίων. Προκειμένου λοιπόν να συμπεριλάβουμε την διαφοροποίηση νετρονίου−πρωτονίου θα χρησιμοποιούμε τον κβαντικό αριθμό της τρίτης προβολής του ισοτοπικού σπιν I. Έτσι αντιστοιχούμε συμβατικά την τιμή $\left[+\frac{1}{2}\right]$ στα πρωτόνια και την τιμή $\left[-\frac{1}{2}\right]$ στα νετρόνια. Κάθε νουκλίδιο λοιπόν, θα παρουσιάζεται στην είσοδο του δικτύου ως ένας πίνακας στήλη, που θα αποτελείται από 99 τουλάχιστον στοιχεία για τα πρωτόνια και 158 στοιχεία για τα νετρόνια. Το ${}^{9}_{3}Li_6$ για παράδειγμα θα δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

$$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{για την κατανομή των πρωτονίων και} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{για την κατανομή των νετρονίων.}$$

Κάθε νουκλίδιο επομένως θα περιγράφεται από μια διανυσματική είσοδο 257 στοιχείων. Θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί στον περαιτέρω σχεδιασμό του δικτύου μας λοιπόν, καθώς μια τόσο μεγάλη είσοδος μπορεί πολύ εύκολα να οδηγήσει σε υπερπαραμετροποίηση.

13.8.1 Το Μοντέλο της Μέσης Αλληλεπίδρασης Νουκλεονίου–Νουκλεονίου

Έτσι, αρχικά θεωρούμε ένα μόνο αφανές στρώμα με έναν μόνο νευρώνα, τον οποίο διαδέχεται μια γραμμική έξοδος. Ελέγχουμε με τον τρόπο αυτό την μέση αλληλεπίδραση κατά κάποιο τρόπο όλων των νουκλεονίων, χωρίς να λαμβάνουμε υπ' όψην τις επιμέρους αλληλεπίδρασης. Η απόδοση του μοντέλου δίνεται στον πίνακα 13.29.

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 057	257-1-1| 260	0.60	0.80	0.82

Πίνακας 13.29: Απόδοση του αναλογικού μοντέλου μέσης αλληλεπίδρασης νουκλεονίου – νουκλεονίου. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα του αφανούς στρώματος: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$.

Κατόπιν, αυξήσαμε των αριθμό των νευρώνων του αφανούς στρώματος από 1 σε 5. Ο πίνακας 13.30 δίνει την μέση τετραγωνική απόκλιση των τριών υποσέτ του νέου αυτού μοντέλου. Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων έχει φτάσει τις 1296 και η απόδοση του μοντέλου δεν κρίνεται ικανοποιητική.

13.8.2 Το Μοντέλο της Αλληλεπίδρασης $p-p$, $n-n$

Επιλέγουμε τέλος να παρουσιάσουμε ένα μοντέλο, το οποίο κατά κάποιον τρόπο στηρίζεται στην επιμέρους αλληλεπίδραση των πρωτονίων και των νετρονίων. Σχεδιάσαμε το μοντέλο αυτό ως εξής: Θεωρούμε την διανυσματική είσοδο που περιγράψαμε παραπάνω, με 100 όμως εισόδους για τα πρωτόνια αντί για 99 και 160 για τα νετρόνια αντί για 158. (Οι επιπλέον αυτές είσοδοι έχουν

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 058	257-5-1| 1296	0.61	0.80	0.82

Πίνακας 13.30: Απόδοση του αναλογικού μοντέλου μέσης αλληλεπίδρασης νουκλεονίου − νουκλεονίου. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενε-ργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$.

μηδενική τιμή και εισήχθησαν για λόγους συμμετρίας των συνδέσεων με τους νευρώνες των αφανών στρωμάτων.). Προκειμένου να συνυπολογίσουμε την διαφορετική αλληλεπίδραση ανάλογα με την αύξηση του αριθμού των πρωτονίων και των νετρονίων αντίστοιχα, αντιστοιχούμε σε κάθε νουκλεόνιο την τιμή του I_3, πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά που αντιπροσωπεύει την αύξηση αυτή. Η είσοδος του δικτύου λοιπόν για το ${}^{9}_{3}Li_6$ για παράδειγμα θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2}\times 0.1 \\ +\frac{1}{2}\times 0.2 \\ +\frac{1}{2}\times 0.3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{για την κατανομή} \\ \textit{των πρωτονίων και} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\times 0.1 \\ -\frac{1}{2}\times 0.2 \\ -\frac{1}{2}\times 0.3 \\ -\frac{1}{2}\times 0.4 \\ -\frac{1}{2}\times 0.5 \\ -\frac{1}{2}\times 0.6 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{για την κατανομή} \\ \textit{των νετρονίων.} \end{matrix}$$

Το πρώτο αφανές στρώμα λοιπόν αποτελείται από 130 νευρώνες. Στους 50 πρώτους συνδέονται ανά δύο οι είσοδοι που αντιστοιχούν στα πρωτόνια και στους 80 υπόλοιπους οι είσοδοι που αντιστοιχούν στα νετρόνια. Το δεύτερο αφανές στρώμα δε, αποτελείται από 65 νευρώνες: στους πρώτους 25 συνδέο-νται ανά δύο οι 50 πρώτοι νευρώνες του πρώτου αφανούς στρώματος και στους υπόλοιπους 40, οι εναπομείναντες 80 νευρώνες. Ακολουθεί ένα τρίτο αφανές στρώμα 5 νευρώνων στους οποίους συνδέονται όλες οι έξοδοι του προηγούμενου στρώματος, το οποίο διαδέχεται μια γραμμική έξοδος αποτελούμενη από 1 νευρώνα. Πρέπει να σημειώσουμε επίσης, ότι οι νευρώνες των αφανών στρωμάτων δεν έχουν κατώφλια ενεργοποίησης, έτσι ώστε αν αντιστοιχούν σε μηδενική είσοδο, να μην εμφανίζουν απόκριση. Έτσι τελικά το μοντέλο αποτελείται από 721 ελεύθερες παραμέτρους. Η απόδοσή του, όπως

Παράλληλη Εκπαίδευση.		Μέθοδος Διατεκμηρίωσης.		
Τύπος Δικτύου	**Αρχιτεκτονική Δικτύου**	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
ET. 059	260-130-65-5-1| 721	0.32	1.51	1.34

Πίνακας 13.31: Απόδοση του μοντέλου αλληλεπίδρασης $p-p$, $n-n$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: *tahn*. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: *satlins*. (Οι νευρώνες των αφανών στρωμάτων δεν έχουν κατώφλια ενεργοποίησης.)

φαίνεται στον πίνακα 13.31, δεν είναι παρ' όλα αυτά καθόλου ικανοποιητική στην περίπτωση του συμπερασμού.

Γνωρίσαμε λοιπόν στο κεφάλαιο αυτό, ορισμένα από τα σημαντικότερα μοντέλα που αναπτύξαμε κατά την διάρκεια της πτυχιακής αυτής εργασίας. Στα επόμενα τρία κεφάλαια θα διερευνήσουμε αναλυτικά μερικά από τα καλύτερα μοντέλα που κατορθώσαμε να κατασκευάσουμε.

Κεφάλαιο 14

Επιλεγμένο Μοντέλο Πρόβλεψης

ΕΝΑ ΑΠΟ ΤΑ ΚΑΛΥΤΕΡΑ ΜΟΝΤΕΛΑ που κατορθώσαμε να αναπτύξαμε κατά την διάρκεια των υπολογιστικών μας πειραμάτων, παρουσιάζεται στο κεφαλαίο αυτό. Είναι ένα αναλογικό μοντέλο $Z - N - \delta$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6 sec. Μια βασική διαφορά του από τα δίκτυα που είδαμε στην παράγραφο 13.2.2 είναι ότι αποτελείται από 4 αφανή στρώματα. Μια πιο ουσιαστική διαφορά όμως, είναι ότι εκτός από την τεχνική της Διατεκμηρίωσης, χρησιμοποιείται παράλληλα κατά την εκπαιδευτική διαδικασία, στα πλαίσια πάντα του αλγόριθμου $Levenberg - Marquardt$, και η τεχνική της Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης. Τα βασικά λοιπόν χαρακτηρι-στικά του μοντέλου αυτού περιλαμβάνονται στον πίνακα 14.1. Το μοντέλο επιλέχθηκε με βάση τόσο την σχετικά καλή του απόδοση, όσο και την ικανοποιητική γενίκευση στους χρόνους ημιζωής των άγνωστων νουκλιδίων. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν στο κεφαλαίο αυτό μια αναλυτική σύγκριση των υπολογισμών μας με τα πειραματικά δεδομένα και στην συνέχεια θα συγκρί-νουμε την απόκριση του μοντέλου με κάποια από τα διαθέσιμα γενικευμένα πρότυπα της αποδιέγερσης β. Τέλος θα μελετήσουμε την ικανότητα πρόβλε-ψης των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων νουκλιδίων μέσω κάποιων δια-γραμμάτων ισοτοπικών και ισότονων αλυσίδων, ενώ θα δούμε και την εκτίμηση του παρόντος μοντέλου για τους χρόνους ημιζωής νουκλιδίων που ενδιαφέρουν στην $r - process$ διαδικασία νουκλεοσύνθεσης.

Δίκτυο	**Αρχιτεκτονική**	
Ευθείας Τροφοδοσίας Πλήρους Σύνδεσης	Διαστάσεις: Βάρη:	3-5-5-5-5-1 116
Εύρος T_β	**Συναρτήσεις Ενεργοποίησης**	
$T_\beta < 10^6\ sec$	*tanh-tanh-tanh-tanh-satlins*	
Τύπος Εκπαίδευσης	**Αλγόριθμος Εκπαίδευσης**	**Μέθοδος Αρχικοποίησης**
Παράλληλη	Μπαϊεσιανή Εξομάλυνση	$Nguyen - Widrow$
Μετασχηματισμός Εισόδων [-1, 1]		**Μετασχηματισμός Εξόδου [-1,1]**
Z	[0, 230]	$LogT_{1/2}$
N	[0, 230]	[0.17609, 8.9771]
δ	[-1, 1]	

Πίνακας 14.1: Πίνακας χαρακτηριστικών του μοντέλου

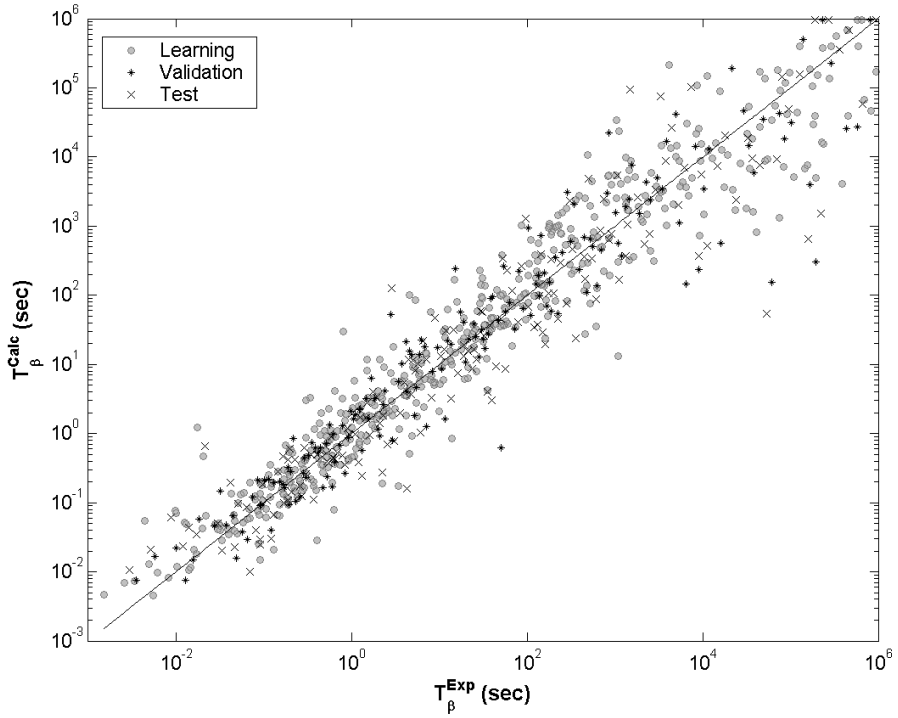
14.1 Εκτίμηση της Απόδοσης Του Μοντέλου

14.1.1 Σύγκριση με τα Πειραματικά Δεδομένα

Η απόδοση του μοντέλου δίνεται στον πίνακα 14.2. Εφόσον μας ενδιαφέρει μια πιο εμπεριστατωμένη σύγκριση της απόκρισης του παρόντος μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα όμως, δίνονται εκτός από την μέση τετραγωνική απόκλιση και οι επιπρόσθετες στατιστικές μετρικές που συναντήσαμε στην παράγραφο 12.3.1, όπως η μέση απόλυτη απόκλιση $[MAE]$, η κανονικοποιημένη μέση τετραγωνική απόκλιση $[NMSE]$ και ο συντελεστής συσχέτισης $[R-$τιμή$]$ που προκύπτει από την εφαρμογή γραμμικής παλινδρόμησης. Υπο-λογίζονται δε,

Κριτήριο	**Εκπαιδευτικό Σετ**	**Σετ Τεκμηρίωσης**	**Δοκιμαστικό Σετ**	**Πλήρες Σετ**
$RMSE$	0.53	0.60	0.65	**0.57**
$NMSE$	1.004	0.995	1.012	**0.999**
MAE	0.38	0.41	0.46	**0.40**
$R-$τιμή	0.964	0.953	0.947	**0.958**

Πίνακας 14.2: Αποτελέσματα των δεικτών απόδοσης του παρόντος μοντέλου

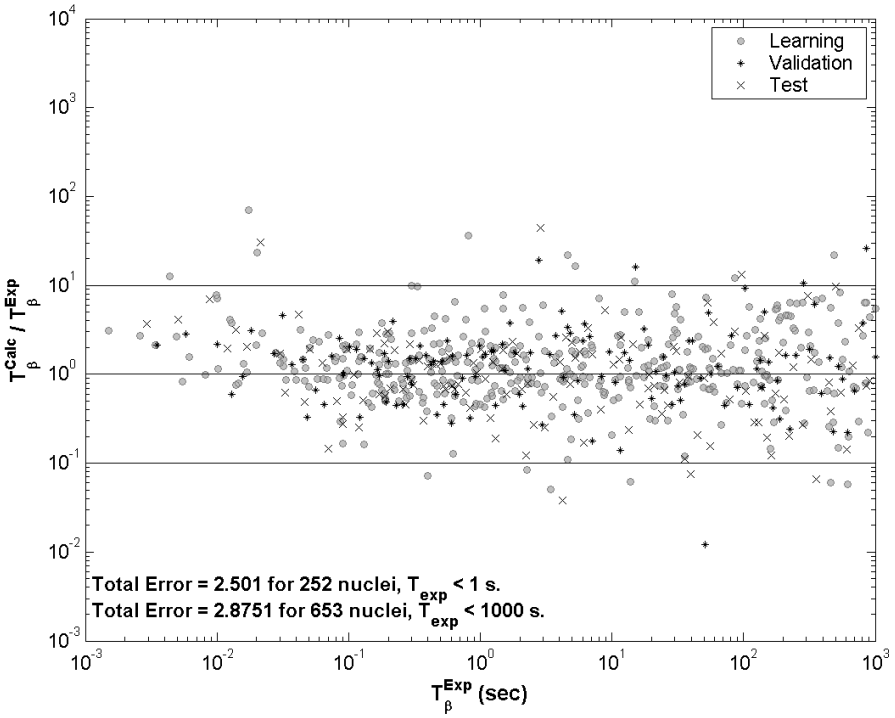


Σχήμα 14.1: Οι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που υπολογίζονται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.

τόσο η επιμέρους αποδόσεις των τριών υποσέτ, όσο και η συνολική απόδοση, όπως προκύπτει από το πλήρες σετ.

Μια πιο αναλυτική σύγκριση ωστόσο με τα πειραματικά δεδομένα πραγματοποιείται μέσω ενός αριθμού διαγραμμάτων. Το σχήμα 14.1 παρουσιάζει τους παρόντες υπολογισμούς των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^-, σε αντιδιαστολή με τις παρατηρούμενες τιμές. Οι λόγοι των υπολογισμέ-νων από το μοντέλο προς τους αντίστοιχους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- δίνονται στο σχήμα 14.2. Οι αποκλίσεις από τις παρατηρούμενες τιμές παρουσιάζονται ως παρεκκλίσεις από την συνεχή γραμμή $T_{\beta,calc} = T_{\beta,exp}$ στην πρώτη περίπτωση και $T_{\beta,calc}/T_{\beta,exp} = 1$ στη δεύτερη. Τα σημεία πάνω από την γραμμή αντιπροσωπεύουν υπερτιμημένους χρόνους ημίσειας ζωής, ενώ αντίστοιχα τα σημεία που βρίσκονται κάτω από την γραμμή, υποδηλώνουν υποεκτιμημένους από το μοντέλο χρόνους ημιζωής.

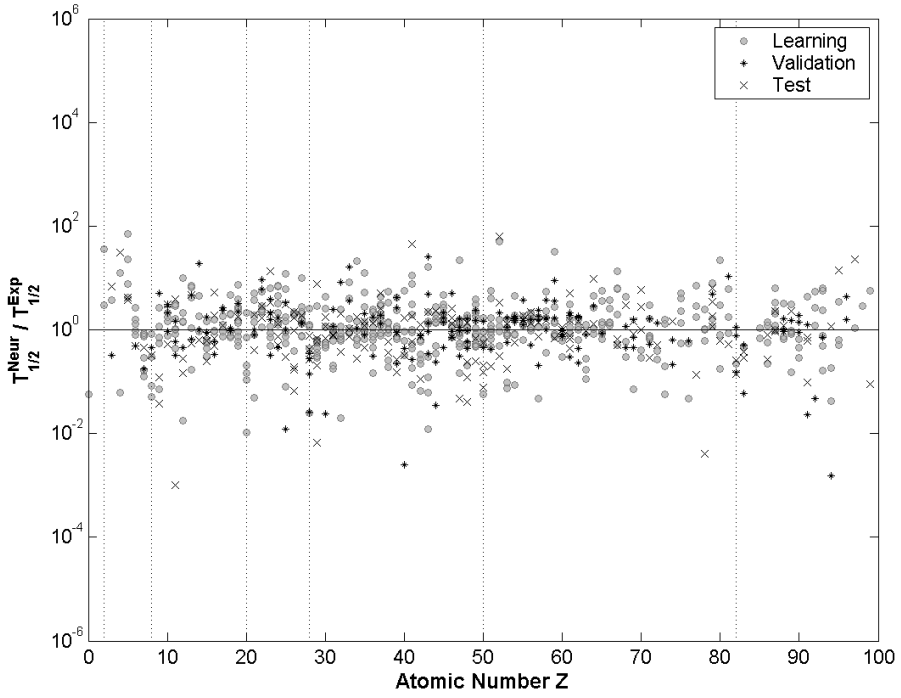
Από τα σχήματα 14.1 και 14.2 λοιπόν μπορεί να δει κανείς ότι η απόκριση του μοντέλου μας ακολουθεί την γενική τάση των πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής. Τα σημεία ωστόσο που οφείλονται στους μεγαλύτερους χρόνους



Σχήμα 14.2: Λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.

παρουσιάζουν μια πιο οξυμμένη διασπορά. Αυτό υποδηλώνει ότι δεν λαμβάνονται επαρκώς υπ' όψη από το μοντέλο οι πρώτες απαγορευμένες μεταπτώσεις. Από την άλλη όμως, συμπεριλαμβάνονται φαινόμενα φλοιώδους δομής, όπως φαίνεται στα σχήματα 14.3 και 14.5. Το διάγραμμα 14.4 επιπλέον απεικονίζει την ακρίβεια των υπολογισμών μας έναντι της απόστασης από την σταθερότητα. Η τοπική μέση τετραγωνική απόκλιση (σχ. 14.5) και η απόλυτη απόκλιση μεταξύ υπολογισμένων και πειραματικών $log_{10}T_\beta$ (σχ. 14.4), υποδεικνύουν μια ισορροπημένη απόκριση του δικτύου σε όλες τις περιοχές των χρονών ημιζωής. Παρ' όλα αυτά το σχήμα 14.4 εμφανίζει μερικούς ανακριβείς υπολογισμούς κοντά στην γραμμή σταθερότητας. Οι πιο απομακρυσμένοι από την σταθερότητα όμως πυρήνες παρουσιάζουν μεγαλύτερη σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα. Αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό για αξιόπιστες προβλέψεις των χρονών ημιζωής πολύ πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων. Πυρήνες τέλος με πολύ μικρό ή πολύ μεγάλο αντίστοιχα μαζικό αριθμό, δεν παρουσιάζουν αξιοσημείωτες αποκλίσεις.

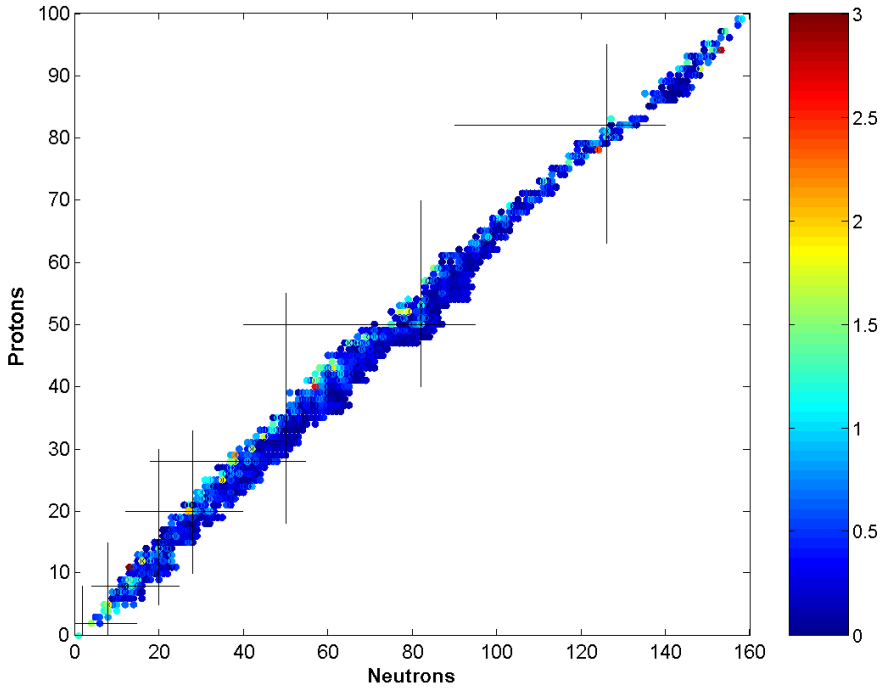
Στην συνέχεια ελέγχουμε περεταίρω την απόκριση του μοντέλου μας μέσω



Σχήμα 14.3: Ίδιο με το σχήμα 14.2, αλλά ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- εδώ δίνεται συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z.

των μετρικών που προτάθηκαν για την ανάλυση των υπολογισμών που αφορούν τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β από την ομάδα του *Klapdor* και την ομάδα του *Möller* (παρ. 12.3.2 και 12.3.3). Στον πίνακα λοιπόν 14.4 δίνονται η μέση απόκλιση *Möller* $M^{(10)}$ και η τυπική διακύμανση $\sigma_M^{(10)}$, ανάλογα με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων τόσο για τα τρία υποσέτ (εκπαιδευτικό σετ, σετ τεκμηρίωσης και δοκιμαστικό σετ), όσο και για το πλήρες σετ. Με n δίνεται ο αριθμός των πυρήνων που αντιστοιχούν στον χαρακτήρα της δεύτερης στήλης και ο πειραματικός τους χρόνος ημίσειας ζωής δεν ξεπερνά το όριο που δίνεται στην πρώτη στήλη. Στον πίνακα 14.3 επίσης, δίνονται τα μεγέθη n, M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_M^{(10)}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ανεξάρτητα από τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων.

Τέλος, ο πίνακας 14.5 περιέχει την μέση απόκλιση *Klapdor* $\langle x \rangle_k$ και την τυπική απόκλιση της μέσης αυτής τιμής s_k υπολογισμένη επίσης για τα για τρία υποσέτ και για το πλήρες σετ. Με $m(\%)$ δίνεται το ποσοστό των πυρήνων των οποίων ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο μας προς τους αντίστοιχους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής, δεν ξεπερνά έναν παράγοντα

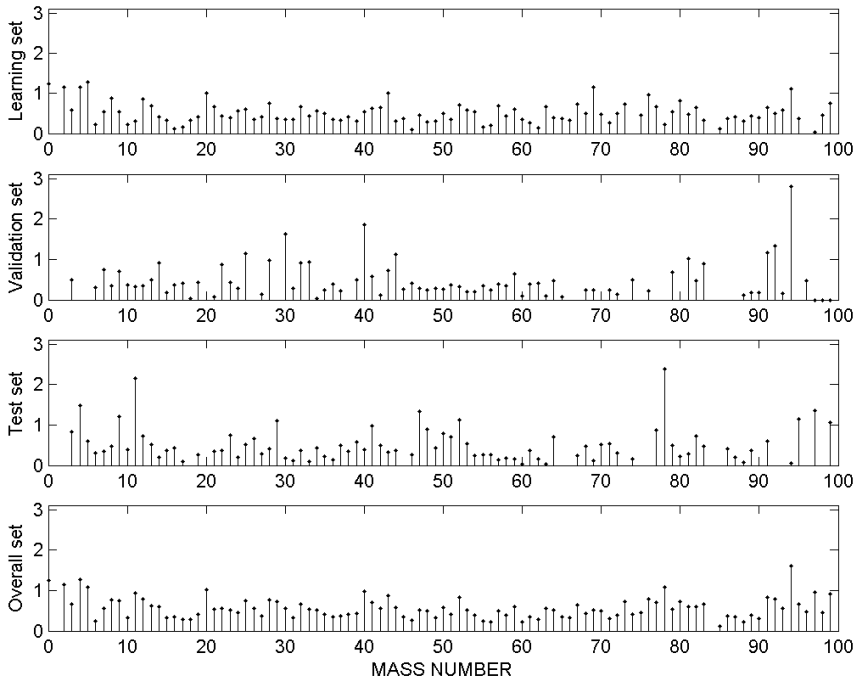


Σχήμα 14.4: Απόλυτη απόκλιση μεταξύ υπολογισμένης και πειραματικής τιμής των χρόνων ημίσειας ζωής για το πλήρες σετ.

2, 5 ή 10.

14.1.2 Σύγκριση με Άλλα Καθολικά Μοντέλα

Οι υπολογισμοί του μοντέλου αυτού λοιπόν, συγκρίνονται τώρα, μέσω των μετρικών της ομάδας του *Möller*, με δύο παραδοσιακές πλήρως μικροσκοπικές προσεγγίσεις και συγκεκριμένα με το μοντέλο $Nilsson + BCS + QRPA$ των *Homma et al.* [34], που στηρίζεται όπως είδαμε στην παράγραφο 6.4.2 στο μοντέλο *Nillson* ενός σωματιδίου και στην προσέγγιση BSC, και το μοντέλο $FRDM + pnQRPA$ (παρ. 6.4.2) των *Möller et al.* [70], που στηρίζεται στο Πεπερασμένης Εμβέλειας Πρότυπο Σταγόνας $[FRDM]$ και το συμπτυγμένο $-$ *Yukawa* δυναμικό ενός σωματιδίου. Παράλληλα, οι παρόντες υπολογισμοί συγκρίνονται με τους μικρο−στατιστικούς υπολογισμούς της Θεωρίας Ημιμέσης Τελικής Κατάστασης $[SGT]$ (παρ. 6.2 των *Nakata et al.* [35], η οποία συμπεριέλαβε και κάποια φαινόμενα φλοιώδους δομής του μητρικού πυρήνα στην αρχική Θεωρίας Μέσης Τελικής Κατάστασης. Ο πίνακας 14.6 τέλος, δίνει τις τιμές των μεγεθών M_r^{10} και σ_r^{10}, ταξινομημένες σύμφωνα με



Σχήμα 14.5: Μέση τετραγωνική απόκλιση κάθε ισοτοπικής αλυσίδας μεταξύ υπολογισμένων από το μοντέλο και πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης, το δοκιμαστικό σετ και το πλήρες σετ.

τον άρτιο−άρτιο, περιττό−περιττό και περιττού μαζικού αριθμού χαρακτήρα για τους παρόντες υπολογισμούς, ενώ συμπεριλαμβάνει με τον ίδιο τρόπο και τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν από τους υπολογισμούς των παραπάνω μοντέλων.

Μια προσεκτική σύγκριση αυτών των αποτελεσμάτων μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι τόσο το μικροσκοπικό μοντέλο $Nilsson+BCS+QRPA$, όσο και το μοντέλο SGT τείνουν να υπερεκτιμήσουν τους χρόνους ημίσειας ζωής των περιττών−περιττών πυρήνων. Οι $FRDM$ υπολογισμοί αντίθετα παρουσιάζουν μια περισσότερο ασταθή συμπεριφορά. Τείνουν να υπερεκτιμήσουν τους χρόνους ημίσειας ζωής των άρτιων−άρτιων πυρήνων σε όλες τις περιοχές των χρόνων ημίσειας ζωής και ταυτόχρονα να υποεκτιμήσουν τους άρτιους−άρτιους και τους περιττού μαζικού αριθμού πυρήνες στους μικρότερους χρόνους ζωής. Οι $FRDM$ υπολογισμοί επιπλέον τείνουν να υπερεκτιμήσουν και τους χρόνους ημιζωής των άρτιων−άρτιων πυρήνων για χρόνους μεγαλύτερους των 100 sec. Αξιοσημείωτες δε στις περιοχές αυτές, είναι και οι πολύ υψηλές τιμές των μέσων διακυμάνσεων και των τριών μοντέλων. Το

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Εκπαιδευτικό Σετ**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	152	0.12	1.32	0.40	2.53	0.42	2.63
< 10	237	0.10	1.25	0.41	2.58	0.42	2.64
< 100	318	0.09	1.23	0.41	2.56	0.42	2.62
< 1000	392	0.10	1.27	0.44	2.73	0.45	2.81
$< 10^6$	503	0.04	1.10	0.53	3.36	0.53	3.37

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Σετ Τεκμηρίωσης**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	50	0.05	1.13	0.30	1.99	0.30	2.01
< 10	79	0.09	1.24	0.35	2.24	0.36	2.31
< 100	105	0.07	1.18	0.41	2.57	0.42	2.61
< 1000	130	0.08	1.21	0.44	2.74	0.44	2.78
$< 10^6$	167	-0.02	0.96	0.60	3.97	0.60	3.97

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Δοκιμαστικό Σετ**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	50	0.05	1.12	0.41	2.56	0.41	2.58
< 10	79	0.02	1.05	0.48	3.00	0.48	3.01
< 100	106	0.00	1.00	0.49	3.08	0.49	3.08
< 1000	131	-0.03	0.93	0.50	3.16	0.50	3.17
$< 10^6$	168	-0.09	0.82	0.64	4.38	0.65	4.44

Πίνακας 14.3: Ανάλυση της απόκλισης μεταξύ υπολογισμένων και παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που φαίνεται στα σχήματα $14.1 - 14.3$ με βάση τους δείκτες *Möller*. Οι ποσότητες M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξισώσεις $(12.9) - (12.15)$.

$T_{\beta,exp}$		**Εκπαιδευτικό Σετ**			**Σετ Τεκμηρίωσης**			**Δοκιμαστικό Σετ**			**Πλήρες Σετ**		
(sec)		n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$
< 1	$o-o$	46	1.02	2.79	19	1.19	2.15	11	0.86	1.98	76	1.04	2.53
	odd	71	1.26	2.30	22	1.05	1.79	32	1.05	2.40	125	1.16	2.25
	$e-e$	35	2.00	2.29	9	1.21	2.09	7	2.36	3.26	51	1.87	2.45
< 10	$o-o$	75	1.14	2.91	26	1.22	2.39	20	0.86	3.76	121	1.11	2.96
	odd	111	1.17	2.26	34	1.11	2.04	42	0.92	2.61	187	1.10	2.31
	$e-e$	51	1.63	2.65	19	1.56	2.28	17	1.80	2.58	87	1.65	2.56
< 100	$o-o$	94	1.19	2.87	36	1.12	3.30	28	0.76	3.20	158	1.08	3.06
	odd	156	1.12	2.37	48	1.10	2.13	57	0.97	2.91	261	1.08	2.45
	$e-e$	68	1.59	2.45	21	1.52	2.21	21	1.58	2.98	110	1.58	2.31
< 1000	$o-o$	116	1.28	2.93	40	1.05	3.16	35	0.78	3.13	191	1.12	3.06
	odd	198	1.14	2.64	63	1.14	2.56	68	0.84	3.07	329	1.07	2.73
	$e-e$	78	1.64	2.54	27	1.72	2.29	28	1.49	3.04	133	1.63	2.60
$< 10^6$	$o-o$	146	1.05	3.66	46	0.99	3.32	46	0.58	4.71	238	0.93	3.87
	odd	262	1.06	3.24	88	0.85	4.56	87	0.86	4.07	437	0.97	3.67
	$e-e$	95	1.29	3.20	33	1.28	3.19	35	1.14	4.33	163	1.25	3.44

Πίνακας 14.4: Οι δείκτες *Möller* υπολογισμένοι για τα τρία υποσέτ και το πλήρες σετ σε αναλογία με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15).

Παράγ.	$\mathrm{T}_{\beta,exp}$ (sec)	**Εκπαιδευτικό Σετ**			**Σετ Τεκμηρίωσης**			**Δοκιμαστικό Σετ**			**Πλήρες Σετ**		
		$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k
< 10	$< 10^6$	92.4	2.42	1.73	92.2	2.35	1.52	90.5	2.69	1.85	92	2.46	1.72
	< 60	96.4	2.15	1.59	97	2.1	1.09	96.1	2.48	1.64	96.5	2.21	1.52
	< 1	96.7	2.12	1.55	100	1.94	0.8	98	2.24	1.3	97.6	2.1	1.39
< 5	$< 10^6$	82.7	1.93	0.93	86.8	2.07	0.98	79.2	2.1	0.97	82.8	1.99	0.95
	< 60	89.8	1.79	0.8	94.1	1.98	0.84	87.3	2.05	0.91	90.2	1.88	0.84
	< 1	91.4	1.8	0.75	100	1.94	0.8	94	2.04	0.89	93.7	1.88	0.8
< 2	$< 10^6$	55.3	1.39	0.27	52.1	1.43	0.28	49.4	1.48	0.28	53.5	1.41	0.27
	< 60	64.6	1.38	0.27	55.4	1.42	0.29	53.9	1.48	0.27	60.6	1.41	0.27
	< 1	63.8	1.39	0.26	58	1.4	0.25	60	1.5	0.27	61.9	1.41	0.26

Πίνακας 14.5: Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μέσω των δεικτών *Klapdor* [36, 34, 37, 38, 21, 55, 8]. Η μέση απόκλιση *Klapdor* $\bar{x}_K$ και η τυπική απόκλιση σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) – (12.8).

παρόν μοντέλο από την άλλη, τείνει να υπερεκτημίσει, σε μικρότερα βέβαια βαθμό, τους χρόνους ημίσειας ζωής των άρτιων−άρτιων πυρήνων, ενώ η μέση διακύμανση παρουσιάζει μια αισθητά ομαλότερη συμπεριφορά σε όλες τις περιοχές των χρόνων ημίσειας ζωής. Η υπερεκτίμηση αυτή των άρτιων−άρτιων πυρήνων από το μοντέλο μας, οφείλεται, εν μέρη, στην σημαντικά μικρότερη αφθονία τους.

Ο πίνακας 14.7, περιέχει αποτελέσματα από πρόσφατους υπολογισμούς του μοντέλου $FRDM+pnQRPA$ με ενημερωμένες εκτιμήσεις μαζών [72] και από το υβριδικό μοντέλο $pnQRPA+ffGT$ [72]. Μπορεί λοιπόν να δει κάνείς ότι το μοντέλο $FRDM+pnQRPA$ υπερεκτιμά του μεγάλους χρόνους ημίσειας ζωής, ενώ η προσέγγιση $pnQRPA+ffGT$ υπερεκτιμά ελαφρά την όλη συστηματική των χρόνων ημιζωής. Οι υπολογισμοί του μοντέλου μας από την άλλη, παρουσιάζουν μεγαλύτερη συμφωνία με τις πειραματικές τιμές, από τις συμβατικές μικροσκοπικού και μικρο-στατιστικού χαρακτήρα προσεγγίσεις.

Η αποδοτικότητα του μοντέλου που αναπτύξαμε τέλος, αντιπαραβάλλεται με την βοήθεια των δεικτών $Klapdor$, μέσω του πίνακα 14.8, με τους πρωίμους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* [8] και το πρότυπο $N+BSC+pnQRPA$. Μπορεί να δει κανείς ότι οι $pnQRPA$ υπολογισμοί των *Staudt et al.* είναι αναμφίβολα πιο ακριβείς για τους μικρότερους χρόνους ημιζωής. Για τους μεγαλύτερους χρόνους όμως, τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι οι παρόντες υπολογισμοί είναι ποιοτικά ορθότεροι. Το αρχικό $pnQRPA$ πρότυπο όπως είδαμε στην παρ. 6.4.2 ωστόσο, έχει θεωρηθεί υπερπαραμετροποιημένο, καθώς οι ισχύς των αλληλεπιδράσεων νουκλεονίου−νουκλεονίου προκύπτει από τοπική προσαρμογή με τα πειραματικά δεδομένα, ξεχωριστή για κάθε ισοτοπική αλυσίδα. Αναφορικά με το $NBSC+pnQRPA$ πρότυπο από την άλλη, είναι φανερό ότι η απόκριση του μοντέλου μας οδηγεί σε μικρότερες ασυμφωνίες με τα πειραματικά δεδομένα. Μπορεί να αναπαράγει περίπου το 90% των πειραματικά γνωστών χρόνων ημίσειας ζωής, οι οποίοι είναι μικρότεροι των 10^6 sec, εντός ενός παράγοντα 10 και σχεδόν το 50% εντός ενός παράγο-ντα 2.

Στον ίδιο πίνακα συμπεριλαμβάνονται προς σύγκριση και οι αποδόσεις του προγενέστερου $16-10-1|181$ στατιστικού προτύπου των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^-,που αναπτύχθηκε από την ομάδα των $Mavrom-matis\ et\ al.$ [26]. Τα υπολογισμένα μεγέθη που δίνονται στην περίπτωση αυτή, αντιστοιχούν στην απόδοση του αντίστοιχου δοκιμαστικού σετ. Από την σύγκριση με τους παρόντες υπολογισμούς, βλέπουμε ότι έχει επέλθει σημαντική βελτίωση στην προσπάθεια στατιστικής μοντελοποίησης με την βοήθεια των τεχνητών νευρωνικών δικτύων.

$T_{\beta,exp}$		$N+BSC+pnQRPA$			$FRDM+pnQRPA$			SGT			**Πλήρες Σετ**		
(sec)		n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$
<1	$o-o$	28	1.75	4.96	29	0.59	2.91	38	1.45	2.57	76	1.04	2.53
	odd	31	0.60	2.24	35	0.59	2.64	56	1.75	2.32	125	1.16	2.25
	$e-e$	10	1.15	2.36	10	3.84	3.08	19	2.03	2.30	51	1.87	2.45
<10	$o-o$	66	1.89	4.60	59	0.76	8.83	83	1.94	4.10	121	1.11	2.96
	odd	81	0.92	3.84	85	0.78	4.81	110	1.71	2.36	187	1.10	2.31
	$e-e$	34	1.01	2.93	34	2.50	4.13	45	1.58	2.23	87	1.65	2.56
<100	$o-o$	85	3.15	10.51	88	2.33	49.19	115	2.54	8.86	158	1.08	3.06
	odd	127	1.07	4.29	133	1.11	9.45	174	1.95	3.15	261	1.08	2.45
	$e-e$	52	1.13	3.58	54	2.61	4.75	64	1.45	2.40	110	1.58	2.31
<1000	$o-o$	93	3.02	10.25	115	3.50	72.02	144	3.42	15.21	191	1.12	3.06
	odd	157	1.10	5.55	194	2.77	71.50	232	2.36	5.42	329	1.07	2.73
	$e-e$	63	1.39	6.10	71	6.86	58.48	85	1.38	2.81	133	1.63	2.60
$<10^6$	$o-o$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	238	0.93	3.87
	odd	–	–	–	–	–	–	–	–	–	437	0.97	3.67
	$e-e$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	163	1.25	3.44

Πίνακας 14.6: Σύγκριση της απόδοσης του μοντέλου μας με τους υπολογισμούς του προτύπου $N+BSC+pnQRPA$ των *Homma et al.* [34],τους $FRDM+pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [70] και τους υπολογισμούς της SGT των *Nakata et al.* [35]. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15).

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$			Παρόν υπολογισμός: Πλήρες Σετ				
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	252	0.09	1.24	0.39	2.44	0.40	2.50
< 10	395	0.08	1.21	0.42	2.60	0.42	2.65
< 100	529	0.07	1.17	0.43	2.68	0.43	2.71
< 1000	653	0.07	1.18	0.45	2.84	0.46	2.88
$< 10^6$	838	0.00	1.01	0.57	3.70	0.57	3.70

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$			$FRDM + pnQRPA$				
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	184	0.03	1.06	0.57	3.72	0.57	3.73
< 10	306	0.14	1.38	0.77	5.87	0.78	6.04
< 100	431	0.19	1.55	0.94	8.81	0.96	9.21
< 1000	546	0.34	2.20	1.28	19.09	1.33	21.17
$< 10^6$	–	–	–	–	–	–	–

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$			$pnQRPA + ffGT$				
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	184	-0.08	0.84	0.48	3.04	0.49	3.08
< 10	306	-0.03	0.93	0.55	3.52	0.55	3.53
< 100	431	-0.04	0.91	0.61	4.10	0.61	4.12
< 1000	546	-0.04	0.92	0.68	4.81	0.68	4.82
$< 10^6$	–	–	–	–	–	–	–

Πίνακας 14.7: Σύγκριση με τους $FRDM + pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [72] και τους $pnQRPA + ffGT$ υπολογισμούς επίσης των *Möller et al.* [72]. Τα μεγέθη M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξ. (12.9) – (12.15).

Παράγ.	$T_{\beta,exp}$ (sec)	*Mavrommatis et al.*			$NBCS + pnQRPA$			*Staudt et al.*			**Πλήρες Σετ**		
		$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k
< 10	$< 10^6$	82.8	2.78	1.83	76.7	3.00	–	72.2	1.85	1.21	92	2.46	1.72
	< 60	88.1	2.8	1.83	87.2	2.81	–	96.3	1.67	1.02	96.5	2.21	1.52
	< 1	90	2.88	1.88	95.7	2.64	–	99.1	1.44	0.4	97.6	2.1	1.39
< 5	$< 10^6$	72.4	2.22	1.07	–	–	–	69.7	1.68	0.76	82.8	1.99	0.95
	< 60	76.2	2.2	1.01	–	–	–	94.5	1.56	0.66	90.2	1.88	0.84
	< 1	76.7	2.23	1.02	–	–	–	99.1	1.44	0.4	93.7	1.88	0.8
< 2	$< 10^6$	39.7	1.39	0.29	33.8	1.43	–	56.4	1.37	0.29	53.5	1.41	0.27
	< 60	42.9	1.44	0.32	42.0	1.41	–	82.2	1.36	0.29	60.6	1.41	0.27
	< 1	43.3	1.46	0.32	50.7	1.43	–	90.6	1.35	0.27	61.9	1.41	0.26

Πίνακας 14.8: Σύγκριση των παρόντων υπολογισμών με τους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* [8] και τους υπολογισμούς του μοντέλου $NBSC + pnQRPA$ των *Homma et al.* [34]. Τα μεγέθη m, $\bar{x}_K$ και σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) – (12.8).

14.2 Εκτίμηση της Ικανότητας Συμπερασμού

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, κοιτάζοντας τους παραπάνω δείκτες απόδοσης, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το στατιστικό μας πρότυπο είναι σε θέση να δώσει αποτελέσματα για τους χρόνους ημίσειας ζωής άγνωστων νουκλιδίων, τα οποία δεν έχουν συμπεριληφθεί στην διαδικασία προσαρμογής των ελεύθερων παραμέτρων, που να είναι σε γενικές γραμμές ποιοτικά καλύτερες από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των καθολικών μικροσκοπικών κβαντομηχανικών προτύπων. Στην συνέχεια λοιπόν παρουσιάζουμε κάποιες εκτιμήσεις των χρόνων ημιζωής άγνωστων νουκλιδίων, μέσω διαγραμμάτων ισοτοπικών αλυσίδων των περιοχών $Z \approx 28$, 50 και 82 καθώς επίσης μελετάμε και τα ισότονα των περιοχών $N = 50$, 82 και 126 που ενδιαφέρουν τους υπολογισμούς της $r-process$ διαδικασίας νουκλεοσύνθεσης.

