Το Πρόβλημα Plateau
Μέρος Ι : Ύπαρξη

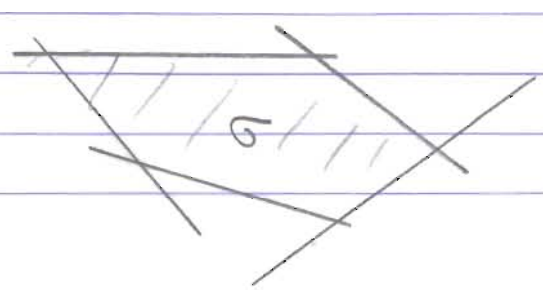
§4. Αλυσίδες Ύφους (Flat Chains)

1) Μετρική Αβελιανή Ομάδα $(G, +)$.
Η G έχει νόρμα με
$$|a+b| \leq |a| + |b| \ , \ |-a| = |a|$$
$$|a| \geq 0 \quad \text{και} \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

Παραδείγματα
a) $\mathbb{Z}$, $|\cdot|$
b) $\mathbb{R}$, $|\cdot|$
c) $\mathbb{Z}_p$, $m = n \bmod p$. Η νόρμα στις κλάσεις ισοδυναμίας ορίζεται ως εξής:
$$|[a]| = \min\{|a'|, a' \in [a]\}.$$
$\mathbb{Z}_5$, $|[3]| = 2$, $|[4]| = 1$

d) Για $G = \mathbb{Z}$ ή $\mathbb{R}$, $|a| := |a|^{\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$.
e) G πεπερασμένη ομάδα, $|g| = \begin{cases} 0, & \text{εαν } g = 0 \\ 1, & g \neq 0. \end{cases}$

2) Πολυεδρικές Αλυσίδες (Polyhedral Chains)
Θεωρούμε αρχικά ένα επίπεδο E^2. Πεπερασμένο τόξο ημιεπιπέδων ορίζει ένα κελί σ (φραγμένο, κλειστό)

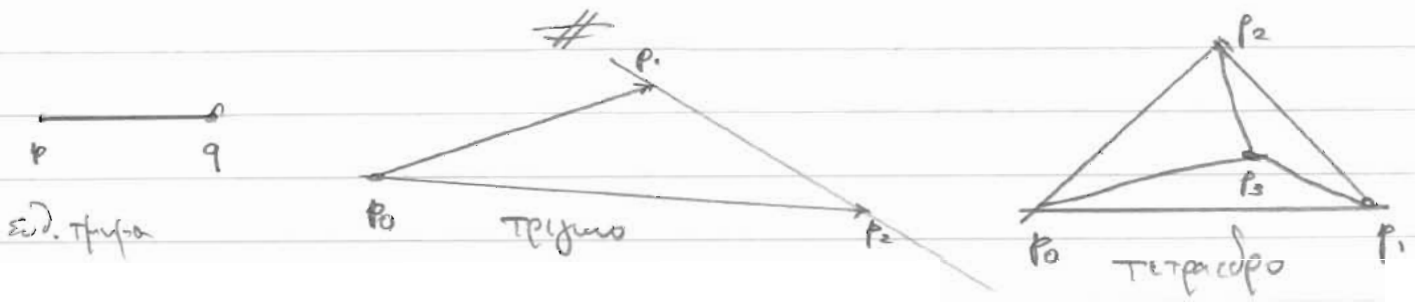


Αναλογα ορίζουμε και το κέλυ στον E^r (r διαστάσεις).
Δοθέντος ενός κέλυφους σ στον E^n, το επίπεδο $P(\sigma)$ είναι το μικρότερο υπερεπίπεδο (affine subspace του E^n) που περιέχει το σ. <u>Η διάσταση του σ</u>, $\dim(\sigma)$, είναι η διάσταση του $P(\sigma)$. Κέλυφος διάστασης r συμβολίζεται με σ^r.

Έστω $p_0, p_1, \dots, p_r$ ($r \le n$) σημεία στον E^n τ.ω. τα διανύσματα $p_1 - p_0, \dots, p_r - p_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε το συνολο των κυρτών συνδυασμών των $p_0, \dots, p_r$ λέγεται <u>r-simplex</u>. 1-simplex είναι ευθύγραμμο τμήμα, 2-simplex τρίγωνο, 3-simplex τετράεδρο κ.λ.π. Τα σημεία $p_0, p_1, \dots$ λέγονται <u>κορυφές</u>.

