Λύση Άσκησης 5

$$(*)\quad \det(A-\lambda I) = (-\lambda)^n + S_1(-\lambda)^{n-1} + S_2(-\lambda)^{n-2} + \dots + S_n = 0$$

$$S_1 = \sum_i a_{ii}\,,\quad S_2 = \sum_{1\le i<k\le n} A\begin{pmatrix} i & k \\ i & k\end{pmatrix}, \dots$$

S_p = άθροισμα των "principal minors" τάξης p

$$\det\left(u_{x_i}u_{x_j} + \delta_{ij}\right) =$$

$$A = \begin{bmatrix} u_{x_1}(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \\ u_{x_2}(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \\ \vdots \\ u_{x_n}(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -1$$

Παρατηρούμε ότι οι σειρές του A είναι πολλαπλάσια του ιδίου διανύσματος, δηλαδή ο A είναι rank 1 πίνακας, Κατά συνέπεια όλες οι "minors" τάξης $p\ge 2$ είναι μηδέν.

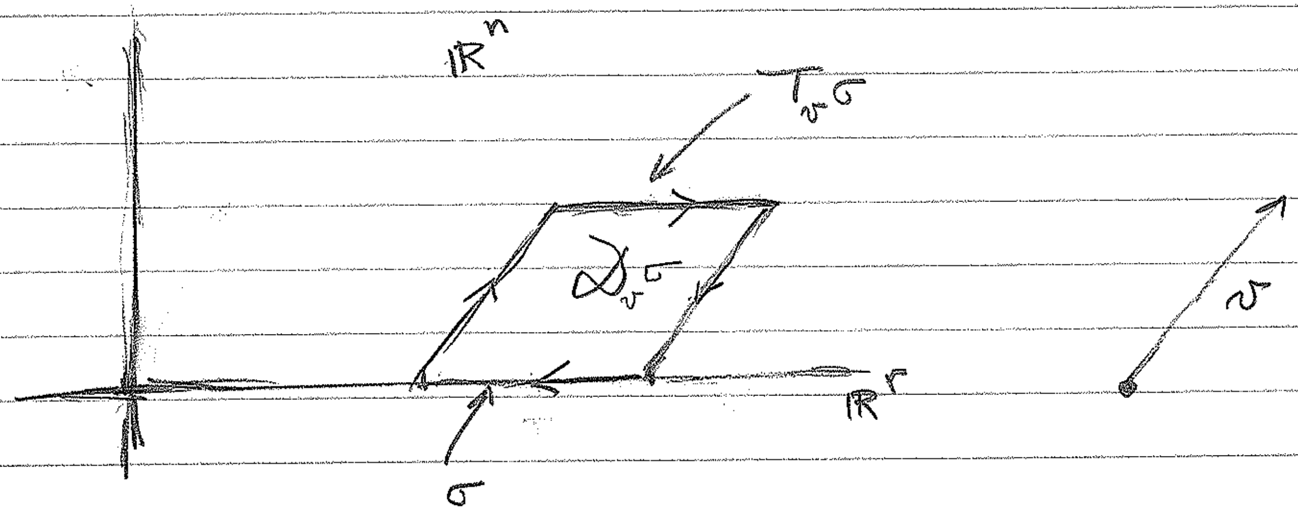
$\therefore$

$$\det\left(u_{x_i}u_{x_j} + \delta_{ij}\right) = (+1)^n + S_1(+1)^{n-1}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 . \qquad \square$$

2) Συνεχίζουμε τα παραδείγματα για την κατανόηση της Whitney νόρμας. Κατ' αρχήν εισάγουμε το "παραλληλόγραμμο" $\mathcal{D}_v A$:

Δοθέντος προσανατολισμένου r-κελιού σ στον $\mathbb{R}^n$, και διανύσματος v, συμβολίζουμε με $T_v \sigma$ το κελί $p+v$, $p \in \sigma$.



$\mathcal{D}_v \sigma :=$ προσανατολισμένο $(r+1)$-κελί $p+tv$, $p \in \sigma$, $0 \le t \le 1$

Γενικότερα για πολυεδρική αλυσίδα A ορίζουμε την $\mathcal{D}_v A$ γραμμικά.

Παρατηρούμε ότι

(24) $$\partial \mathcal{D}_v A = T_v A - A - \mathcal{D}_v \partial A .$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

(25) $$\mathbb{M}(\mathcal{D}_v A) \le |v| \, \mathbb{M}(A) .$$

Επίσης ισχύει

(26) $\quad \mathbb{W}(T_v A - A) \leq |v| \left(\mathbb{M}(A) + \mathbb{M}(\partial A)\right).$

Πράγματι

$$\mathbb{W}(T_v A - A) \overset{(20)}{\leq} \mathbb{M}(T_v A - A - \partial \mathcal{D}_v A) + \mathbb{M}(\mathcal{D}_v A)$$

$$\overset{(24),(25)}{=} \mathbb{M}(\mathcal{D}_v \partial A) + |v|\, \mathbb{M}(A)$$

$$= |v| \left(\mathbb{M}(\partial A) + \mathbb{M}(A)\right).$$

Θεωρούμε τώρα το 1-simplex $\sigma = pq$, $|q-p| = a < 2$. Έστω επίσης $|v| =: b < \frac{a}{2}$. Θέτουμε $A = T_v\sigma - \sigma$, $D = \mathcal{D}_v \sigma$.