14.2.1 Η Περιοχή $Z \approx 28$

Στην περιοχή αυτή, επικεντρώνουμε το ενδιαφέρων μας στις ισοτοπικές αλυσίδες του σιδήρου $[_{26}Fe]$ και του νικελίου $[_{28}Ni]$. Στο σχήμα 14.6 λοιπόν, δίνεται η σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα για τα γνωστά ισότοπα του σιδήρου, ενώ το σχήμα 14.8 αντιστοιχεί στη γνωστή περιοχή των ισοτόπων του νικελίου. Η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του σιδήρου και του νικελίου, φαίνεται στα σχήματα 14.7 και 14.9 αντίστοιχα. Τα λευκά τετράγωνα του τελευταίου σχήματος αντιστοιχούν σε πρόσφατες πειραματικές μετρήσεις τεσσάρων ισοτόπων του νικελίου από την ομάδα του $Hosmer$ [71]. Τα δύο πρώτα αναφέρονται σε βελτιωμένες μετρήσεις των ή-δη γνωστών ισοτόπων ^{75}Ni και ^{75}Ni, ενώ τα δύο επόμενα αφορούν εντελώς καινούργιες μετρήσεις του ισότοπου ^{77}Ni και του διπλά μαγικού πυρήνα ^{78}Ni. Αξίζει λοιπόν να παρατηρήσει κανείς την καλή συμπεριφορά του δικτύου μας σε αυτές τις τέσσερις περιπτώσεις. Για άμεση σύγκριση έχουν επίσης συμπε-ριλληφθεί στα παραπάνω σχήματα, αλλά και σε αυτά που θα ακολουθήσουν στις επόμενες περιοχές, οι αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72], και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των $Pfeiffer\ et\ al.$ [11].

14.2.2 Η Περιοχή $Z \approx 50$

Εδώ μελετάμε την εκτίμηση του μοντέλου μας για τα ισότοπα του αργύρου $[_{47}Ag]$, του καδμίου $[_{48}Cd]$ και του κασσίτερου $[_{50}Sn]$. Τα σχήματα λοιπόν 14.10, 14.12 και 14.14, δίνουν την επιμέρους αντίστοιχα σύγκριση μεταξύ των

υπολογισμών του μοντέλου μας και των πειραματικών τιμών, ενώ στα σχήματα 14.11, 14.13 και 14.15, συμπεριλαμβάνεται και ο συμπερασμός στα άγνωστα νουκλίδια της κάθε ισοτοπικής αλυσίδας.

14.2.3 Η Περιοχή $Z \approx 82$

Τέλος, στην περιοχή $Z \approx 82$ εξετάζουμε την απόκριση του μοντέλου μας για τα ισότοπα του βισμουθίου. Η σύγκριση με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για την γνωστή περιοχή δίνεται στο σχήμα 14.16, ενώ η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του βισμουθίου προστίθεται στο σχήμα 14.17.

14.2.4 Οι Περιοχές $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$

Στα σχήματα 14.18, 14.19 και 14.20, απεικονίζονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα των περιοχών $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$ αντίστοιχα. Δίνονται επίσης και εδώ οι υπολογισμού που προκύ-πτουν από το υβριδικό μοντέλου $QRPA + ffGT$ και τους επαναυπολογισμούς της GT. Οι εκτιμήσεις των χρόνων ημιζωής τέτοιων πυρήνων που βρίσκονται στους "$r-$ατραπούς" $N = 50$, 82 και 126, όπου προκύπτουν οι κορυφές των ηλιακών αφθονιών, παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον, καθώς προσδιορίζουν όπως είπαμε ($\beta\lambda\acute{\epsilon}\pi\epsilon$ πρ. 6.1) την χρονική κλίμακα της $r - process$.

Στο σχήμα 14.21 τέλος, δίνεται με μορφή ραβδογράμματος η εκτίμηση του μοντέλου μας για τους χρόνους ημίσειας ζωής κάποιων β^- αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω ή κοντά στους $r-$, αυτούς, ατραπούς. Στο ίδιο σχήμα, προς άμεση σύγκριση, εκτός από τους $QRPA + ffGT$ και GT υπολογισμούς, έχουν προστεθεί και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της φόρμουλας $Kratz-Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής από τους $Pfeiffer\ et\ al.$ [11]. Ένα παρόμοιο γράφημα των SGT και των $QRPA$ υπολογισμών μπορεί να βρει κανείς στην αναφορά [80]. Μπορούμε να δούμε στο γράφημα 14.21 λοιπόν, ότι οι δικοί μας υπολογισμοί, καθώς και οι επαναυπολογισμοί της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης, είναι πιο κοντά στην αντίστοιχη παρατηρούμενη πειραματικά τιμή.

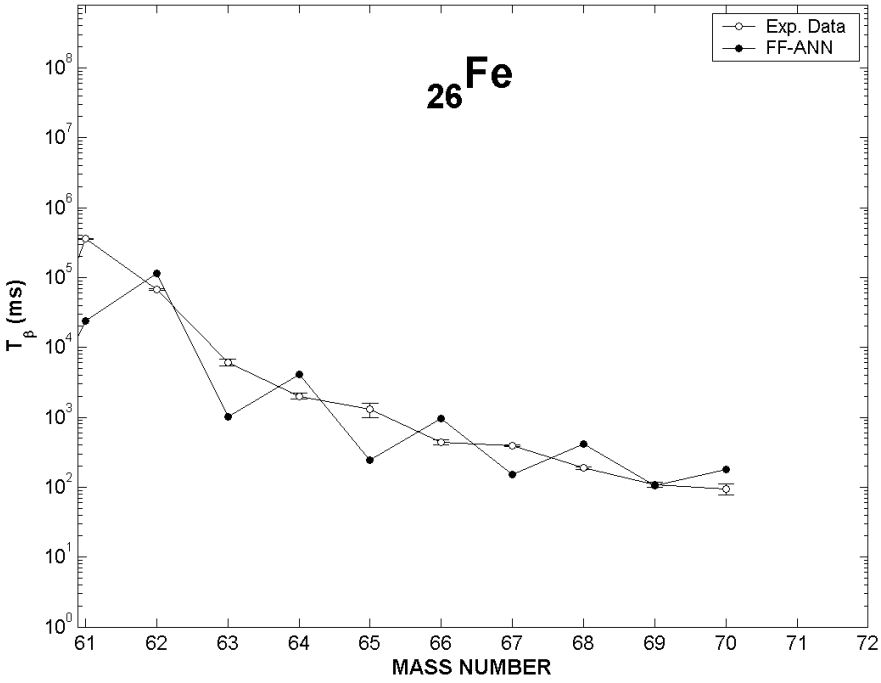
14.3 Συμπεράσματα

Αν συγκρίνουμε τα διαγράμματα των ισοτοπικών αλυσίδων του $Z - N - \delta$ μοντέλου αυτού, με τα αντίστοιχα του μοντέλου $Z-N$ (σχ. 13.1 και 13.2), ενισχύεται το συμπέρασμα της παραγράφου 13.2.4, ότι η εισαγωγή της στα-θερά ζευγοποίησης, δ, βοηθά σημαντικά την ικανότητα προσαρμογής και γενίκευσης των μοντέλων, συνυπολογίζοντας σε κάποιο βαθμό τις άρτιου −περιττού χαρα-

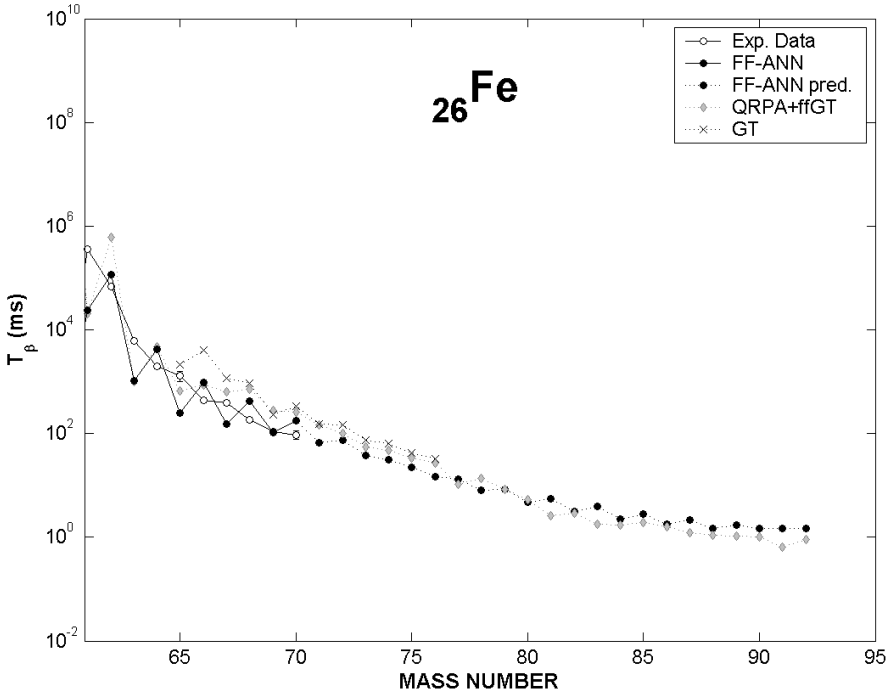
κτήρα επιδράσεις. Φαίνεται λοιπόν καθαρά στα διαγράμματα 14.6, 14.8, 14.10, 14.12 και 14.14, ότι συνυπολογίζονται με εξαιρετική ακρίβεια οι άρτιες−άρτιες και περιττές−άρτιες επιδράσεις, ενώ το μοντέλο δεν μπορεί να συνυπολογίσει σωστά τη συστηματική των περιττών−περιττών και των άρτιων−περιττών επιδράσεων αντίστοιχα. Παρ' όλα αυτά, συγκρινόμενο με τα προγενέστερα αποτελέσματα που είχαν ληφθεί με την βοήθεια της στατιστι-κής μεθοδολογίας των τεχνιτών νευρωνικών δικτύων, αλλά και με τα υπόλοιπα καθολικά μοντέλα, μπορεί να πει κανείς ότι, ελαφρά, υπερέχει.

14.4 Γραφήματα

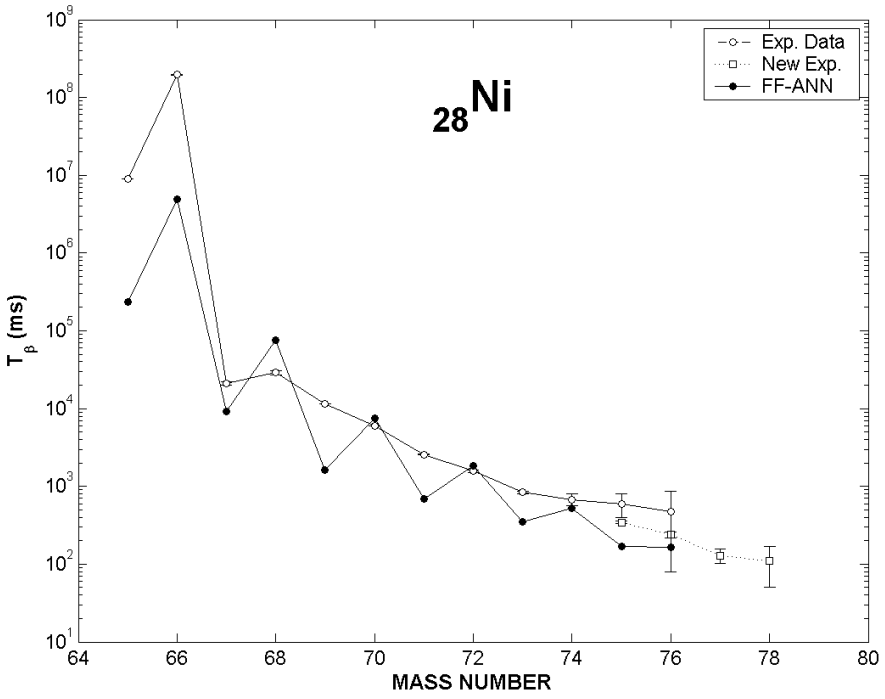
Ακολουθούν εν συνεχεία λοιπόν τα γραφήματα των ισοτοπικών και των ισότονων αλυσίδων.



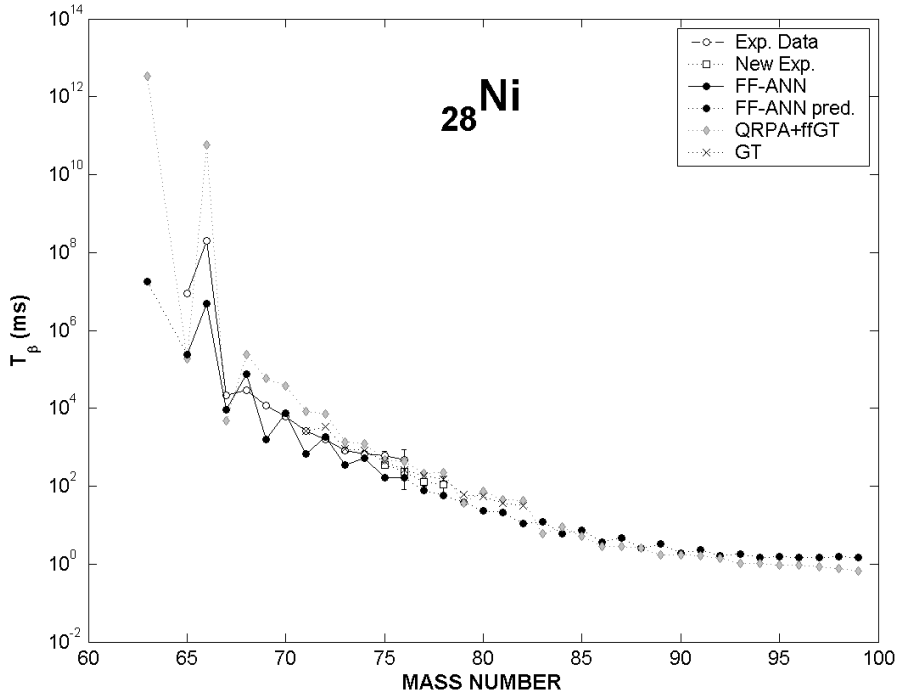
Σχήμα 14.6: Σύγκριση της σύγκλισης με τα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του σιδήρου.



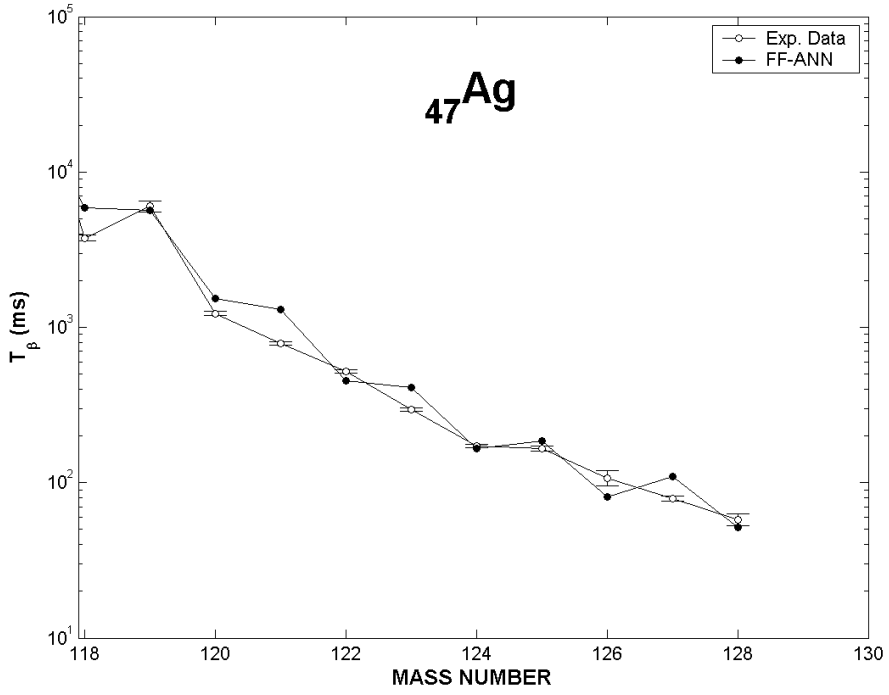
Σχήμα 14.7: Εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του σιδήρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας. Οι αντίστοιχες εκτιμήσεις των $QRPA + ffGT$ υπολογισμών δίνονται με τους ρόμβους, ενώ οι εκτιμήσεις των επαναυπολογισμών της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης σημειώνονται με $\times$.



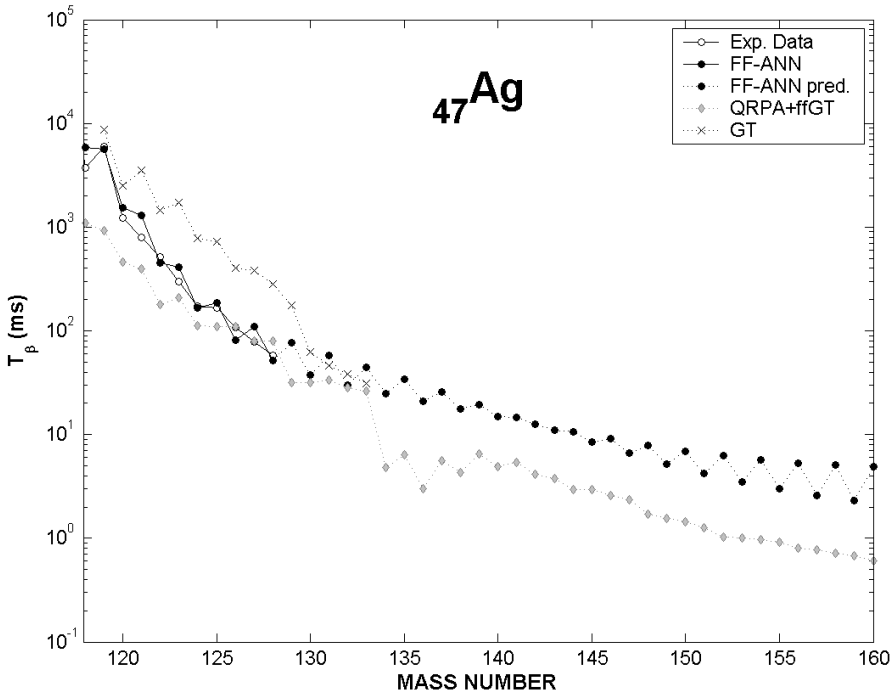
Σχήμα 14.8: Οι πειραματικοί χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του νικελίου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). Τα λευκά τετράγωνα αντιστοιχούν στα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του νικελίου από την ομάδα του *Hosmer* [71]. Τα δύο πρώτα αναφέρονται σε βελτιωμένες μετρήσεις των ήδη γνωστών ισοτόπων ^{75}Ni και ^{75}Ni, ενώ τα δύο επόμενα αφορούν εντελώς καινούργιες μετρήσεις του ισότοπου ^{77}Ni και του διπλά μαγικού ^{75}Ni.



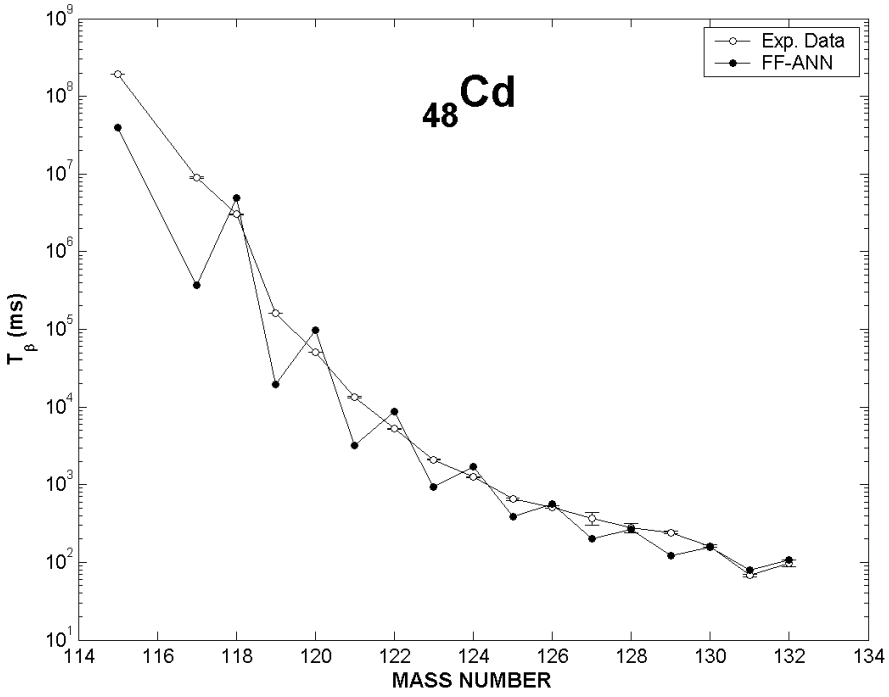
Σχήμα 14.9: Η εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του νικελίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, σε σύγκριση με αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέ-λου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* [72] (ρόμβοι), και των επαναυπολο-γισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των $Pfeiffer\ et\ al.$ [11], που σημειώνονται με [×].



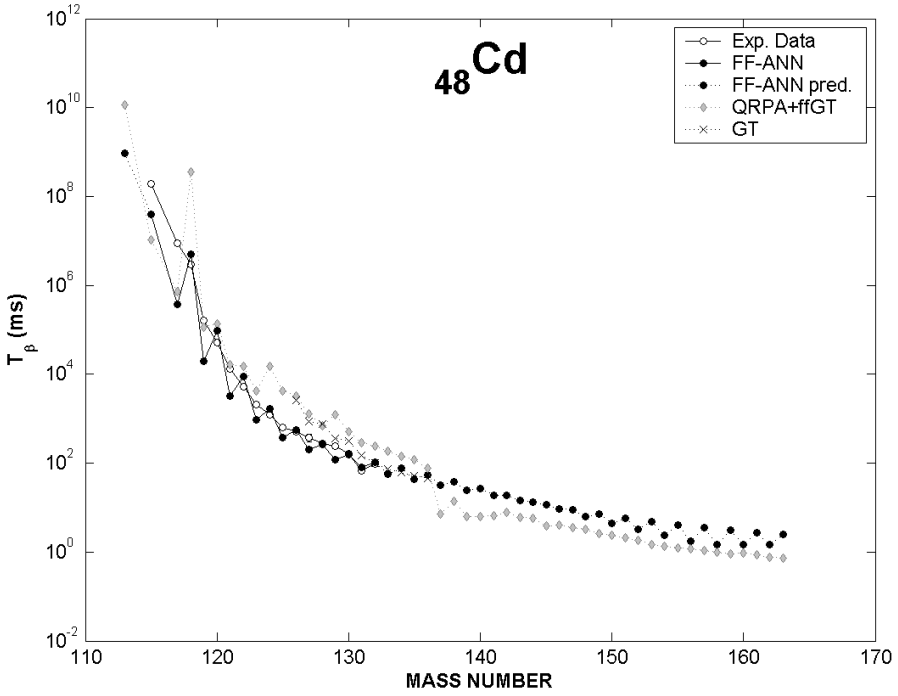
Σχήμα 14.10: Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα γνωστά ισότοπα του αργύρου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



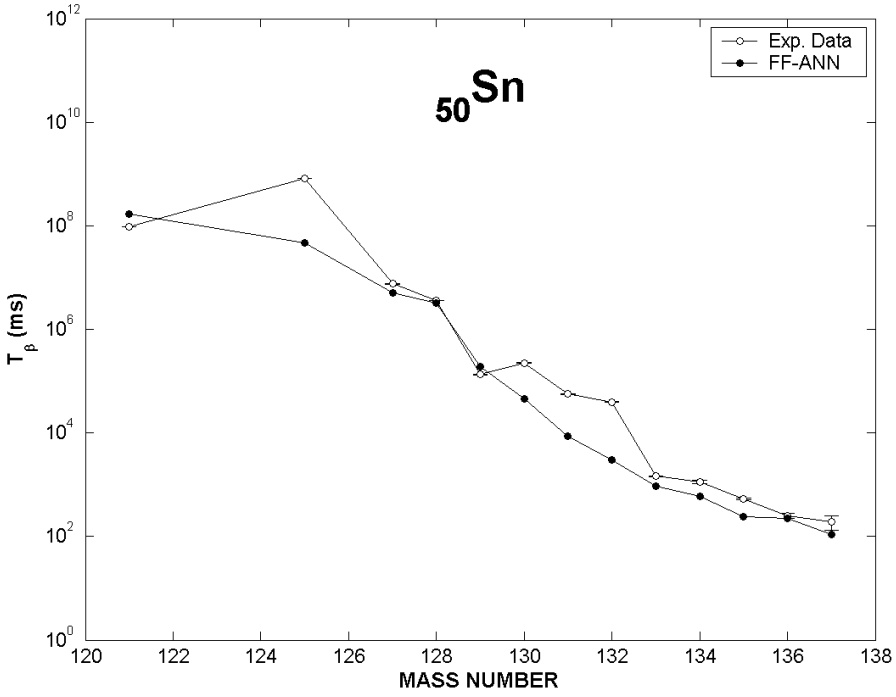
Σχήμα 14.11: Η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του αργύρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×].



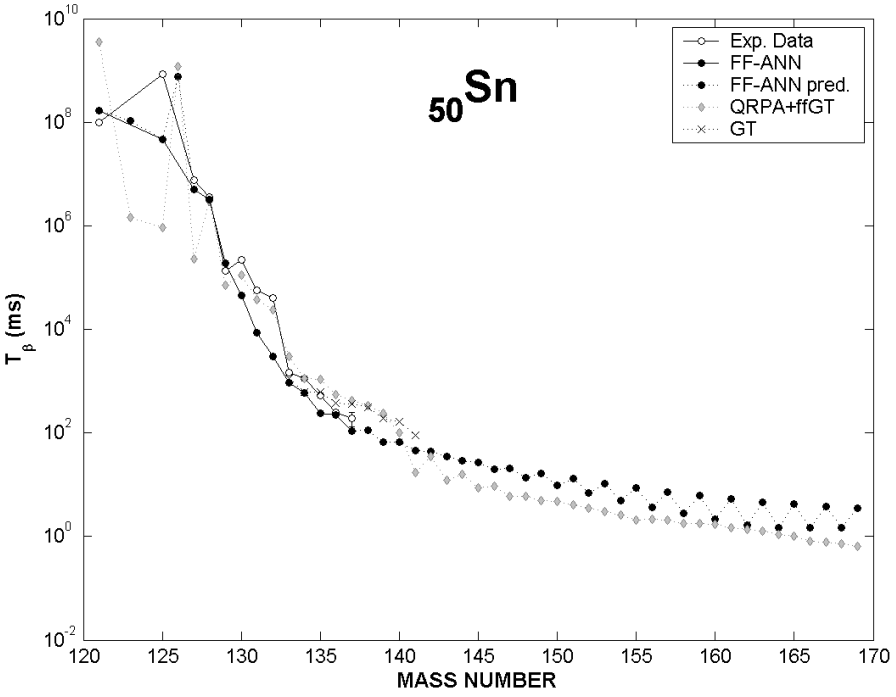
Σχήμα 14.12: Σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες), με τα πειραματικά δεδομένα των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του καδμίου (άσπρες κουκίδες).



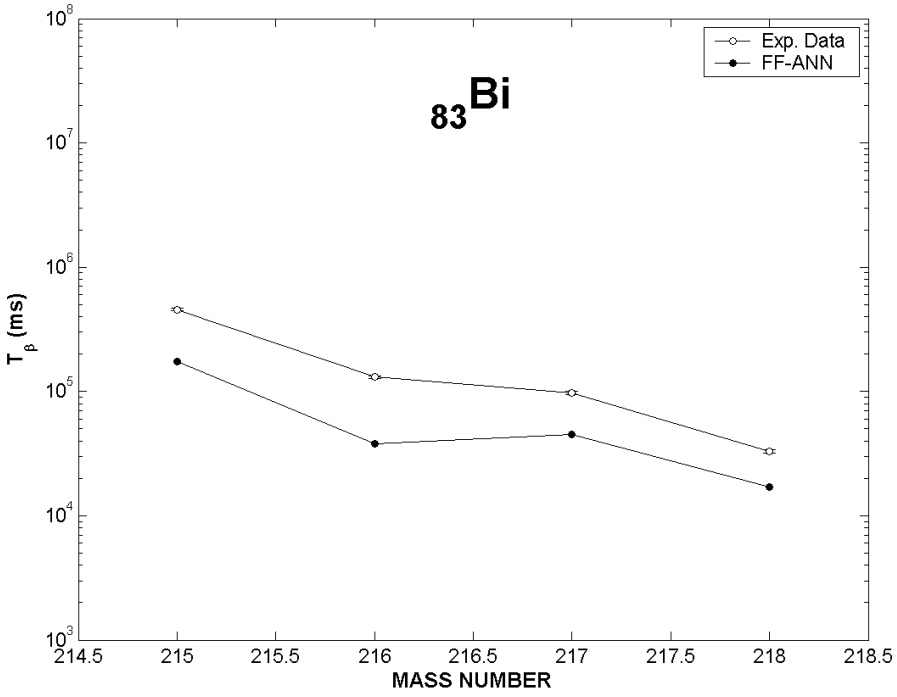
Σχήμα 14.13: Εκτίμηση από το μοντέλο μας για τους χρόνους ημίσειας ζωής των άγνωστων ισότοπων του καδμίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή) και σύγκριση επίσης, με το μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* (ρόμβοι) και τους αντίστοιχους επαναυπολογισμούς της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×].



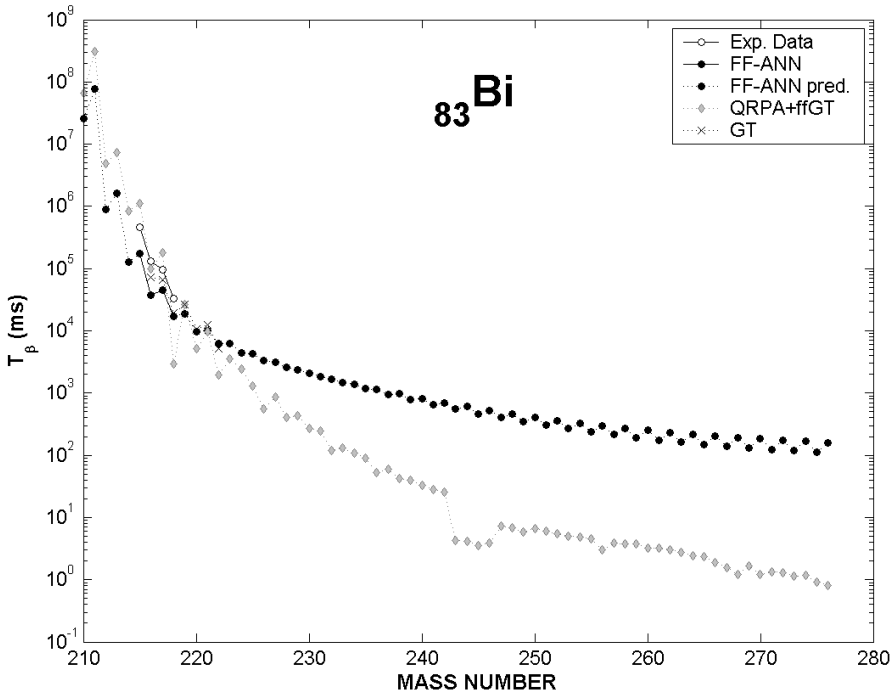
Σχήμα 14.14: Η παρατηρούμενη συστηματική για τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του κασσίτερου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



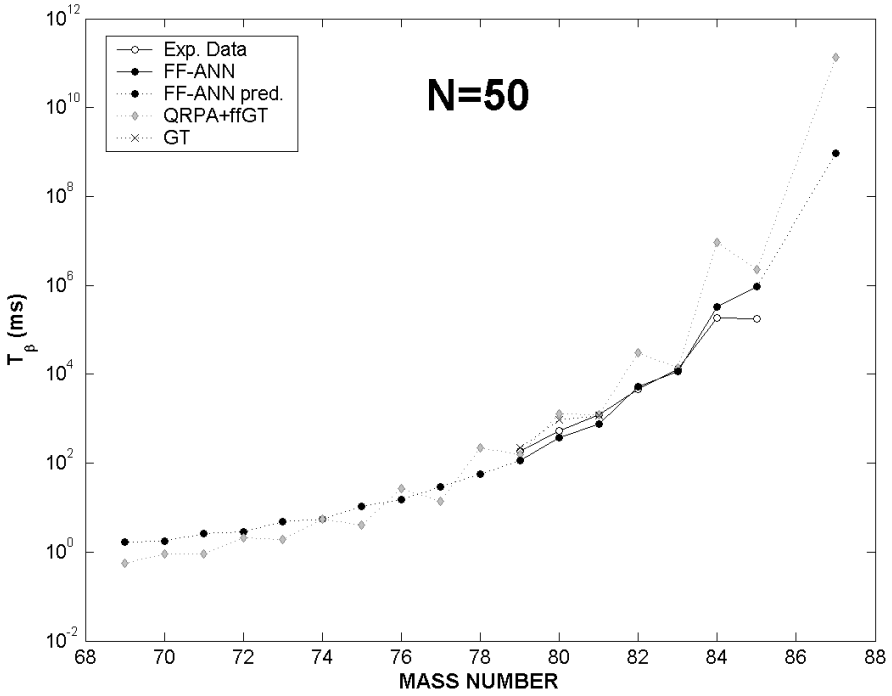
Σχήμα 14.15: Συμπερασμός στα άγνωστα ισότοπα του κασσίτερου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×].



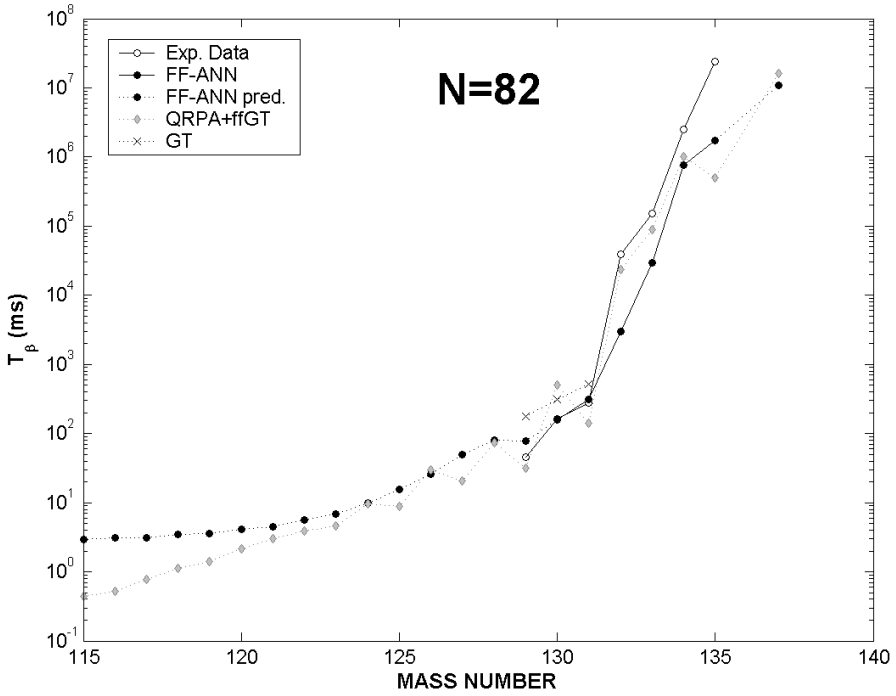
Σχήμα 14.16: Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του βισμουθίου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



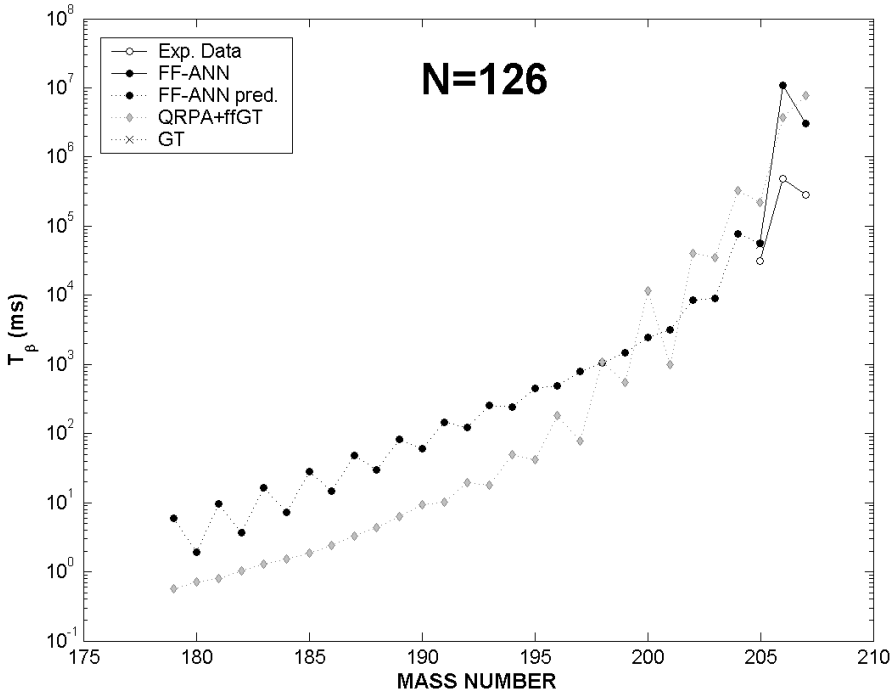
Σχήμα 14.17: Η εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του βισμουθίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από το $QRPA + ffGT$ μοντέλο (ρόμβοι) και τους επαναυπολογισμούς της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης ($\times$).



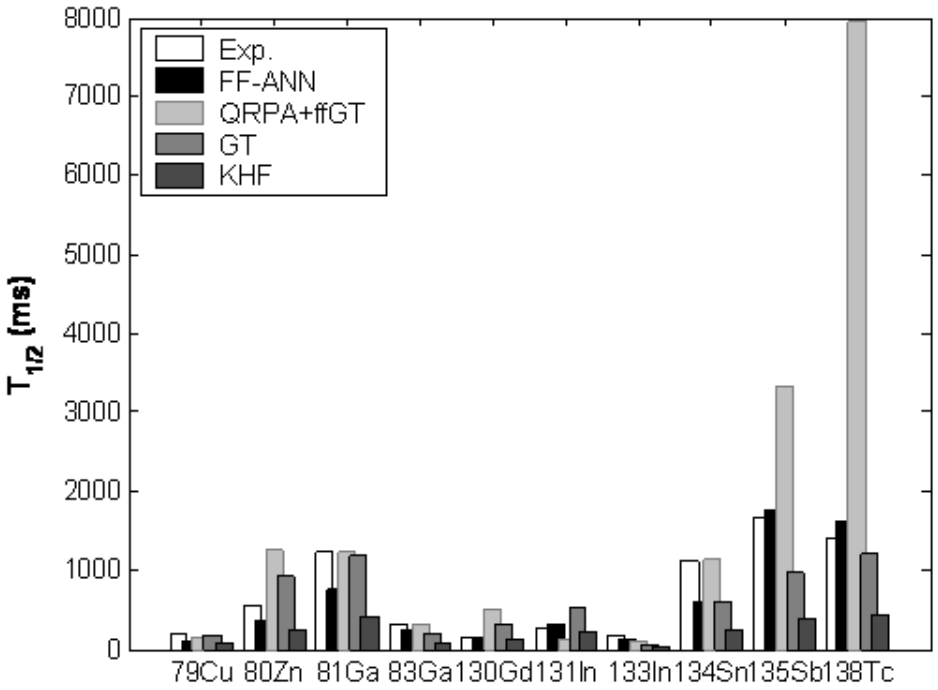
Σχήμα 14.18: Η ισοτονική αλυσίδα $N = 50$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με $(\times)$ οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες.



Σχήμα 14.19: Η ισοτονική αλυσίδα $N = 82$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με $(\times)$ οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες.



Σχήμα 14.20: Η ισοτονική αλυσίδα $N = 1260$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με $(\times)$ οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες.



Σχήμα 14.21: Εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω ή κοντά στους $r-process$ ατραπούς. Με άσπρο χρώ-μα σημειώνονται τα πειραματικά δεδομένα και με μαύρο η εκτίμηση του μοντέλου μας. Δίνονται επίσης προς σύγκριση με τις γκρίζες αποχρώσεις, οι εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72], της εφαρμογής της φόρμουλας $Kratz - Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής από τους $Pfeiffer\ et\ al.$ [11] και οι επαναυπολογισμοί των $Pfeiffer\ et\ al.$ επίσης, της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [11].

Κεφάλαιο 15

Πρόβλεψη της Γραμμής Διαφυγής Νετρονίων

ΠΑΡΑ ΤΗΝ ΓΕΝΙΚΗ διαπίστωση, ότι όσο περισσότερο απομακρύνεται από την περιοχή εκπαίδευσης ο συμπερασμός, τόσο λιγότερο αξιόπιστος είναι, επιλέξαμε να παρουσιάσουμε αναλυτικά στο κεφάλαιο αυτό και ένα περισσότερο φιλόδοξο μοντέλο, με το οποίο θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τα όρια σταθερότητας των πολύ πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων.

15.1 Τα Υπάρχοντα Πειραματικά Όρια Σταθερότητας

Στις περισσότερες μελέτες των ορίων σταθερότητας, προτείνεται η γραμμή διαφυγής νετρονίων, να συζητείται με βάση τα ισότονα και όχι με βάση τα ισότοπα, με τα οποία μελετάμε κυρίως την γραμμή διαφυγής πρωτονίων, έτσι ώστε να αποτρέπονται οι άρτιες−περιττές διακυμάνσεις που οφείλονται στη ζευγοποίηση. Ο πίνακας 15.1 λοιπόν, συνοψίζει τα ελαφρύτερα σταθερά (ως προς την εκπομπή νετρονίων) ισότονα και τα ισότονα που με τις μέχρι στιγμής πειραματικές τεχνικές θεωρούμε ότι βρίσκονται αμέσως μετά την γραμμή διαφυγής νετρονίων. Διάφορες πειραματικές μέθοδοι χρησιμοποιούνται για την ανακάλυψη αυτών των ισότονων: θρυμματισμός $[SP]$, θρυμματισμός βλήματος $[PF]$, μεταφορά $[TR]$, έκλυση πιονίων $[PI]$ και αντιδράσεις διαχωρισμού ραδιενεργών δεσμών $[RB]$. Για να είμαστε σαφής, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ότι η γραμμή διαφυγής είναι σήμερα γνωστή μέχρι το $N = 9$ (Λίθιο), μιας και δεν έχει δημοσιευτεί ως τώρα κάποια έρευνα για το $13^{L}i$.

Ο επόμενος πίνακας συνεχίζει κατά μήκος της γραμμής διαφυγής νετρονίων

N	**Δ**έσμιο	**Χ**ρονολ.	**Μ**έθοδος	**Μ**η Δέσμιο	**Χ**ρονολ.	**Μ**έθοδος
4	^{6}He	1936	TR	^{5}H	2001	RB
5	^{8}Li	1935	TR	^{7}He	1967	TR
				^{6}H	2003	^{P}I
6	^{8}He	1965	SP	^{7}H	2003	RB
7	^{11}Be	1958	TR	^{10}Li	1993	RF
				^{9}He	2001	RB
8	^{11}Li	1966	SP	^{10}He	1994	RB
9	^{14}B	1966	SP	^{13}Be	2001	RF
10	^{14}Be	1973	SP	-	-	-
11	^{17}C	1968	SP	^{16}B	2000	TR

Πίνακας 15.1: Τελευταία δέσμια και πρώτα μη δέσμιο ισότονα κατά μήκος της γραμμής διαφυγής νετρονίων για $3 < N < 12$.

προς τους βαρύτερους πυρήνες, οι πρώτοι μη δέσμιοι όμως πυρήνες που εμφανίζονται, δεν έχουν ακόμη παρατηρηθεί. Πειραματικές έρευνες για την ύπαρξη των ισότονων αυτών πραγματοποιούνται με την χρήση αντιδράσεων θρυμματισμού βλήματος [PF], καθώς σε αυτή την περιοχή μαζών ο θρυμματισμός βλήματος αποτελεί ξεκάθαρα την επικρατέστερη μέθοδο για την εξερεύνηση της γραμμής διαφυγής νετρονίων.

N	**Δ**έσμιο	**Χ**ρονολ.	**Μ**έθοδος	**Μ**η Δέσμιο	**Χ**ρονολ.	**Μ**έθοδος
12	^{17}B	1973	SP	^{16}Be	2003	PF
13	^{19}C	1974	SP	^{18}B	1984	PF
14	^{19}B	1984	PF	-	-	-
15	^{22}N	1979	PF	^{21}C	1985	PF
16	^{22}C	1986	PF	^{21}B	2003	PF
17	^{26}F	1979	PF	^{25}O	1985	PF
18	^{27}F	1981	PF	^{26}O	1990	PF
19	^{29}Ne	1985	PF	^{28}F	1999	PF
20	^{29}F	1989	PF	^{28}O	1997	PF
21	^{31}Ne	1996	PF	^{30}F	1999	PF
22	^{31}F	1999	PF	-	-	-
23	^{34}Na	1983	SP	^{33}Ne	2002	PF
24	^{34}Ne	2002	PF	-	-	-
25	^{37}Mg	1996	PF	^{36}Na	2002	PF
26	^{37}Na	2002	PF	-	-	-
27	^{40}Al	1997	PF	^{39}Mg	2002	PF
28	^{41}Al	1997	PF	-	-	-

N	**Δ**έσμιο	**Χ**ρονολ.	**Μ**έθοδος	**Μ**η Δέσμιο	**Χ**ρονολ.	**Μ**έθοδος
29	^{43}Si	2002	PF	-	-	-
30	^{45}P	1990	PF	-	-	-
31	^{46}P	1990	PF	-	-	-
32	^{48}S	1990	PF	-	-	-
33	^{51}Ar	1989	PF	-	-	-
34	^{51}Cl	1990	PF	-	-	-

Τελευταία δέσμια και πρώτα μη δέσμιο ισότονα κατά μήκος της γραμμής διαφυγής νετρονίων για $11 < N < 35$.