<u>Ασκηση 10</u>

$\forall\, x \in r\text{-simplex}$, $x = \sum_{j=0}^{r} t^j p_j$, με μοναδικο τροπο

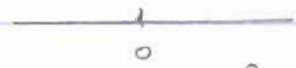


Συμβολισμός simplex: $\sigma = p_0 \cdots p_r$. Το επίπεδο $P(\sigma)$ καλείται τον προσανατολισμό του E^n. <u>Το simplex $p_0 \cdots p_r$ προσανατολίζεται από το frame $(p_1 - p_0, \dots, p_r - p_0)$</u>; δηλαδή κατά πόσον το frame έχει τον προσανατολισμό του $P(\sigma)$ ή τον αντίθετο του.
Η διαφορά μεταξύ των δύο frame, και των δύο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι η διάταξη. Το frame $(1,0),(0,1)$ είναι διάφορο του frame $(0,1),(1,0)$. Δοθέντος frame $v_1, \dots, v_n$ στον E^n ο προσανατολισμός καθορίζεται από το πρόσημο της $\det(v_1, \dots, v_n)$.
Δοθέντος frame $v_1, \dots, v_r$ εντός ενός r-επιπέδου $P(\sigma)$

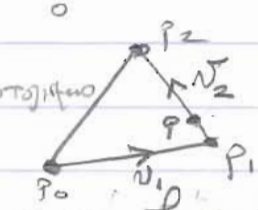
εντος του E^n, κάνοντας χρήση της βάσης του $P(\sigma)$ μπορούμε να εκφράσουμε το κάθε v_i, $i=1,\dots,r$, με r (στον αριθμό) συντεταγμένες, δηλαδή $v_i \longleftrightarrow v_i'$, v_i' r-διανύσματα. Έτσι η $\det(v_1',\dots,v_r')$ ορίζεται και το πρόσημό του καθορίζει τον προσανατολισμό των $v_1,\dots,v_r$.

<u>Ο προσανατολισμός του ανοιχτού $\partial\sigma$ του simplex</u> ορίζεται ως εξής:

Για $n=1$, $\sigma=$ 

$\subset E^1 =$ 

$\sigma = pq$, $q \in \partial\sigma$ θετικά ενώ $p \in \partial\sigma$ αρνητικά προσανατολισμένο



Για $n=2$, $\sigma = p_0p_1p_2$ που προσανατολίζεται από το frame (p_1-p_0, p_2-p_0) ή ισοδύναμα από το (v_1, v_2), όπου $v_i = p_i - p_{i-1}$, $i=1,2$. Έστω $\sigma' = (v_2)$ και έστω $p \in \mathrm{int}(\sigma')$.

Τότε είτε $p+tv_1 \notin \sigma$ για $t>0$, ή $p+tv_1 \in \sigma$ για $t>0$, και αρκετά μικρό. Αντίστοιχα λέμε ότι το v_1 κατευθύνεται εκτός του σ ή εντός του σ. Στην 1η περίπτωση λέμε ότι ο προσανατολισμός του σ' ορισμένος από το (v_2), <u>συμφωνεί</u> με αυτόν του σ, και το σ' είναι θετικά προσανατολισμένο εντός του $\partial\sigma$. Στην 2η περίπτωση λέμε ότι το σ' είναι αρνητικά προσανατολισμένο. Για $(v_1,\dots,v_n)$ που προσανατολίζει το σ, έτσι ώστε τα $v_2,\dots,v_n \in \sigma'$, επιλέγουμε $p \in \mathrm{Int}(\sigma')$ και παρόμοια θεωρούμε το $p+tv_1$. Επί παραδείγματι εάν $\sigma = p_0p_1\dots p_r$ και $\sigma' = p_1\dots p_r$, θέτουμε $v_i = p_i - p_{i-1}$. Τότε το frame $(v_1,\dots,v_r)$ προσανατολίζει το σ, το $(v_2,\dots,v_r)$ το σ', και το v_1 κατευθύνεται εκτός του σ στο σ'. Κατά συνέπεια το σ' είναι θετικά προσανατολισμένο εντός του $\partial\sigma$.