Κατα συνέπεια

$$\partial \mathcal{D}_v \sigma \overset{(24)}{=} T_v \sigma - \sigma - \mathcal{D}_v \partial\sigma \quad , \quad \mathbb{M}(\mathcal{D}_v \sigma) \leq |v|\, \mathbb{M}(A)$$

$$\mathbb{W}(T_v \sigma - \sigma) \overset{(26)}{\leq} |v| (2 + a)$$

$$= 2b + ab$$

$$< a + ab$$

$$< 2a \quad = \mathbb{M}(A).$$

Οι Βασικές Ιδιότητες της νόρμας $\mathbb{W}$.

Για A Flat chain ισχύουν οι ανισότητες

(27) $\quad \mathbb{W}(\partial A) \leq \mathbb{W}(A) \leq \mathbb{M}(A)$.

Απόδειξη

Έστω A πολυεδρική αλυσίδα.
Κατ' αρχήν επιλέγοντας στην (20) $D=0$ παίρνουμε την $2^{\text{η}}$ ανισότητα. Όσον αφορά την $1^{\text{η}}$ επιχειρηματολογούμε ως εξής:

Δοθέντος $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε D τ.ω.

$$\mathbb{M}(A-\partial D) + \mathbb{M}(D) < \mathbb{W}(A) + \varepsilon .$$

Θέτουμε

$$D' = A - \partial D .$$

Έχουμε

$$\mathbb{M}(\partial A - \partial D') + \mathbb{M}(D') = \mathbb{M}(A - \partial D) < \mathbb{W}(A) + \varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\mathbb{W}(\partial A) < \mathbb{W}(A) + \varepsilon ,$$

και έτσι και η $1^{\text{η}}$ ανισότητα ικανοποιείται.
Τώρα περνάμε από τις πολυεδρικές στις flat ως εξής:

Πρώτα ορίζουμε το ∂A, A flat.

Έστω

$$A = \lim A_i \quad (W\text{-σύγκλιση})$$

$\Longleftrightarrow$

$$\{A_i\} \text{ Cauchy}, \; A_i \text{ πολυεδρικές}.$$

Έπεται μέσω της (27) για πολυεδρικές ότι

$$\{\partial A_i\} \text{ Cauchy}.$$

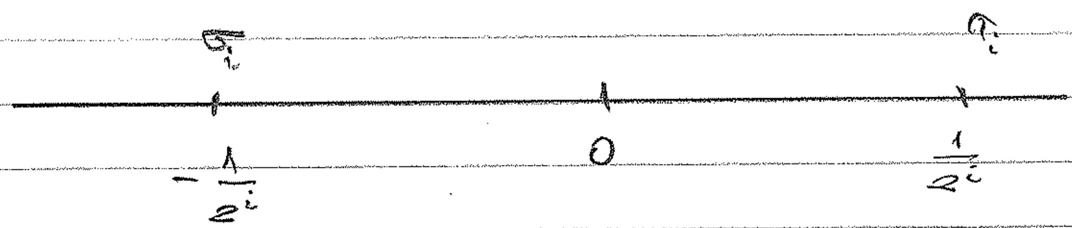
Κατά συνέπεια ∂A ορίζεται και η (27) μεταφέρεται στις flat chains.

ΟΕΔ.

Παράδειγμα

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι η W-νόρμα δεν είναι προσθετική (additive) και κατά συνέπεια δεν αντιστοιχεί σε κάποιο μέτρο.

Θεωρούμε τα 0-κελιά $\sigma_i = -\frac{1}{2^i}$, $\tau_i = \frac{1}{2^i}$ εντός του $\mathbb{R}^1$



B_i = το 1-κελί $[\sigma_i, \tau_i]$

$A_i' = \tau_i - \sigma_i$, 0-αλυσίδα,

$A_k = A_0' + A_1' + \dots + A_k'$, 0-αλυσίδα

$$\overline{W}(A_i') = W(\partial B_i) \leq M(B_i) = \frac{2}{2^i}$$

$$\overline{W}(A_m - A_n) = W\left(A_0' + \dots + A_m' - (A_0' + \dots + A_n')\right)$$

$$= \overline{W}\left(A_{n+1}' + \dots + A_m'\right)$$

$$\leq \frac{2}{2^{n+1}} + \dots + \frac{2}{2^m}$$

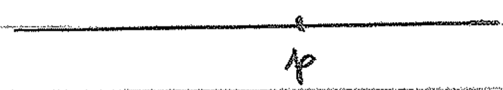
$\therefore$ $\{A_k\}$ Cauchy (W-αλυσίδα)

$\therefore$ $\lim A_k$ υπάρχει, έστω A.

A είναι ένα αλυσίδα απείρων σημείων με πεπερασμένη $\overline{W}$-νόρμα.

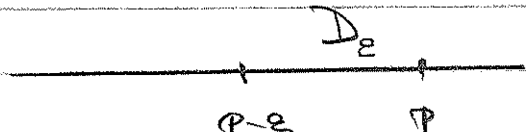
Σχόλιο

Έστω p σημείο στο $\mathbb{R}^1$



Έχουμε ότι $\overline{W}(p) = 1$ $\quad (G = \mathbb{Z})$

Πράγματι



$$W(p) = \inf_{D} \{ \mathbb{M}(p - \partial D) + \mathbb{M}(D) \}$$

$$\geq \inf_{D} \mathbb{M}(p - \partial D) \geq 1$$

(το ∂D έχει 2 σημεία, $\mathbb{M}$ είναι $\mathcal{H}^0$ μέτρο, δηλαδή counting measure).

$$W(p) \leq \mathbb{M}(p - \partial D_\varepsilon) + \mathbb{M}(D_\varepsilon)$$

$$= 1 + \varepsilon$$

$$\therefore \quad W(p) = 1.$$

Συνεπώς η W νόρμα δεν είναι κάποιου είδους μέτρο.

$\square$