15.2 Χαρακτηριστικά του Μοντέλου

Το μοντέλο λοιπόν με το οποίο προσπαθούμε να προβλέψουμε την γραμμή διαφυγής νετρονίων, είναι όμοιο με το μοντέλο που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο: ένα αναλογικό μοντέλο $Z - N - \delta$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6 sec που αποτελείται από τέσσερα αφανή στρώματα των πέντε νευρώνων και εκπαιδεύεται με την βοήθεια της τεχνικής της Διατεκμηρίωσης και της Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης στα πλαίσια του αλγορίθμου $Levenberg - Marquardt$. Ο πίνακας 15.3 συνοψίζει τα βασικά του χαρα-κτηριστικά.

15.3 Εκτίμηση της Απόδοσης του Μοντέλου

15.3.1 Σύγκριση με τα Πειραματικά Δεδομένα

Ο πίνακας 15.4 περιλαμβάνει τους δείκτες απόδοσης του μοντέλου αυτού. Μπορούμε να δούμε ότι σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πίνακα 14.2, είναι ελαφρώς βελτιωμένα. Ακολουθεί στην συνέχεια η αναλυτική σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μέσω των αντίστοιχων διαγραμμάτων που συναντήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στο σχήμα 15.1 λοιπόν δίνονται οι υπολογισμοί των χρόνων ημίσειας ζωής σε αντιδια-στολή με τις παρατηρούμενες τιμές, ενώ το σχήμα 15.2 απεικονίζει τους λόγους $T_{\beta,calc}/T_{\beta,exp}$. Μπορούμε να πούμε έτσι πως η ποιότητα σύγκλισης με τα πειραματικά δεδομένα είναι κάπως καλύτερη στην περίπτωση αυτή από την αντίστοιχη του αντίστοιχου μοντέλου που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, καθώς παρατηρούμε ότι τα σημεία παρουσιάζουν μια πιο ήπια διασπορά.

Από τα σχήματα 15.1 και 15.2 λοιπόν παρατηρούμε ότι και η απόκριση του μοντέλου αυτού ακολουθεί την γενική τάση των πειραματικών χρόνων

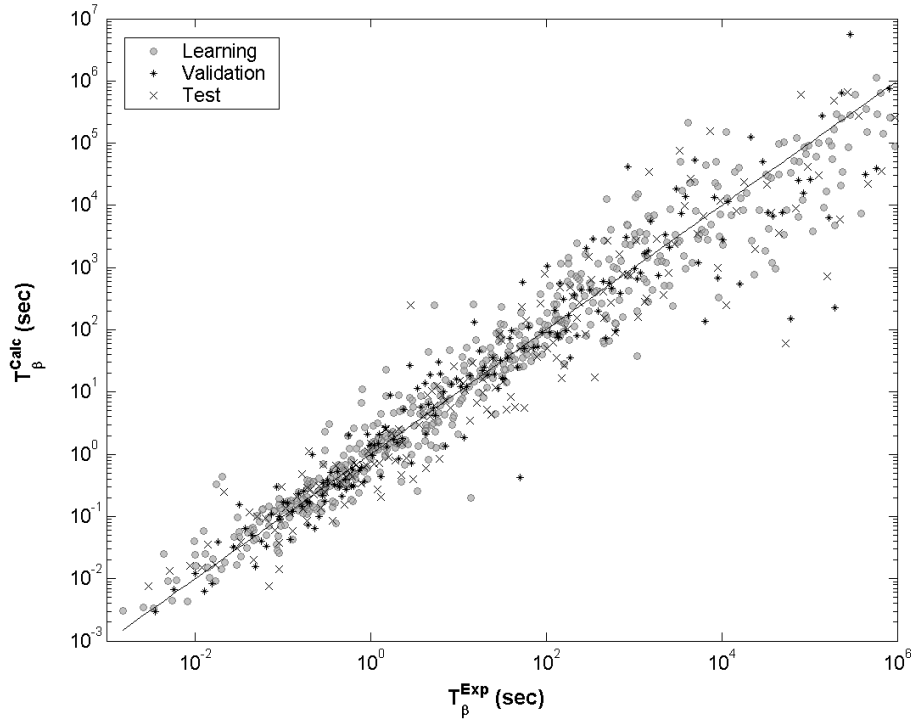
Δίκτυο	**Αρχιτεκτονική**	
Ευθείας Τροφοδοσίας Πλήρους Σύνδεσης	Διαστάσεις: Βάρη:	3-5-5-5-5-1 116
Εύρος T_β	**Συναρτήσεις Ενεργοποίησης**	
$T_\beta < 10^6\ sec$	*tanh-tanh-tanh-tanh-satlins*	
Τύπος Εκπαίδευσης	**Αλγόριθμος Εκπαίδευσης**	**Μέθοδος Αρχικοποίησης**
Παράλληλη	Μπαϊεσιανή Εξομάλυνση	$Nguyen - Widrow$
Μετασχηματισμός Εισόδων [-1, 1]		**Μετασχηματισμός Εξόδου [-1,1]**
Z N δ	[0, 230] [0, 230] [-1, 1]	$LogT_{1/2}$ [0.17609, 8.9771]

Πίνακας 15.3: Πίνακας βασικών χαρακτηριστικών του μοντέλου πρόβλεψης της γραμμής διαφυγής νετρονίων

Κριτήριο	**Εκπαιδευτικό Σετ**	**Σετ Τεκμηρίωσης**	**Δοκιμαστικό Σετ**	**Πλήρες Σετ**
$RMSE$	0.48	0.60	0.63	**0.54**
$NMSE$	0.998	1.001	1.042	**1.003**
MAE	0.34	0.40	0.45	**0.38**
$R-$τιμή	0.970	0.953	0.951	**0.962**

Πίνακας 15.4: Αποτελέσματα των δεικτών απόδοσης του παρόντος μοντέλου

ημίσειας ζωής. Φαινόμενα φλοιώδους δομής δε, όπως βλέπουμε στα σχήματα 15.3 και 15.5,φαίνεται ότι λαμβάνονται και εδώ υπ' όψην. Η ακρίβεια των υπολογισμών μας έναντι της απόστασης από την σταθερότητα απεικονίζεται στο διάγραμμα 15.4. Ανακριβείς υπολογισμοί κοντά στην γραμμή σταθερότητας σημειώνονται και εδώ, αλλά οι πιο απομακρυσμένοι από την σταθερότητα πυρήνες παρουσιάζουν εδώ μεγαλύτερη σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα. Η μέση τετραγωνική απόκλιση σε κάθε ισοτοπική αλυσίδα δίνεται στο σχήμα 15.5. Συμπεραίνουμε λοιπόν με βάση την μέχρι τώρα ανάλυση ότι το μοντέλο αυτό εμφανίζει μια σχετικά πιο ισορροπημένη απόκριση. Η εκτίμηση τέλος των χρόνων ημίσειας ζωής των πολύ ελαφρών και των βαρέων αντίστοιχα πυρήνων



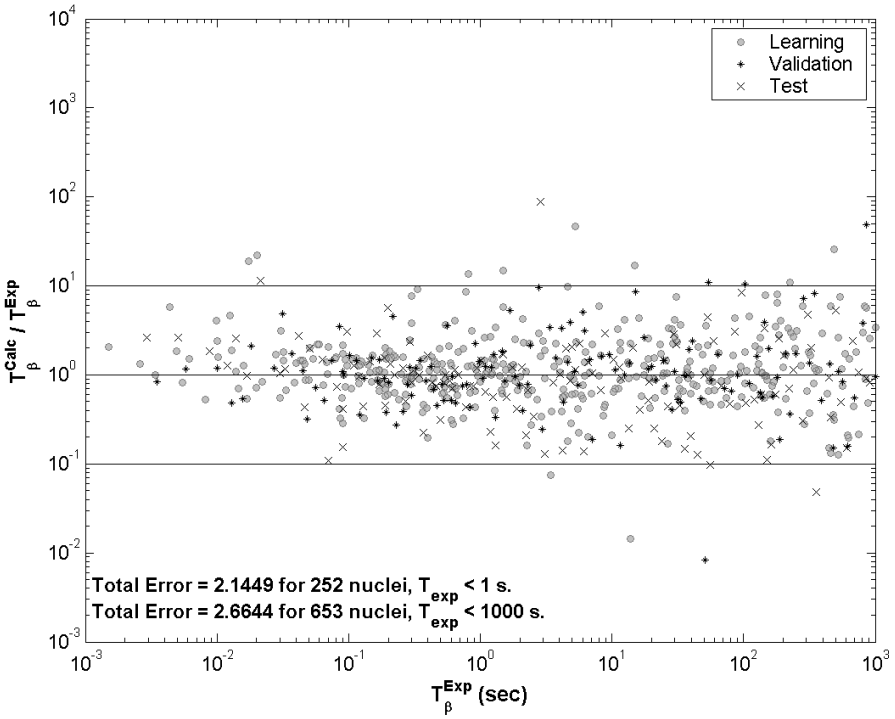
Σχήμα 15.1: Οι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που υπολογίζονται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.

παρουσιάζει μεγαλύτερη σύγκλιση.

Στην συνέχεια ελέγχουμε πιο ποσοτικοποιημένα την παρατηρούμενη στα σχήματα απόκριση μέσω των δεικτών *Klapdor* και *Möller*. Έτσι ο πίνακας 15.6 παρουσιάζει την μέση απόκλιση *Möller* $M^{(10)}$ και την τυπική διακύμανση $\sigma_M^{(10)}$, ανάλογα με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων για τα τρία υποσέτ και το πλήρες σετ, ενώ στον πίνακα 15.5, δίνονται οι ποσότητες n, M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_M^{(10)}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ανεξάρτητα από τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων.

Οι δείκτες *Klapdor*, η μέση δηλαδή απόκλιση *Klapdor* $\langle x \rangle_k$, η τυπική απόκλιση της μέσης αυτής τιμής s_k και το ποσοστό $m(\%)$ των πυρήνων, των οποίων ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο μας προς τους αντίστοιχους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής, δεν ξεπερνά έναν παράγοντα 2, 5 ή 10, τέλος, παρουσιάζονται στον πίνακα 15.7.

Αν συγκρίνουμε λοιπόν τις αποδόσεις του πίνακα 15.6, με τις αντίστοιχες αποδόσεις του μοντέλου που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (πίνακας 14.4), μπορούμε να αποφανθούμε ότι στο παρόν μοντέλο έχει εξαλειφθεί η τάση

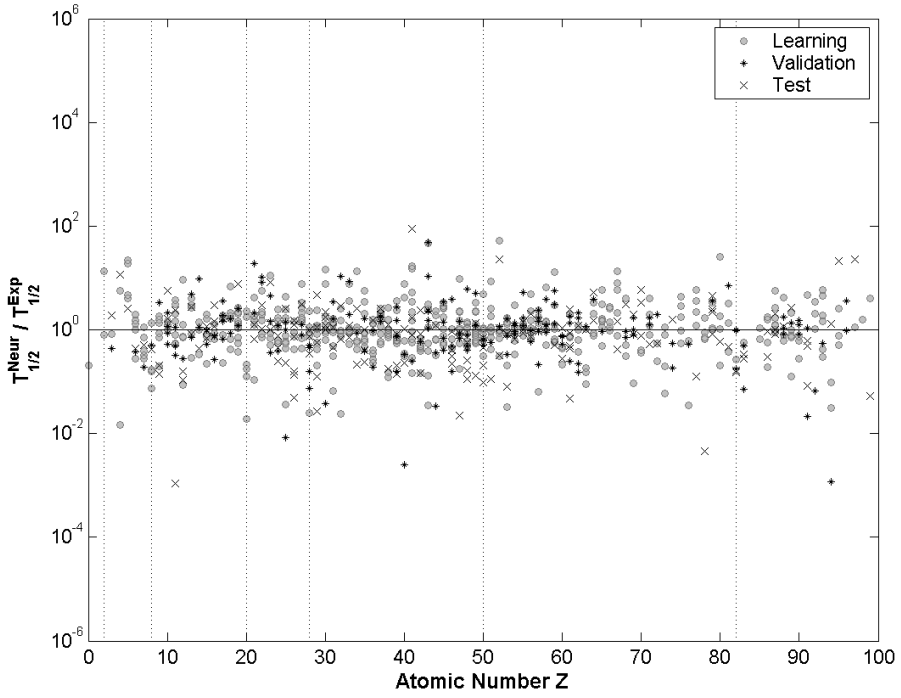


Σχήμα 15.2: Λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.

υπερεκτίμησης των χρόνων ημίσειας ζωής των πυρήνων άρτιου−άρτιου χαρακτήρα. Οι τιμές $\sigma_M^{(10)}$ επιπλέον του πίνακα 15.5 συγκρινόμενες με εκείνες του πίνακα 14.3, υποδεικνύουν την υποφαινόμενη βελτιωμένη προσαρμογή του μοντέλου αυτού. Συγκρίνοντας τέλος τους αντίστοιχους δείκτες *Klapdor* των δύο μοντέλων (πιν. 15.7 για το παρόν και πιν. 14.5 για το προηγούμενο μοντέλο), μπορεί να πει κάνεις ότι είναι λίγο πιο αυξημένο το ποσοστό των πυρήνων για τους οποίους οι εκτιμήσεις των χρόνων ημιζωής από το μοντέλο βρίσκονται πιο κοντά στις παρατηρούμενες τιμές.

15.3.2 Σύγκριση με Άλλα Καθολικά Μοντέλα

Στον πίνακα 15.9 μπορεί να βρει κανείς μια σύγκριση με τα μικροσκοπικά πρότυπα $Nilsson + BCS + QRPA$ και $FRDM + pnQRPA$ και το μικρο − στατιστικό πρότυπο της Θεωρίας Ημιμέσης Τελικής Κατάστασης [SGT]. Ο παραλληλισμός με το ενημερωμένο $FRDM + pnQRPA$ και το υβριδικό $pnQRPA+ffGT$ πρότυπο γίνεται μέσω του πίνακα 15.8, ενώ μια αντιπαραβο-

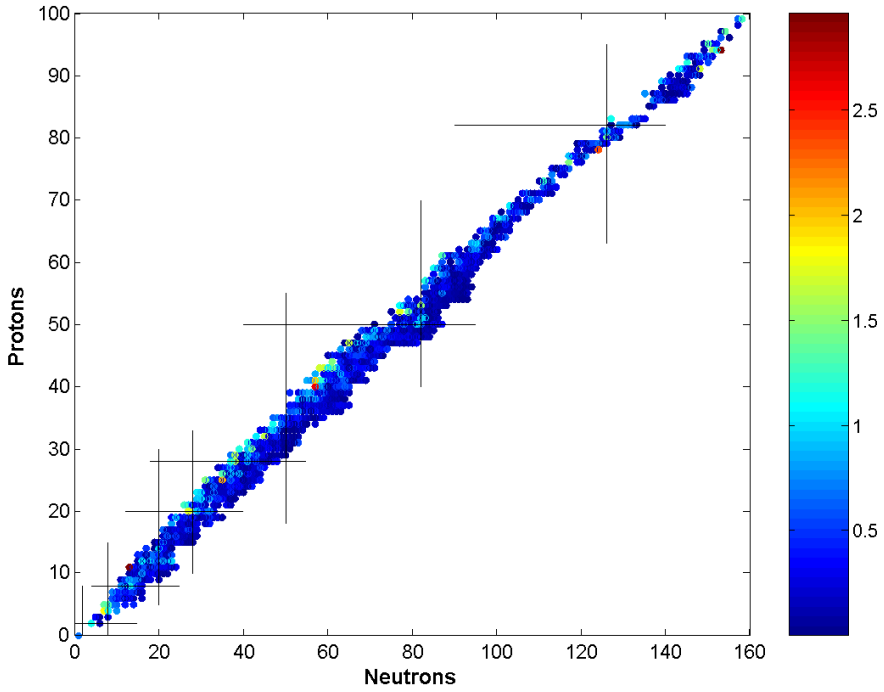


Σχήμα 15.3: Ίδιο με το σχήμα 15.2, αλλά ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- εδώ δίνεται συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z.

λή με τους πρωίμους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* και το πρότυπο $Nilsson + BSC + pnQRPA$ υπάρχει στον πίνακα 15.10.

15.4 Εκτίμηση της Ικανότητας Συμπερασμού

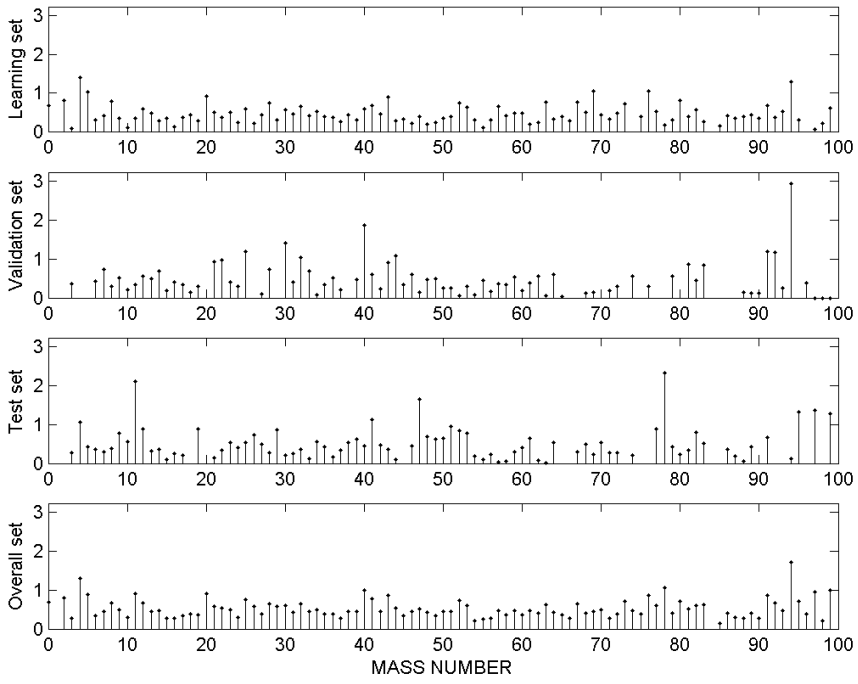
Παρατηρούμε λοιπόν, όπως και αναμέναμε από την γενικότερη καλή συμπεριφορά του μοντέλου, ότι η απόκρισή του, η οποία είναι ελαφρώς βελτιωμένη σε σχέση με το μοντέλο της προηγούμενης παραγράφου, συγκλίνει περισσότερο προς τα πειραματικά δεδομένα σε σχέση με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των υπόλοιπων καθολικών προτύπων. Αυτό το συμπέρασμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό για μας, καθώς ενισχύει την ιδέα της προσέγγισης του προβλήματος των χρόνων ημίσειας ζωής, αλλά και γενικότερα των πυρηνικών ιδιοτήτων, διαμέσου στατιστικών προτύπων μοντελοποίησης της παρατηρούμενης συστηματικής τους. Ακολουθούν λοιπόν εκτιμήσεις των χρόνων ημιζωής άγνωστων νουκλιδίων, μέσω των διαγραμμάτων ισοτοπικών αλυσίδων των περιοχών $Z \approx 28$, 50 και 82 καθώς των ισότονων $N = 50$, 82 και 126.



Σχήμα 15.4: Απόλυτη απόκλιση μεταξύ υπολογισμένης και πειραματικής τιμής των χρόνων ημίσειας ζωής για το πλήρες σετ.

15.4.1 Η Περιοχή $Z \approx 28$

Όπως και πριν, στην περιοχή αυτή μελετάμε τις ισοτοπικές αλυσίδες του σιδήρου $[_{26}Fe]$ και του νικελίου $[_{28}Ni]$. Στο σχήμα 15.7 λοιπόν, δίνεται η σύγκριση της σύγκλισης με τα πειραματικά δεδομένα για τα γνωστά ισότοπα του σιδήρου, ενώ στο σχήμα 15.8 συμπληρώνεται και η γενίκευση στην άγνω-στη περιοχή. Για τα γνωστά ισότοπα του νικελίου επιπλέον, οι παρατηρούμενοι πειραματικά χρόνοι ημίσειας ζωής συγκρίνονται με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας στο σχήμα 15.9, ενώ η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του νικελίου φαίνεται στο σχήμα 15.10. Τα λευκά τετράγωνα του σχήματος αντιστοιχούν και σε αυτή την περίπτωση στις πρόσφατες πειραματικές μετρήσεις της ομάδας του *Hosmer* [71]. Μπορεί να δει κανείς την σημαντικά βελτιωμένη συμπεριφορά του δικτύου μας σε αυτές τις τέσσερις περιπτώσεις. Για άμεση σύγκριση έχουν επίσης συμπεριληφθεί οι αντίστοιχες $QRPA + ffGT$ εκτιμήσεις και οι επαναυπολογισμοί της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των *Pfeiffer et al.* [11].



Σχήμα 15.5: Μέση τετραγωνική απόκλιση κάθε ισοτοπικής αλυσίδας μεταξύ υπολογισμένων από το μοντέλο και πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης, το δοκιμαστικό σετ και το πλήρες σετ.

15.4.2 Η Περιοχή $Z \approx 50$

Εδώ μελετάμε ξανά την εκτίμηση του μοντέλου μας για τα ισότοπα του αργύρου $[_{47}Ag]$, του καδμίου $[_{48}Cd]$ και του κασσίτερου $[_{50}Sn]$. Η επιμέρους αντίστοιχα σύγκριση μεταξύ των υπολογισμών του μοντέλου μας και των πειραματικών τιμών δίνεται στα σχήματα λοιπόν 15.11, 15.13 και 15.15, ενώ ο συμπερασμός στα άγνωστα νουκλίδια της κάθε ισοτοπικής αλυσίδας συμπεριλαμβάνεται στα σχήματα 14.11, 15.14 και 15.16.

15.4.3 Η Περιοχή $Z \approx 82$

Τέλος, στην περιοχή $Z \approx 82$ εξετάζουμε, όπως και στην παράγραφο 14.2.3, την απόκριση του μοντέλου μας για τα ισότοπα του βισμουθίου. Η σύγκριση με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για την γνωστή περιοχή δίνεται στο σχήμα 14.16, ενώ η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του βισμουθίου προστίθεται στο σχήμα 14.17.

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Εκπαιδευτικό Σετ**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	152	0.07	1.17	0.33	2.13	0.34	2.17
< 10	237	0.05	1.12	0.37	2.32	0.37	2.34
< 100	318	0.05	1.12	0.37	2.36	0.38	2.38
< 1000	392	0.06	1.15	0.40	2.50	0.40	2.52
$< 10^6$	503	0.00	1.00	0.48	3.04	0.48	3.04

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Σετ Τεκμηρίωσης**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	50	-0.02	0.95	0.29	1.93	0.29	1.93
< 10	79	0.03	1.08	0.34	2.18	0.34	2.18
< 100	105	0.02	1.04	0.40	2.52	0.40	2.52
< 1000	130	0.03	1.08	0.44	2.78	0.45	2.79
$< 10^6$	167	-0.05	0.89	0.60	4.00	0.60	4.02

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Δοκιμαστικό Σετ**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	50	0.01	1.03	0.36	2.29	0.36	2.29
< 10	79	-0.02	0.95	0.44	2.75	0.44	2.75
< 100	106	-0.05	0.90	0.46	2.86	0.46	2.88
< 1000	131	-0.07	0.86	0.47	2.93	0.47	2.96
$< 10^6$	168	-0.14	0.73	0.62	4.16	0.63	4.30

Πίνακας 15.5: Ανάλυση της απόκλισης μεταξύ υπολογισμένων και παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που φαίνεται στα σχήματα $15.1 - 15.3$ με βάση τους δείκτες *Möller*. Οι ποσότητες M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξισώσεις $(12.9) - (12.15)$.

$T_{\beta,exp}$		**Εκπαιδευτικό Σετ**			**Σετ Τεκμηρίωσης**			**Δοκιμαστικό Σετ**			**Πλήρες Σετ**		
(sec)		n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$
< 1	$o-o$	46	1.33	2.37	19	1.24	2.25	11	0.99	1.69	76	1.25	2.26
	odd	71	1.06	1.98	22	0.80	1.63	32	0.91	2.17	125	0.97	1.99
	$e-e$	35	1.24	2.06	9	0.83	1.55	7	1.91	3.06	51	1.23	2.19
< 10	$o-o$	75	1.39	2.69	26	1.33	2.40	20	1.02	3.59	121	1.31	2.79
	odd	111	0.98	2.04	34	0.85	1.94	42	0.81	2.30	187	0.92	2.09
	$e-e$	51	1.09	2.22	19	1.21	2.03	17	1.28	2.67	87	1.15	2.28
< 100	$o-o$	94	1.34	2.57	36	1.14	3.31	28	0.85	3.25	158	1.19	2.90
	odd	156	0.98	2.26	48	0.91	2.11	57	0.83	2.68	261	0.93	2.33
	$e-e$	68	1.19	2.16	21	1.19	1.98	21	1.17	2.69	110	1.19	2.09
< 1000	$o-o$	116	1.35	2.66	40	1.08	3.15	35	0.84	3.10	191	1.18	2.89
	odd	198	1.01	2.43	63	0.95	2.72	68	0.72	2.84	329	0.93	2.59
	$e-e$	78	1.25	2.31	27	1.44	2.20	28	1.33	2.57	133	1.30	2.35
$< 10^6$	$o-o$	146	1.06	3.31	46	1.00	3.26	46	0.51	5.04	238	0.91	3.73
	odd	262	0.96	2.99	88	0.76	4.70	87	0.75	3.69	437	0.87	3.48
	$e-e$	95	1.04	2.75	33	1.13	3.05	35	1.09	3.75	163	1.07	3.02

Πίνακας 15.6: Οι δείκτες *Möller* υπολογισμένοι για τα τρία υποσέτ και το πλήρες σετ σε αναλογία με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15).

Παράσ.	$T_{\beta,exp}$ (sec)	**Εκπαιδευτικό Σετ**			**Σετ Τεκμηρίωσης**			**Δοκιμαστικό Σετ**			**Πλήρες Σετ**		
		$m(\%)$	$\langle x\rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x\rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x\rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x\rangle_k$	s_k
< 10	$< 10^6$	94	2.26	1.59	91.6	2.38	1.69	91.1	2.73	2.02	93	2.38	1.71
	< 60	97.4	1.98	1.31	98	2.12	1.49	97.1	2.42	1.8	97.4	2.1	1.47
	< 1	98	1.87	1.25	100	1.84	0.89	98	2.06	1.52	98.4	1.9	1.25
< 5	$< 10^6$	86.9	1.9	0.91	82	1.9	0.92	78.6	2.04	1.01	84.2	1.92	0.93
	< 60	93.4	1.77	0.8	92.1	1.83	0.85	87.3	1.91	0.94	91.9	1.81	0.84
	< 1	94.7	1.68	0.7	100	1.84	0.89	92	1.73	0.75	95.2	1.73	0.76
< 2	$< 10^6$	60.2	1.4	0.28	57.5	1.4	0.28	46.4	1.36	0.28	56.9	1.39	0.28
	< 60	69.5	1.38	0.26	64.4	1.37	0.27	55.9	1.34	0.28	65.7	1.37	0.27
	< 1	76.3	1.4	0.26	70	1.37	0.27	64	1.3	0.26	72.6	1.38	0.26

Πίνακας 15.7: Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μέσω των δεικτών *Klapdor* [36, 34, 37, 38, 21, 55, 8]. Η μέση απόκλιση *Klapdor* $\bar{x}_K$ και η τυπική απόκλιση σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) – (12.8).

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Πλήρες Σετ**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	252	0.04	1.10	0.33	2.13	0.33	2.14
< 10	395	0.03	1.07	0.38	2.38	0.38	2.39
< 100	529	0.02	1.06	0.40	2.50	0.40	2.51
< 1000	653	0.03	1.07	0.42	2.66	0.43	2.66
$< 10^6$	838	-0.04	0.92	0.54	3.47	0.54	3.48

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	$FRDM + pnQRPA$						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	184	0.03	1.06	0.57	3.72	0.57	3.73
< 10	306	0.14	1.38	0.77	5.87	0.78	6.04
< 100	431	0.19	1.55	0.94	8.81	0.96	9.21
< 1000	546	0.34	2.20	1.28	19.09	1.33	21.17
$< 10^6$	–	–	–	–	–	–	–

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	$pnQRPA + ffGT$						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	184	-0.08	0.84	0.48	3.04	0.49	3.08
< 10	306	-0.03	0.93	0.55	3.52	0.55	3.53
< 100	431	-0.04	0.91	0.61	4.10	0.61	4.12
< 1000	546	-0.04	0.92	0.68	4.81	0.68	4.82
$< 10^6$	–	–	–	–	–	–	–

Πίνακας 15.8: Σύγκριση με τους $FRDM + pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [72] και τους $pnQRPA + ffGT$ υπολογισμούς επίσης των *Möller et al.* [72]. Τα μεγέθη M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξ. (12.9) – (12.15).

$T_{\beta,exp}$		$N+BSC+pnQRPA$			$FRDM+pnQRPA$			SGT			**Πλήρες Σετ**		
(sec)		n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$
<1	$o-o$	28	1.75	4.96	29	0.59	2.91	38	1.45	2.57	76	1.25	2.26
	odd	31	0.60	2.24	35	0.59	2.64	56	1.75	2.32	125	0.97	1.99
	$e-e$	10	1.15	2.36	10	3.84	3.08	19	2.03	2.30	51	1.23	2.19
<10	$o-o$	66	1.89	4.60	59	0.76	8.83	83	1.94	4.10	121	1.31	2.79
	odd	81	0.92	3.84	85	0.78	4.81	110	1.71	2.36	187	0.92	2.09
	$e-e$	34	1.01	2.93	34	2.50	4.13	45	1.58	2.23	87	1.15	2.28
<100	$o-o$	85	3.15	10.51	88	2.33	49.19	115	2.54	8.86	158	1.19	2.90
	odd	127	1.07	4.29	133	1.11	9.45	174	1.95	3.15	261	0.93	2.33
	$e-e$	52	1.13	3.58	54	2.61	4.75	64	1.45	2.40	110	1.19	2.09
<1000	$o-o$	93	3.02	10.25	115	3.50	72.02	144	3.42	15.21	191	1.18	2.89
	odd	157	1.10	5.55	194	2.77	71.50	232	2.36	5.42	329	0.93	2.59
	$e-e$	63	1.39	6.10	71	6.86	58.48	85	1.38	2.81	133	1.30	2.35
$<10^6$	$o-o$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	238	0.91	3.73
	odd	–	–	–	–	–	–	–	–	–	437	0.87	3.48
	$e-e$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	163	1.07	3.02

Πίνακας 15.9: Σύγκριση της απόδοσης του μοντέλου μας με τους υπολογισμούς του προτύπου $N+BSC+pnQRPA$ των *Homma et al.* [34],τους $FRDM+pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [70] και τους υπολογισμούς της SGT των *Nakata et al.* [35]. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15).

Παράγ.	$T_{\beta,exp}$ (sec)	*Mavrommatis et al.*			$NBCS + pnQRPA$			*Staudt et al.*			**Πλήρες Σετ**		
		$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k
< 10	$< 10^6$	82.8	2.78	1.83	76.7	3.00	–	72.2	1.85	1.21	93	2.38	1.71
	< 60	88.1	2.8	1.83	87.2	2.81	–	96.3	1.67	1.02	97.4	2.1	1.47
	< 1	90	2.88	1.88	95.7	2.64	–	99.1	1.44	0.4	98.4	1.9	1.25
< 5	$< 10^6$	72.4	2.22	1.07	–	–	–	69.7	1.68	0.76	84.2	1.92	0.93
	< 60	76.2	2.2	1.01	–	–	–	94.5	1.56	0.66	91.9	1.81	0.84
	< 1	76.7	2.23	1.02	–	–	–	99.1	1.44	0.4	95.2	1.73	0.76
< 2	$< 10^6$	39.7	1.39	0.29	33.8	1.43	–	56.4	1.37	0.29	56.9	1.39	0.28
	< 60	42.9	1.44	0.32	42.0	1.41	–	82.2	1.36	0.29	65.7	1.37	0.27
	< 1	43.3	1.46	0.32	50.7	1.43	–	90.6	1.35	0.27	72.6	1.38	0.26

Πίνακας 15.10: Σύγκριση των παρόντων υπολογισμών με τους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* [8] και τους υπολογισμούς του μοντέλου $NBSC + pnQRPA$ των *Homma et al.* [34]. Τα μεγέθη m, $\bar{x}_K$ και σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) – (12.8).

15.4.4 Οι Περιοχές $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$

Οι εκτιμήσεις του παρόντος μοντέλου για τα άγνωστα ισότονα των περιοχών $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$ που είναι υπεύθυνα για τις κορυφές των $r-$ηλιακών αφθονιών, εμφανίζονται στα σχήματα 15.19, 15.20 και 15.21 αντίστοιχα. Πραγματοποιούμε και εδώ την γνωστή μας πλέον σύγκριση με τις εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA + ffGT$ και τους επαναυπολογισμούς της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Η εκτίμηση του μοντέλου μας τέλος, για τους χρόνους ημίσειας ζωής των αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω ή κοντά στους $r-process$ ατραπούς παρουσιάζεται στο σχήμα 15.6. Και σε αυτή την περίπτωση έχουν προστεθεί, εκτός από τους $QRPA+ffGT$ και τους GT υπολογισμούς και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή της φόρμουλας $Kratz-Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής. Από το σχήμα 15.6 παρατηρούμε λοιπόν, ότι η εκτίμηση του μοντέλου μας παρουσιάζει την μεγαλύτερη σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα.

15.5 Εκτίμηση της Γραμμής Διαφυγής Νετρονίων

Αν δούμε προσεκτικά τα διαγράμματα των ισοτοπικών αλυσίδων που δίνουν τις εκτιμήσεις των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων νουκλιδίων από το συγκεκριμένο μοντέλο, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι εμφανίζουν κάποιες αλλαγές στην μονοτονία καθώς προχωράμε προς τους πιο πλούσιους σε νετρόνια πυρήνες ή κάποιες αλλαγές στην ομαλή σχετικά συμπεριφορά του συμπερασμού σε σχέση με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Βασικός μας σκοπός λοιπόν ήταν η δυνατότητα απόδοσης κάποιου φυσικού περιεχομένου στα παρατηρούμενα αυτά φαινόμενα. Βέβαια η αξιοπιστία της γενίκευσης που προκύπτει από τα στατιστικά πλαίσια της μηχανικής μάθησης, όσο απομακρυνόμαστε από την γνωστή περιοχή, εν γένει, τόσο περισσότερο μπορεί να αμφισβητηθεί. Από την εμπειρία μας στο δοκιμαστικό πείραμα ωστόσο, διαπιστώσαμε ότι υπάρχουν περιπτώσεις, όπου το δίκτυο μπορεί να προβλέψει με εξαιρετική επιτυχία μια πολύ απομακρυσμένη περιοχή από το διάστημα, στο οποίο βρίσκονται τα παραδείγματα του εκπαιδευτικού σετ, ενώ η συμπεριφορά της γενίκευσης στις πιο κοντινές στην εκπαίδευση περιοχές να μην είναι και τόσο καλή. Στηριζόμενοι λοιπόν σε αυτήν την παρατήρηση, θεωρήσαμε ότι κάτι ανάλογο μπορεί να συμβαίνει και στην περίπτωση αυτή.

Προσέξαμε έτσι, ότι στις περισσότερες περιπτώσεις, τα νουκλίδια που αντιστοιχούν στις αλλαγές της συμπεριφοράς της γενίκευσης, ταυτίζονται ή βρίσκονται πολύ κοντά με αντίστοιχες θεωρητικές εκτιμήσεις της γραμμής

διαφυγής νετρονίων, όπως για παράδειγμα οι εκτιμήσεις που προκύπτουν από την εργασία της ομάδας του *Moller* [69] (δίνονται στο σχήμα 3.1).

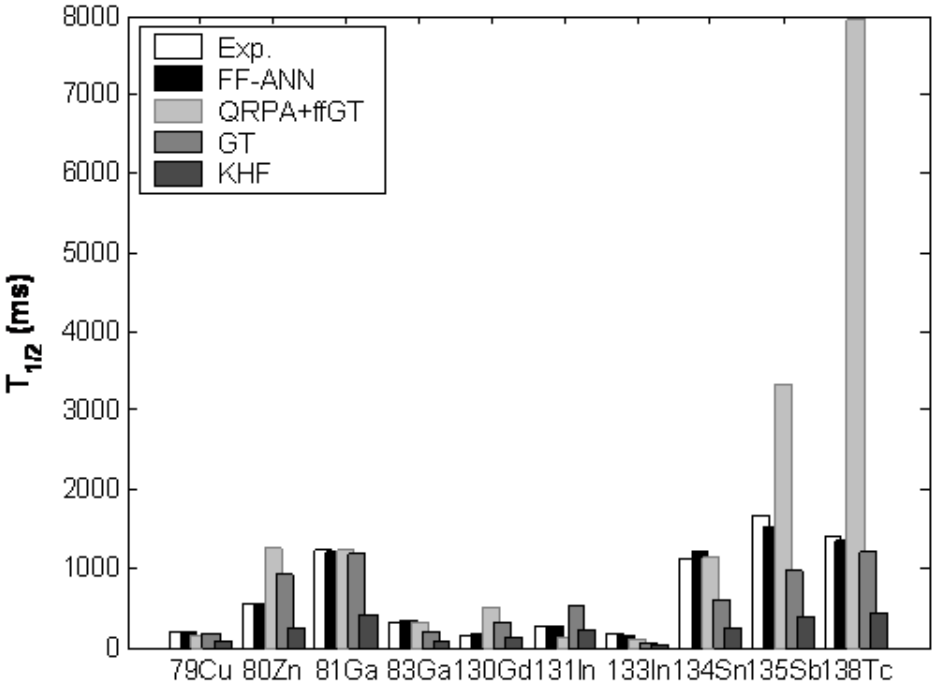
15.6 Συμπεράσματα

Το μοντέλο που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο αυτό, όπως προαναφέραμε, είναι αρκετά φιλόδοξο. Αν και δε διαφέρει από αρχιτεκτονικής άποψης με το μοντέλο της προηγούμενης παραγράφου, επιδεικνύει μια ενδιαφέρουσα συμπεριφορά. Στην γνωστή περιοχή κατ' αρχήν, παρουσιάζει ελαφρώς πιο βελτιωμένη απόδοση, συγκρινόμενο με το προηγούμενο μοντέλο. Επιπλέον, δίνει μια πιο διευρυμένη εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων νου-κλιδίω, όπως γίνεται αμέσως φανερό από τα διαγράμματα των ισοτοπικών και των ισότονων αλυσίδων. Το μοντέλο της παραγράφου 14, δίνει μια συντηρητική εκτίμηση, κοντά στα $QRPA$ πρότυπα, με ελάχιστο χρόνο ημιζωής για τους πολύ απομακρυσμένους από την σταθερότητα πυρήνες της τάξης του 1 ms. Το παρόν μοντέλο από την άλλη, ακολουθεί μια παρόμοια συμπεριφορά για την περιοχή $Z \approx 28$, αλλά στις μεγαλύτερες περιοχές αγγίζει την τάξη του 1 ns. Βλέποντας λοιπόν κανείς την απόκλιση από την εκτίμηση του υβριδικού $QRPA$ προτύπου, μπορεί εύκολα να χαρακτηρίσει τους υπολογισμούς μας ως εξωπραγματικούς. Το δεδομένο όμως είναι ένα. Δεν ξέρουμε τα χρονικά όρια της διαδικασίας της β αποδιέγερσης. Δεν υπάρχει λοιπόν, τουλάχιστον προς το παρόν, κάποιος λόγος που να προβλέπει ένα ελάχιστο κατώφλι της τάξης του 1 ms. Θα μπορούσε άλλωστε κάλλιστα να ισχυριστεί κανείς, ότι όσο πιο πλούσιος σε νετρόνια είναι ένας πυρήνας, τόσο ασταθέστερος γίνεται. Καθώς πλησιάζουμε λοιπόν την γραμμή διαφυγής νετρονίων η αποδιέγερση σε 1 ns δεν φαντάζει και πολύ απίθανη. Το $QRPA$ πρότυπο επιπλέον, εμφανίζει πολύ μεγάλες αποκλίσεις στην γνωστή περιοχή. Στην ουσία λοιπόν, η αξιοπιστία της ικανότητας πρόβλεψής του μπορεί εν μέρει να αμφισβητηθεί. Το πρόβλημα λοιπόν είναι ότι στην ουσία δεν έχουμε ακόμα κάποιο διαθέσιμο πρότυπο που να μοντελοποιεί σωστά, αυτοσυνεπώς ή μη, την συστηματική των χρόνων ημιζωής της αποδιέγερση β, ώστε να συγκρίνουμε τέτοιες "υπερβατικές" εκτιμήσεις.

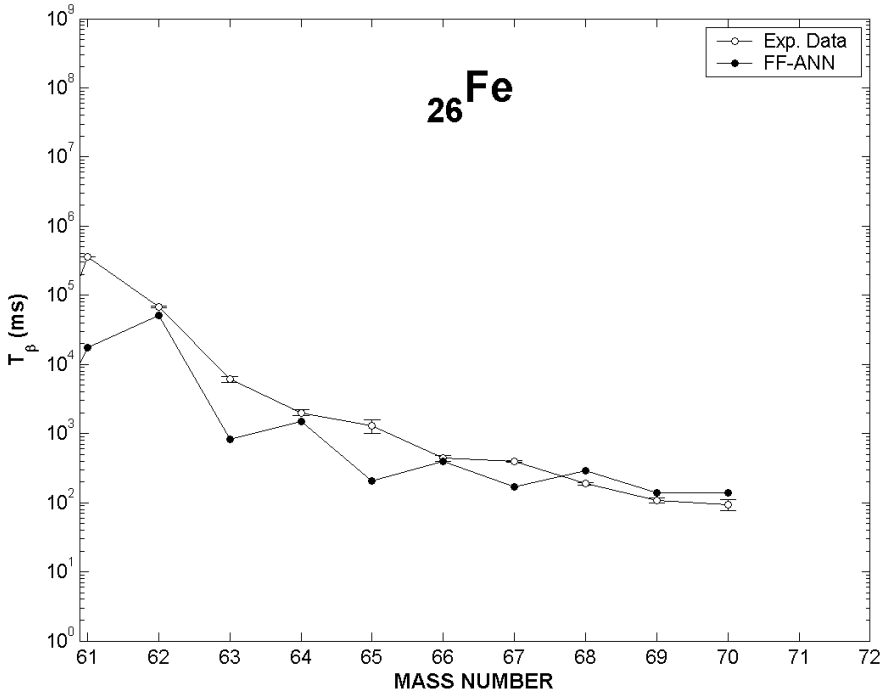
Η πρόβλεψη έτσι της γραμμής διαφυγής νετρονίων, είναι μια ριψοκίνδυνη απόπειρα, που φαίνεται όμως να συγκλίνει και με άλλες θεωρητικές εκτιμήσεις.

15.7 Γραφήματα

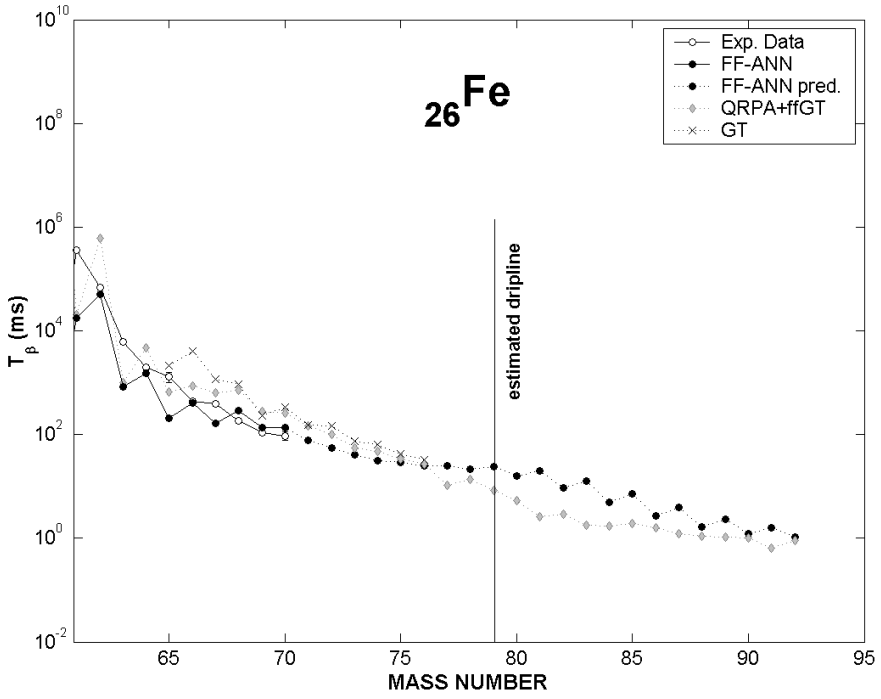
Στη συνέχεια λοιπόν παρατίθενται τα γραφήματα των ισοτοπικών και των ισότονων αλυσίδων.



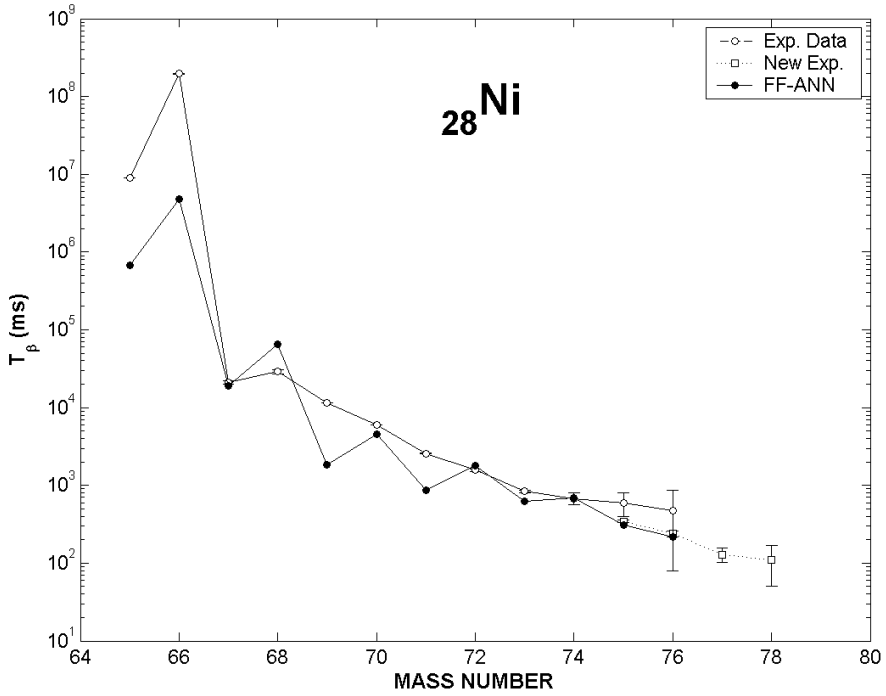
Σχήμα 15.6: Εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω, ή κοντά στους $r-$ ατραπούς. Με άσπρο χρώμα σημειώ-νονται τα πειραματικά δεδομένα και με μαύρο η εκτίμηση του μοντέλου μας. Δίνονται επίσης προς σύγκριση με τις γκρίζες αποχρώσεις, οι εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA+ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72], της εφαρμογής της φόρμουλας $Kratz-Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής από τους $Pfeiffer\ et\ al.$ [11] και οι επαναυπολογισμοί των $Pfeiffer\ et\ al.$ επίσης, της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [11].



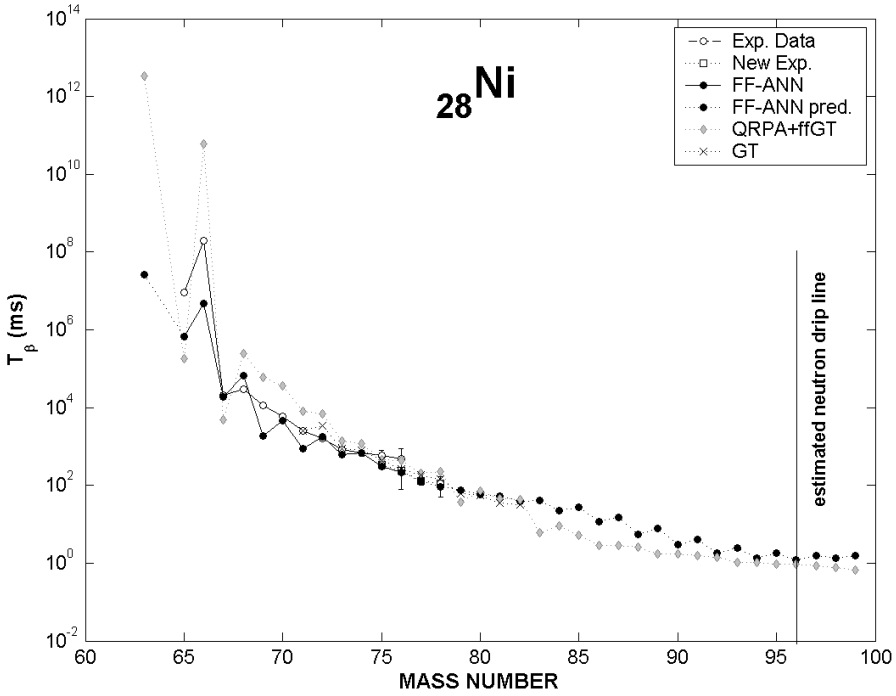
Σχήμα 15.7: Σύγκριση της σύγκλισης με τα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του σιδήρου.



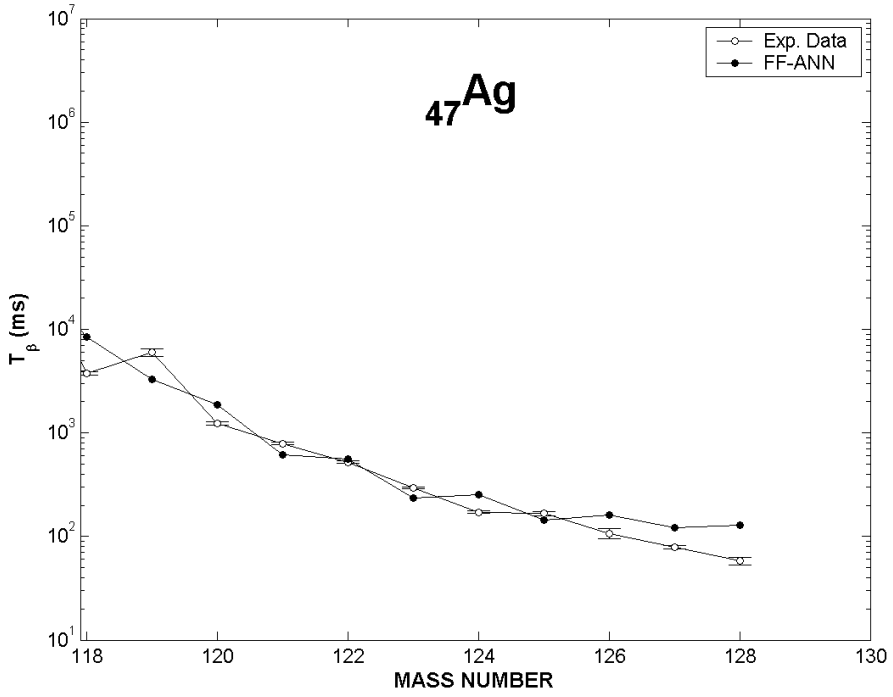
Σχήμα 15.8: Εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του σιδήρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας. Οι αντίστοιχες εκτιμήσεις των $QRPA + ffGT$ υπολογισμών δίνονται με τους ρόμβους, ενώ οι εκτιμήσεις των επαναυπολογισμών της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης σημειώνονται με $\times$.



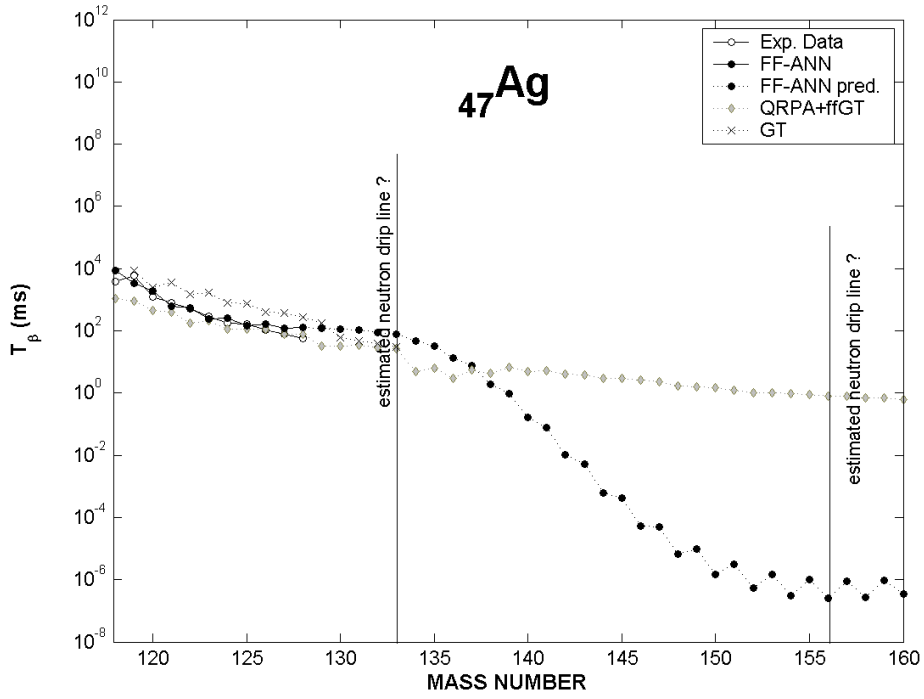
Σχήμα 15.9: Οι πειραματικοί χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του νικελίου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). Τα λευκά τετράγωνα αντιστοιχούν στα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του νικελίου από την ομάδα του *Hosmer* [71]. Τα δύο πρώτα αναφέρονται σε βελτιωμένες μετρήσεις των ήδη γνωστών ισοτόπων ^{75}Ni και ^{75}Ni, ενώ τα δύο επόμενα αφορούν εντελώς καινούργιες μετρήσεις του ισότοπου ^{77}Ni και του διπλά μαγικού ^{75}Ni.



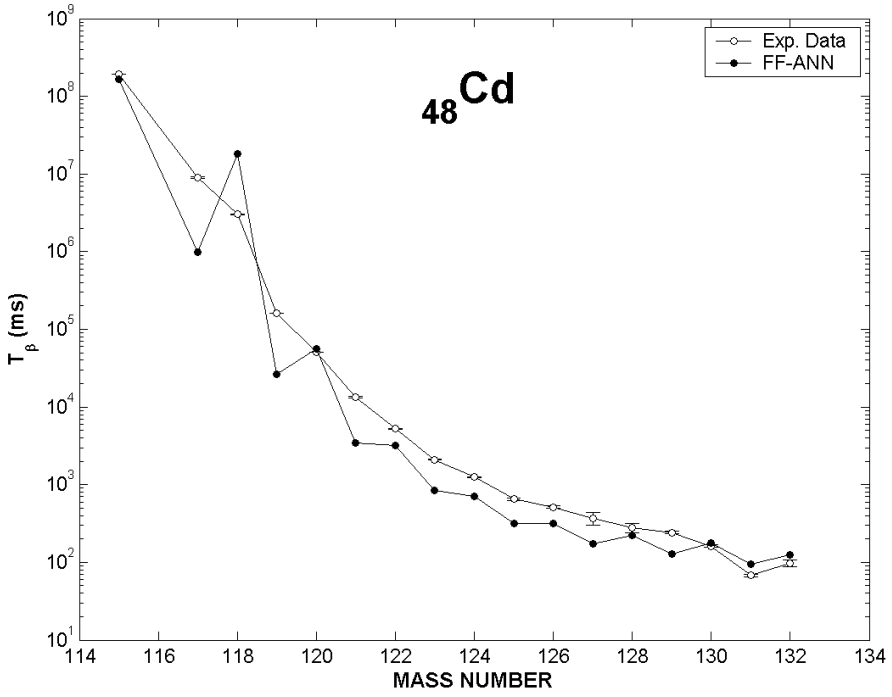
Σχήμα 15.10: Η εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του νικελίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μο-ντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72] (ρόμβοι), και των επαναυπολο-γισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των $Pfeiffer\ et\ al.$ [11], που σημειώνονται με [×].



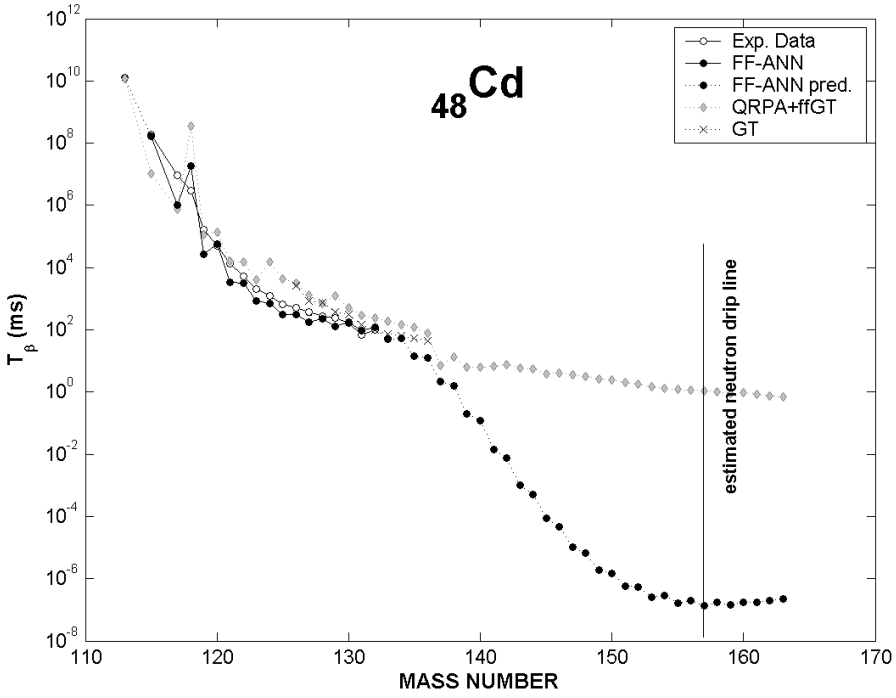
Σχήμα 15.11: Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα γνωστά ισότοπα του αργύρου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



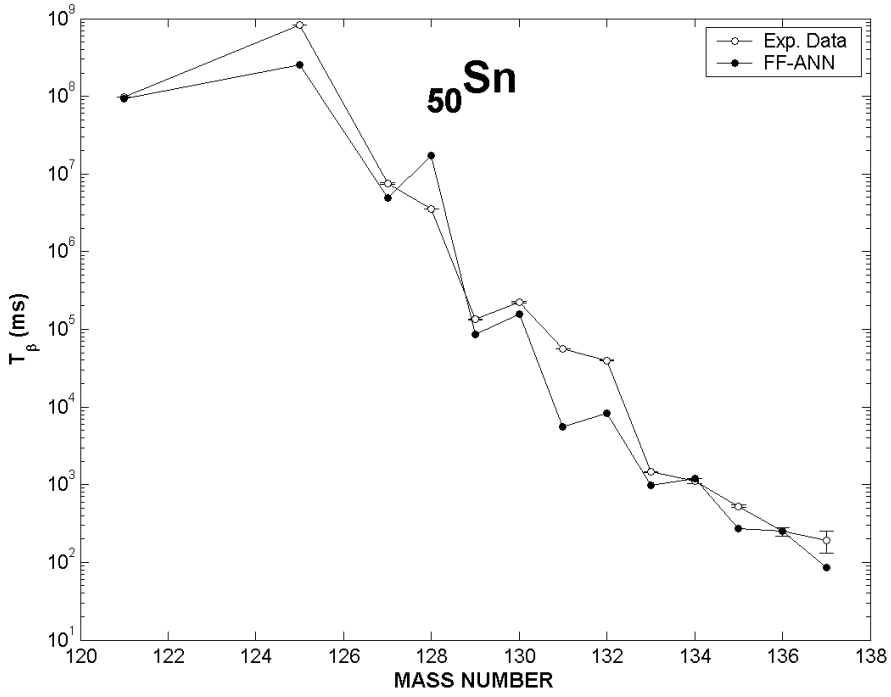
Σχήμα 15.12: Η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του αργύρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×].



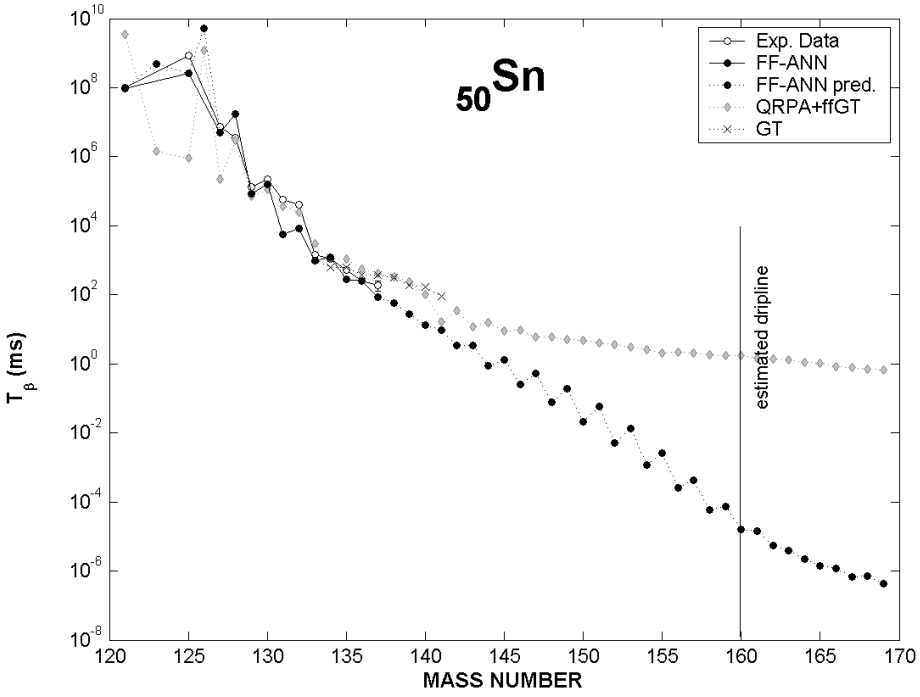
Σχήμα 15.13: Σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες), με τα πειραματικά δεδομένα των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του καδμίου (άσπρες κουκίδες).



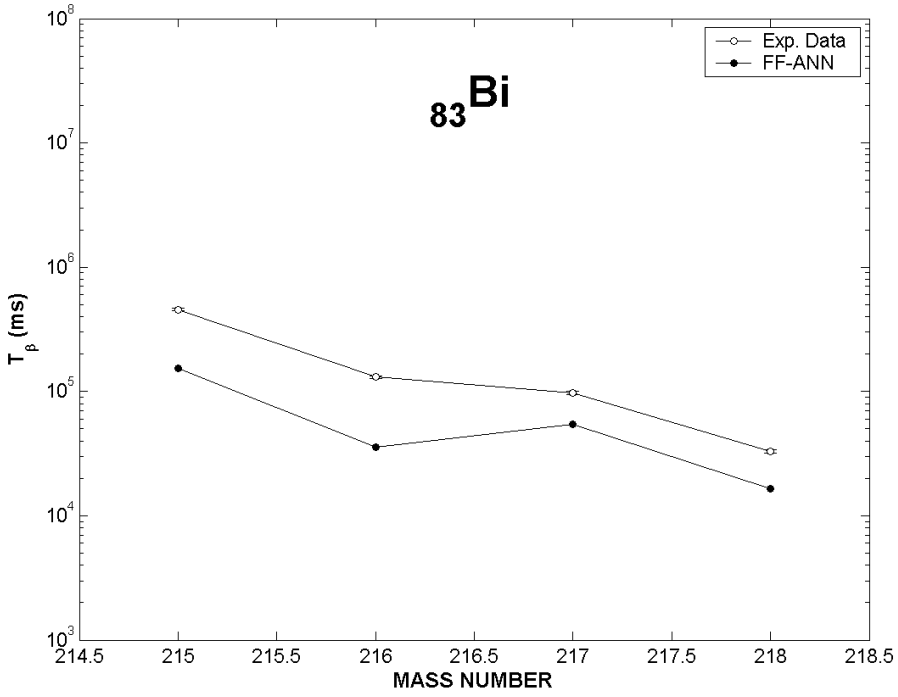
Σχήμα 15.14: Εκτίμηση από το μοντέλο μας για τους χρόνους ημίσειας ζωής των άγνωστων ισότοπων του καδμίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή) και σύγκριση επίσης, με το μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* (ρόμβοι) και τους αντίστοιχους επαναυπολογισμούς της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [$\times$].



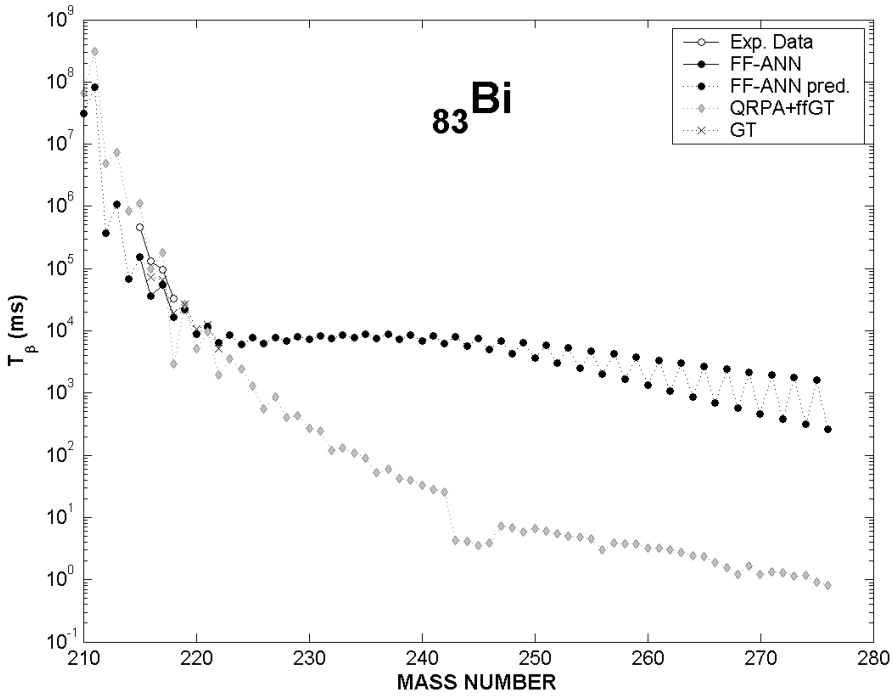
Σχήμα 15.15: Η παρατηρούμενη συστηματική για τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του κασσίτερου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



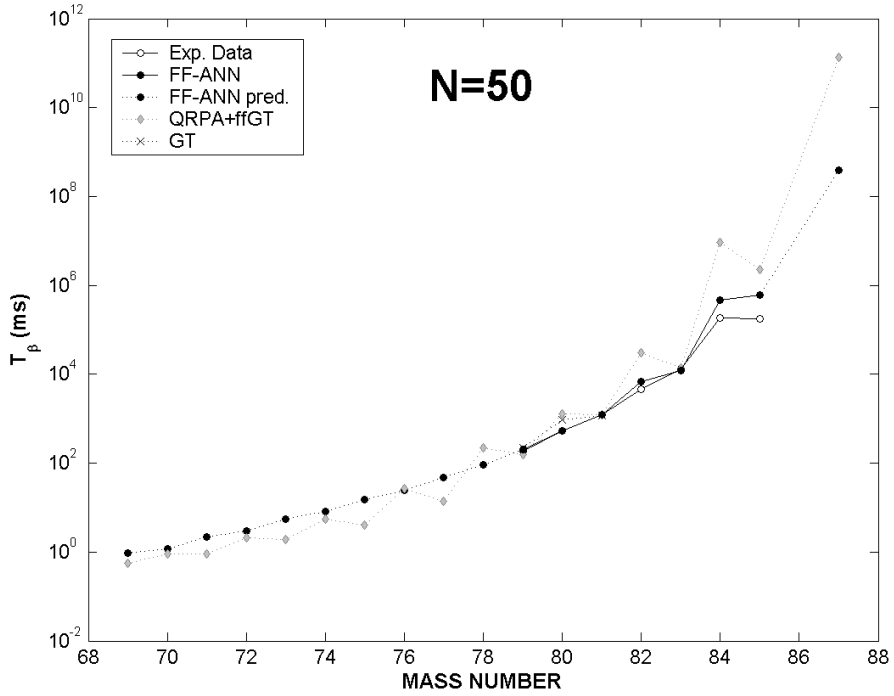
Σχήμα 15.16: Συμπερασμός στα άγνωστα ισότοπα του κασσίτερου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×].



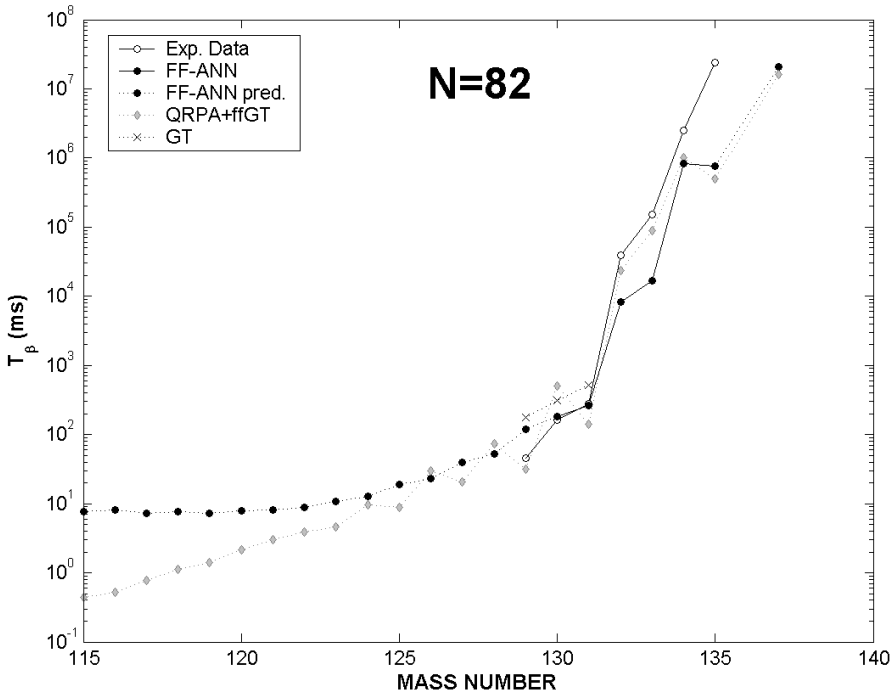
Σχήμα 15.17: Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του βισμουθίου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



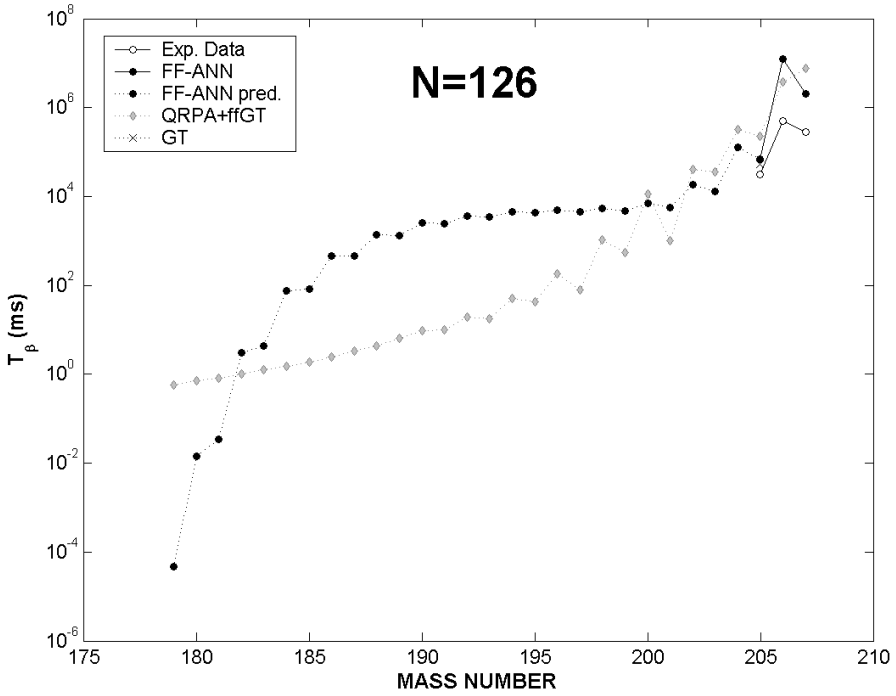
Σχήμα 15.18: Η εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του βισμουθίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από το $QRPA + ffGT$ μοντέλο (ρόμβοι) και τους επαναυπολογισμούς της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης ($\times$).



Σχήμα 15.19: Η ισοτονική αλυσίδα $N = 50$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με $(\times)$ οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες.



Σχήμα 15.20: Η ισοτονική αλυσίδα $N = 82$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με $(\times)$ οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες.



Σχήμα 15.21: Η ισοτονική αλυσίδα $N = 1260$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με $(\times)$ οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες.

Κεφάλαιο 16

Μοντέλο Διαχωρισμού Άρτιου–Περιττού Χαρακτήρα

16.1 Εισαγωγή

ΤΟ ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ ΠΡΟΤΥΠΟ που θα περιγράψουμε, είναι ένα πρότυπο το οποίο στηρίζεται στην ιδέα της διαφορετικής αντιμετώπισης των πυρήνων ανάλογα με τον άρτιο–περιττό χαρακτήρα τους. Είδαμε μέχρι τώρα ότι η εισαγωγή της σταθεράς ζευγοποίησης δ ενίσχυσε σημαντικά την ικανότητα προσαρμογής των μοντέλων μας και την αξιοπιστία κατ' επέ-κταση της πρόγνωσης. Συμπεράναμε παρ' όλα αυτά, ότι δεν λαμβάνονται επαρκώς υπ' όψην από τα αντίστοιχα μοντέλα τα φαινόμενα ζευγοποίησης. Έτσι, σχεδιάσαμε ένα νέο μοντέλο, ακολουθώντας παράλληλες με την δική μας μελέτες που στηρίζονταν στην στατιστική μεθοδολογία των $SVMs$ [53]. Το μοντέλο αυτό έχει ως κεντρική ιδέα της ξεχωριστή αντιμετώπιση κάθε χαρακτήρα νουκλιδίων.

Σε συνεργασία λοιπόν με τους *John Clark* και *Haochen Li* του τμήματος φυσικής του πανεπιστημίου της Ουάσιγκτον, διαμορφώθηκε μια νέα βάση δεδομένων εκπαίδευσης των μοντέλων μας. Είναι παρόμοια με τη βάση $Nuset-B$, με μόνη διαφορά την υιοθέτηση μιας τυχαίας κατανομής για τον επιμερισμό στα τρία υποσέτ με αναλογία 80:10:10. 672 λοιπόν νουκλίδια απαρτίζουν το εκπαιδευτικό σετ, 83 το σετ τεκμηρίωσης και 83 το δοκιμα-στικό σετ. Οι πειραματικές τιμές των χρόνων ημιζωής εδώ, πάρθηκαν από την δικτυακή βάση δεδομένων *Brookhaven* του Αμερικανικού Εθνικού Κέντρου Πυρηνικών Δεδομένων [$NNDC$] [13]. Έτσι, θα αναφερόμαστε στη βάση αυτή εφεξής, με την

κωδική ονομασία *BrookSet*. Τα νουκλίδια λοιπόν που απαρτίζουν κάθε υποσέτ κατανεμήθηκαν στην συνέχεια σε τέσσερα μικρότερα σετ, ανάλογα με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα τους. Τελικά λοιπόν θα δουλέ-ψουμε με τέσσερα διαφορετικά δίκτυα, που το καθένα θα είναι υπεύθυνο για την μοντελοποίηση ενός και μόνο είδους ζευγοποίησης. Ο πίνακας 16.1, δίνει τα χαρακτηριστικά των τεσσάρων αυτών σετ.

BrookSet				
Είδος	n	**Ε**κπ. Σετ	**Σ**ετ Τεκ.	**Δ**οκ. Σετ
$e-e$	**1**63	131	16	16
$e-o$	**2**23	179	22	22
$o-e$	**2**14	172	21	21
$o-o$	**2**38	190	24	24
Σύνολο	**8**38	**6**72	**8**3	**8**3

Πίνακας 16.1: Κατανομή των σετ άρτιου−περιττού χαρακτήρα της βάσης *BrookSet* στα τρία υποσέτ: εκπαιδευτικό, τεκμηρίωσης και δοκιμαστικό σετ. Με n δίνεται το σύνολο των νουκλιδίου κάθε είδους.

16.2 Χαρακτηριστικά του Μοντέλου

Αναπτύχθηκαν λοιπόν τέσσερα όμοια δίκτυα ευθείας τροφοδοσίας, ένα για την μοντελοποίησης της συστηματικής των περιττών−περιττών νουκλιδίων, ένα για τα νουκλίδια άρτιου−περιττού χαρακτήρα, ένα για τους περιττούς−άρτιους πυρήνες και ένα τέλος για τα νουκλίδια περιττού−άρτιου χαρακτήρα, με τα βασικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται στον πίνακα 16.2. Και αυτά τα δίκτυα λοιπόν, όπως φαίνεται στον πίνακα, εκπαιδεύτηκαν με την βοήθεια της τεχνικής της Διατεκμηρίωσης και της Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης, ώστε να αποφευχθούν φαινόμενα υπερπροσαρμογής στα πλαίσια του αλγορίθμου $Levenberg-Marquardt$.

16.3 Εκτίμηση της Απόδοσης του Μοντέλου

Οι καλύτερες αποδόσεις που κατορθώσαμε να πάρουμε με βάση αυτήν την προσέγγιση, έπειτα από πολλές δοκιμές από διαφορετικά αρχικά σημεία του χώρου των αποκλίσεων, δίνονται στον πίνακα 16.3.

Στον πίνακα 16.4 δε, παρουσιάζονται τα καλύτερα ως τώρα αποτελέσματα της ομάδας του $Clark$ που προέκυψαν από τα $SVMs$. Μπορούμε να δούμε ότι

Δίκτυο	**Αρχιτεκτονική**	
Ευθείας Τροφοδοσίας Πλήρους Σύνδεσης	Διαστάσεις: Βάρη:	2-5-5-5-1 81
Εύρος T_β	**Συναρτήσεις Ενεργοποίησης**	
$T_\beta < 10^6\ sec$	*tanh-tanh-tanh-satlins*	
Τύπος Εκπαίδευσης	**Αλγόριθμος Εκπαίδευσης**	**Μέθοδος Αρχικοποίησης**
Παράλληλη	Μπαϊεσιανή Εξομάλυνση	$Nguyen - Widrow$
Μετασχηματισμός Εισόδων [-1, 1]		**Μετασχηματισμός Εξόδου [-1,1]**
Z	[0, 200]	$LogT_{1/2}$
N	[0, 200]	[0, 9]

Πίνακας 16.2: Πίνακας χαρακτηριστικών του μοντέλου

Χαρακτήρας Νουκλιδίων	*RMSE* Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
$e-e$	0.29	0.43	0.54
$e-o$	0.38	0.44	0.39
$o-e$	0.44	0.44	0.48
$o-o$	0.52	0.42	0.33
Μέση.Τιμή.	**0**.41	**0**.43	**0**.435

Πίνακας 16.3: Βέλτιστη απόδοση των μοντέλων άρτιου−περιττού χαρακτήρα.

τα δίκτυά μας, έχουν κατορθώσει να δώσουν αποτελέσματα της ίδιας ποιότητας αν μη τι άλλο, με τα πολλά υποσχόμενα $SVMs$.

Μια τέτοια απόπειρα όμως, επιμέρους αντιμετώπισης, οδηγεί σε κάποιες δυσκολίες που πρέπει να επισημανθούν αφενός μεν, και να ξεπεραστούν αφετέρου δε, αλλιώς η αξιοπιστία του μοντέλου μας μπορεί να κλονιστεί. Ένα πολύ μικρότερο σετ τεκμηρίωσης κατ' αρχήν, μπορεί πολύ εύκολα να οδηγήσει σε "φτωχότερη" γενίκευση κάποιων περιοχών των χρόνων ημιζωής. Υπολογισμοί επιπλέον που βασίζονται σε διαφορετικές προσαρμογές ανάλογα με τον χαρακτήρα των νουκλιδίων μπορούν να οδηγήσουν σε ανεπιθύμητες μεγάλες

J. W. Crark ανδ *H. Li* [53]			
Χαρακτήρας		*RMSE*	
Νουκλιδίων	Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
$e-e$	0.55	0.57	0.62
$e-o$	0.41	0.42	0.51
$o-e$	0.41	0.47	0.47
$o-o$	0.52	0.4	0.52
Μέση.Τιμή.	**0**.47	**0**.46	**0**.53

Πίνακας 16.4: Μέση τετραγωνική απόκλιση των SVM μοντέλων άρτιου−περιττού χαρακτήρα των *Clark* και *Li* [53].

διακυμάνσεις μεταξύ των προβλεπόμενων από το μοντέλο χρόνων ημίσειας ζωής μεταξύ άρτιων−άρτιων και άρτιων−περιττών ή περιττών−περιττών και περιττών−άρτιων αντίστοιχα ισότοπων μιας αλυσίδας. Προκειμένου λοιπόν να υπάρχει μια συνοχή στους τελικούς υπολογισμούς μας επιλέξαμε τα καλύτερα μοντέλα ,με βάση τόσο την μικρότερη μέση τετραγωνική απόκλιση, όσο και την σύγκλιση του συμπερασμού. Έτσι, ο πίνακας 16.5, περιέχει τις επιμέρους αποδόσεις των τελικών δικτύων που θα χρησιμοποιούμε για τους υπολογισμούς μας.

Χαρακτήρας		*RMSE*	
Νουκλιδίων	Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
$e-e$	0.36	0.41	0.62
$e-o$	0.38	0.44	0.39
$o-e$	0.44	0.46	0.53
$o-o$	0.52	0.42	0.33
Μέση.Τιμή.	**0**.41	**0**.44	**0**.51

Πίνακας 16.5: Μέση τετραγωνική απόκλιση των μοντέλων άρτιου−περιττού χαρακτήρα των επιλεγμένων με βάση την ικανότητα συμπερασμού δικτύων.

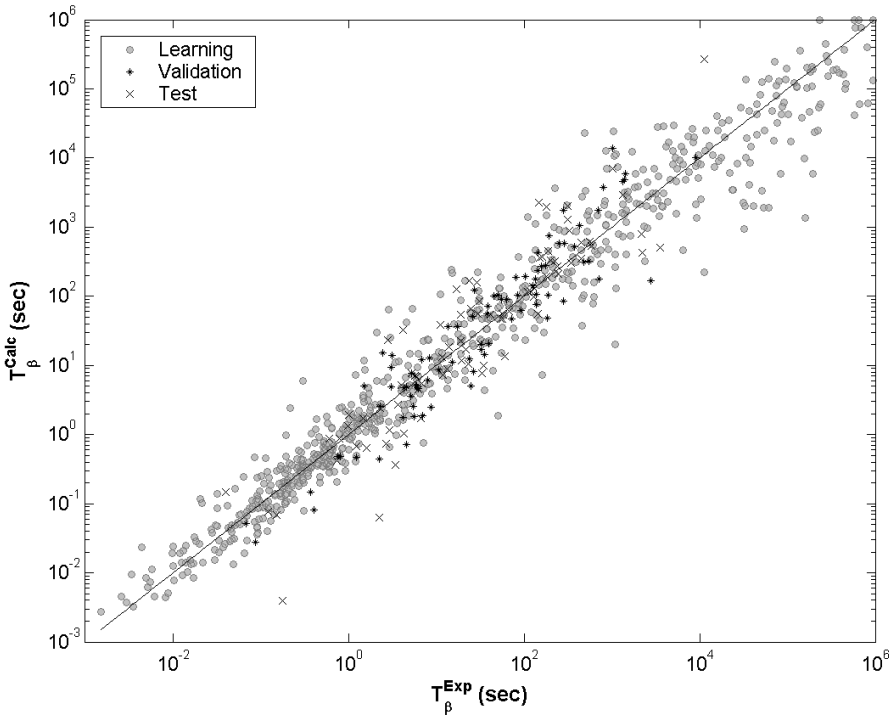
Κριτήριο	Εκπαιδευτικό Σετ	Σετ Τεκμηρίωσης	Δοκιμαστικό Σετ	Πλήρες Σετ
$RMSE$	0.45	0.43	0.56	**0.46**
$NMSE$	0.999	0.989	0.996	**0.999**
MAE	0.31	0.35	0.40	**0.33**
$R-$τιμή	0.978	0.940	0.922	**0.974**

Πίνακας 16.6: Αποτελέσματα των δεικτών απόδοσης του παρόντος μοντέλου

16.3.1 Σύγκριση με τα Πειραματικά Δεδομένα

Προκειμένου να προβούμε σε σύγκριση τόσο με τα δύο προηγούμενα μοντέλα που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 14 και 15, όσο και με τα πειραματικά δεδομένα και τα υπόλοιπα καθολικά πρότυπα, θα δίνουμε τα αποτελέσματά των επιμέρους μοντέλων άρτιου−περιττού χαρακτήρα στην συνέχεια, συνολικά για κάθε υποσέτ. Οι δείκτες απόδοσης λοιπόν του τελευταίου αυτού προτύπου, δίνονται στον πίνακα 16.6, ενώ θα δούμε και στην περίπτωση αυτή, τη γνώριμη πλέον σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα με την βοήθεια των διαγραμμάτων. Έτσι, στο σχήμα 16.1 δίνονται οι υπολογισμοί των χρόνων ημίσειας ζωής σε αντιδιαστολή προς τις παρατηρούμενες τιμές, στο σχήμα 16.2 οι λόγοι $T_{\beta,calc}/T_{\beta,exp}$ και ακολουθούν τα υπόλοιπα διαγράμματα.

Φαίνεται επομένως, πως η διαφορετική αντιμετώπιση των πυρήνων ανάλογα με τον άρτιο−περιττό τους χαρακτήρα έχει βελτιώσει αισθητά τα αποτελέσματά μας. Θα πρέπει ωστόσο κανείς να είναι προσεκτικός στα συμπεράσματά του, καθώς μια απευθείας αντιπαραβολή με τα δύο προηγούμενα μοντέλα μάλλον δεν μπορεί να οδηγήσει σε ασφαλή συμπεράσματα. Αυτό που πρέπει να παρατηρήσουμε κατ' αρχήν είναι ότι τόσο το σετ τεκμηρίωσης, όσο και το δοκιμαστικό σετ, συγκεντρώνονται στην κεντρική περιοχή των χρόνων ημίσειας ζωής. Δεν μπορούμε επομένως για παράδειγμα να δούμε καθαρά την ικανότητα συνυπολογισμού των πρώτων απαγορευμένων μεταπτώσεων, καθώς δεν ξέρουμε πως θα συμπεριφερθεί το μοντέλο στην περίπτωση της γενίκευσης σε πυρήνες μεγαλύτερης σταθερότητας. Αντίστοιχα, δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε αξιόπιστα την ικανότητα πρόβλεψης των χρόνων ημίσειας ζωής των εξαιρετικά ασταθών πυρήνων.



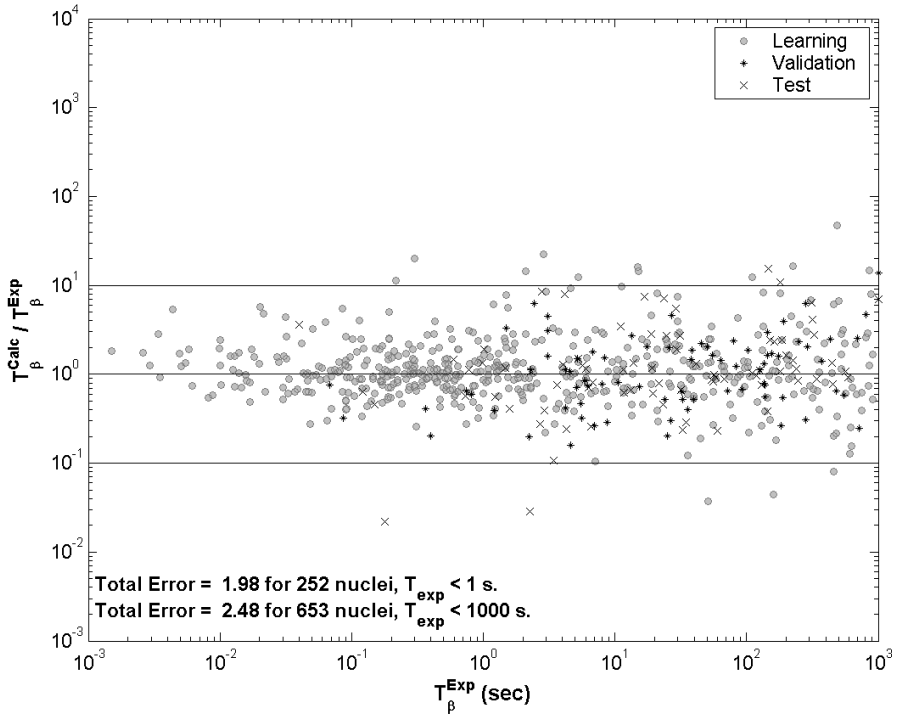
Σχήμα 16.1: Οι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που υπολογίζονται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.

16.3.2 Σύγκριση με Άλλα Καθολικά Μοντέλα

Μια σύγκριση με τα μικροσκοπικά πρότυπα $Nilsson + BCS + QRPA$ και $FRDM + pnQRPA$ και το μικρο − στατιστικό πρότυπο της Θεωρίας Ημιμέσης Τελικής Κατάστασης $[SGT]$ πραγματοποιείται με την βοήθεια του πίνακα 16.10. Ο παραλληλισμός με το ενημερωμένο $FRDM + pnQRPA$ και το υβριδικό $pnQRPA + ffGT$ πρότυπο δίνεται στον πίνακα 16.11, ενώ μια αντιπαραβολή με τους πρωίμους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* και το πρότυπο $Nilsson + BSC + pnQRPA$ μέσω των δεικτών *Klapdor*, υπάρχει στον πίνακα 16.12.

16.4 Εκτίμηση της Ικανότητας Συμπερασμού

Βλέπουμε λοιπόν, ότι και σε σύγκριση με τα υπόλοιπα καθολικά πρότυπα, το παρόν μοντέλο παρουσιάζει εξαιρετικά καλή απόδοση. Αυτό το συμπέρασμα είναι ιδιαίτερα σημαντικό για μας καθώς ενισχύει την ιδέα της προσέγγισης του

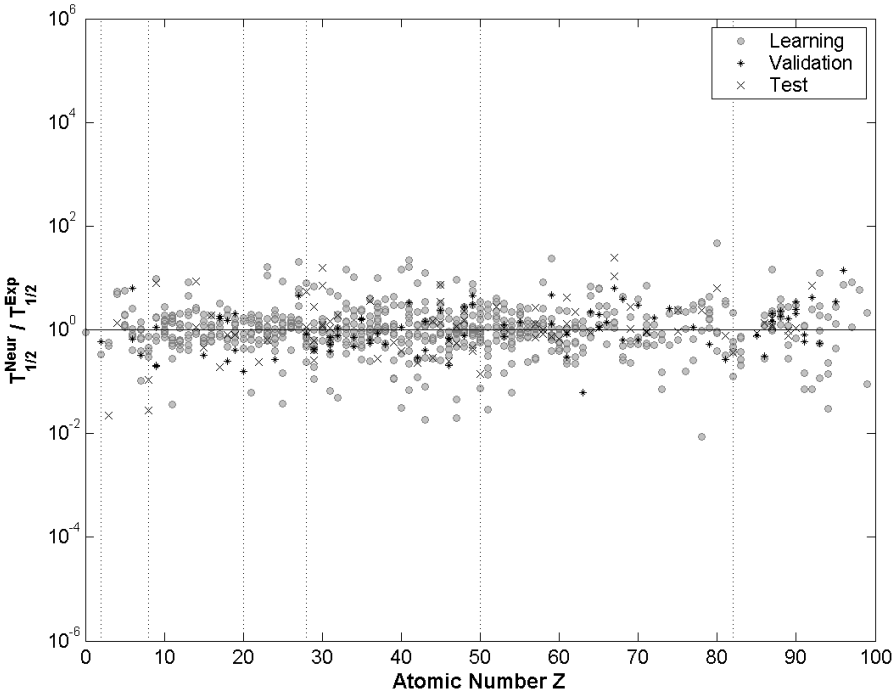


Σχήμα 16.2: Λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ.

προβλήματος των χρόνων ημίσειας ζωής, αλλά και γενικότερα των πυρηνικών ιδιοτήτων, μέσω στατιστικών προτύπων μοντελοποίησης της παρατηρούμενης συστηματικής τους. Παρακάτω λοιπόν δίνονται οι εκτιμήσεις των χρόνων ημιζωής άγνωστων νουκλιδίων, όπως και στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, με την βοήθεια των διαγραμμάτων των ισοτοπικών περιοχών $Z \approx 28$, 50 και 82 και των ισοτονικών $r-$ατραπών $N = 50$, 82 και 126.

16.4.1 Η Περιοχή $Z \approx 28$

Στην περιοχή αυτή επικεντρώνουμε το ενδιαφέρων μας στην ισοτοπική αλυσίδα του νικελίου $[_{28}Ni]$. Στο σχήμα 16.6 λοιπόν, δίνεται η σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου με τα πειραματικά δεδομένα για τα γνωστά ισότοπα του νικελίου, ενώ αντίστοιχα η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του νικελίου φαίνεται στο σχήμα 16.7. Προκείμενου να προβούμε σε σύγκριση και με άλλα καθολικά μοντέλα λοιπόν, τα διαγράμματα θα περιλαμβάνουν όπως και νωρίτερα, τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA + ffGT$



Σχήμα 16.3: Ίδιο με το σχήμα 16.2, αλλά ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- εδώ δίνεται συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z.

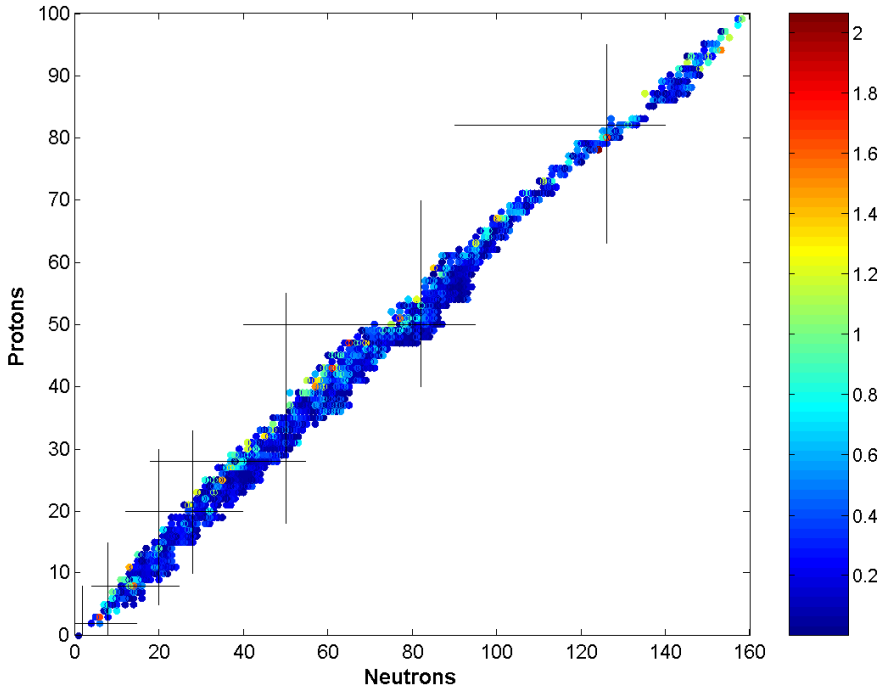
της ομάδας του *Möller* [72], και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των *Pfeiffer et al.* [11].

16.4.2 Η Περιοχή $Z \approx 50$

Εδώ όπως είδαμε, μελετάμε την εκτίμηση του μοντέλου μας για τα ισότοπα του αργύρου $[_{47}Ag]$, του καδμίου $[_{48}Cd]$ και του κασσίτερου $[_{50}Sn]$. Τα σχήματα λοιπόν 16.8, 16.10 και 16.12, δίνουν την επιμέρους, αντίστοιχα, σύγκριση μεταξύ των υπολογισμών του μοντέλου μας και των πειραματικών τιμών, ενώ στα σχήματα 16.9, 16.11 και 16.13, συμπεριλαμβάνεται και ο συμπερασμός στα άγνωστα νουκλίδια της κάθε ισοτοπικής αλυσίδας.

16.4.3 Η Περιοχή $Z \approx 82$

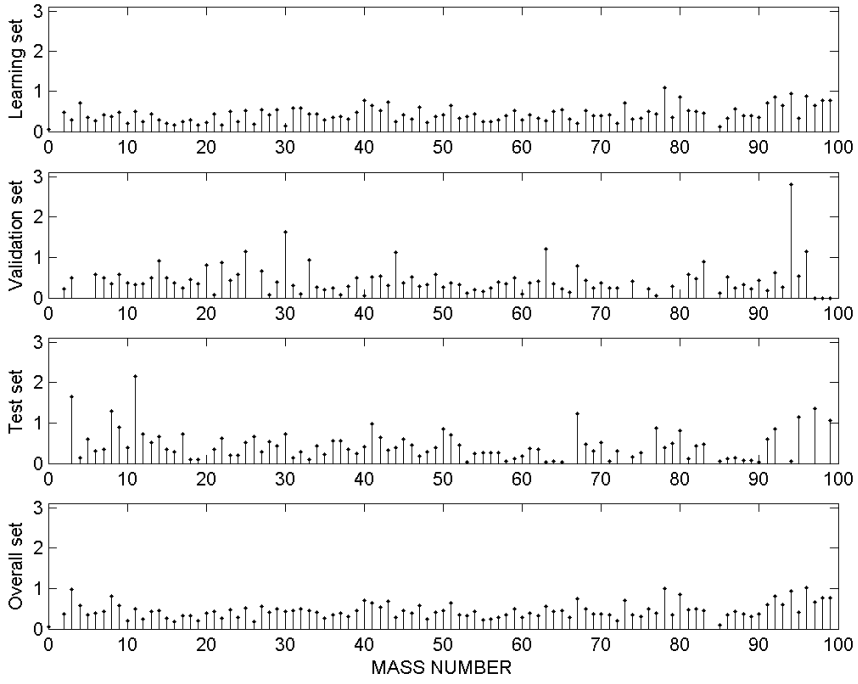
Τέλος, θα δούμε τα ισότοπα του βισμουθίου. Η σύγκριση με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για την γνωστή περιοχή δίνεται στο σχήμα 16.14, ενώ η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του βισμουθίου προστίθεται στο σχήμα 16.15.



Σχήμα 16.4: Απόλυτη απόκλιση μεταξύ υπολογισμένης και πειραματικής τιμής των χρόνων ημίσειας ζωής για το πλήρες σετ.

16.4.4 Οι Περιοχές $N = 50$, $N = 82$ και $N = 126$

Στο σχήμα 16.16 παρατίθεται η πρόγνωση των χρόνων ημίσειας ζωής, όπως προκύπτει από το μοντέλο μας για τους άγνωστους άρτιους–άρτιους πυρήνες των κλειστών νετρονικών φλοιών $N = 50$, 82 και 126, συγκρινόμενες με τους αντίστοιχους, όπου αυτοί ήταν διαθέσιμοι, $QRPA + ffGT$ και GT υπολογισμούς. Είναι ενδιαφέρων και εδώ να παρατηρήσουμε την εξαιρετική εκτίμηση του μοντέλου μας για τον διπλά μαγικό $r - process$ πυρήνα ^{78}Ni, ο χρόνος ημίσειας ζωής του οποίου μετρήθηκε πρόσφατα από την ομάδα του $Hosmer$ [71]. Τέτοιες αποκρίσεις, αν μη τι άλλο, ενισχύουν σημαντικά την αξιοπιστία των στατιστικής φύσης προσεγγίσεων που αναπτύξαμε στα πλαίσια της πτυχιακής αυτής εργασίας. Στο σχήμα 16.17, μπορεί να δει κανείς αντίστοιχες εκτιμήσεις άλλων καθολικών προτύπων, όπως του $FRDM + QRPA$ μικροσκοπικού προτύπου και κάποιες αποκρίσεις αυτοσυνεπών $[C - QRPA]$ προσεγγίσεων, όπως η $ETFSI + QRPA$ [42] και η $HFB + QRPA$ [28], για τους άρτιους–άρτιους αυτούς πυρήνες των κλειστών νετρονικών φλοιών $N = 50$, 82 και 126.



Σχήμα 16.5: Μέση τετραγωνική απόκλιση κάθε ισοτοπικής αλυσίδας μεταξύ υπολογισμένων από το μοντέλο και πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης, το δοκιμαστικό σετ και το πλήρες σετ.

Στο σχήμα 16.18 τέλος, δίνεται η εκτίμηση του μοντέλου για τους χρόνους ημίσειας ζωής των πυρήνων σημείου αναμονής με μαγικούς αριθμούς νετρονίων $N = 50$, 82 και 126 που επίσης συναντήσαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Παρουσιάζονται παράλληλα και οι εκτιμήσεις του υβριδικού $QRPA + ffGT$ μοντέλου, της $Kratz - Herrmann$ φόρμουλας και των επαναυπολογισμών της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Μπορεί να δει λοιπόν κανείς ότι και εδώ οι υπολογισμοί μας, ακολουθούν με καλή ακρίβεια την παρατηρούμενη συστηματική.

16.5 Συμπεράσματα

Αν κάνουμε έναν απολογισμό λοιπόν για την συμπεριφορά του μοντέλου αυτού, μπορούμε να πούμε κατ' αρχήν, ότι μας παρέχει την δυνατότητα να μειώσουμε τις αποκλίσεις μεταξύ των υπολογισμών μας και της παρατηρούμενης συστηματικής. Αν συγκρίνουμε την σύγκλιση των ισοτοπικών αλυσίδων δε, με τα αντίστοιχα διαγράμματα αμφότερων των δύο προηγούμενων μοντέλων,

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Εκπαιδευτικό Σετ**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	238	0.04	1.09	0.27	1.87	0.28	1.88
< 10	338	0.05	1.13	0.31	2.04	0.31	2.06
< 100	422	0.05	1.13	0.33	2.15	0.34	2.17
< 1000	499	0.06	1.14	0.37	2.37	0.38	2.39
$< 10^6$	672	0.00	1.00	0.45	2.80	0.45	2.80

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Σετ Τεκμηρίωσης**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	6	-0.35	0.45	0.20	1.58	0.40	2.53
< 10	30	-0.12	0.77	0.40	2.51	0.42	2.61
< 100	53	-0.06	0.87	0.38	2.40	0.38	2.42
< 1000	77	-0.01	0.98	0.39	2.44	0.39	2.44
$< 10^6$	83	0.01	1.03	0.43	2.68	0.43	2.68

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$	**Παρόν υπολογισμός: Δοκιμαστικό Σετ**						
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	8	-0.19	0.64	0.61	4.11	0.64	4.40
< 10	28	-0.16	0.69	0.57	3.73	0.60	3.94
< 100	54	-0.05	0.88	0.51	3.26	0.52	3.28
< 1000	77	0.03	1.07	0.49	3.11	0.49	3.12
$< 10^6$	83	0.03	1.08	0.52	3.35	0.53	3.36

Πίνακας 16.7: Ανάλυση της απόκλισης μεταξύ υπολογισμένων και παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που παρατηρείται στα σχήματα 16.1 − 16.3 με βάση τους δείκτες $M\ddot{o}ller$. Οι ποσότητες M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξισώσεις (12.9) − (12.15).

$T_{\beta,exp}$		**Εκπαιδευτικό Σετ**			**Σετ Τεκμηρίωσης**			**Δοκιμαστικό Σετ**			**Πλήρες Σετ**		
(sec)		n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$
< 1	$o-o$	72	1.20	2.11	1	0.20	1.00	3	0.80	1.52	76	1.16	2.14
	odd	117	1.05	1.77	3	0.46	1.45	5	0.56	5.72	125	1.01	1.97
	$e-e$	49	1.02	1.73	2	0.62	1.05	0	-	-	51	1.00	1.71
< 10	$o-o$	101	1.32	2.47	10	1.17	2.61	10	0.57	1.63	121	1.22	2.49
	odd	165	1.06	1.90	12	0.69	2.38	11	0.69	4.76	188	1.01	2.13
	$e-e$	72	1.03	1.66	8	0.53	2.07	7	0.88	5.12	87	0.96	2.05
< 100	$o-o$	125	1.30	2.64	19	1.01	2.33	14	0.83	2.35	158	1.21	2.60
	odd	210	1.09	2.02	23	0.90	2.50	28	0.89	3.32	261	1.05	2.21
	$e-e$	87	1.03	1.67	11	0.63	2.10	12	0.94	4.18	110	0.97	2.13
< 1000	$o-o$	145	1.27	2.96	23	0.90	2.29	23	1.09	2.44	191	1.20	2.83
	odd	251	1.08	2.17	38	1.09	2.44	40	1.09	3.27	329	1.08	2.34
	$e-e$	103	1.10	1.95	16	0.85	2.54	14	0.98	3.77	133	1.05	2.23
$< 10^6$	$o-o$	190	1.02	3.66	24	0.80	2.65	24	1.01	2.56	238	1.00	3.45
	odd	351	0.99	2.53	43	1.26	2.63	43	1.16	3.49	437	1.03	2.65
	$e-e$	131	1.00	2.27	16	0.85	2.54	16	0.98	4.13	163	0.98	2.48

Πίνακας 16.8: Οι δείκτες *Möller* υπολογισμένοι για τα τρία υποσέτ και το πλήρες σετ σε αναλογία με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15).

Παράγ.	$T_{\beta,exp}$ (sec)	**Εκπαιδευτικό Σετ**			**Σετ Τεκμηρίωσης**			**Δοκιμαστικό Σετ**			**Πλήρες Σετ**		
		$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k
< 10	$< 10^6$	95.1	2.16	1.59	97.6	2.43	1.3	94	2.57	2.01	95.2	2.23	1.62
	< 60	98	1.9	1.29	100	2.47	1.35	96.2	2.66	2.08	98	2.03	1.42
	< 1	99.2	1.7	0.84	100	2.51	1.25	87.5	1.87	0.78	98.8	1.72	0.86
< 5	$< 10^6$	89.1	1.81	0.83	92.8	2.25	1.04	81.9	1.9	0.94	88.8	1.87	0.88
	< 60	94.4	1.69	0.71	93.8	2.24	1.05	84.9	1.99	0.99	93.3	1.77	0.8
	< 1	97.5	1.63	0.68	100	2.51	1.25	87.5	1.87	0.78	97.2	1.66	0.72
< 2	$< 10^6$	63.7	1.38	0.28	50.6	1.49	0.25	54.2	1.32	0.24	61.5	1.38	0.28
	< 60	72.3	1.37	0.28	50	1.48	0.26	56.6	1.37	0.25	68.6	1.37	0.27
	< 1	78.6	1.36	0.28	50	1.5	0.15	62.5	1.45	0.21	77.4	1.36	0.27

Πίνακας 16.9: Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μέσω των δεικτών *Klapdor* [36, 34, 37, 38, 21, 55, 8]. Η μέση απόκλιση *Klapdor* $\bar{x}_K$ και η τυπική απόκλιση σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) − (12.8).

παρατηρούμε ότι πλέον λαμβάνονται σημαντικά υπ' όψην τα φαινόμενα ζευγοποίησης. Αυτό βέβαια οφείλεται στην διαφορετική αντιμετώπιση ανάλογα με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Παρ' όλα αυτά τα μικρότερα σετ τεκμηρίωσης και ελέγχου και η συγκέντρωσή των πυρήνων που τα απαρτίζουν, κυρίως στις κεντρικές περιοχές του εύρους των χρόνων ημίσειας ζωής, μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα στην αξιοπιστία της γενίκευσης. Ένας προσεκτικός σχεδιασμός τέτοιων μοντέλων ωστόσο, με την χρήση σετ δεδομένων του τύπου $NuSet-B$, φαίνεται ότι έχει την δυναμική να οδηγήσει σε βελτιωμένους υπολογισμούς.

16.6 Γραφήματα

Ακολουθούν λοιπόν οι πίνακες σύγκρισης με τα υπόλοιπα καθολικά πρότυπα και τα γραφήματα των ισοτοπικών και των ισότονων αλυσίδων για τα οποία έγινε λόγος στις παραπάνω παραγράφους.

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$			**Παρόν υπολογισμός: Πλήρες Σετ**				
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	252	0.02	1.05	0.30	1.98	0.30	1.98
< 10	396	0.02	1.06	0.35	2.23	0.35	2.24
< 100	529	0.03	1.08	0.36	2.31	0.36	2.31
< 1000	653	0.05	1.11	0.39	2.47	0.39	2.48
$< 10^6$	838	0.00	1.01	0.45	2.84	0.45	2.84

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$			$FRDM + pnQRPA$				
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	184	0.03	1.06	0.57	3.72	0.57	3.73
< 10	306	0.14	1.38	0.77	5.87	0.78	6.04
< 100	431	0.19	1.55	0.94	8.81	0.96	9.21
< 1000	546	0.34	2.20	1.28	19.09	1.33	21.17
$< 10^6$	–	–	–	–	–	–	–

$\mathbf{T}_{\beta,exp}$			$pnQRPA + ffGT$				
(sec)	n	M	$M^{(10)}$	σ_M	$\sigma_M^{(10)}$	Σ	$\Sigma^{(10)}$
< 1	184	-0.08	0.84	0.48	3.04	0.49	3.08
< 10	306	-0.03	0.93	0.55	3.52	0.55	3.53
< 100	431	-0.04	0.91	0.61	4.10	0.61	4.12
< 1000	546	-0.04	0.92	0.68	4.81	0.68	4.82
$< 10^6$	–	–	–	–	–	–	–

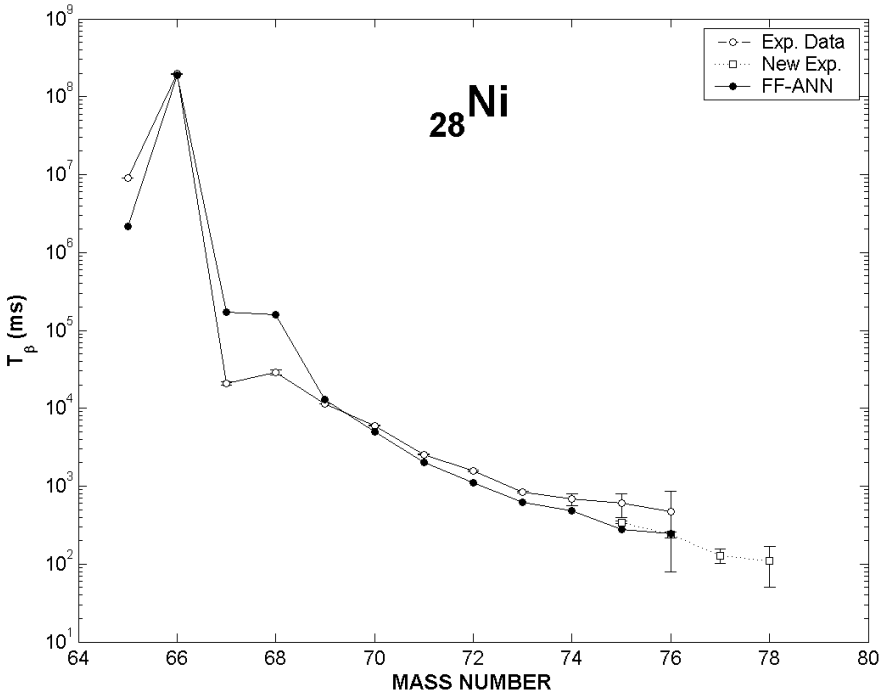
Πίνακας 16.10: Σύγκριση με τους $FRDM + pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [72] και τους $pnQRPA + ffGT$ υπολογισμούς επίσης των *Möller et al.* [72]. Τα μεγέθη M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξ. (12.9) – (12.15).

$T_{\beta,exp}$ (sec)		$N+BSC+pnQRPA$			$FRDM+pnQRPA$			SGT			**Πλήρες Σετ**		
		n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$	n	$M^{(10)}$	$\sigma_M^{(10)}$
< 1	$o-o$	28	1.75	4.96	29	0.59	2.91	38	1.45	2.57	76	1.16	2.14
	odd	31	0.60	2.24	35	0.59	2.64	56	1.75	2.32	125	1.01	1.97
	$e-e$	10	1.15	2.36	10	3.84	3.08	19	2.03	2.30	51	1.00	1.71
< 10	$o-o$	66	1.89	4.60	59	0.76	8.83	83	1.94	4.10	121	1.22	2.49
	odd	81	0.92	3.84	85	0.78	4.81	110	1.71	2.36	188	1.01	2.13
	$e-e$	34	1.01	2.93	34	2.50	4.13	45	1.58	2.23	87	0.96	2.05
< 100	$o-o$	85	3.15	10.51	88	2.33	49.19	115	2.54	8.86	158	1.21	2.60
	odd	127	1.07	4.29	133	1.11	9.45	174	1.95	3.15	261	1.05	2.21
	$e-e$	52	1.13	3.58	54	2.61	4.75	64	1.45	2.40	110	0.97	2.13
< 1000	$o-o$	93	3.02	10.25	115	3.50	72.02	144	3.42	15.21	191	1.20	2.83
	odd	157	1.10	5.55	194	2.77	71.50	232	2.36	5.42	329	1.08	2.34
	$e-e$	63	1.39	6.10	71	6.86	58.48	85	1.38	2.81	133	1.05	2.23
$< 10^6$	$o-o$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	238	1.00	3.45
	odd	–	–	–	–	–	–	–	–	–	437	1.03	2.65
	$e-e$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	163	0.98	2.48

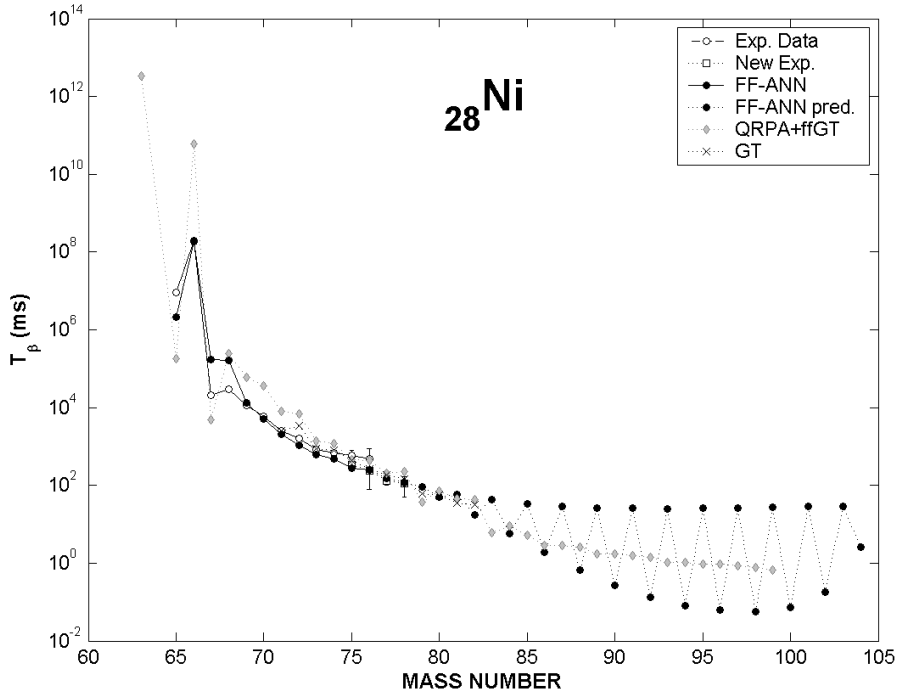
Πίνακας 16.11: Σύγκριση της απόδοσης του μοντέλου μας με τους υπολογισμούς του προτύπου $N+BSC+pnQRPA$ των *Homma et al.* [34],τους $FRDM+pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [70] και τους υπολογισμούς της SGT των *Nakata et al.* [35]. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) – (12.15).

Παράγ.	$T_{\beta,exp}$ (sec)	*Mavrommatis et al.*			$NBCS + pnQRPA$			*Staudt et al.*			**Πλήρες Σετ**		
		$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k	$m(\%)$	$\langle x \rangle_k$	s_k
< 10	$< 10^6$	82.8	2.78	1.83	76.7	3.00	–	72.2	1.85	1.21	95.2	2.23	1.62
	< 60	88.1	2.8	1.83	87.2	2.81	–	96.3	1.67	1.02	98	2.03	1.42
	< 1	90	2.88	1.88	95.7	2.64	–	99.1	1.44	0.4	98.8	1.72	0.86
< 5	$< 10^6$	72.4	2.22	1.07	–	–	–	69.7	1.68	0.76	88.8	1.87	0.88
	< 60	76.2	2.2	1.01	–	–	–	94.5	1.56	0.66	93.3	1.77	0.8
	< 1	76.7	2.23	1.02	–	–	–	99.1	1.44	0.4	97.2	1.66	0.72
< 2	$< 10^6$	39.7	1.39	0.29	33.8	1.43	–	56.4	1.37	0.29	61.5	1.38	0.28
	< 60	42.9	1.44	0.32	42.0	1.41	–	82.2	1.36	0.29	68.6	1.37	0.27
	< 1	43.3	1.46	0.32	50.7	1.43	–	90.6	1.35	0.27	77.4	1.36	0.27

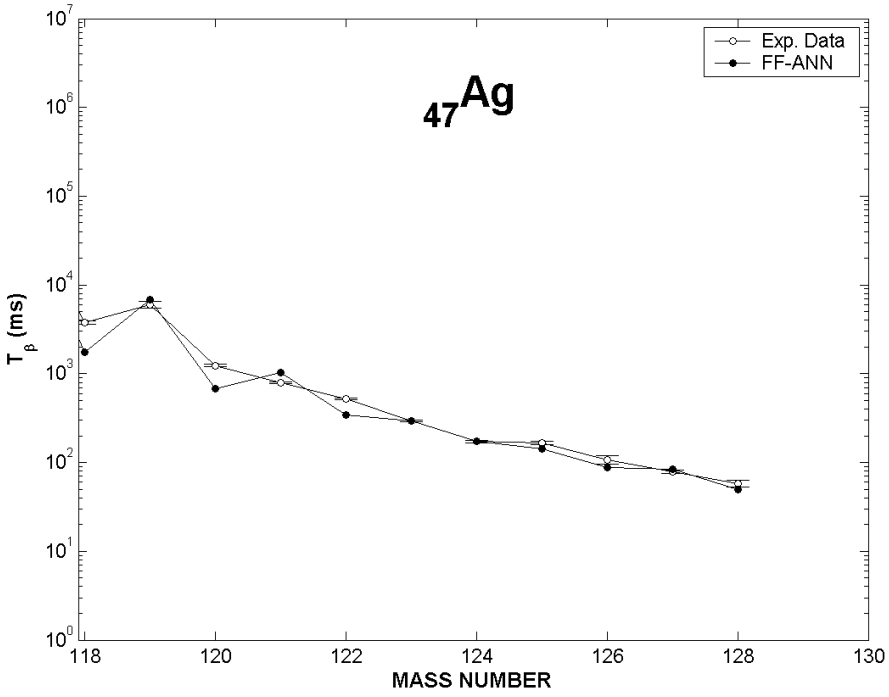
Πίνακας 16.12: Σύγκριση των παρόντων υπολογισμών με τους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* [8] και τους υπολογισμούς του μοντέλου $NBSC + pnQRPA$ των *Homma et al.* [34]. Τα μεγέθη m, $\bar{x}_K$ και σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) – (12.8).



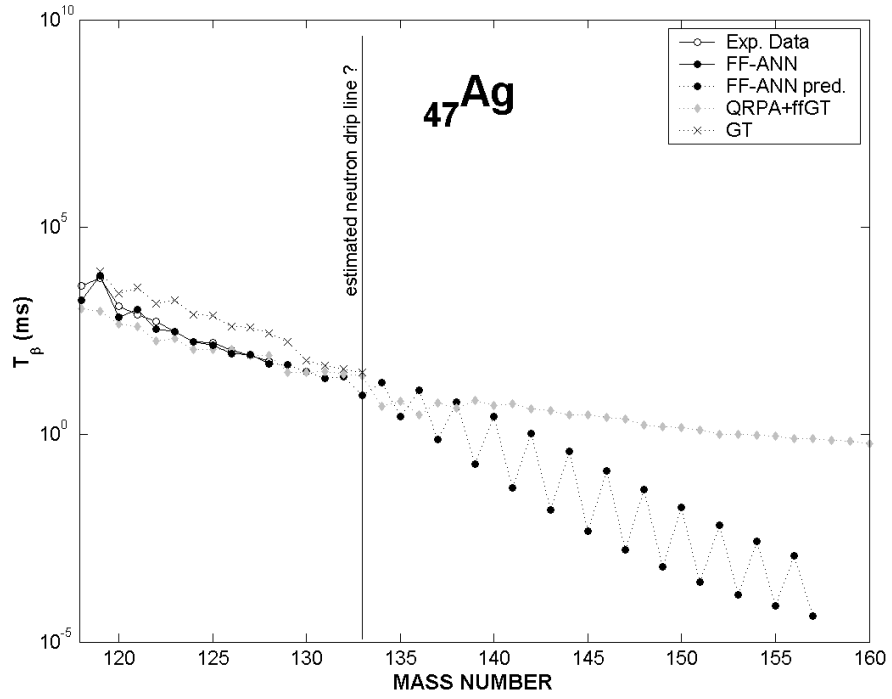
Σχήμα 16.6: Οι πειραματικοί χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του νικελίου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). Τα λευκά τετράγωνα επιπλέον στα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του νικελίου από την ομάδα του *Hosmer* [71]. Τα δύο πρώτα αναφέρονται σε βελτιωμένες μετρήσεις των ήδη γνωστών ισοτόπων ^{75}Ni και ^{75}Ni, ενώ τα δύο επόμενα αφορούν εντελώς καινούργιες μετρήσεις του ισότοπου ^{77}Ni και του διπλά μαγικού ^{75}Ni.



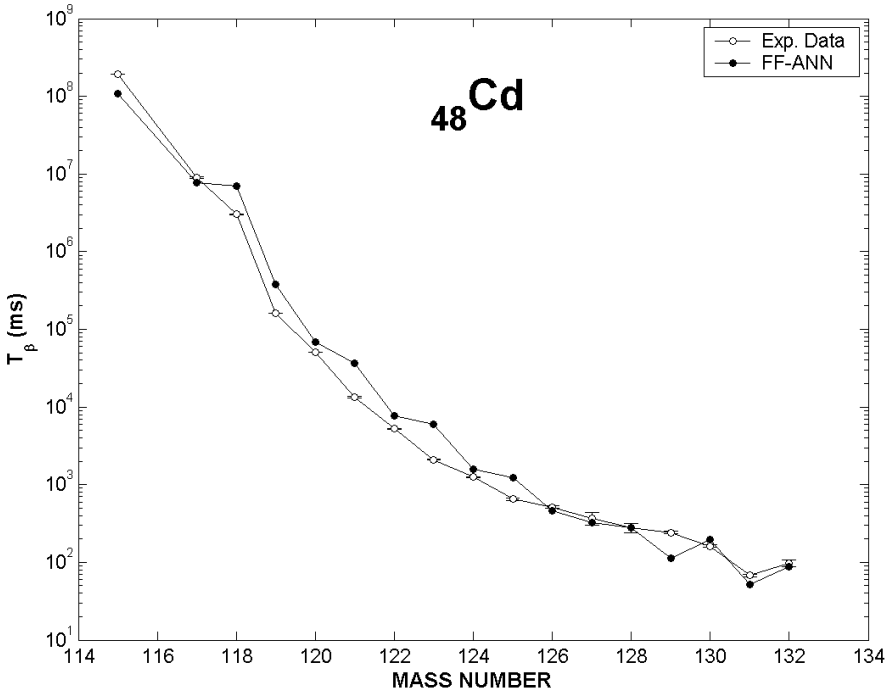
Σχήμα 16.7: Η εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του νικελίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μο-ντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* [72] (ρόμβοι), και των επαναυπολο-γισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των $Pfeiffer\ et\ al.$ [11], που σημειώνονται με [×].



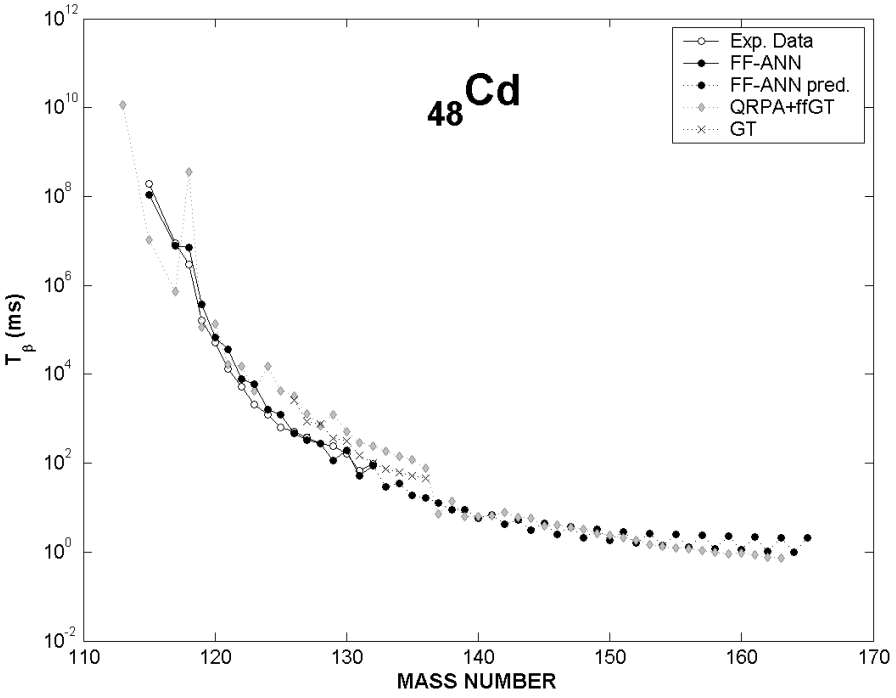
Σχήμα 16.8: Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα γνωστά ισότοπα του αργύρου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



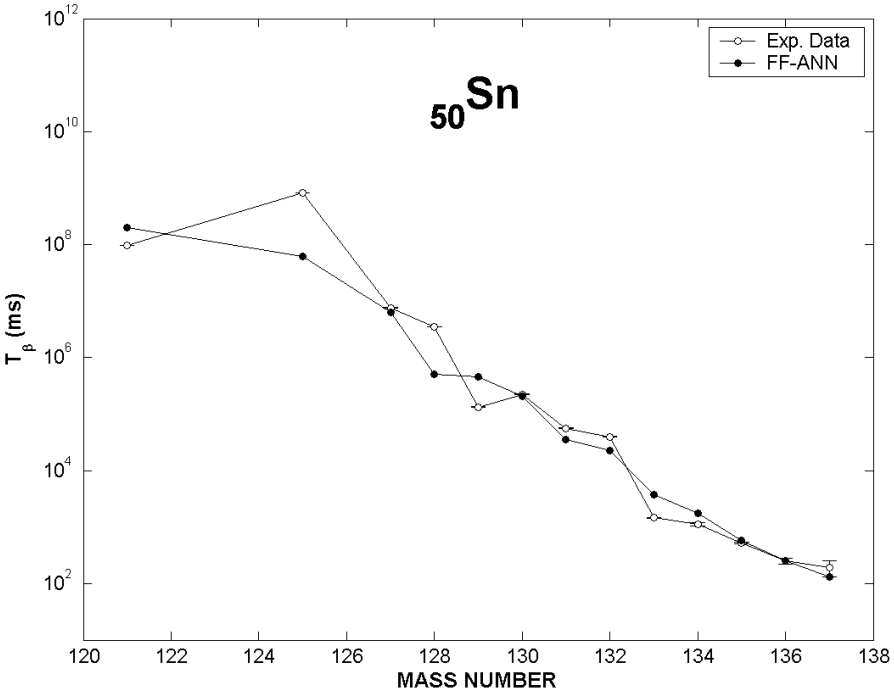
Σχήμα 16.9: Η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του αργύρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [$\times$].



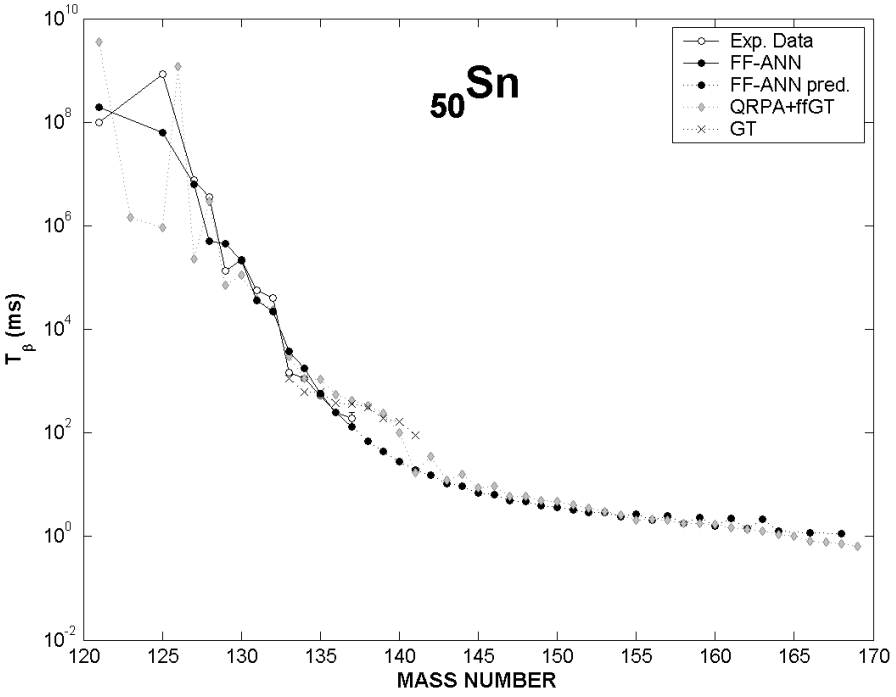
Σχήμα 16.10: Σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες), με τα πειραματικά δεδομένα των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του καδμίου (άσπρες κουκίδες).



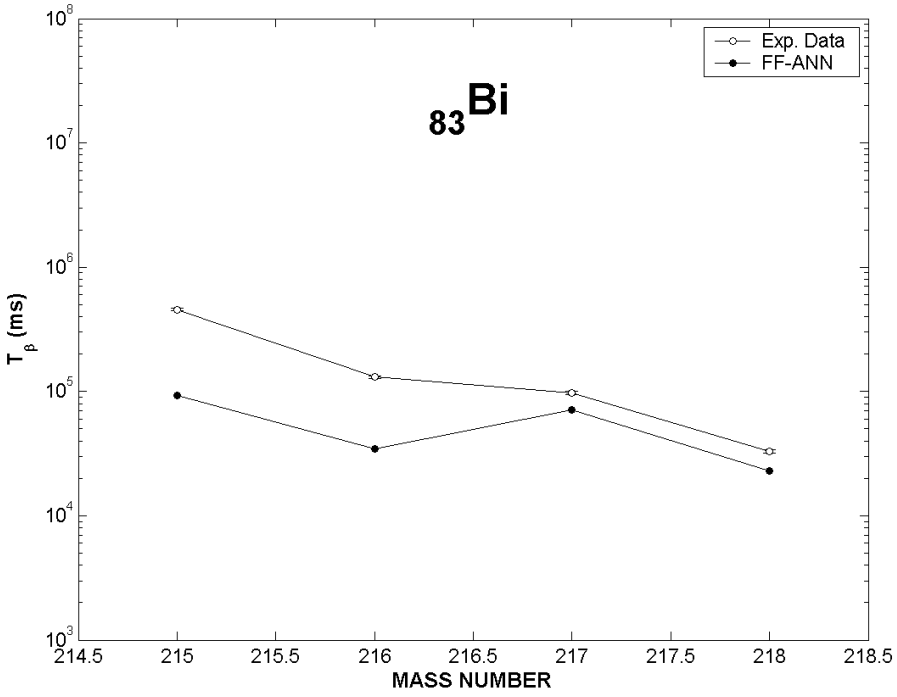
Σχήμα 16.11: Εκτίμηση από το μοντέλο μας για τους χρόνους ημίσειας ζωής των άγνωστων ισότοπων του καδμίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή) και σύγκριση επίσης, με το μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* (ρόμβοι) και τους αντίστοιχους επαναυπολογισμούς της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×].



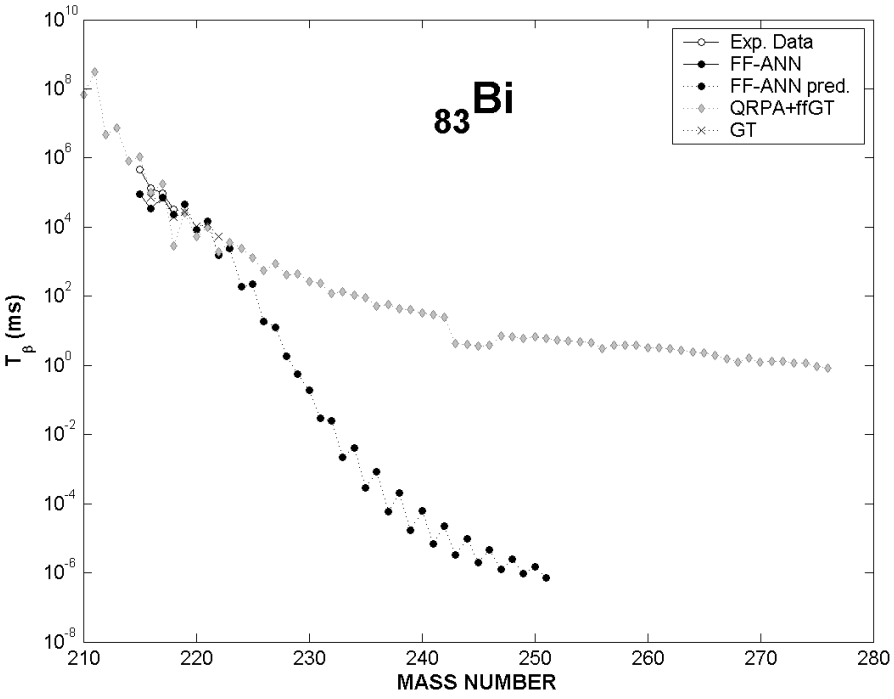
Σχήμα 16.12: Η παρατηρούμενη συστηματική για τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του κασσίτερου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



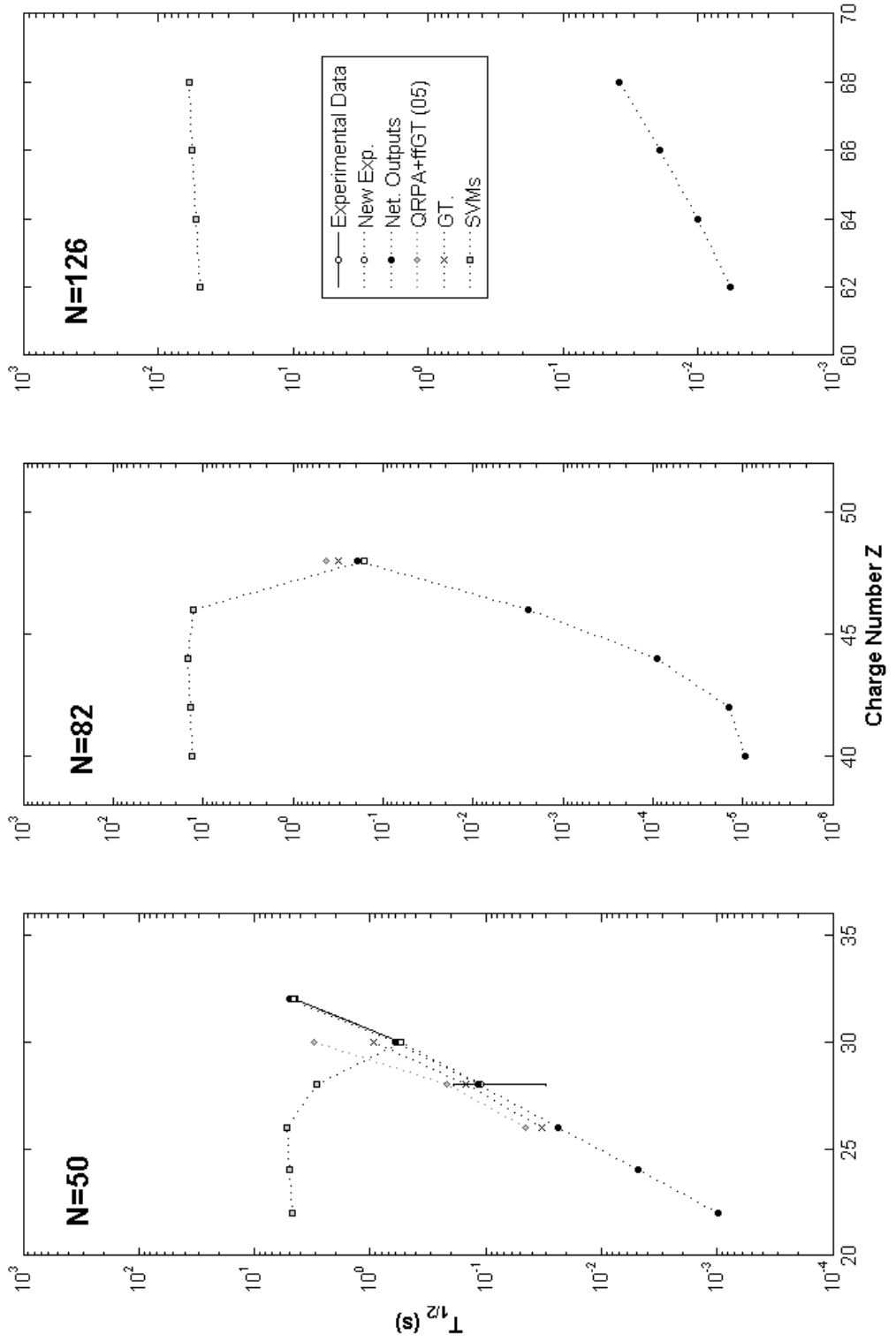
Σχήμα 16.13: Συμπερασμός στα άγνωστα ισότοπα του κασσίτερου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×].



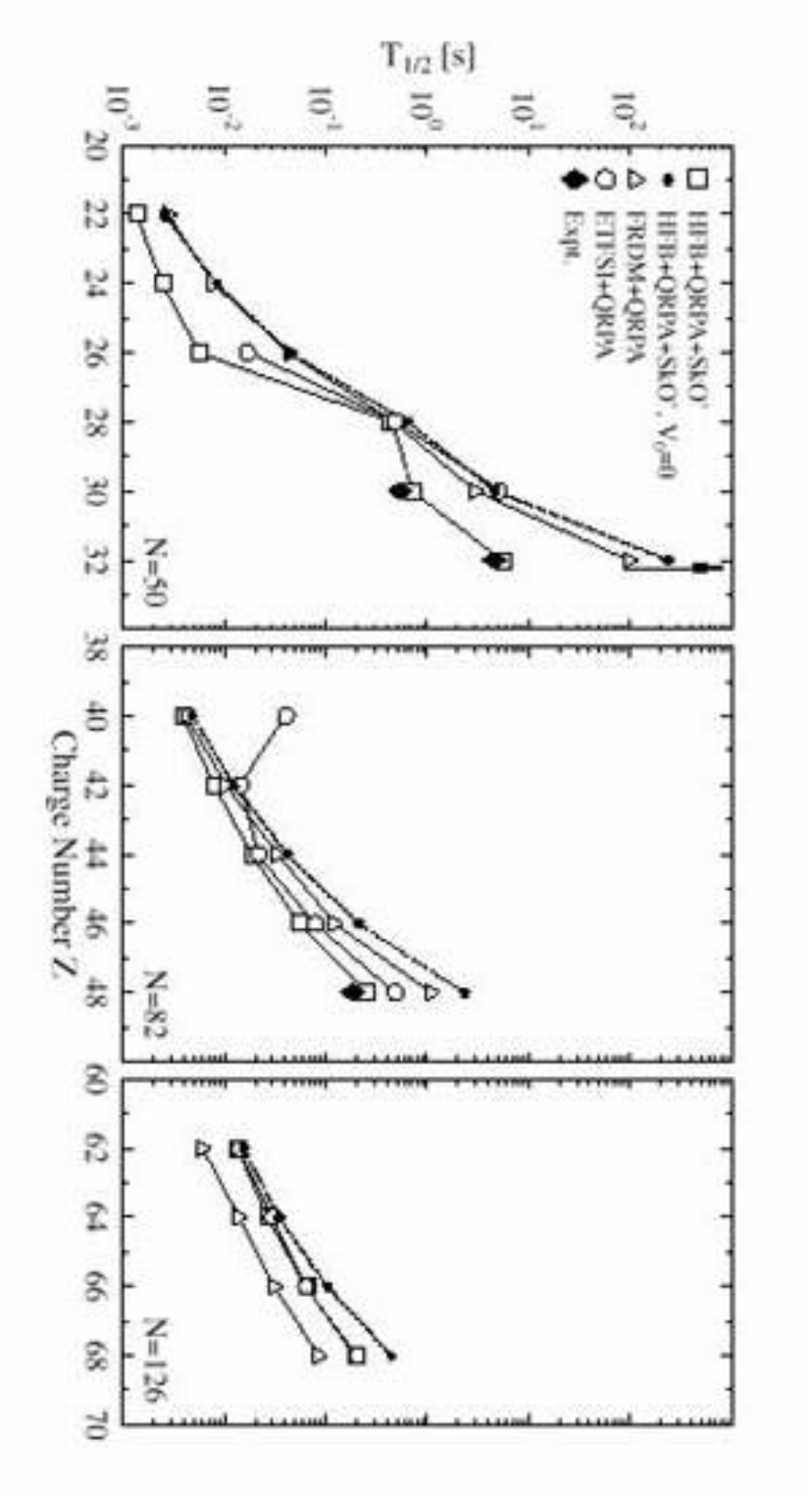
Σχήμα 16.14: Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του βισμουθίου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες).



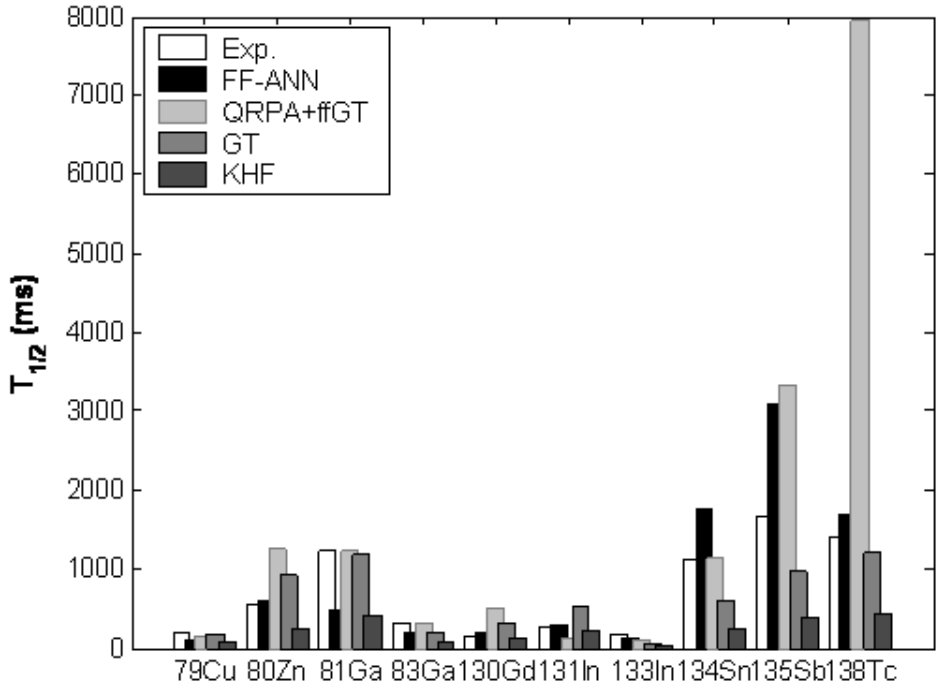
Σχήμα 16.15: Η εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του βισμουθίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από το $QRPA + ffGT$ μοντέλο (ρόμβοι) και τους επαναυπολογισμούς της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης ($\times$).



Σχήμα 16.16: Εκτιμήσεις των χρόνων ημίσειας ζωής ισότονων, άρτιου–άρτιου, χαρακτήρα πυρήνων με κλειστούς νετρονικούς φλοιούς $N = 50$, 82 και 126.



Σχήμα 16.17: Όμοιο με το 16.16. Περιλαμβάνει τις εκτιμήσεις καθολικών προτύπων, όπως το $FRDM + QRPA$ και κάποιες αντίστοιχες αποκρίσεις $C - QRPA$ προσεγγίσεων, όπως οι $ETFSI + QRPA$ [42] και οι $HFB + QRPA$ [28], για τους άρτιους−άρτιους πυρήνες των κλειστών νετρονικών φλοιών $N = 50$, 82 και 126.



Σχήμα 16.18: Εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω ή κοντά στους $r-process$ ατραπούς. Με άσπρο χρώ-μα σημειώνονται τα πειραματικά δεδομένα και με μαύρο η εκτίμηση του μοντέλου μας. Δίνονται επίσης προς σύγκριση με τις γκρίζες αποχρώσεις, οι εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72], της εφαρμογής της φόρμουλας $Kratz - Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής από τους $Pfeiffer\ et\ al.$ [11] και οι επαναυπολογισμοί των $Pfeiffer\ et\ al.$ επίσης, της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [11].

Κεφάλαιο 17

Μοντέλα με την Χρήση των SVMs

Τα *SVMs* (*Support Vector Machines*) ή **Μηχανές Ανυσμάτων Υποστήριξης** ελληνιστή, αποτελούν πρόσφατα ανεπτυγμένες μηχανές εκμάθησης που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με επιτυχία, τόσο σε προβλήματα ταξινόμησης, όσο και σε προβλήματα ενέλιξης. Χρησιμοποιούν έναν χώρο υπόθεσης γραμμικών συναρτήσεων σε έναν υπερχώρο, όπου εκπαιδεύονται μέσω κάποιου αλγόριθμου εκμάθησης που προκύπτει, όπως και στην περίπτωση των τεχνιτών νευρωνικών δικτύων, από την θεωρία της βελτιστοποίησης και περιλαμβάνουν ένα εκπαιδευτικό κατώφλι ενεργοποίησης που προκύπτει από την στατιστική θεωρία εκμάθησης. Αυτή η στρατηγική εκπαίδευσης, που προτάθηκε από τον *Vapnik* και συνεργάτες του, αποτελεί πλέον μια καθιερωμένη και πολύ ισχυρή μέθοδο, που μέσα σε λίγα μόνο χρόνια, έχει ήδη αντικαταστήσει τα περισσότερα από τα ως τώρα διαθέσιμα συστήματα σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών προβλημάτων ταξινόμησης κυρίως, όπως αστροσωματιδιακές εφαρμογές ή εφαρμογές βιοπληροφορικής. Θα δούμε λοιπόν περιληπτικά κατ' αρχήν, το θεωρητικό υπόβαθρο που αντιστοιχεί στην περίπτωση της ενέλιξης, και στην συνέχεια θα δοκιμάσουμε την δυνατότητα χρήσης τους στο πρόβλημα των χρόνων ημίσειας ζωής.

17.1 Η Βασική Ιδέα των *SVMs*

Θεωρούμε τα δεδομένα εκπαίδευσης $\{(x_1, y_1), \ldots, (x_\ell, y_\ell)\} \subset \aleph \times \mathbb{R}$, όπου το $\aleph$ υποδηλώνει τον χώρο των εισόδων (π.χ. $\aleph = \mathbb{R}^d$). Σύμφωνα με την $\varepsilon - SV$ ενέλιξη [82], στόχος μας είναι η εύρεση μιας συνάρτησης $f(x)$ που να εμφανίζει απόκλιση το πολύ ε, από την επιθυμητή απόκριση y_i για όλα τα

δεδομένα εκπαίδευσης και ταυτόχρονα να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο ομαλή. Με άλλα λόγια δεν ενδιαφερόμαστε για τις αποκλίσεις όσο αυτές είναι μικρότερες από το ε, αλλά δεν δεχόμαστε καμιά απόκλιση μεγαλύτερη από αυτή. Προς διευκόλυνσή μας, θα ξεκινήσουμε περιγράφοντας την περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι γραμμική και έχει την μορφή:

$$f(x) = \langle w, x \rangle + b \quad \mu\varepsilon \quad w \quad \in \aleph, b \in \mathbb{R} \tag{17.1}$$

όπου ο φορμαλισμός $\langle ., . \rangle$ υπονοεί το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}$ χώρο. *Ομαλότητα* στην περίπτωση της συνάρτησης (17.1) σημαίνει ότι αναζητά κανείς κάποιο μικρό w. Ένας απλός τρόπος για να το εξασφαλίσουμε αυτό * είναι για παράδειγμα να ελαχιστοποιήσουμε την νόρμα $\|w\|^2 = \langle w, w \rangle$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{array}{c} \varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau\sigma\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta: \ \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ \upsilon\pi o\kappa\epsilon\acute{\iota}\mu\epsilon\nu\eta \\ \sigma\tau o\upsilon\varsigma \\ \pi\epsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\varsigma \end{array} \quad \begin{cases} y_i - \langle w, x_i \rangle - b \leq \varepsilon \\ \\ \langle w, x_i \rangle + b - y_i \leq \varepsilon \end{cases} \tag{17.2}$$

Η σιωπηρή υπόθεση στην (17.2) είναι ότι υπάρχει όντος μια τέτοια συνάρτηση f που να προσεγγίζει όλα τα ζεύγη (x_1, y_1) με ακρίβεια ε. Μερικές φορές παρ' όλα αυτά, μπορεί να μην εξετάζουμε αυτή την περίπτωση, ή μπορεί επίσης για κάποιους λόγους να θέλουμε να επιτρέψουμε κάποιες αποκλίσεις. Σε αναλογία λοιπόν με την "μαλακού ορίου" **συνάρτηση απώλειας** [56], που εφαρμόστηκε στα $SVMs$ από τους $Cortes$ και $Vapnik$, μπορούμε να εισάγουμε τις πρόσθετες μεταβλητές ξ_i, ξ_i^* για να ξεπεράσουμε ανόμοιους περιορισμούς που υπεισέρχονται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης (17.2). Έτσι, παίρνουμε την διατύπωση του $Vapnik$:

$$\begin{array}{c} \varepsilon\lambda\alpha\chi\iota\sigma\tau\sigma\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta: \ \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}(\xi_i + \xi_i^*) \\ \upsilon\pi o\kappa\epsilon\acute{\iota}\mu\epsilon\nu\eta \\ \sigma\tau o\upsilon\varsigma \\ \pi\epsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\varsigma \end{array} \quad \begin{cases} y_i - \langle w, x_i \rangle - b \leq \varepsilon + \xi_i \\ \langle w, x_i \rangle + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0 \end{cases} \tag{17.3}$$

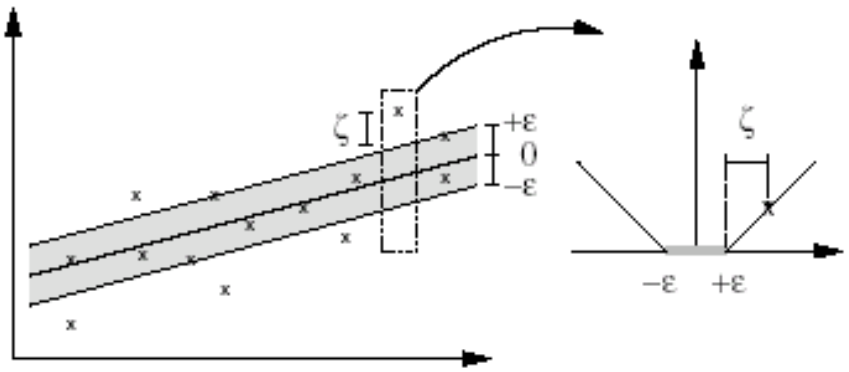
Η σταθερά $C > 0$ καθορίζει την ισορροπία μεταξύ της ομαλότητας της f και τον βαθμό ανέχειας αποκλίσεων μεγαλύτερων του ε. Αυτό αντιστοιχεί

*Στην αναφορά [7] μπορεί κανείς να βρει μια επισκόπηση διαφόρων τρόπων προσδιορισμού της *ομαλότητας* τέτοιων συναρτήσεων.

στην αποκαλούμενη $\varepsilon-$*στερούμενη ευαισθησίας* συνάρτηση απώλειας $|\xi|_\varepsilon$, η οποία δίδεται από την έκφραση:

$$|\xi|_\varepsilon := \begin{cases} 0, & \alpha\nu \quad |\xi| \leq \varepsilon \\ |\xi| - \varepsilon, & \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma. \end{cases} \tag{17.4}$$

Στο σχήμα 17.1 απεικονίζονται γραφικά, όσα συζητήθηκαν μέχρι τώρα. Μόνο τα σημεία που βρίσκονται εκτός των σκιασμένων περιοχών συνεισφέρουν στην συνάρτηση κόστους, καθώς οι αποκλίσεις περιορίζονται γραμμικά. Προκύπτει λοιπόν ότι στις περισσότερες περιπτώσεις το πρόβλημα βελτιστοποίησης (17.3) μπορεί να λυθεί πιο εύκολα στην δυϊκή του διατύπωση. Εξ' άλλου, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, η δυϊκή αυτή διατύπωση αποτελεί το κλειδί για την επέκταση των $SVMs$ στις μη$-$γραμμικές συναρτήσεις. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν μια κλασική μέθοδο δυϊσμού, αξιοποιώντας τους πολλαπλασιαστές $Lagrange$, όπως περιγράφεται στην αναφορά [73].



Σχήμα 17.1: Οι "μαλακού ορίου" ρυθμίσεις ενός γραμμικού SVM.

17.2 Το Πρόβλημα του Δυϊσμού

Βασική επιδίωξη εδώ είναι η κατασκευή μιας συνάρτησης $Lagrange$ από την συνάρτηση στόχου (βλ. παραγ. 7.2), η οποία θα αποκαλείται στο εξής *πρωταρχική* συνάρτηση στόχου, και των αντίστοιχων περιορισμών, εισάγοντας ένα δυϊκό σετ μεταβλητών. Μπορεί λοιπόν να δειχθεί ότι αυτή η συνάρτηση έχει ένα σαγματικό σημείο ως προς τις πρωταρχικές και τις δυϊκες μεταβλητές στη λύση της. Για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται

στις αναφορές [67, 33, 76]. Θα προχωρήσουμε λοιπόν ως εξής. Έστω:

$$\begin{aligned} L := \tfrac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}(\xi_i + \xi_i^*) - \sum_{i=1}^{\ell}(\eta_i\xi_i + \eta_i^*\xi_i^*) \\ - \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\left(\varepsilon + \xi_i - y_i + \langle w, x_i\rangle + b\right) \\ - \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i^*\left(\varepsilon + \xi_i^* + y_i - \langle w, x_i\rangle - b\right) \end{aligned} \tag{17.5}$$

όπου L η Λαγρατζιανή και η_i, η_i^*, α_i, α_i^* οι πολλαπλασιαστές του *Lagrange*. Οι δυϊκές μεταβλητές της εξ. (17.5) θα πρέπει να ικανοποιούν θετικά ορισμένους περιορισμούς, όπως για παράδειγμα:

$$a_i^{(*)}, \eta_i^{(*)} \geq 0. \tag{17.6}$$

Σημειώστε ότι με τον συμβολισμό $a_i^{(*)}$ αναφερόμαστε και στο α_i και στο α_i^*.

Προκύπτει λοιπόν από την συνθήκη του σαγματικού σημείου ότι οι μερικές παράγωγοι της Λαγρατζιανής L ως προς τις πρωταρχικές μεταβλητές (w, b, ξ_i, ξ_i^*) θα πρέπει να εξαλειφθούν στην περίπτωση της βελτιστοποίησης. Δηλαδή:

$$\partial_b L = \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^* - \alpha_i) \quad = 0, \tag{17.7}$$

$$\partial_w L = w - \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^* - \alpha_i)\, x_i \quad = 0, \tag{17.8}$$

$$\partial_{\xi_i^{(*)}} L = C - \alpha_i^{(*)} - \eta_i^{(*)} \quad = 0. \tag{17.9}$$

Αντικαθιστώντας τις εξ. (17.7), (17.8) και (17.9) στην εξ. (17.5), προκύπτει το πρόβλημα δυϊκής βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \textit{μεγιστοποίηση}: & \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\ell}(\alpha_i - \alpha_i^*)\left(\alpha_j - \alpha_j^*\right)\langle x_i, x_j\rangle \\ -\varepsilon\sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i + \alpha_i^*) + \sum_{i=1}^{\ell} y_i(\alpha_i - \alpha_i^*) \end{cases} \\ \textit{υποκείμενη στους περιορισμούς}: & \begin{cases} \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\ \\ \alpha_i, \alpha_i^* \in [0, C] \end{cases} \end{aligned} \tag{17.10}$$

Παραγωγίζοντας την εξ. (17.10) έχουμε ήδη απαλείψει τις δυϊκές μεταβλητές η_i, η_i^* μέσω της συνθήκης (17.9), η οποία μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως $\eta_i^{(*)} = C - \alpha_i^{(*)}$. Η εξ. (17.8) μπορεί επίσης να γραφτεί στην μορφή:

$$w = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i^* - \alpha_i)\, x_i \tag{17.11}$$

και έτσι η συνάρτηση f θα δίνεται τελικά από την έκφραση:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i - \alpha_i^*)\, \langle x_i, x_j \rangle + b. \tag{17.12}$$

Αυτή είναι η *επέκταση* Ανυσμάτων Υποστήριξης, όπου το w για παράδειγμα μπορεί να περιγραφεί πλήρως ως γραμμικός συνδυασμός των εισόδων εκπαίδευσης x_i. Κατά κάποιο τρόπο, με τα Ανύσματα Υποστήριξης η πολυπλοκότητα της αναπαράστασης μιας συνάρτησης είναι ανεξάρτητη της διάτασης του χώρου των εισόδων $\aleph$ και εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των Ανυσμάτων Υποστήριξης.

Επιπρόσθετα, σημειώστε ότι ο πλήρης αλγόριθμος μπορεί να περιγραφεί από εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των δεδομένων. Ακόμα και όταν εκτιμώντας την συνάρτηση f δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε το w αναλυτικά. Αυτές οι παρατηρήσεις θα αξιοποιηθούν στην διατύπωση της μη−γραμμικής επέκτασης.

17.3 Ο Υπολογισμός του Κατωφλιού Ενεργοποίησης b και τα Ανύσματα Υποστήριξης

Μέχρι τώρα παραλείψαμε το ζήτημα του υπολογισμού του b. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί αν εκμεταλλευτούμε τις αποκαλούμενες συνθήκες $Karush - Kuhn - Tucker$ (KKT) [83, 39]. Εκεί διατυπώνεται η άποψη ότι για την λύση, το γινόμενο μεταξύ δυϊκών μεταβλητών και περιορισμών πρέπει να εξαλειφθεί.

$$\begin{aligned} \alpha_i \left(\varepsilon + \xi_i - y_i + \langle w, x_i \rangle + b\right) &= 0 \\ \alpha_i^* \left(\varepsilon + \xi_i^* + y_i - \langle w, x_i \rangle - b\right) &= 0 \end{aligned} \tag{17.13}$$

και

$$\begin{aligned} (C - a_i)\, \xi_i &= 0 \\ (C - a_i^*)\, \xi_i^* &= 0 \end{aligned} \tag{17.14}$$

Αυτό μας επιτρέπει να εξάγουμε αρκετά συμπεράσματα. Εν' πρώτης, μόνο παραδείγματα (x_i, y_i) με αντιστοιχία $\alpha_i^{(*)} = C$ βρίσκονται εκτός της περιοχής

$\varepsilon-$στερούμενης ευαισθησίας. Δεύτερον, θα ισχύει ότι $\alpha_i\alpha_i^* = 0$, δηλαδή, δεν μπορεί ποτέ να υπάρξει σετ δυικών μεταβλητών α_i, α_i^* που να είναι αμφότερες ταυτόχρονα μη−μηδενικές. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$\varepsilon - y_i + \langle w, x_i\rangle + b \geq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \xi_i = 0 \quad \alpha\nu \quad \alpha_i < C, \tag{17.15}$$

$$\varepsilon - y_i + \langle w, x_i\rangle + b \leq 0 \qquad \alpha\nu \quad \alpha_i > 0. \tag{17.16}$$

Κατ' αντιστοιχία, με ανάλογη ανάλυση για τα a_i^* παίρνουμε:

$$\begin{array}{l} \max\left\{ \ -\varepsilon + y_i - \langle w, x_i\rangle \,|\alpha_i < C \quad \acute{\eta} \quad \alpha_i^* > 0 \ \right\} \leq b \leq \\ \min\left\{ \ -\varepsilon + y_i - \langle w, x_i\rangle \,|\alpha_i > 0 \quad \acute{\eta} \quad \alpha_i^* < C \ \right\}. \end{array} \tag{17.17}$$

Αν όμως κάποιο $\alpha_i^{(*)} \in (0, C)$, οι ανισότητες μετατρέπονται σε ισότητες. Μια εναλλακτική μέθοδος υπολογισμού του b προκύπτει από της βελτιστοποίηση εσωτερικού σημείου, όμως ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας. Στην αναφορά [77] επίσης, παραθέτωνται κάποιες επιπλέον μέθοδοι έμμεσου υπολογισμού της σταθεράς b.

Ένα τελικό σχόλιο πηγάζει από την παρατήρηση της *διασποράς* της επέκτασης των Ανυσμάτων Υποστήριξης. Από την εξ. (17.13) προκύπτει ότι μόνο για $|f(x) - y_i| \geq \varepsilon$ οι πολλαπλασιαστές *Lagrange* μπορούν να είναι μη−μηδενικοί, ή με άλλα λόγια, για όλα τα παραδείγματα που βρίσκονται μέσα στην $\varepsilon-$περιοχή (π.χ. η σκιασμένη περιοχή του σχήματος 17.1) τα α_i, α_i^* εξαλείφονται: για $|f(x) - y_i| < \varepsilon$ ο δεύτερος όρος της εξ. (17.13) είναι μη−μηδενικός και ως εκ τούτου τα α_i, α_i^* θα πρέπει να είναι μηδενικά έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι KKT συνθήκες. Έχουμε επομένως μια επέκταση διασποράς του w σε αντιστοιχία με το x_i (δεν θέλουμε για παράδειγμα όλα τα x_i να περιγράφουν το w). Τα παραδείγματα που απαντώνται με μη−απαλείψιμες συνιστώσες καλούνται **Ανύσματα Υποστήριξης** (SV).

17.4 Κεντρικοί Πυρήνες

17.4.1 Μη−γραμμικότητα από Προεπεξεργασία

Το επόμενο βήμα είναι λοιπόν να κάνουμε τον αλγόριθμο SV μη−γραμμικό. Αυτό, για παράδειγμα, μπορεί να κατορθωθεί απλά με προεπεξεργασία των εισόδων εκπαίδευσης x_i, μέσω της αντιστοιχίας $\Phi : \aleph \to \Im$ σε κάποιον υπερχώρο $\Im$ χαρακτηριστικών και εφαρμογή στη συνέχεια του κλασικού SV αλγορίθμου ενέλιξης. Για να γίνει καλύτερα αντιληπτό αυτό, θα δούμε λοιπόν εν συντομία ένα παράδειγμα όπως δίνεται στην αναφορά [82].

Παράδειγμα 17-1 (Δευτεροβάθμια Χαρακτηριστικά του $\mathbb{R}^2$)

Θεωρήστε την αντιστοιχία $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $\Phi(x_1, x_2) = \left(x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2\right)$. Είναι κατανοητό ότι οι εκθέτες σε αυτήν την περίπτωση αναφέρονται στις συνιστώσες του $x \in \mathbb{R}^2$. Εκπαιδεύοντας λοιπόν μια γραμμική Μηχανή Ανυσμάτων Υποστήριξης, με αυτά τα χαρακτηριστικά θα παράγει μια δευτεροβάθμια συνάρτηση. Αν και αυτή η απόπειρα φαίνεται εύλογη στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορεί πολύ εύκολα να γίνει ανέφικτη υπολογιστικά για πολυωνυμικά χαρακτηριστικά υψηλότερου βαθμού και διάστασης, καθώς ο αριθμός των διαφόρων μονωνυμικών χαρακτηριστικών βαθμού p είναι $\begin{pmatrix} p+d-1 \\ p \end{pmatrix}$, όπου $d = \dim(\aleph)$. Τυπικές τιμές για προβλήματα αναγνώρισης προτύπων OCR (με καλή απόδοση) είναι $p = 27$ και $d = 28 \times 28 = 784$, που αντιστοιχούν σε περίπου $3.7 \cdot 10^{16}$ χαρακτηριστικά.

17.4.2 Κρυφή Αντιστοιχία Μέσω Πυρήνων

Προφανώς, μια τέτοια προσέγγιση δεν είναι βιώσιμη και θα πρέπει να σκεφτούμε κάποιον υπολογιστικά συντομότερο τρόπο. Η παρατήρηση κλειδί λοιπόν, είναι ότι για την αντιστοιχία των χαρακτηριστικών του παραδείγματος 1 θα ισχύει:

$$\left\langle \left(x_i^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2\right), \left(x_i'^2, \sqrt{2}x_1'x_2', x_2'^2\right) \right\rangle = \langle x, x' \rangle^2 . \tag{17.18}$$

Όπως σημειώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο SV αλγόριθμος εξαρτάται μόνο από εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των προτύπων x_i. Συνεπώς αρκεί να γνωρίζουμε την αντιστοιχία $k(x, x') := \langle \Phi(x), \Phi(x') \rangle$ και όχι την $\Phi(x)$ κατηγορηματικά, η οποία μας επιτρέπει να επανακαθορίσουμε το SV πρόβλημα βελτιστοποίησης ως εξής:

$$\begin{array}{l} \mu\varepsilon\gamma\iota\sigma\tau o\pi o\acute{\iota}\eta\sigma\eta : \\ \\ \upsilon\pi o\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta \\ \sigma\tau o\upsilon\varsigma \\ \pi\varepsilon\rho\iota o\rho\iota\sigma\mu o\acute{\upsilon}\varsigma \end{array} \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\ell}(\alpha_i - \alpha_i^*)\left(\alpha_j - \alpha_j^*\right)k(x_i, x_j) \\ -\varepsilon\sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i + \alpha_i^*) + \sum_{i=1}^{\ell} y_i(\alpha_i - \alpha_i^*) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 \\ \\ \alpha_i, \alpha_i^* \in [0, C] \end{cases} \end{array} \tag{17.19}$$

Σε αναλογία με το ανάπτυγμα της εξ. (17.12), η τελευταία μπορεί να

γραφτεί ως:

$$w=\sum_{i=1}^{\ell}\left(\alpha_i-\alpha_i^*\right)\Phi\left(x_i\right) \quad \text{και} \quad f\left(x\right)=\sum_{i=1}^{\ell}\left(\alpha_i-\alpha_i^*\right)k\left(x_i,x\right)+b \tag{17.20}$$

Η διαφορά προς την γραμμική περίπτωση είναι ότι το w δεν δίνεται πλέον αναλυτικά. Σημειώστε επίσης, ότι στη μη−γραμμική τοποθέτηση, το πρόβλημα βελτιστοποίησης αντιστοιχεί στην εύρεση της ομαλότερης συνάρτησης του χώρου χαρακτηριστικών και όχι στον χώρο των είσοδων.

17.4.3 Συνθήκες Επιτρεπτότητας Κεντρικών Πυρήνων

Το βασικό ερώτημα που γεννάται τώρα, είναι ποιες συναρτήσεις $k\left(x,x'\right)$ αντιστοιχούν σε ένα εσωτερικό γινόμενο κάποιου χώρου χαρακτηριστικών $\aleph$. Το επόμενο λοιπό θεώρημα χαρακτηρίζει αυτές τις συναρτήσεις .

Θεώρημα 17-1 (Το Θεώρημα $Mercer$**)**

Θεωρήστε $k\in L_\infty\left(X^2\right)$, έτσι ώστε ο τελεστής ολοκλήρωσης $T_k:L_2\left(X\right)\rightarrow L_2\left(X\right)$,

$$T_kf\left(\cdot\right):=\int_x k\left(\cdot,x\right)f\left(x\right)d\mu\left(x\right) \tag{17.21}$$

να είναι θετικά ορισμένος (εδώ το μ δηλώνει ένα μέτρο του X με $\mu\left(X\right)$ πεπερασμένο και $\sup\left(\mu\right)=X$). Αν $\psi_j\in L_2\left(X\right)$ είναι ιδιοσυνάρτηση του T_k με ιδιοτιμή $\lambda_j\neq 0$, κανονικοποιημένη ώστε $\left\|\psi_j\right\|_{L_2=1}$ και αν επιπλέον $\overline{\psi}_j$ είναι η μιγαδική της συζυγής, τότε:

1. $\left(\lambda_j\left(T\right)\right)_j\in\ell_1$,
2. $\psi_j\in L_\infty\left(X\right)\quad \kappa\alpha\iota\quad \sup_j\left\|\psi_j\right\|_{L_\infty}<\infty$.
3. $k\left(x,x'\right)=\sum\limits_{j\in N}\lambda_j\bar{\psi}_j\left(x\right)\psi_j\left(x'\right)$ ισχύει για σχεδόν όλα τα x,x', όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα επίσης για σχεδόν όλα τα x,x'.

Ανεπίσημα λοιπόν, αυτό το θεώρημα δηλώνει ότι αν:

$$\int\limits_{x\times x}k\left(x,x'\right)f\left(x\right)f\left(x'\right)dxdx'\geq 0 \tag{17.22}$$

ισχύει για όλες τις $f\in L_2\left(X\right)$, μπορούμε να γράψουμε το $k\left(x,x'\right)$ σαν ένα εσωτερικό γινόμενο κάποιου χώρου χαρακτηριστικών. Με βάση επομένως τη συνθήκη αυτή, μπορούμε να συνάγουμε μερικούς απλούς κανόνες για την

συγκρότηση των κεντρικών πυρήνων των $SVMs$, οι οποίες τότε επίσης θα ικανοποιούν την συνθήκη $Mercer$ [1]. Στη συνέχεια λοιπόν θα αποκαλούμε τις συναρτήσεις k **επιτρεπτούς** SV **κεντρικούς πυρήνες**.

Πόρισμα 17-1 (Θετικοί Γραμμικοί Συνδυασμοί Πυρήνων)

Αν k_1, k_2 επιτρεπτοί SV κεντρικοί πυρήνες και c_1, c_2 θετικά ορισμένες σταθερές, τότε ο γραμμικός συνδυασμός των k_1, k_2:

$$k(x, x') := c_1 k_1(x, x') + c_2 k_2(x, x'), \tag{17.23}$$

θα είναι επίσης επιτρεπτός κεντρικός πυρήνας. Αυτό προκύπτει απ' ευθείας μέσω της σχέσης (17.22), χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα των ολοκληρωμάτων. Πιο γενικά, μπορεί κανείς να δει ότι το σετ των επιτρεπτών κεντρικών πυρήνων διαμορφώνουν έναν κυρτό κώνο, εφάμιλο της τοπολογίας σύγκλισης γνωστού σημείου των $Berg\ et\ al.$ [14].

Πόρισμα 17-2 (Ολοκληρώματα Πυρήνων)

Αν $s(x, x')$ είναι μια συμμετρική συνάρτηση του $X \times X$, τέτοια ώστε να υφίσταται η σχέση:

$$k(x, x') := \int_x s(x, z) s(x', z)\, dz, \tag{17.24}$$

τότε το k είναι ένας επιτρεπτός SV πυρήνας. Αυτό φαίνεται άμεσα από τις σχέσεις (17.22) και (17.24), αναδιατάσσοντας το όρισμα του ολοκληρώματος. Διαμορφώνεται λοιπόν τώρα μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για πυρήνες αναλλοίωτης μετάφρασης, όπως για παράδειγμα ο πυρήνας $k(x, x') := k(x - x')$.

Θεώρημα 17-2 (Γινόμενα Κεντρικών Πυρήνων)

Αν k_1, k_2 επιτρεπτοί SV κεντρικοί πυρήνες, τότε ο:

$$k(x, x') := k_1(x, x')\, k_2(x, x'), \tag{17.25}$$

είναι επίσης επιτρεπτός πυρήνας. Αυτό μπορεί να δειχθεί με εφαρμογή του διευρυμένου θεωρήματος $Mercer$ στους πυρήνες k_1 και k_2, και παρατηρώντας ότι κάθε όρος του διπλού αθροίσματος $\sum_{i,j} \lambda_i^1 \lambda_j^2 \psi_i^1(x)\, \psi_i^1(x')\, \psi_j^2(x)\, \psi_j^2(x')$ αποτελεί αφορμή μιας θετικής συνιστώσας όταν ελέγχει την εξ. (17.22).

Θεώρημα 17-3 (Ο Μετασχηματισμός *Furier* ως Έλεγχος της Επιτρεπτότητας)

Ένας πυρήνας αναλλοίωτης μετάφρασης $k(x,x') := k(x-x')$ είναι SV επιτρεπτός πυρήνας, αν και μόνον αν, ο μετασχηματισμός $Furier$:

$$F[k](\omega) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_x e^{-i\langle \omega, x\rangle} k(x)\, dx, \tag{17.26}$$

είναι μη αρνητικός.

Θεώρημα 17-4 (Το Θεώρημα *Burges* [16])

Κάθε πυρήνας με εσωτερικό γινόμενο του τύπου $k(x,x') = k(\langle x,x'\rangle)$ θα πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$k(\xi) \geq 0 \quad \partial_\xi k(\xi) \geq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \partial_\xi k(\xi) + \xi \partial_\xi^2 k(\xi) \geq 0 \tag{17.27}$$

για κάθε $\xi \geq 0$, ώστε να θεωρείται επιτρεπτός πυρήνας.

Σημειώστε οτι οι συνθήκες του θεωρήματος 4, είναι μόνο αναγκαίες αλλά όχι και ικανές. Οι κανόνες που αναπτύσσονται εδώ λοιπόν, μπορούν να φανούν χρήσιμοι τόσο για τον έλεγχο της επιτρεπτότητας των πυρήνων, όσο και για την κατασκευή νέων πυρήνων. Η γενική περίπτωση δίνεται από το ακόλουθο και τελευταίο θεώρημα.

Θεώρημα 17-5 (Το Θεώρημα *Schoenberg* [44])

Κάθε πυρήνας με εσωτερικό γινόμενο του τύπου $k(x,x') = k(\langle x,x'\rangle)$, που ορίζεται σε έναν απειροδιάστατο χώρο $Hilbert$, με ανάλυση σε άπειρη σειρά:

$$k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \tag{17.28}$$

είναι επιτρεπτός, αν και μόνον αν, $a_n \geq 0 \forall a_n$. Μια κάπως ασθενέστερη συνθήκη εφαρμόζεται για πεπερασμένους χώρους. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε αν. [14] και [6].

Με βάση λοιπόν τα θεωρήματα και τα πορίσματα αυτά, τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αρκετοί SV κεντρικοί πυρήνες. Ακολουθεί στην συνέχεια μια περιληπτική περιγραφή των πιο διαδεδομένων από αυτούς.

17.4.4 Ο Πολυωνυμικός Πυρήνας

Η πολυωνυμική αντιστοιχία είναι η πιο δημοφιλής μέθοδος για μη−γραμμική μοντελοποίηση. Από αναλυτικούς υπολογισμούς της αντιστοιχίας, φάνηκε ότι

ομογενείς πολυωνυμικοί πυρήνες k με $p \in \mathbb{N}$ και

$$k(x, x') = \langle x, x' \rangle^p \tag{17.29}$$

είναι κατάλληλοι SV κεντρικοί πυρήνες. Από αυτή την παρατήρηση, μπορεί κανείς να καταλήξει ότι πυρήνες του τύπου:

$$k(x, x') = (\langle x, x' \rangle + c)^p, \tag{17.30}$$

όπως για παράδειγμα οι ανομοιογενείς πολυωνυμικοί πυρήνες με $p \in \mathbb{N}$, $c \geq 0$, είναι επίσης επιτρεπτοί πυρήνες. (Παίρνουμε το k ως άθροισμα από ομογενείς πυρήνες και εφαρμόζουμε το πόρισμα 1.). Ο πυρήνας αυτός προτιμάται έναντι του (17.19), καθώς προλαμβάνει προβλήματα μηδενισμού του $Hessian$.

17.4.5 Ο Πυρήνας Υπερβολικής Εφαπτομένης

Ένας άλλος πυρήνας, που μας είναι γνώριμος κατά κάποιο τρόπο λόγω της ομοιότητας του με τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα, είναι ο πυρήνας υπερβολικής εφαπτομένης:

$$k(x, x') = \tanh(\theta + \phi \langle x, x' \rangle). \tag{17.31}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα 5, μπορεί κανείς να ελέγξει ότι αυτός ο πυρήνας στην πραγματικότητα δεν ικανοποιεί την συνθήκη $Mercer$. Κατά περίεργο όμως τρόπο, χρησιμοποιείται πρακτικά με εξαιρετική επιτυχία.

17.4.6 Ο Πυρήνας Γκαουσιανής Συνάρτησης Ακτινικής Βάσης

Οι πυρήνες αναλλοίωτης μετάφρασης, τύπου $k(x, x') := k(x - x')$, είναι οι πιο ευρύτερα διαδομένοι. Φάνηκε από πολύ νωρίς ότι ο:

$$k(x, x') = e^{-\frac{\|x - x'\|^2}{2\sigma^2}}, \tag{17.32}$$

είναι ένας επιτρεπτός πυρήνας.

17.4.7 Ο Πυρήνας Πολυωνυμικού Υπολογισμού Ομαλής Καμπύλης

Ο $B - Spline$ είναι ο πιο γνωστός από τους υπάρχοντες πυρήνες πολυωνυμικού υπολογισμού ομαλής καμπύλης. Ο πυρήνας που ορίζεται στο διάστημα [-1,1], δίνεται στην κλειστή μορφή:

$$k(x, x') = B_{2n+1}(\|x - x'\|) \quad \{\mu\varepsilon\} \quad B_k := \bigotimes_{i=1}^{k}, \ 1_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} \tag{17.33}$$

όπου το 1_x δηλώνει τον λειτουργικό δείκτη του σετ X και $\otimes$ είναι ο τελεστής ελίκωσης.

17.5 Συναρτήσεις Κόστους

Ίσως ο SV αλγόριθμος ενέλιξης λοιπόν, όπως τον περιγράψαμε μέχρι τώρα, να φαντάζει πιο περίεργος και περισσότερο δυσνόητος από άλλες μεθόδους εκτίμησης άγνωστης συνάρτησης. Άπαξ και εστιάσουμε όμως σε έναν πιο τυπικό μαθηματικοποιημένο συμβολισμό, θα γίνουν φανερές οι ομοιότητες με τις προηγούμενες μεθόδους. Χάριν απλότητας, θα θεωρήσουμε πάλι εδώ την γραμμική περίπτωση, καθώς επεκτάσεις στην μη−γραμμική είναι σαφείς, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο κεντρικού πυρήνα που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

17.5.1 Ο Λειτουργικός Παράγοντας Ρίσκου

Ας επιστρέψουμε προς στιγμήν, στην περίπτωση της παραγράφου 17.1. Εκεί, είχαμε κάποια δεδομένα εκπαίδευσης $\vec{X} := \{(x_1, y_1), \ldots, (x_\ell, y_\ell)\} \subset \aleph \times \mathbb{R}$. Θα υποθέσουμε τώρα, ότι αυτό το εκπαιδευτικό σετ έχει προκύψει από κάποια κατανομή πιθανότητας $P(x, y)$. Σκοπός μας είναι να βρούμε μια συνάρτηση f, που να ελαχιστοποιεί τον αναμενόμενο παράγοντα ρίσκου:

$$R[f] = \int c(x, y, f(x))\, dF(x, y), \tag{17.34}$$

όπου το $c(x, y, f(x))$ υποδηλώνει μια συνάρτηση κόστους που καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο θα περιορίσουμε τις αποκλίσεις, βασιζόμενοι στα εμπειρικά δεδομένα $\vec{X}$. Δεδομένου ότι δεν γνωρίζουμε την κατανομή $P(x, y)$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $\vec{X}$ μόνο για να εκτιμήσουμε μια συνάρτηση f που ελαχιστοποιεί τον παράγοντα $R[f]$. Μια εφικτή προσέγγιση συνίσταται στην αντικατάσταση του ολοκληρώματος από την εμπηρική εκτίμιση, ώστε να πάρουμε τον αποκαλούμενο *εμπειρικό*, λειτουργικό παράγοντα ρίσκου:

$$R_{emp}[f] := \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} c(x_1, y_1, f(x_i)). \tag{17.35}$$

Θα προσπαθήσουμε καταρχήν να βρούμε τον εμπηρικό ελαχιστοποιητή κόστους $f_0 := \arg\min_{f \in H} R_{emp}[f]$ για κάποια τάξη συνάρτησης H. Αν η H είναι πολύ διευρυμένη ωστόσο, π.χ. η "χωρητικότητά" της είναι υψηλή (όταν για παράδειγμα δουλεύουμε με μικρή βάση δεδομένων σε μεγάλων διαστάσεων χώρους), ίσως αυτή να μην είναι μια καλή ιδέα, καθώς θα οδηγήσει σε υπερπροσαρμογή και επομένως σε κακή γενίκευση. Έτσι θα πρέπει να προσθέσει κανείς έναν όρο που θα ελέγχει την χωρητικότητα, στην SV περίπτωση $\|w\|^2$, που οδηγεί στον *εξομαλυμένο* λειτουργικό παράγοντα ρίσκου:

$$R_{reg}[f] := R_{emp}[f] + \frac{\lambda}{2} \|w\|^2, \tag{17.36}$$

όπου $\lambda > 0$ είναι η αποκαλούμενη *σταθερά εξομάλυνσης*. Διάφοροι αλγόριθμοι, όπως τα δίκτυα εξομάλυνσης ή νευρωνικά δίκτυα με δίκτυα εξασθένησης βαρών, ελαχιστοποιούν μία έκφραση παρόμοια με αυτή της εξίσωσης (17.36).

17.5.2 Μοντέλα Μέγιστης Πιθανότητας και Πυκνότητας

Η τυπική ρύθμιση στην SV περίπτωση είναι, όπως ήδη αναφέρθηκε στην παρ. 17.1, η $\varepsilon-$στερούμενη ευαισθησίας συνάρτηση απώλειας:

$$c\left(x, y, f\left(x\right)\right) = \left|y - f\left(x\right)\right|_{\varepsilon}. \tag{17.37}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι, ελαχιστοποιώντας την (17.36) με την συγκεκριμένη συνάρτηση απώλειας της εξ. (17.37), ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση της εξ. (17.3), με τη μόνη διαφορά ότι $C = 1/(\lambda\ell)$.

Συναρτήσεις απώλειας όπως η $\left|y - f\left(x\right)\right|_{\varepsilon}^{p}$ με $p > 1$ ίσως να μην είναι κατάλληλες, καθώς η υπεργραμμική αύξηση οδηγεί σε απώλεια των ιδι-οτήτων ευρωστίας του εκτιμητή: Σε αυτές τις περιπτώσεις η παράγωγος της συνάρτησης κόστους αυξάνει απεριόριστα. Για $p < 1$, από την άλλη μεριά, το c γίνεται μη κυρτό.

Για την περίπτωση του $c\left(x, y, f\left(x\right)\right) = \left(y - f\left(x\right)\right)^2$, επαναφέρουμε την προσέγγιση προσαρμογής των μέσων τετραγωνικών αποκλίσεων, που, σε αντίθεση με την τυπική SV συνάρτηση απώλειας, οδηγεί σε μια αντιστροφή πίνακα αντί ενός τετραγωνικού υπολογιστικού προβλήματος.

Η ερώτηση τώρα είναι, ποια συνάρτηση κόστους θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην (17.36). Από τη μία θέλουμε να αποφύγουμε μια σύνθετη συνάρτηση c, καθώς αυτό μπορεί να οδηγήσει σε δυσεπίλυτα προβλήματα βελτιστοποίησης. Από την άλλη θα πρέπει να χρησιμοποιήσει κανείς την συγκεκριμέ-νη συνάρτηση κόστους που εξυπηρετεί με τον καλύτερο τρόπο το εκάστοτε πρόβλημα. Επιπρόσθετα, υπό την υπόθεση ότι τα παραδείγματα παράγονται από μια υποκείμενη λειτουργική εξάρτηση προσαυξημένη με κάποιο θόρυβο, π.χ. $y_i = f_{true}\left(x_i\right) + \xi_i$ με πυκνότητα $p\left(\xi\right)$, η βέλτιστη συνάρτηση κόστους από την άποψη της μέγιστης πιθανότητας θα είναι:

$$c\left(x, y, f\left(x\right)\right) = -\log p\left(y - f\left(x\right)\right). \tag{17.38}$$

Αυτό γίνεται κατανοητό ως εξής: Η πιθανότητα μιας εκτίμησης

$$\vec{X}_f := \left\{\left(x_1, f\left(x_1\right)\right), ..., \left(x_\ell, f\left(x_\ell\right)\right)\right\} \tag{17.39}$$

για επιπρόσθετο θόρυβο και δεδομένα εκπαίδευσης είναι:

$$p\left(\vec{X}_f | \vec{X}\right) = \prod_{i=1}^{\ell} p\left(f\left(x_i\right) | \left(x_i, y_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{\ell} p\left(y_i - f\left(x_i\right)\right). \tag{17.40}$$

Μεγιστοποιώντας την $p\left(\vec{X}_f|\vec{X}\right)$ είναι σαν να ελαχιστοποιούμε την $-\log P\left(\vec{X}_f|\vec{X}\right)$. Από την (17.38), λοιπόν, παίρνουμε:

$$-\log P\left(X_f|X\right) = \sum_{i=1}^{\ell} c\left(x_i, y_i, f\left(x_i\right)\right). \tag{17.41}$$

Ωστόσο, η συνάρτηση κόστους που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο μπορεί να είναι μη κυρτή. Σε αυτή την περίπτωση, θα πρέπει κανείς να βρει κάποιον κυρτό αντικαταστάτη, έτσι ώστε να αντιμετωπίσουμε αποτελεσματικά την περίπτωση αυτή (να βρούμε π.χ. μια αποδοτική εφαρμογή του αντίστοιχου προβλήματος βελτιστοποίησης).

Αν, από την άλλη, δίνουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση κόστους σε ένα πραγματικό πρόβλημα, θα πρέπει κανείς να βρει κάποιον αντικαταστάτη, όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτήν τη συνάρτηση κόστους, καθώς με αυτή θα υπολογιστή τελικά η απόδοση.

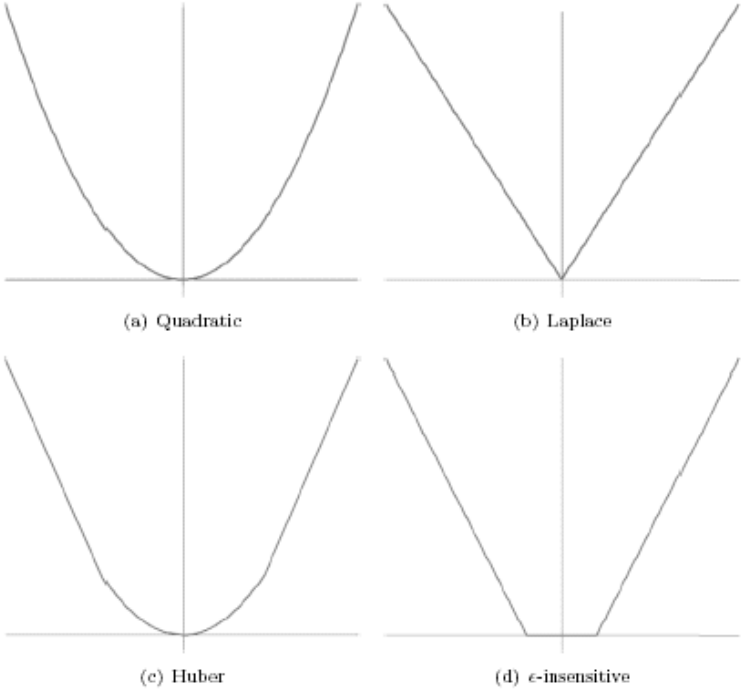
Ο πίνακας 17.1, περιλαμβάνει μια επισκόπηση των πιο συνηθισμένων μοντέλων πυκνότητας και την αντίστοιχη συνάρτηση απώλειας, όπως προκύπτει από την σχέση (17.38), ενώ το σχήμα 17.2 απεικονίζει γραφικά τις συναρτήσεις απώλειας αυτές.

17.5.3 Λύνοντας τις Εξισώσεις

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς, θα θεωρήσουμε επιπλέον ότι το c είναι συμμετρικό και ότι έχει (το πολύ) δύο (για λόγους συμμετρίας) ασυνέχειες στα σημεία $\pm\varepsilon, \varepsilon \geq 0$ της πρώτης παραγώγου και είναι μηδενικό στο διάστημα $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Σημειώστε ότι όλες οι συναρτήσεις απώλεια που περιγράψαμε στον πίνακα 17.1, ικανοποιούν αυτές τις προϋποθέσεις. Έτσι το c θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$c\left(x, y, f\left(x\right)\right) = \tilde{c}\left(\left|y - f\left(x\right)\right|_{\varepsilon}\right). \tag{17.42}$$

Μπορεί κανείς να παρατηρήσει την ομοιότητα με την $\varepsilon-$στερούμενη ευαισθησίας συνάρτηση απώλειας του *Vapnik*. Είναι μάλλον σαφές ότι πρέπει να επεκτείνουμε αυτήν την ειδική περίπτωση σε πιο γενικές κυρτές συναρτήσεις απώλειας. Έτσι για μη μηδενικές συναρτήσεις κόστους στο διάστημα $[-\varepsilon, \varepsilon]$ χρησιμοποιείται ένα επιπλέον ζεύγος μεταβλητών. Παράλληλα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές συναρτήσεις κόστους $\tilde{c}_i, \tilde{c}_i^*$ και διαφορετικές τιμές των $\varepsilon_i, \varepsilon_i^*$ για κάθε παράδειγμα. Από την επιβάρυνση με τους επιπρόσθετους πολλαπλασιαστές *Lagrange* του δυϊκού σχηματισμού, επιλαμβάνονται οι επιπλέον ασυνέχειες. Σε αναλογία με την εξ. (17.3) έτσι, φτάνουμε σε ένα



Σχήμα 17.2: Συναρτήσεις απώλειας.

κυρτό πρόβλημα ελαχιστοποίησης. Για να απλοποιήσουμε τον φορμαλισμό, θα ακολουθήσουμε αυτός της εξ. (17.3) και θα χρησιμοποιήσουμε το C, αντί των κανονικοποιήσεων από τα λ και ℓ.

$$\begin{array}{rl} \textit{ελαχιστοποίηση}: & \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\left(\left(\xi_i\right) + \tilde{c}\left(\xi_i^*\right)\right) \\ \textit{υποκείμενη στους περιορισμούς} & \begin{cases} y_i - \langle w, x_i\rangle - b \leq \varepsilon + \xi_i \\ \langle w, x_i\rangle + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^* \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0 \end{cases} \end{array} \tag{17.43}$$

Πάλι λοιπόν από τις καθιερωμένες τεχνικές των πολλαπλασιαστών *Lagrange*, ακριβώς όπως και στην περίπτωση $|\cdot|_\varepsilon$, μπορεί κανείς να υπολογίσει το δυϊκό πρόβλημα βελτιστοποίησης. Θα παραλείψουμε στη συνέχεια τους δείκτες $_i$ και *, για την αποφυγή ανιαρού συμβολισμού. Έτσι έχουμε:

$$\textit{ελαχιστοποίηση}: \begin{cases} -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\ell}\left(\alpha_i - \alpha_i^*\right)\left(\alpha_j - \alpha_j^*\right)\langle x_i, x_j\rangle \\ +\sum_{i,j=1}^{\ell} y_i\left(\alpha_i - \alpha_i^*\right) - \varepsilon\left(\alpha_i + \alpha_i^*\right) \\ +C\sum_{i=1}^{\ell} T\left(\xi_i\right) + T\left(\xi_i^*\right) \end{cases} \tag{17.44}$$

Συνάρτηση Απώλειας		Μοντέλο Πυκνότητας
$\varepsilon-$**στερούμενη Ευαισθησίας**	$c(\xi) = \lvert\xi\rvert_\varepsilon$	$p(\xi) = \frac{1}{2(1+\varepsilon)} e^{-\lvert\xi\rvert_\varepsilon}$
Λαπλασιανή	$c(\xi) = \lvert\xi\rvert$	$p(\xi) = \frac{1}{2} e^{-\lvert\xi\rvert}$
Γκαουσιανή	$c(\xi) = \frac{1}{2}\xi^2$	$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
Εύρωστη Απώλεια *Huber*	$c(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma}(\xi)^2, & \text{αν} \quad \lvert\xi\rvert \leq \sigma \\ \lvert\xi\rvert - \frac{\sigma}{2}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$p(\xi) \propto \begin{cases} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma}}, & \text{αν} \quad \lvert\xi\rvert \leq \sigma \\ e^{\frac{\sigma}{2} - \lvert\xi\rvert}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
Πολυωνυμική	$c(\xi) = \frac{1}{p}\lvert\xi\rvert^p$	$p(\xi) = \frac{p}{2\Gamma(1/p)} e^{-\lvert\xi\rvert^p}$

Πίνακας 17.1: Οι πιο διαδεδομένες συναρτήσεις απώλειας και το αντίστοιχο μοντέλο πυκνότητας.

$$\textit{όπου} \quad \begin{cases} w = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i - \alpha_i^*) x_i \\ T(\xi) := \tilde{c}(\xi) - \xi \partial_\xi \tilde{c}(\xi) \end{cases} \tag{17.45}$$

$$\begin{array}{c} \textit{υποκείμενη} \\ \textit{στους} \\ \textit{περιορισμούς} \end{array} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i - \alpha_i^*) &= 0 \\ \alpha &\leq C \partial_\xi \tilde{c}(\xi) \\ \xi &= \inf\{\xi | \, C \partial_\xi \tilde{c} \geq \alpha\} \\ \alpha, \xi &\geq 0 \end{cases} \tag{17.46}$$

17.5.4 Παραδείγματα

Θα μελετήσουμε λοιπόν τώρα μια από τις περιπτώσεις του πίνακα 17.1. Θα δείξουμε συγκεκριμένα πως το τελευταίο αυτό πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω, ώστε να μετατραπεί σε μια μορφή πρακτικά εφαρμόσιμη. Στην περίπτωση λοιπόν της $\varepsilon-$στερούμενη ευαισθησίας, όπου $\tilde{c}(\xi) = |\xi|$, θα έχουμε:

$$T(\xi) = \xi - \xi \cdot 1 = 0. \tag{17.47}$$

Από την έκφραση $\partial_\xi \tilde{c}(\xi) = 1$, μπορεί να καταλήξει κανείς επιπλέον ότι:

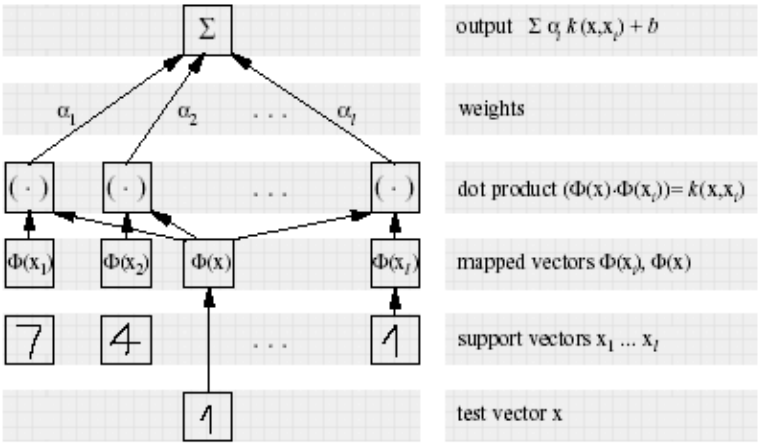
$$\xi = \inf\{\xi | \, C \geq \alpha\} = 0 \quad \text{και} \quad \alpha \in [0, C]. \tag{17.48}$$

Η πρακτική εφαρμογή λοιπόν έχει δείξει ότι η συνάρτηση κόστους που χρησιμοποιείται, παίζει καθοριστικό ρόλο στην απόδοση των μηχανών SV. Επιλέξαμε αυτή την περίπτωση, καθώς θα την χρησιμοποιήσουμε παρακάτω, στην εφαρμογή των $SVMs$ για την επίλυση του προβλήματος των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^-.

17.6 Ανακεφαλαίωση

Κλείνοντας λοιπόν, θα κάνουμε μια σύντομη επισκόπηση των βασικών χαρακτηριστικών των μηχανών SV, για την περίπτωση της ενέλιξης, όπως παρουσιάστηκαν στις παραπάνω παραγράφους, ώστε να γίνει πιο κατανοητό το θεωρητικό αυτό πλαίσιο. Στο σχήμα 17.3 έτσι, δίνεται μια γραφική αναπαράσταση των βημάτων που ακολουθούνται στην περίπτωση της ενέλιξης.

Τα παραδείγματα εισόδου, για τα οποία θέλουμε να κάνουμε την πρόβλεψη, αντιστοιχούνται σε έναν χώρο χαρακτηριστικών από μια αντιστοιχία Φ. Στη



Σχήμα 17.3: Η αρχιτεκτονική μιας μηχανής ενέλιξης, κατασκευασμένης από τον αλγόριθμο SV.

συνέχεια υπολογίζονται τα εσωτερικά γινόμενα με τις απεικονίσεις των παραδειγμάτων εκπαίδευσης με βάση την αντιστοιχία Φ. Αυτό αντιστοιχεί στην εκτίμηση της συνάρτησης $k(x_i, x)$ κεντρικού πυρήνα. Τέλος τα εσωτερικά γινόμενα αθροίζονται με την βοήθεια των βαρών $\nu_i = \alpha_i - \alpha_i$. Το παραγόμενο αποτέλεσμα, προσαυξημένο με την σταθερά b (το κατώφλι δηλ. ενεργοποίησης), οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα, δίνει δηλαδή την πρόβλεψη για το άγνωστο παράδειγμα που εμφανίστηκε στην είσοδο. Η διαδικασία αυτή λοιπόν μας θυμίζει σε μεγάλο βαθμό την αντιμετώπιση των νευρωνικών δικτύων, με την διαφορά ότι στην περίπτωση των μηχανών SV, τα βάρη του στρώματος εισόδου είναι ένα υποσέτ των παραδειγμάτων εκπαίδευσης.

Ακολουθούν λοιπόν στη συνέχεια οι δοκιμές που κάναμε για την πρόβλεψη των χρόνων ημίσειας ζωής β^- ασταθών, άγνωστων νουκλιδίων με βάση τις μηχανές αυτές.

17.7 Μοντέλα με την χρήση των SVM

17.7.1 Το Αναλογικό Μοντέλο $Z - N - \delta$ για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec

Αρχικά, δοκιμάσαμε το μοντέλο $Z - N - \delta$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6 sec που περιγράψαμε στην παράγραφο 13.2.2. Ελέγχοντας λοιπόν τους επιτρεπτούς κεντρικούς πυρήνες που αναλύσαμε παραπάνω, παρατηρήσαμε ότι ο $SV-$πυρήνας γκαουσιανής συνάρτησης ακτινικής βάσης (RBF) παρουσιάζει την καλύτερη απόκριση στο πρόβλημα των χρόνων ημί-

σειας ζωής. Έτσι δουλέψαμε με $SVMs$ που έχουν ως πυρήνα τον RBF.

Χρησιμοποιούμε και εδώ την τεχνική της διατεκμηρίωσης, παρόμοια με την χρήση της στην περίπτωση των νευρωνικών δικτύων. Με βάση λοιπόν το $NuSet-B$, εκπαιδεύουμε τη μηχανή μας με τα παραδείγματα του δοκιμαστικού σετ και ελέγχουμε με το σετ τεκμηρίωσης την ικανότητα γενίκευσης. Κρατάμε την περίπτωση εκείνη όπου η μέση τετραγωνική απόκλιση του σετ τεκμηρίωσης είναι μικρότερη. Για την περίπτωση αυτή, ελέγχουμε, τέλος, την απόδοση του δοκιμαστικού σετ. Η απόδοση του $SVM-$μοντέλου αυτού, δίνεται στον πίνακα 17.3. Μπορεί να δει λοιπόν κανείς ότι δεν κατόρθωσε να φτάσει τις αντίστοιχες αποδόσεις των τεχνιτών νευρωνικών δικτύων.

Πυρήνας: RBF. $\gamma = 0.9$				
Μοντέλο	**Τιμές Παραμέτρων**	$RMSE$ Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
SVM 001	$C = 1$, $\varepsilon = 0.4$	0.71	0.71	0.73

Πίνακας 17.2: Απόδοση του αναλογικού μοντέλου $Z - N - \delta$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6 sec. Πυρήνας: RBF.

17.7.2 Το Μοντέλο της Αλληλεπίδρασης Νουκλεονίου−Νουκλεονίου για Χρόνους Ημίσειας Ζωής Μικρότερους των 10^6 sec

Επιλέξαμε τέλος να δοκιμάσουμε και το μοντέλο της αλληλεπίδρασης νουκλεονίου−νουκλεονίου που είδαμε στην παράγραφο 13.8.1, για χρόνους ημίσειας ζωής επίσης μικρότερους των 10^6 sec. Η καλύτερη απόδοση που επιτεύχθηκε λοιπόν με την βοήθεια των $SVMs$, φαίνεται στον πίνακα 17.3. Ως πυρήνας επιλέχθηκε και εδώ η συνάρτηση ακτινικής βάσης με τις τιμές των παραμέτρων που δίνονται στον πίνακα.

Αν συγκρίνουμε την απόδοση αυτή με τις αντίστοιχες της παραγράφου 13.8.1, θα παρατηρήσουμε ότι το εκπαιδευτικό σετ έχει υποστεί καλύτερη προσαρμογή στην περίπτωση του SVM σε σχέση με τα νευρωνικά δίκτυα, αλλά στο σετ τεκμηρίωσης και στο δοκιμαστικό σετ υποδεικνύουν αδυναμία συμπερασμού. Τα νευρωνικά δίκτυα όπως είδαμε επέδειξαν μια πιο ομοιογενή συμπεριφορά.

Πυρήνας: RBF. $\gamma = 0.1$				
Μοντέλο	**Τιμές Παραμέτρων**	$RMSE$ Εκπ. Σετ	Σετ Τεκμ.	Δοκ. Σετ
SVM 002	$C = 10000$, $\varepsilon = 0.0001$	0.49	1.19	1.22

Πίνακας 17.3: Απόδοση του μοντέλου μέσης αλληλεπίδρασης νουκλεονίου − νουκλεονίου. Πυρήνας: RBF.

Μέρος IV

Επίλογος

Επίλογος

ΚΑΤΑ ΤΙΣ ΤΕΛΕΥΤΑΙΕΣ δεκαετίες έγιναν αρκετές προσπάθει-ες για τον πειραματικό υπολογισμό των χρόνων ημίσειας ζωής των πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων. Εντούτοις, εμφανίστηκαν σημαντικές δυσκολίες που σχετίζονται με συγκεκριμένες συνθήκες (σύλληψη φορτισμένου σωματιδίου σε χαμηλές ενέργειες, μεγάλος αριθμός πυρήνων και ιδιοτήτων, πυρήνες πολύ απομακρυσμένοι από την σταθερότητα βρίσκονται υπό ιδιάζου-σες συνθήκες π.χ. υψηλής θερμοκρασίας ή\και υψηλής πυκνότητας περιβάλλοντα, κ.τ.λ.). Έτσι τα πυρηνικά δεδομένα σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να παρθούν (τουλάχιστον προς το παρόν) από αντίστοιχα θεωρητικά μοντέλα.

Στην παρούσα εργασία λοιπόν παρουσιάστηκαν ορισμένα στατιστικά μοντέλα, τα οποία βασίζονται σε μηχανές εκμάθησης, όπως τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και τα $SVMs$, και φιλοδοξούν να μοντελοποιήσουν την παρατηρούμενη συστηματική των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- και να προβλέψουν μέσω αυτής της διαδικασίας τους χρόνους ημίσειας ζωής εξωτικών πυρήνων. Από την σύγκριση των υπολογισμών μας με τα σύγχρονα καθολικά θεωρητικά πρότυπα, αλλά και τα πειραματικά δεδομένα, προκύπτει ότι τέτοια μοντέλα, που στηρίζονται στα στατιστικά πλαίσια της μηχανικής μάθησης, είναι σε θέση να αξιοποιήσουν την υπάρχουσα συλλογή πυρηνικών δεδομένων και να προβλέψουν επιτυχώς πυρηνικές ιδιότητες μακριά από την σταθερότητα.

Η επέκταση σε εξωτικούς πυρήνες ή ενεργειακές περιοχές αρκετά μακριά από το πειραματικά γνωστό εύρος ωστόσο, περιορίζει την χρήση των διαθέσιμων πυρηνικών μοντέλων στα πιο αξιόπιστα. Τόσο τα φαινομενολογικά και τα μικροσκοπικά πρότυπα όμως, όσο και τα στατιστικά μοντέλα θα πρέπει να βελτιωθούν περαιτέρω. Σε μια πρώτη προσέγγιση, όπως είδαμε από τα υβριδικά μοντέλα, τα μικροσκοπικά μοντέλα μπορούν να ωφεληθούν αν συμπεριλάβουν

και κάποια φαινομενολογικά στοιχεία. Κατ' αντιστοιχία τα στατιστικά μοντέλα, ίσως μπορούν να βελτιωθούν αν αποκτήσουν και κάποιον μικροσκοπικό χαρακτήρα. Από τέτοιου είδους προσεγγίσεις, παρά τον πιθανό μεγάλο αριθμό ελεύθερων παραμέτρων, θα παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον το ενδεχόμενο θεωρητικό περιεχόμενο που μπορεί να προκύψει.

Μια καταλληλότερη είσοδος αντί της σταθεράς ζευγοποίησης δ επιπλέον είναι αναγκαία για της περαιτέρω βελτίωση των τρέχοντων υπολογισμών. Παρά το γεγονός ότι η σταθερά αυτή που εισήγαμε ενίσχυσε σημαντικά την ικανότητα προσαρμογής και γενίκευσης των μοντέλων μας, φαίνεται ότι αδυνατεί να περιγράψει πλήρως τα φαινόμενα ζευγοποίσης.

Ευελπιστούμε λοιπόν, ότι μεταγενέστερες προσπάθειες με νεα μοντέλα νευρωνικών δικτύων και $SVMs$, που θα περιλαμβάνουν προηγμένης τεχνολο-γίας αλγόριθμους εκπαίδευσης και πιο εξελιγμένες εκπαιδευτικές τεχνικές, θα είναι σε θέση να δώσουν ακόμη πιο βελτιωμένα και πιο αξιόπιστα καθολικά στατιστικά πρότυπα των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β, αλλά και άλλων, γενικότερα, πυρηνικών ιδιοτήτων.

Βιβλιογραφία

[1] Advances in Kernel Methods - Support Vector Learning. Cambridge MA, 1999. MIT Press. [cited at p. 311]

[2] F. T. Porter et al. *Phys. Rev.*, 107:135, 1957. [cited at p. 53, 338]

[3] A. B. Migdal. *Theory of Finite Fermi Systems and Atomic Nuclei Properties*. Russ. original 2nd ed. M., Nauka, 1983. [cited at p. 71]

[4] A. G. W. Cameron, J. J. Cowan, and J. W. Truran. The Waiting Point Approximation In r-Process Calculations. *Astrophysics and Space Science*, 91(2):235–243, 1982. [cited at p. 64]

[5] A. Hohenberg and W. Kohn. Inhomogeneous electron gas. *Phys. Rev. C*, 136:B864–B871, 1964. [cited at p. 71]

[6] A. J. Smola, Z. L. Ovari and R. C.Williamson. Regularization With Dot-product Kernels. In T. K. Leen, T. G. Dietterich and V. Tresp, editor, *Advances in Neural Information Processing Systems 13*, pages 308–314. MIT Press, 2001. [cited at p. 312]

[7] A. Smola, N. Murata, B. Scholkopf and K.-R. Muller. Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks. In L. Niklasson, M. Boden and T. Ziemke, editor, *Perspectives in Neural Computing*, pages 105–110, Berlin, 1998. Springer. [cited at p. 304]

[8] A. Staudt and E. Bender and K. Muto and H. V. Klapdor. Second Generation Microscopic Predictions of $\beta-$decay half-lives of Neutron-rich Nuclei. *At. Data Nucl. Data Tables*, 44:79–132, 1990. [cited at p. 70, 159, 214, 215, 218, 250, 253, 285, 289, 354, 355, 356]

[9] B. Hahn, D.G. Ravenhall and R. Hofstadter. High-Energy Electron Scattering and the Charge Distributions of Selected Nuclei. *Phys. Rev.*, 101:1131–1142, 1956. [cited at p. 8]

[10] B. Jonson and K. Riisager. Beta-decay Of Exotic Nuclei. *Nuc. Phys. A*, 693:77–89, 2001. [cited at p. 73]

[11] B. Pfeiffer, K.-L. Kratz and P. Moller. Predictions of $T_{1/2}$ and P_n-values. 2003. Internal Report Jahresbericht 1998, Mainz, ISSN 0932-7622 (1999) p. 24 . [cited at p. 180, 181, 219, 220, 225, 237, 247, 257, 261, 280, 291, 302, 337, 342, 344, 345, 347, 348, 351]

[12] Bradley S. Meyer, Gail C. McLaughlin and George M.Fuller. Neutrino Capture and r-Process Nucleosynthesis. *Physical Review C*, 58:3696, 1998. [cited at p. 65]

[13] Brookhaven. National Nuclear Data Center (NNDC). http://www.nndc.bnl.gov/. [cited at p. 273]

[14] C. Berg, J. P. R. Christensen and P. Ressel. *Harmonic Analysis on Semigroups*. Springer, N.Y., 1984. [cited at p. 311, 312]

[15] C. Freiburghaus, J.-F. Rembges, T. Rauscher, E. Kolbe, F.-K. Thielemann, K.-L. Kratz, B. Pfeiffer, J. J. Cowan. The Astrophysical r-Process: A Comparison of Calculations following Adiabatic Expansion with Classical Calculations Based on Neutron Densities and Temperatures. *APJ*, 516:381–398, May 1999. [cited at p. 65]

[16] C. J. C. Burges. Geometry and Invariance in Kernel Based Methods. In B. Scholkopf, C. J. C. Burges and A. J. Smola, editor, *Advances in Kernel Methods - Support Vector Learning*, pages 89–116, Cambridge, MA, 1999. MIT Press. [cited at p. 312]

[17] Christopher M. Bishop. *Neural Networks for Pattern Recognition*. University Press Inc., Oxford, 1997. [cited at p. 111, 124]

[18] D. G. Madlad and J. R. Nix. New Model of the Average Neutron and Proton Pairing Gaps. *Nuc. Phys. A*, 476:1–38, 1988. [cited at p. 181, 182, 351]

[19] D. J. C. MacKay. Bayesian Interpolation. *Neural Computation*, 4:415–447, 1992. [cited at p. 118]

[20] D. Nguyen and B. Widrow. Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks. 3:2126, 1990. [cited at p. 124]

[21] E. Bender and K. Muto and H. V. Klapdor. *Phys. Lett.*, B208:53, 1988. [cited at p. 159, 214, 250, 285, 354, 355, 356]

[22] E. Caurier, P. Navratil, W. E. Ormand and J. P. Vary. *Phys. Rev. C*, 66:024314, 2002. [cited at p. 68]

[23] E. Caurier, P. Navratil, W.E. Ormand, J.P. Vary. Ab Initio Shell Model For $A = 10$ Nuclei. *Phys. Rev. C*, 66:024314–1–024314–14, 2002. [cited at p. 68]

[24] E. M. L. Beale. A Derivation of Conjugate Gradients. In F. A. Lootsma, editor, *Numerical Methods for Nonlinear Optimization*, London, 1972. Academic Press. [cited at p. 109]

[25] E. Margaret Burbidge, G. R. Burbidge, William A. Fowler and F. Hoyle. Synthesis Of The Elements In Stars. *Reviews of Modern Physics*, 29:547–650, 1957. [cited at p. 63]

[26] E. Mavrommatis and A. Dakos and K. A. Gernoth and J. W. Clark. Calculations Of Nuclear Halflives With Neural Nets. In J. da Providencia and F. B. Malik, editor, *Condensed Matter Theories*, volume 13, page 423, N.Y., 1998. Commack, Nova Science Publishers. [cited at p. 168, 169, 215, 350]

[27] E. Rutherford. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom. *Phil. Mag.*, 21:669–698, 1911. [cited at p. 7]

[28] Engel J. et al. $\beta-$decay Rates of r-process Waiting-point Nuclei in the Self-consistent Approach. *Phys. Rev. C*, 60:014302–1–11, 1999. [cited at p. 281, 301, 348]

[29] G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot and A. H. Wapstra. Nubase2003 Evaluation of Nuclear and Decay Properties. *Nucl. Phys. A*, 729:3–128, 2003. [cited at p. 152, 177]

[30] G. E. Gleit et al. *Nucl. Data Sheets*, 5, 1963. set 5. [cited at p. 61, 338]

[31] G. Martinez Pinedo. Weak Interaction Rates In Astrophysics. *Nuc. Phys. A*, 668:357c–363c, 2000. [cited at p. 67]

[32] G. Martinez-Pinedo and K. Langanke. Shell-model Half-lives For The $N = 82$ Nuclei And Their Implications For The r-Process. *Phys. Rev. Letters*, 83:4502, 1999. [cited at p. 67, 71]

[33] G. P. McCormick. *Nonlinear Programming: Theory, Algorithms and Applications*. John Wiley and Sons, N.Y., 1983. [cited at p. 306]

[34] H. Homma and M. Bender and M. Hirsch and K. Muto and H. V. Klapdor-Kleingrothaus and T. Oda. Systematic Study of Nuclear $\beta-$decay. *Phys. Rev. C*, 54(6):2972–2985, 1996. [cited at p. 70, 159, 210, 214, 216, 218, 250, 252, 253, 285, 288, 289, 354, 355, 356]

[35] H. Nakata, T. Tachibana and M. Yamada. Semi-gross Theory Of The β decay. *Nuc. Phys. A*, 625:521–553, 1997. [cited at p. 66, 210, 216, 252, 288, 337, 354, 355, 356]

[36] H. V. Klapdor. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 10:131, 1983. [cited at p. 159, 214, 250, 285, 354, 355, 356]

[37] H. V. Klapdor. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 17:419, 1986. [cited at p. 159, 214, 250, 285, 354, 355, 356]

[38] H. V. Klapdor and J. Metzinger and T. Oda. *At. Data Nucl. Data Tables*, 31:81, 1984. [cited at p. 159, 214, 250, 285, 354, 355, 356]

[39] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. 2_{nd} Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabilistics. In *Nonlinear Programming*, pages 481–492. Berkeley, University of California Press, 1951. [cited at p. 307]

[40] Howard Demuth and Mark Beale. *Neural Network Toolbox (For Use with Matlab)*. The Mathworks, Inc., Guide Version 4 edition, 2000. [cited at p. 127]

[41] I. N. Borzov and E. L. Trykov. Microscopic Analysis of the Non-equilibrium Component of Charge-exchange Spectra. *Sov. J. Nucl. Phys. A*, 52:52–63, 1990. [cited at p. 69]

[42] I. N. Borzov and S. Goriely. Weak Interaction Rates and the r-Process Nucleosynthesis. *Phys. Rev. C*, 62:035501–035512, 2000. [cited at p. 71, 281, 301, 348]

[43] I. N. Borzov et al. Ground State Properties and $\beta-$decay Half-lives Near ^{132}Sn in a Self-consistent Theory. *Zeit. Phys. A*, 355:117–127, 1996. [cited at p. 71]

[44] I. Schoenberg. Positive Definite Functions on Spheres. *Duke Math. J.*, 9:96–108, 1942. [cited at p. 312]

[45] J. E. Dennis and R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1983. [cited at p. 110]

[46] J. Engel, P. Vogel and M. R. Zirnbauer. Nuclear Structure Effects in Double-beta Decay. *Phys. Rev. C*, 37:731–746, 1988. [cited at p. 69]

[47] J. Kamruzzaman and R. Sarker. In *Proc. of IEEE Int. Conf. on Neural Networks and Signal Processing (ICNNSP03)*, pages 793–797, 2003. [cited at p. -]

[48] J. Krumlinde, P. Moller. Calculations Of $Gamow-Teller$ $\beta-$strength Functions In The Rb Region In The RPA Approximation With Nilsson-model Wave Functions. *Nuc. Phys. A*, 417:419–446, 1984. [cited at p. 68, 70]

[49] J. R. Reitz. *Phys. Rev. C*, 77:50, 1950. [cited at p. 50, 338]

[50] J. Suhonen, T. Tagiel and A. Faessler. *Nucl. Phys. A*, 486:91–117, 1988. [cited at p. 69]

[51] J.-U. Nabi and H.-V. Klapdor-Kleingrothaus. Weak Interaction Rates of sd-nuclei in Stellar Environments Calculated in the pn Approximation. *At. Data Nucl. Tables*, 71:149–346, 1999. [cited at p. 70]

[52] J. W. Clark and E. Mavrommatis and S. Athanossopoulos and A. Dakos and K. A. Gernoth. In D. M. Brink and F. F Karpechire and F. B. Malik and J. da Providencia, editor, *Proc. of the Conf. on Fission Dynamics of Atomic Clusters and Nuclei*, pages 76–85, Singapore, 2001. World Scientific. [cited at p. 168, 178]

[53] J. W. Clark and Haochen Li. Application of Support Vector Machines to Global Prediction of Nuclear Properties. *Mod. Phys. B*, 2(13), 2006. [cited at p. 273, 276, 355]

[54] K. Langanke and G. Martinez-Pinedo. Nuclear Weak-interaction Processes In Stars. *Rev. Mod. Phys.*, 75:819, 2003. [cited at p. 67]

[55] K. Muto and E. Bender and H. V. Klapdor. *Z. Phys.*, A333:125, 1989. [cited at p. 159, 214, 250, 285, 354, 355, 356]

[56] K. P. Bennett and O. L. Mangasarian. Robust Linear Programming Discrimination of Two Linearly Inseparable Sets. *Optimization Methods and Software*, 1:23–34, 1992. [cited at p. 304]

[57] K. Takahashi, M. Yamada and T. Kondoh. Beta-decay Half-lives Calculated On The Gross-Theory. *At. Data Nucl. Data Tables*, 12:101–142, 1973. [cited at p. 66, 175, 336]

[58] L. Cao and F. Tay. *Neural Comput. and Applic.*, 10:184–192, 2001. [cited at p. -]

[59] M. J. D. Powell. Restart Procedures for the Conjugate Gradient Method. *Mathematical Programming*, 12:241–254, 1977. [cited at p. 109]

[60] M. Morita. *Beta Decay and Muon Capture.* Reading. Benjamin, Massachusetts, 1973. [cited at p. 45]

[61] M. T. Hagan and M. Menhaj. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 5(6):989–993, 1994. [cited at p. 111]

[62] M. T. Hagan, H. B. Demuth and M. Beale. *Neural Network Design.* PWS Publishing Co., Boston, 1996. [cited at p. 111]

[63] M. Thoennessen. Exploring the Limits of Stability. In Z. Gácsi, Z. Dombrádi, and A. Krasznahorkay,, editor, *AIP Conf. Proc. 802: Exotic Nuclear Systems*, pages 250–256, 2005. [cited at p. -]

[64] N. Bohr. *Phil. Mag.*, 26:1,476, 1913. [cited at p. 7]

[65] N. Michel, J. Okolowicz, F. Nowacki and M. Ploszajczak. . *Nucl. Phys. A*, 703:202, 2002. [cited at p. 68]

[66] N. Paar, P. Ring, T. Niksic and D. Vreteran. *Phys. Rev. C*, 67:034312, 2003. [cited at p. 72]

[67] O. L. Mangasarian. *Nonlinear Programming.* McGraw-Hill, N.Y., 1969. [cited at p. 306]

[68] P. Klingenberg. *Rev. Mod. Phys.*, 24:63, 1952. [cited at p. 185, 341]

[69] P. Moller, et al. *At. Data Nucl. Data Tables*, 59:185, 1995. [cited at p. 24, 255]

[70] P. Moller, J. R. Nix and K.-L. Kratz. Tables Of Beta Decay Characteristics For Astrophysical And Radioactive Beam Applications. *At. Data Nucl. Data Tables*, 66:131–211, 1997. [cited at p. 68, 160, 210, 216, 252, 288, 354, 355, 356]

[71] P. T. Hosmer and H. Schatz and A. Aprahamian and O. Arndt and R. R. C. Clement and A. Estrade and K.-L. Kratz and S. N. Liddick and P. F. Mantica and W. F. Mueller and F. Montes and A. C. Morton and M. Ouellette and E. Pellegrini and B. Pfeiffer and P. Reeder and P. Santi and M. Steiner and A. Stolz and B. E. Tomlin and W. B. Walters and A. Wohr. Half-Life of the Doubly Magic r-Process Nucleus [sup 78]Ni. *Phys. Rev. Lett.*, 94(11):112501, 2005. [cited at p. 171, 219, 224, 247, 260, 281, 290, 341, 342, 345, 347]

[72] Peter Moller, Bernd Pfeiffer and Karl-Ludwig Kratz. New calculations of gross beta-decay properties for astrophysical applications: Speeding-up the classical r-process. *Phys. Rev. C*, 67(5):055802, 2003. [cited at p. 70, 160, 215, 217, 219, 225, 237, 251, 257, 261, 280, 287, 291, 302, 342, 344, 345, 347, 348, 354, 355, 356]

[73] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization.* John Wiley and Sons, N.Y., 1989. [cited at p. 305]

[74] R. Fletcher and C. M. Reeves. Function Minimization by Conjugate Gradients. *Computer Journal*, 7:149–154, 1964. [cited at p. 108, 109]

[75] R. Hofstadter. Electron Scattering and Nuclear Structure. *Rev. Mod. Phys.*, 28:214–254, 1956. [cited at p. 8]

[76] R. J. Vanderbei. LOQO user's manual - version 3.10. Statistics and Operations Research Technical Report SOR-97-08, Princeton University, 1997. Code available at http://www.princeton.edu/ rvdb/. [cited at p. 306]

[77] S. S. Keerthi, S. K. Shevade, C. Bhattacharyya and K. R. K. Murty. Improvements to Platt's SMO Algorithm for SVM Classifier Design. *Neural Computation*, 13:637–649, 2001. [cited at p. 308]

[78] Simon Haykin. *Neural Networks. A Comprehensive Foundation.* Macmillan College Publishing Company, Inc., N.Y., 1994. [cited at p. 140]

[79] T. Niksic, T. Marketin, D. Vreteran, N. Paar and P. Ring. $\beta-$decay Rates of r-Process Nuclei in the Relativistic Quasiparticle Rantom Phase Approximation. *Phys. Rev. C*, 71:014308, 2005. [cited at p. 72]

[80] T. Tachibana and M. Arnould. *Nucl. Phys. A*, 588:333c–338c, 1995. [cited at p. 220]

[81] T. Tachibana, M. Yamada and Y. Yoshida. Improvement Of The Gross-theory Of β decay. *Prog. Theor. Phys.*, 84(4):641–657, 1990. [cited at p. 66, 336]

[82] V. Vapnik. *The Nature of Statistical Learning Theory.* Springer, N.Y., 1995. [cited at p. 303, 308]

[83] W. Karush. Minima of Functions of Several Variables With Inequalities as Side Constraints. Master's thesis, Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, 1939. [cited at p. 307]

[84] Y.-Z. Qian. The Origin Of The Heavy Elements: Recent Progress In The Understanding Of The r-process. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 50:153–199, 2003. [cited at p. 63]

Κατάλογος Συμβόλων και Συντμήσεων

Σύντμηση	Περιγραφή	Αναφορά
amu	ατομικές μονάδες μάζας	2
	Αλγόριθμοι Εκπαίδευσης	
BFGS	Μέθοδος τύπου *Newton*. Η προσέγγιση των *Broyden*, *Fletcher*, *Goldfarb*, και *Shanno* για τον υπολογισμό του *Hessian* πίνακα.	9.6.1
CGPB	Επανεκκίνηση $Powell-Beale$ στη μέθοδοι συζυγούς κλίσης.	9.4.3
GDX	Μεταβλητή παράμετρος του ρυθμού εκπαίδευσης στον κλασικό αλγόριθμο απισθοδιάδοσης.	9.3.4
GDM	Μεταβλητή παράμετρος του ρυθμού εκπαίδευσης και όρος ορμής στον κλασικό αλγόριθμο απισθοδιάδοσης.	9.3.3
GNBR	Προσέγγιση $Gauss-Newton$ στην τεχνική της Μπαϊεσιανής Εξομάλυνσης	10.2.2
LM	Ο αλγόριθμος $Levenberg-Marquardt$.	9.8
	Δείκτες Απόδοσης	
MSE	Μέση τετραγωνική απόκλιση.	11.3.1
RMSE	Τετραγωνικής ρίζα της μέσης τετραγωνικής απόκλισης.	11.3.1
NMSE	Κανονικοποιημένη μέση τετραγωνική απόκλιση.	12.3.1
$R-$τιμή	Ο συντελεστής συσχέτισης, όπως προκύπτει από την εφαρμογή γραμμικής παλινδρόμησης.	
	Συναρτήσεις Ενεργοποίησης	

Σύντμηση	Περιγραφή	Αναφορά
lin	Γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης.	8.6.3
tanh	Σιγμοειδής συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης.	8.6.2
satsins	Συμμετρικά κορεσμένη ημιτονοειδής συνάρτηση ενεργοποίησης.	11.3.4
satlins	Συμμετρικά κορεσμένη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης.	8.6.3
radbas	Συνάρτηση ακτινικής βάσης.	8.6.3
	Τοπολογία Δικτύου	
ΕΤ.	Δίκτυο ευθείας τροφοδοσίας.	8.5
ΑΤ.	Δίκτυο ανατροφοδότησης.	11.3.3
ΑΔ.	Δίκτυο ανάδρομης διάδοσης.	8.5
	Μορφολογία Νευρώνα	
p	Το στοιχείο εισόδου του νευρώνα. Με $\vec{p}$ συμβολίζουμε την διανυσματική είσοδο.	8.3
w	Πραγματικός αριθμός που αντιπροσωπεύει την σύνδεση μεταξύ δύο νευρώνων. Επιβαρύνει την είσοδο του νευρώνα με την τιμή του και καλείται συναπτικό βάρος.	8.3
b	Το βάρος του κατωφλιού ενεργοποίησης του νευρώνα.	8.3.2
n	Η συνάρτηση εισόδου του νευρώνα που αποτελεί το όρισμα, της συνάρτησης ενεργοποίησης f.	8.3
f	Η συνάρτηση ενεργοποίησης, η οποία με όρισμα n υπολογίζει την έξοδο a του νευρώνα.	8.3
a	Η έξοδος του νευρώνα.	8.3.1
t	Η επιθυμητή απόκριση (στόχος) του νευρώνα.	8.7
	Κεντρικοί Πυρήνες Μηχανών Διανυσμάτων Υποστήριξης	
RBF	Επιτρεπτός *SV* κεντρικός πυρήνας γκαουσιανής συνάρτησης ακτινικής βάσης.	17.4.6
	Γενικευμένα Μοντέλα β Αποδιέγερσης	
GT	Θεωρία μέσης τελικής κατάστασης (*gross theory*) [57].	6.3
*GT*2	Μεταγενέστερη θεωρία μέσης τελικής κατάστασης [81].	6.3
SGT	Βελτιωμένη θεωρία μέσης τελικής κατάστασης ($semi-gross\ theory$) [35].	6.3

Σύντμηση	Περιγραφή	Αναφορά
$GT*$	Επαναυπολογισμοί της Θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης με ενημερωμένες τιμές μαζών από τους $Pfeiffer\ et\ al.$	[11]
SM	Μικροσκοπικό μοντέλο βασισμένο στο Πρότυπο των Φλοιών.	6.4.1
$... + QRPA$	Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης.	6.4
$... + CQRPA$	Συνεχής Ψεδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης.	6.6
$... + RQRPA$	Ρελατιβιστική Ψευδοσωματιδιακού Τύπου Προσέγγιση Τυχαίας Φάσης.	6.7
$QRPA + ffGT$	Υβριδικό μοντέλο μακροσκοπικής επέκτασης του μικροσκοπικού μοντέλου $FRDM+QRPA$ που αντιμετωπίζει τις πρώτες απαγορευμένες μεταπτώσεις στα πλαίσια της GT.	6.5
	Μοντέλα Μάζας	
$FRDM$	Μικρο-μακροσκοπικό πεπερασμένης εμβέλειας πρότυπο σταγόνας.	6.4.2
$ETFSI-1$	Μοντέλο βασισμένο στην εκτεταμένη ολοκληρωτική μέθοδο $Tomas-Fermi$ και $Strutinsky$.	6.6

Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Η πειραματική διάταξη του Rutherford. 7

1.2 Γωνιακή κατανομή για σκέδαση ηλεκτρονίων με ενέργειες 183 και 126 MeV. Οι καμπύλες διαμέσου των πειραματικών δεδομένων αντιπροσωπεύουν θεωρητικούς υπολογισμούς της γωνιακής κατανομής με βάση το πυρηνικό σχήμα της εξ. (1.3). 9

1.3 Γραφική παράσταση της πυκνότητας νουκλεονίων $\rho(r)$ της εξ. (1.2). . . 10

1.4 Πυκνότητα νουκλεονίων σε ενδεικτικούς πυρήνες. 11

1.5 Επιμήκεις τετραπολικές παραμορφώσεις του πυρήνα. 12

2.1 Σχετική συμπεριφορά των διαφόρων όρων του ημιεμπειρικού τύπου στη μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο. 19

3.1 Πίνακας των νουκλιδίων. 24

3.2 Τρισδιάστατη γενίκευση του διαγράμματος $Segrè$ για ελαφρά νουκλίδια ως την τιμή $Z = 22$ (τιτάνιο). Ο τρίτος άξονας παριστάνει το πλεόνασμα μάζας $(M - A)$. 26

4.1 Διάγραμμα $Feynman$ της αποδιέγερσης β^- και β^+. 36

4.2 Διάγραμμα $Feynman$ της αποδιέγερσης β^- και β^+ σε επίπεδο κουάρκς. 38

5.1 Διατήρηση της ορμής κατά την αποδιέγερση β 47

5.2 Φάσμα ορμής σωματίων β^- κατά την αποδιέγερση του ^{64}Cu σύμφωνα με την μετάπτωση $^{64}Cu \rightarrow ^{64} Zn$. [49] 50

5.3 Απεικόνιση $Kurie$ για το ενεργειακό φάσμα ηλεκρονίων κατά την αποδιέγερση β του ^{32}P. [2] 53

5.4 Η συστηματική των παρατηρούμενων $LogfT-$τιμών για τους διάφορους τύπους αποδιέγερσης β. [30] 61

6.1 Ο λογάριθμος των ηλιακών αφθονιών (κανονικοποιημένος έτσι, ώστε η αφθονία του Si να είναι 10^6) ως συνάρτηση του ατομικού αριθμού A. (α) από φαινομενολογική προσέγγιση, (β) από μοντέλα δύο AGB άστρων. (C. Arlandini, C., F. Käppeler, K. Wisshak, R. Gallino, M. Lugaro, M. Busso, and O. Straniero,Astrophys. J. 525 (1999) 886). . 64

8.1 Μορφολογία βιολογικού νευρώνα. 84
8.2 Μορφολογία τεχνητού νευρώνα. 85
8.3 Απλός νευρώνας. 85
8.4 Απλός νευρώνας με κατώφλι ενεργοποίησης. 86
8.5 Νευρώνας με διανυσματική είσοδο. 87
8.6 Νευρώνας με διανυσματική είσοδο σε συνεπτυγμένη μορφή. 87
8.7 Νευρώνας με βρόγχο υστέρησης. 88
8.8 Επίπεδο δίκτυο. 89
8.9 Δίκτυο πολλών στρωμάτων. 90
8.10 Συνάρτηση σκληρού ορίου. 91
8.11 Σιγμοειδής συνάρτηση υπερβολικής εφαπτομένης. 91
8.12 Γραμμική συνάρτηση. 92
8.13 Μαθηματικό μοντέλο ενέλιξης. 95
8.14 Μοντέλο νευρωνικού δικτύου (Φυσικό μοντέλο). 96

10.1 Απόκριση $1-20-1$ δικτύου. Η υποκείμενη ημιτονοειδής συνάρτηση δίνεται με διακεκομμένη γραμμή, η θορυβώδης επιθυμητή απόκριση δίνεται με το σύμβολο + και η απόκριση του δικτύου δίνεται από την συνεχή γραμμή. 123
10.2 Απόκριση $1-20-1$ δικτύου με την τεχνική της διατεκμηρίωσης. Η υποκείμενη ημιτονοειδής συνάρτηση δίνεται με διακεκομμένη γραμμή, η θορυβώδης επιθυμητή απόκριση δίνεται με το σύμβολο + και η απόκριση του δικτύου δίνεται από την συνεχή γραμμή. 124
10.3 Απόκριση $1-20-1$ δικτύου με την τεχνική της Μπαϊεσιανής εξομάλυνσης. Η υποκείμενη ημιτονοειδής συνάρτηση δίνεται με διακεκομμένη γραμμή, η θορυβώδης επιθυμητή απόκριση δίνεται με το σύμβολο + και η απόκριση του δικτύου δίνεται από την συνεχή γραμμή. 125

11.1 Η συμπεριφορά της δοκιμαστικής συνάρτησης για $x \in [0, 1000]$. 132
11.2 Η συμμετρικά κορεσμένη ημιτονοειδής συνάρτηση ενεργοποίησης. . . . 134
11.3 Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$. 139
11.4 Σετ τεκμηρίωσης. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$. 139
11.5 Δοκιμαστικό σετ. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$. 140
11.6 Σετ πρόγνωσης. Δίκτυο $ET.002$: $1-5-5-1|46$. 140

11.7 Καμπύλες απόδοσης του δικτύου. Μέση τετραγωνική απόκλιση (MSE) ανά εποχή εκπαίδευσης για το εκπαιδευτικό σετ (*μπλε καμπύλη*), το σετ τεκμηρίωσης (*πράσινη καμπύλη*) και το σετ πρόγνωσης (*κόκκινη καμπύλη*). Δίκτυο $A.1$: $1-5-5-1|66$. 141

11.8 Καμπύλες απόδοσης του δικτύου. Μέση τετραγωνική απόκλιση (MSE) ανά εποχή εκπαίδευσης για το εκπαιδευτικό σετ (*μπλε καμπύλη*), το σετ τεκμηρίωσης (*πράσινη καμπύλη*) και το σετ πρόγνωσης (*κόκκινη καμπύλη*). Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$. 143

11.9 Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$. 144

11.10 Σετ τεκμηρίωσης. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$. 144

11.11 Δοκιμαστικό σετ. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$. 145

11.12 Σετ πρόγνωσης. Δίκτυο $A.2$: $1-5-5-1|66$. 145

11.13 Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$. 146

11.14 Εκπαιδευτικό σετ. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$. 147

11.15 Σετ τεκμηρίωσης. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$. 147

11.16 Δοκιμαστικό σετ. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$. 148

11.17 Σετ πρόγνωσης. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$. 148

11.18 Έξοδοι των νευρώνων των αφανών στρωμάτων πριν την έναρξη της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$. 149

11.19 Έξοδοι των νευρώνων των αφανών στρωμάτων πριν και μετά το πέρας της εκπαιδευτικής διαδικασίας. Δίκτυο $A.3$: $1-5-5-1|66$. 149

12.1 Κατανομή των νουκλιδίων στο εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ για το $NuSet-A$. 155

12.2 Τρισδιάστατο γράφημα των νουκλιδίων του εκπαιδευτικού σετ, του σετ τεκμηρίωσης και του δοκιμαστικού σετ για το $NuSet-A$. Ο $z-$άξονας αντι-προσωπεύει το λογάριθμο των παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής. 156

12.3 Κατανομή των πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής του $NuSet-A$ στις διάφορες υποδιαιρέσεις του χρόνου για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. 158

12.4 Κατανομή των πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής του $NuSet-B$ στις διάφορες υποδιαιρέσεις του χρόνου για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. 158

13.1 Γράφημα των υπολογισμένων από το μοντέλο μας και των αντί-στοιχων πειραματικών χρόνων ημιζωής της αποδιέγερσης β^- για την ισοτοπική αλυσίδα του ${}_{48}Cd$. Μοντέλο: $Z-N$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6. Με μαύρο χρώμα σημειώνονται τα πειραματικά δεδομένα, ενώ οι γκρι σταυροί αντιπροσωπεύουν τους υπολογισμούς του μοντέλου μας. Οι διακεκομμένη γραμμή παριστάνει τέλος τιμές των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του ${}_{48}Cd$ που προέρχονται από συμπερασμό. Δίκτυο: AT. 005. 170
13.2 Ίδιο με το σχ. 13.1, αλλά για την ισοτοπική αλυσίδα του ${}_{28}Ni$. Με σκούρο γκρι παριστάνονται πειραματικοί υπολογισμού των χρόνων ημίσειας ζωής νέων νουκλιδίων ή πιο ακριβείς επαναυπολογισμοί από την ομάδα των *Hosmer et al.* [71]. Δίκτυο: AT. 005. 171
13.3 Ίδιο με το σχ. 13.1. Δίκτυο: ET. 021. 176
13.4 Ίδιο με το σχ. 13.2. Δίκτυο: ET. 021. 176
13.5 Διάγραμμα των χρόνων ημίσειας ζωής με την τιμή$-Q$ 177
13.6 Λογαριθμικό διάγραμμα των χρόνων ημίσειας ζωής συναρτήσει της τιμής$-Q$ για τα ισότοπα του ${}_{48}Cd$. 179
13.7 Ενεργειακές καταστάσεις ενός νουκλεονίου στο πρότυπο των φλοιών για κεντρικό δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή και φρέατος δυναμικού με σύζευξη σπιν−τροχιάς. [68] 185
13.8 Πίνακας των νουκλιδίων. Κατανομή των χρόνων ημίσειας ζωής. 193
13.9 Οι χρόνοι ημίσειας ζωής ανάλογα με την κατανομή του άρτιου−περιττού χαρακτήρα και το λόγο $[A/Z]$ των νουκλιδίων του $NuSet-B$. 198

14.1 Οι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που υπολογίζονται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. . . . 207
14.2 Λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. 208
14.3 Ίδιο με το σχήμα 14.2, αλλά ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- εδώ δίνεται συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z. 209
14.4 Απόλυτη απόκλιση μεταξύ υπολογισμένης και πειραματικής τιμής των χρόνων ημίσειας ζωής για το πλήρες σετ. 210
14.5 Μέση τετραγωνική απόκλιση κάθε ισοτοπικής αλυσίδας μεταξύ υπολογισμένων από το μοντέλο και πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης, το δοκιμαστικό σετ και το πλήρες σετ. 211

14.6 Σύγκριση της σύγκλισης με τα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του σιδήρου. 222

14.7 Εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του σιδήρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας. Οι αντίστοιχες εκτιμήσεις των $QRPA+ffGT$ υπολογισμών δίνο-νται με τους ρόμβους, ενώ οι εκτιμήσεις των επαναυπολογισμών της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης σημειώνονται με $\times$. 223

14.8 Οι πειραματικοί χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του νικελίου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). Τα λευκά τετράγωνα αντιστοιχούν στα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του νικελίου από την ομάδα του $Hosmer$ [71]. Τα δύο πρώτα αναφέρονται σε βελτιωμένες μετρήσεις των ήδη γνωστών ισοτόπων ^{75}Ni και ^{75}Ni, ενώ τα δύο επόμενα αφορούν εντελώς καινούργιες μετρήσεις του ισότοπου ^{77}Ni και του διπλά μαγικού ^{75}Ni. 224

14.9 Η εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του νικελίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, σε σύγκριση με αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέ-λου $QRPA+ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72] (ρόμβοι), και των επαναυπολο-γισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των $Pfeiffer\ et\ al.$ [11], που σημειώνονται με [$\times$]. . . . 225

14.10 Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα γνωστά ισότοπα του αργύρου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογι-σμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). 226

14.11 Η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του αργύρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA+ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [$\times$]. 227

14.12 Σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες), με τα πειραματικά δεδομένα των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του καδμίου (άσπρες κουκίδες). 228

14.13 Εκτίμηση από το μοντέλο μας για τους χρόνους ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του καδμίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή) και σύγκριση επίσης, με το μοντέλου $QRPA+ffGT$ της ομάδας του $Möller$ (ρόμβοι) και τους αντίστοιχους επαναυπολογισμούς της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [$\times$]. 229

14.14Η παρατηρούμενη συστηματική για τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του κασσίτερου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). 230

14.15Συμπερασμός στα άγνωστα ισότοπα του κασσίτερου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×]. 231

14.16Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του βισμουθίου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). 232

14.17Η εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του βισμουθίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από το $QRPA + ffGT$ μοντέλο (ρόμβοι) και τους επαναυπολογισμούς της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης (×). 233

14.18Η ισοτονική αλυσίδα $N = 50$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με (×) οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες. 234

14.19Η ισοτονική αλυσίδα $N = 82$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με (×) οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες. 235

14.20Η ισοτονική αλυσίδα $N = 1260$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με (×) οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες. 236

14.21 Εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω ή κοντά στους $r-process$ ατραπούς. Με άσπρο χρώμα σημειώνονται τα πειραματικά δεδομένα και με μαύρο η εκτίμηση του μοντέλου μας. Δίνονται επίσης προς σύγκριση με τις γκρίζες αποχρώσεις, οι εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72], της εφαρμογής της φόρμουλας $Kratz - Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής από τους $Pfeiffer\ et\ al.$ [11] και οι επαναυπολογισμοί των $Pfeiffer\ et\ al.$ επίσης, της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [11]. 237

15.1 Οι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που υπολογίζονται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. . . . 243

15.2 Λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. 244

15.3 Ίδιο με το σχήμα 15.2, αλλά ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- εδώ δίνεται συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z. 245

15.4 Απόλυτη απόκλιση μεταξύ υπολογισμένης και πειραματικής τιμής των χρόνων ημίσειας ζωής για το πλήρες σετ. 246

15.5 Μέση τετραγωνική απόκλιση κάθε ισοτοπικής αλυσίδας μεταξύ υπολογισμένων από το μοντέλο και πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης, το δοκιμαστικό σετ και το πλήρες σετ. 247

15.6 Εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω, ή κοντά στους $r-$ ατραπούς. Με άσπρο χρώμα σημειώνονται τα πειραματικά δεδομένα και με μαύρο η εκτίμηση του μοντέλου μας. Δίνονται επίσης προς σύγκριση με τις γκρίζες αποχρώσεις, οι εκτιμήσεις του υβριδικού μο-ντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72], της εφαρμογής της φόρμουλας $Kratz - Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής από τους $Pfeiffer\ et\ al.$ [11] και οι επαναυπολογισμοί των $Pfeiffer\ et\ al.$ επίσης, της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [11]. 257

15.7 Σύγκριση της σύγκλισης με τα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του σιδήρου. 258

15.8 Εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του σιδήρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας. Οι αντίστοιχες εκτιμήσεις των $QRPA+ffGT$ υπολογισμών δίνο-νται με τους ρόμβους, ενώ οι εκτιμήσεις των επαναυπολογισμών της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης σημειώνονται με $\times$. 259

15.9 Οι πειραματικοί χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του νικελίου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). Τα λευκά τετράγωνα αντιστοιχούν στα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του νικελίου από την ομάδα του *Hosmer* [71]. Τα δύο πρώτα αναφέρονται σε βελτιωμένες μετρήσεις των ήδη γνωστών ισοτόπων ^{75}Ni και ^{75}Ni, ενώ τα δύο επόμενα αφορούν εντελώς καινούργιες μετρήσεις του ισότοπου ^{77}Ni και του διπλά μαγικού ^{75}Ni. 260

15.10Η εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του νικελίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μο-ντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* [72] (ρόμβοι), και των επαναυπολο-γισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των *Pfeiffer et al.* [11], που σημειώνονται με [$\times$]. 261

15.11Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα γνωστά ισότοπα του αργύρου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογι-σμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). 262

15.12Η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του αργύρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [$\times$]. 263

15.13Σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες), με τα πειραματικά δεδομένα των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του καδμίου (άσπρες κουκίδες). 264

15.14Εκτίμηση από το μοντέλο μας για τους χρόνους ημίσειας ζωής των άγνωστων ισότοπων του καδμίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή) και σύγκριση επίσης, με το μοντέλου $QRPA+ffGT$ της ομάδας του *Möller* (ρόμβοι) και τους αντίστοιχους επαναυπολογισμούς της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [$\times$]. 265

15.15Η παρατηρούμενη συστηματική για τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του κασσίτερου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). . . . 266

15.16 Συμπερασμός στα άγνωστα ισότοπα του κασσίτερου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×]. 267

15.17 Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του βισμουθίου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). 268

15.18 Η εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του βισμουθίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από το $QRPA + ffGT$ μοντέλο (ρόμβοι) και τους επαναυπολογισμούς της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης (×). 269

15.19 Η ισοτονική αλυσίδα $N = 50$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με (×) οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες. 270

15.20 Η ισοτονική αλυσίδα $N = 82$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με (×) οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες. 271

15.21 Η ισοτονική αλυσίδα $N = 1260$. Οι εκτιμήσεις του μοντέλου μας για τα άγνωστα ισότονα δίνονται με τις μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή. Με ρόμβους σημειώνονται οι εκτιμήσεις του μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* και με (×) οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από τον επαναυπολογισμό της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης. Τα πειραματικά δε δεδομένα, δίνονται με τις λευκές κουκίδες. 272

16.1 Οι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που υπολογίζονται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες πειραματικές τιμές για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. . . . 278

16.2 Λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ. 279

16.3 Ίδιο με το σχήμα 16.2, αλλά ο λόγος των υπολογισμένων από το μοντέλο προς τους πειραματικούς χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- εδώ δίνεται συναρτήσει του ατομικού αριθμού Z. 280
16.4 Απόλυτη απόκλιση μεταξύ υπολογισμένης και πειραματικής τιμής των χρόνων ημίσειας ζωής για το πλήρες σετ. 281
16.5 Μέση τετραγωνική απόκλιση κάθε ισοτοπικής αλυσίδας μεταξύ υπολογισμένων από το μοντέλο και πειραματικών χρόνων ημίσειας ζωής για το εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης, το δοκιμαστικό σετ και το πλήρες σετ. 282
16.6 Οι πειραματικοί χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του νικελίου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογισμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). Τα λευκά τετράγωνα επιπλέον στα πρόσφατα πειραματικά δεδομένα για τα ισότοπα του νικελίου από την ομάδα του *Hosmer* [71]. Τα δύο πρώτα αναφέρονται σε βελτιωμένες μετρήσεις των ήδη γνωστών ισοτόπων ^{75}Ni και ^{75}Ni, ενώ τα δύο επόμενα αφορούν εντελώς καινούργιες μετρήσεις του ισότοπου ^{77}Ni και του διπλά μαγικού ^{75}Ni. 290
16.7 Η εκτίμηση των χρόνων ημιζωής των άγνωστων ισοτόπων του νικελίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας σε σύγκριση με αντίστοιχες εκτιμήσεις του υβριδικού μο-ντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* [72] (ρόμβοι), και των επαναυπολο-γσμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης των $Pfeiffer\ et\ al.$ [11], που σημειώνονται με [×]. 291
16.8 Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα γνωστά ισότοπα του αργύρου (άσπρες κουκίδες), συγκρινόμενοι με τους υπολογι-σμούς του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). 292
16.9 Η γενίκευση στα άγνωστα ισότοπα του αργύρου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×]. 293
16.10Σύγκριση της απόκρισης του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες), με τα πειραματικά δεδομένα των χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του καδμίου (άσπρες κουκίδες). 294
16.11Εκτίμηση από το μοντέλο μας για τους χρόνους ημίσειας ζωής των άγνωστων ισότοπων του καδμίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή) και σύγκριση επίσης, με το μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του *Möller* (ρόμβοι) και τους αντίστοιχους επαναυπολογισμούς της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×]. 295

16.12Η παρατηρούμενη συστηματική για τους χρόνους ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του κασσίτερου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). . . . 296
16.13Συμπερασμός στα άγνωστα ισότοπα του κασσίτερου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, εν συγκρίσει με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις του $QRPA + ffGT$ υβριδικού μοντέλου (ρόμβοι) και των επαναυπολογισμών της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [×]. 297
16.14Οι παρατηρούμενοι χρόνοι ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- για τα ισότοπα του βισμουθίου (άσπρες κουκίδες) και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί του μοντέλου μας (μαύρες κουκίδες). 298
16.15Η εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής των άγνωστων ισοτόπων του βισμουθίου (μαύρες κουκίδες που συνδέονται με διακεκομμένη γραμμή), όπως δίνεται από το μοντέλο μας, και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις από το $QRPA + ffGT$ μοντέλο (ρόμβοι) και τους επαναυπολογισμούς της θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης (×). 299
16.16Εκτιμήσεις των χρόνων ημίσειας ζωής ισότονων, άρτιου−άρτιου, χαρακτήρα πυρήνων με κλειστούς νετρονικούς φλοιούς $N = 50$, 82 και 126. 300
16.17Όμοιο με το 16.16. Περιλαμβάνει τις εκτιμήσεις καθολικών προτύπων, όπως το $FRDM + QRPA$ και κάποιες αντίστοιχες αποκρίσεις $C - QRPA$ προσεγγίσεων, όπως οι $ETFSI + QRPA$ [42] και οι $HFB + QRPA$ [28], για τους άρτιους−άρτιους πυρήνες των κλειστών νετρονικών φλοιών $N = 50$, 82 και 126. 301
16.18Εκτίμηση των χρόνων ημίσειας ζωής αποδιεγειρόμενων νουκλιδίων που βρίσκονται πάνω ή κοντά στους $r-process$ ατραπούς. Με άσπρο χρώμα σημειώνονται τα πειραματικά δεδομένα και με μαύρο η εκτίμηση του μοντέλου μας. Δίνονται επίσης προς σύγκριση με τις γκρίζες αποχρώσεις, οι εκτιμήσεις του υβριδικού μοντέλου $QRPA + ffGT$ της ομάδας του $Möller$ [72], της εφαρμογής της φόρμουλας $Kratz - Herrmann$ στους χρόνους ημιζωής από τους $Pfeiffer\ et\ al.$ [11] και οι επαναυπολογισμοί των $Pfeiffer\ et\ al.$ επίσης, της αρχικής θεωρίας μέσης τελικής κατάστασης [11]. 302

17.1 Οι "μαλακού ορίου" ρυθμίσεις ενός γραμμικού SVM. 305
17.2 Συναρτήσεις απώλειας. 317
17.3 Η αρχιτεκτονική μιας μηχανής ενέλιξης, κατασκευασμένης από τον αλγόριθμο SV. 320

Κατάλογος Πινάκων

1.1 Κινητική ενέργεια σωματίων με μήκος κύματος λ=1 fm και λ=5 fm. . 8

1.2 Πυρηνικές ακτίνες R και πυρηνικά επιφανειακά πάχη α. 11

2.1 Ενέργειες για μερικούς ελαφρούς πυρήνες (MeV). 16

5.1 Κανόνες επιλογής επιτρεπτών αποδιεγέρσεων β. 58

5.2 Τυπικές $LogfT-$τιμές της αποδιέγερσης β. 61

8.1 Οι κυριότερες συναρτήσεις ενεργοποίησης. 93

11.1 Δείκτες απόδοσης των δοκιμαστικών μοντέλων για μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 5 εποχές εκπαίδευσης. 136

11.2 Δείκτες απόδοσης των δοκιμαστικών μοντέλων για μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 500 εποχές εκπαίδευσης. 137

11.3 Δείκτες απόδοσης των δοκιμαστικών μοντέλων για μέγιστη αποτυχία τεκμηρίωσης τις 5000 εποχές εκπαίδευσης. 138

11.4 Δείκτες απόδοσης του δικτύου $A.2$: $1-5-5-1|66$. 143

11.5 Δείκτες απόδοσης του δικτύου $A.3$: $1-5-5-1|66$. 146

11.6 Η πιθανότητα αξιόπιστης πρόβλεψης. 150

12.1 Κατανομή των νουκλιδίων στο εκπαιδευτικό σετ, το σετ τεκμηρίωσης και το δοκιμαστικό σετ για (α) το $NuSet-A$ και (β) το $NuSet-B$. . 153

12.2 Δοκιμασία X^2 για την εκτίμηση της ομοιομορφίας της κατανομής του $NuSet-A$ στα τρία υποσέτ. 154

12.3 Δοκιμασία X^2 για την εκτίμηση της ομοιομορφίας της κατανομής του $NuSet-B$ στα τρία υποσέτ. 157

13.1 $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N$ για το $NuSet-A$. Δί-κτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$ στα δίκτυα ET. 001 και ET. 003 και $radbas$ στο δίκτυο AT. 002. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. 165
13.2 $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6 ($NuSet-B$). Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. 166
13.3 $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^3 ($NuSet-C$). Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. 167
13.4 $RMSE$ του ψηφιακού μοντέλου $Z-N$ για το $NuSet-A$. Δί-κτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tanh$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. 168
13.5 $RMSE$ του ψηφιακού μοντέλου $Z-N$ για το $NuSet-B$. Δί-κτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tanh$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 169
13.6 $RMSE$ του ψηφιακού μοντέλου $Z-N$ των $E.\ Mavrommatis\ et\ al.$ [26]. 169
13.7 $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για το $NuSet-A$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tanh$ για τα δίκτυα ET. 013 - 015 και $radbas$ για τα δίκτυα ET. 016 - 017. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 173
13.8 $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για το $NuSet-B$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $satsins$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 174

13.9 $RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για το $NuSet-B$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tanh$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 174

13.10$RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta$ για το $NuSet-C$. Δίκτυα: ET. και AT. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tanh$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 175

13.11$RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta-Q$ για το $QuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 178

13.12$RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Z-N-\delta-Q$ για το $QuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 179

13.13Οι τιμές των παραμέτρων a και b, όπως προέκυψαν από τις προσαρμογές των $Pfeiffer\ et\ al.$ [11] για τους χρόνους ημίσειας ζωής επιλεγμένων πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων. 181

13.14Η διόρθωση $C(Z,N)$ που προτείνεται λόγω του χάσματος πρωτονίων Δ_p και νετρονίων Δ_n και της λοιπής ενέργειας αλληλεπίδρασης νετρονίου $-$πρωτονίου δ ανάλογα με τον άρτιο περιττό χαρακτήρα των νουκλεονίων. 181

13.15Οι προτεινόμενες τιμές των σταθερών του μοντέλου $Madlad$ και Nix [18]. 182

13.16$RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Kratz-Herrmann$ για το $QuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώ-νων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. 183

13.17$RMSE$ του αναλογικού μοντέλου $Madlad-Nix$ για το $NuSet-B$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. 184

13.18 Αποδόσεις του μοντέλου κατανομής των νουκλεονίων στις ε-νεργειακές καταστάσεις. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίη-σης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 187

13.19 Αποδόσεις του μοντέλου ποσοστιαίας κατάληψης των ενεργειακών καταστάσεων. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίη-σης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 188

13.20 Αποδόσεις του μοντέλου απόκλισης από τους μαγικούς αριθμούς. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 189

13.21 Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 190

13.22 Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 191

13.23 Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλο $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^6$. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 192

13.24 Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου Z_{eff}. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin για το πρώτο δίκτυο και $satlins$ για τα υπόλοιπα. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 194

13.25Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου N_{eff}. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 195
13.26Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου A_{eff}. Δίκτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. Σετ δεδομένων: $NuSet - B$. 196
13.27Αποδόσεις του αναλογικού μοντέλου $Z_{eff} - N_{eff} - A_{eff}$. Δί-κτυα: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 197
13.28Απόδοση του αναλογικού μοντέλου $[A/Z]$, $[N - Z]$, $[\delta]$. Δί-κτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: lin. 199
13.29Απόδοση του αναλογικού μοντέλου μέσης αλληλεπίδρασης νου-κλεονίου − νουκλεονίου. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα του αφανούς στρώματος: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 201
13.30Απόδοση του αναλογικού μοντέλου μέσης αλληλεπίδρασης νουκλεονίου − νουκλεονίου. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενε-ργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. 201
13.31Απόδοση του μοντέλου αλληλεπίδρασης $p-p$, $n-n$. Δίκτυο: ET. Αλγόριθμος εκπαίδευσης: LM. Τεχνική της διατεκμηρίωσης. Εκμάθηση: παράλληλη - επιβλεπόμενη. Συνάρτηση ενεργοποίησης των νευρώνων των αφανών στρωμάτων: $tahn$. Συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου: $satlins$. (Οι νευρώνες των αφανών στρωμάτων δεν έχουν κατώφλια ενεργοποίησης.) 203

14.1 Πίνακας χαρακτηριστικών του μοντέλου 206
14.2 Αποτελέσματα των δεικτών απόδοσης του παρόντος μοντέλου 206

14.3 Ανάλυση της απόκλισης μεταξύ υπολογισμένων και παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που φαίνεται στα σχήματα 14.1 − 14.3 με βάση τους δείκτες *Möller*. Οι ποσότητες M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξισώσεις (12.9) − (12.15). . 212

14.4 Οι δείκτες *Möller* υπολογισμένοι για τα τρία υποσέτ και το πλήρες σετ σε αναλογία με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 213

14.5 Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μέσω των δεικτών *Klapdor* [36, 34, 37, 38, 21, 55, 8]. Η μέση απόκλιση *Klapdor* $\bar{x}_K$ και η τυπική απόκλιση σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) − (12.8). 214

14.6 Σύγκριση της απόδοσης του μοντέλου μας με τους υπολογισμούς του προτύπου $N+BSC+pnQRPA$ των *Homma et al.* [34],τους $FRDM+pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [70] και τους υπολογισμούς της SGT των *Nakata et al.* [35]. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 216

14.7 Σύγκριση με τους $FRDM + pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [72] και τους $pnQRPA + ffGT$ υπολογισμούς επίσης των *Möller et al.* [72]. Τα μεγέθη M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 217

14.8 Σύγκριση των παρόντων υπολογισμών με τους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* [8] και τους υπολογισμούς του μοντέλου $NBSC + pnQRPA$ των *Homma et al.* [34]. Τα μεγέθη m, $\bar{x}_K$ και σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) − (12.8). 218

15.1 Τελευταία δέσμια και πρώτα μη δέσμιο ισότονα κατά μήκος της γραμμής διαφυγής νετρονίων για $3 < N < 12$. 240

15.3 Πίνακας βασικών χαρακτηριστικών του μοντέλου πρόβλεψης της γραμμής διαφυγής νετρονίων 242

15.4 Αποτελέσματα των δεικτών απόδοσης του παρόντος μοντέλου 242

15.5 Ανάλυση της απόκλισης μεταξύ υπολογισμένων και παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που φαίνεται στα σχήματα 15.1 − 15.3 με βάση τους δείκτες *Möller*. Οι ποσότητες M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξισώσεις (12.9) − (12.15). . 248

15.6 Οι δείκτες *Möller* υπολογισμένοι για τα τρία υποσέτ και το πλήρες σετ σε αναλογία με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 249

15.7 Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μέσω των δεικτών *Klapdor* [36, 34, 37, 38, 21, 55, 8]. Η μέση απόκλιση *Klapdor* $\bar{x}_K$ και η τυπική απόκλιση σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) − (12.8). 250
15.8 Σύγκριση με τους $FRDM + pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [72] και τους $pnQRPA + ffGT$ υπολογισμούς επίσης των *Möller et al.* [72]. Τα μεγέθη M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 251
15.9 Σύγκριση της απόδοσης του μοντέλου μας με τους υπολογισμούς του προτύπου $N+BSC+pnQRPA$ των *Homma et al.* [34],τους $FRDM+pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [70] και τους υπολογισμούς της SGT των *Nakata et al.* [35]. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 252
15.10Σύγκριση των παρόντων υπολογισμών με τους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* [8] και τους υπολογισμούς του μοντέλου $NBSC + pnQRPA$ των *Homma et al.* [34]. Τα μεγέθη m, $\bar{x}_K$ και σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) − (12.8). 253

16.1 Κατανομή των σετ άρτιου−περιττού χαρακτήρα της βάσης *BrookSet* στα τρία υποσέτ: εκπαιδευτικό, τεκμηρίωσης και δοκιμαστικό σετ. Με n δίνεται το σύνολο των νουκλιδίου κάθε είδους. 274
16.2 Πίνακας χαρακτηριστικών του μοντέλου 275
16.3 Βέλτιστη απόδοση των μοντέλων άρτιου−περιττού χαρακτήρα. 275
16.4 Μέση τετραγωνική απόκλιση των SVM μοντέλων άρτιου−περιττού χαρακτήρα των *Clark* και *Li* [53]. 276
16.5 Μέση τετραγωνική απόκλιση των μοντέλων άρτιου−περιττού χαρακτήρα των επιλεγμένων με βάση την ικανότητα συμπερασμού δικτύων. 277
16.6 Αποτελέσματα των δεικτών απόδοσης του παρόντος μοντέλου 277
16.7 Ανάλυση της απόκλισης μεταξύ υπολογισμένων και παρατηρούμενων χρόνων ημίσειας ζωής της αποδιέγερσης β^- που παρατηρείται στα σχήματα 16.1 − 16.3 με βάση τους δείκτες *Möller*. Οι ποσότητες M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξισώσεις (12.9) − (12.15). 283
16.8 Οι δείκτες *Möller* υπολογισμένοι για τα τρία υποσέτ και το πλήρες σετ σε αναλογία με τον άρτιο−περιττό χαρακτήρα των νουκλιδίων. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 284
16.9 Σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα μέσω των δεικτών *Klapdor* [36, 34, 37, 38, 21, 55, 8]. Η μέση απόκλιση *Klapdor* $\bar{x}_K$ και η τυπική απόκλιση σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) − (12.8). 285

16.10 Σύγκριση με τους $FRDM + pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [72] και τους $pnQRPA + ffGT$ υπολογισμούς επίσης των *Möller et al.* [72]. Τα μεγέθη M, $M^{(10)}$, σ_M, $\sigma_{M^{(10)}}$, Σ και $\Sigma^{(10)}$ ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 287
16.11 Σύγκριση της απόδοσης του μοντέλου μας με τους υπολογισμούς του προτύπου $N+BSC+pnQRPA$ των *Homma et al.* [34],τους $FRDM+pnQRPA$ υπολογισμούς των *Möller et al.* [70] και τους υπολογισμούς της SGT των *Nakata et al.* [35]. Η μέση απόκλιση *Möller* M_r^{10} και η τυπική διακύμανση σ_r^{10} ορίζονται από τις εξ. (12.9) − (12.15). 288
16.12 Σύγκριση των παρόντων υπολογισμών με τους $pnQRPA$ υπολογισμούς των *Staudt et al.* [8] και τους υπολογισμούς του μοντέλου $NBSC + pnQRPA$ των *Homma et al.* [34]. Τα μεγέθη m, $\bar{x}_K$ και σ_K ορίζονται από τις εξ. (12.6) − (12.8). 289

17.1 Οι πιο διαδεδομένες συναρτήσεις απώλειας και το αντίστοιχο μοντέλο πυκνότητας. 318
17.2 Απόδοση του αναλογικού μοντέλου $Z - N - \delta$ για χρόνους ημίσειας ζωής μικρότερους των 10^6 *sec.* Πυρήνας: RBF. 321
17.3 Απόδοση του μοντέλου μέσης αλληλεπίδρασης νουκλεονίου − νου-κλεονίου. Πυρήνας: RBF. 322

Ευρετήριο

Bayes, 118
$R-$τιμή, 159
$V-A$ θεωρία, 41
r-process, 63

ευαισθησία , 103

αφθονία, 63
ακτινοβολία, 19
αλγόριθμος εκμάθησης, 79
αλληλεπίδραση
    νουκλεονίου−νουκλεονίου, 66
ανάδραση, 90
Ανύσματα Υποστήριξης, 308
απεικόνιση *Kurie*, 52
αποδιέγερση
    Fermi, 56
    απαγορευμένη, 60
αριθμός ενεργών παραμέτρων, 120
ασθενής αλληλεπίδραση, 35
ατομικός αριθμός, 5
ατομο, 7
αυτοσυνεπές μοντέλο, 71

βάρος (συναπτικό), 85
βελτιστοποίηση, 94, 97

δίκτυο
    ανάδρομης διάδοσης, 90
    ανατροφοδότησης, 134
    δυναμικό, 90
    ευθείας τροφοδοσίας, 90, 134
    στατικό, 90
δύναμη
    βαρυτική, 13
    ηλεκτρομαγνητική, 12
    πυρηνική, 13
δεδομένα εκμάθησης, 78
δενδρίτης, 84
διάστημα μετασχηματισμού, 126
διατεκμηρίωση, 117, 132, 152

εκμάθηση
    ενισχυτική, 79
    επιτηρούμενη, 79
    μη επιτηρούμενη, 79
    παράλληλη, 80
    σειριακή, 80
εκπαιδευτής, 79
εκπαιδευτική μεθοδολογία, 78
ελεύθερες παράμετροι, 96
ελικότητα, 40
ελλειμμα μάζας, 16
ενέλιξη, 79, 303
ενέργεια διαχωρισμού
    νετρονίου, 63
ενέργεια σύνδεσης, 15
ενεργειακό φάσμα, 47
επίπεδο δίκτυο, 88
επίπεδο κύμα, 44
εποχή, 101, 107
εξομάλυνση, 118
εξωτικός πυρήνας, 25, 72

γενίκευση, 81
    παρεμβαλλόμενη, 81
    συμπερασμός, 81

γραμμή διαφυγής νετρονίων, 24, 63, 239

ηλεκτρόνιο
μήκος κύματος, 8
σκέδαση, 8
ημιεμπειρικός τύπος της μάζας, 18
ημιλεπτονικές αντιδράσεις, 35

Ιακωβιανός πίνακας, 112
ισότονα, 6
ισότοπα, 6
ισομερής κατάσταση, 5

θεωρία διαταραχών, 29, 44

κατώφλι ενεργοποίησης, 86
κατεύθυνση αναζήτηση, 108
κατεύθυνση πτώσης , 99
κατεύθυνση της πιο απότομης πτώσης, 108
κβαντικοί αριθμοί, 66
κεντρικός πυρήνας SV, 311
κοιλάδα σταθερότητας, 25
κορεσμός
πυρηνικός, 10
κουάρκ, 37
κυματάριθμος, 44
κυματοσυνάρτηση
αρχικής κατάστασης, 44
τελικής κατάστασης, 44

λεπτόνιο, 35

μέθοδος $Nguyen - Widrow$, 124
μέθοδος συζυγούς κλίσης, 107
μέθοδος της πιο απότομης πτώσης, 99, 109, 114
μέθοδος του $Newton$, 109
μέσος χρόνος ζωής, 27
μαγικός αριθμός, 17
μαζικός αριθμός, 5
μετάπτωση, 26
$Fermi$, 46, 55
$Gamow - Teller$, 46, 56
απαγορευμένη, 46, 55
επιτρεπτή, 46, 55
υπερεπιτρεπτή, 59
Μοντέλο Αλληλεπιδρώντων Μποζονίων, 17

μοντέλο ενός σωματιδίου, 66
μποζόνιο
$W^{\pm}$, 36
Z^0, 36

νετρόνιο, 5
ηλεκτρικό φορτίο, 6
μήκος κύματος, 8
μαγικοί αριθμοί, 63
νευρώνας, 83
νουκλίδιο, 6
νουκλεόνιο, 5
πυκνότητα, 8
νουκλεόνιο σθένους, 17
νουκλεοσύνθεση, 63

ολικό ελάχιστο, 124
ομοτιμία, 37

παράγοντας $Fermi$, 51
παράγοντας επικάλυψης, 124
παραμετρικό μοντέλο, 66
πιθανότητα μετάπτωσης, 27
πολλαπλασιαστές $Lagrange$, 305
Πρότυπο των Φλοιών, 17, 67
Πρότυπο Υγρής Σταγόνας, 18
προσέγγιση $Gauss - Newton$, 113, 120
πρωτόνιο, 5
ηλεκτρικό φορτίο, 6
μήκος κύματος, 8
πυκνότητα καταστάσεων, 46
πυρήνας, 5
πλούσιος σε νετρόνια, 65
ακτίνα, 9
ηλεκτρικό φορτίο, 6
μέγεθος, 7
παραμόρφωση, 11
σχήμα, 10

χώρος αποκλίσεων, 123
χρόνος ημιζωής, 27
χρυσός κανόνας
$Fermi$, 32, 44

ρυθμός διάσπασης, 27

σύλληψη νετρονίων, 63
σύναψη, 83

σετ
δοκιμαστικό, 117
εκπαιδευτικό, 117
πρόγνωσης, 132
τεκμηρίωσης, 117
σφαιρικές αρμονικές, 45
σημείο αναμονής, 64
σιγμοειδής συνάρτηση, 91
σταθερά ρυθμού εκπαίδευσης, 98
σταθερά σύζευξης
$Fermi$, 36
σταθερά ζευγοποίησης, 170
στοιχείο εισόδου, 85
στοιχείο εξόδου, 85
στρώμα, 89
αφανές, 89
εξόδου, 89
συμμετρικά κορεσμένη ημιτονοειδής συνάρτηση, 134
συμπερασμός, 81, 131, 143
συνάρτηση απώλειας, 304
συνάρτηση εισόδου, 85
συνάρτηση ενεργοποίησης, 85
ενεργό εύρος, 124
συνάρτηση ισχύος, 66
συνάρτηση κόστους, 94
συνάρτηση στόχου, 78
συναρτήσεις Bessel , 45
σωμάτιο α
σκέδαση, 7

ταξινόμηση
δυαδική, 79
σε πολυ-κλάσεις, 79
Τεχνητή Νοημοσύνη, 77
τιμή$-ft$, 54
τιμή$-Q$, 20, 174

υπερπαράμετροι, 118
υπερπροσαρμογή, 81, 117

ζευγοποίηση, 13, 24, 66