Ένα πολύεδρο Q είναι πεπερασμένο σύνολο κελιών (κλειστό σύνολο). Η διάσταση του Q, $\dim(Q)$, είναι η μεγαλύτερη των διαστάσεων των κελιών. Εάν όλα τα κελιά του το απαρτίζουν είναι της ίδιας διάστασης r, και $Q \subset \Pi$, Π υπερεπίπεδο διάστασης r, τότε μιλάμε για πολυεδρικό χωρίο εντός του Π.
(r- υπερεπίπεδο)

Στην συνέχεια ορίζουμε τις πολυεδρικές άλγεβρες. Κατ'αρχήν ορίζουμε τις πολυεδρικές r-αλγεβρές στο Π. Έστω $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ φραγμένα, ξένα ανά δύο πολυεδρικά χωρία εντός του Π. Για κάθε σ_i αντιστοιχούμε $g_i \in G$, και κάνουμε την μορφή

$$A = \sum_{i=1}^{m} g_i \sigma_i \qquad (\sigma_i \text{ ξένα μεταξύ τους}).$$

πολυεδρική r-αλγεβρα A στο Π. Προσδιορίζουμε την A ορίζοντας μια συνάρτηση $A(p)$ στον E^r,

$$A(p) = g_i \quad \text{ή} \quad -g_i \quad , p \in \operatorname{int}(\sigma_i)$$

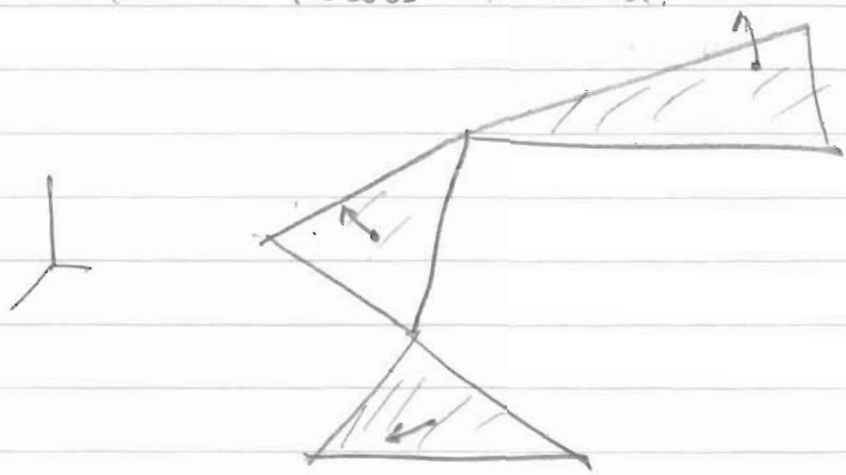
ανάλογα με το αν το σ_i είναι θετικά ή αρνητικά προσανατολισμένο

$$A(p) = 0 \quad , p \notin \bigcup_{j=1}^{m} \sigma_j$$

Θεωρούμε $A = B$ εάν οι αντίστοιχες συναρτήσεις είναι ίδιες modulo πεπερασμένο σύνολο κελιών διάστασης $< r$. Παρατηρούμε ότι εάν $\sum_{ij} \tau_{ij}$ υποδιαιρεσή των σ_i τότε

$\sum a_i \sigma_i$ και $\sum_{i,j} g_i \tau_{ij}$ είναι τα ίδια. Ορίζουμε το aA μέσω της $aA(p)$ $(a \in G)$ και το $A+B$ μέσω της $A(p)+B(p)$.
Η γενική r-πολυεδρική άλγεβρα στον E^n αποτελείται από ένα πεπερασμένο αριθμό r-υπερεπιπέδων με πολυεδρικές αλγεβρές

εντος το καθενος 100 αντα.



Κατ' αυτο τον τροπο οι r-πολυεδρικες αλυσιδες οριζαν εναν διανυσματικο χωρο:

$$\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^N, G) = \{ \text{πολυεδρικες } k\text{-αλυσιδες στον } \mathbb{R}^N$$

$$\text{με συντελεστες στον } G \}$$

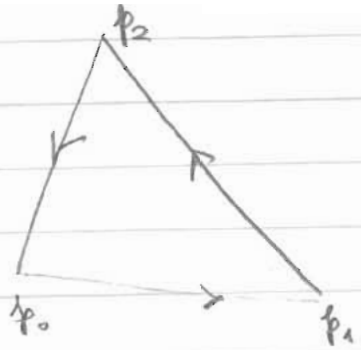
Το <u>τοπολογικο συνορο</u> ∂A μιας r-πολυεδρικης αλυσιδας A ειναι μια $(r-1)$-αλυσιδα που οριζεται ως εξης:
Για $r=0$ θεταμε $\partial A = 0$. Εστω σ κεφ. Εαν $r=1$ τοτε $\sigma = pq$, $\partial q = q - p$. Για $r \geq 2$ το $\partial\sigma$ ειναι το αθροισμα ολων των $(r-1)$-faces του σ, προσανατολισμενων ωστε να συμφωνουν με το σ. Εχουμε

$$\partial \sum g_i \sigma_i^r = \sum g_i \partial \sigma_i^r$$

$$\partial(p_0 \cdots p_r) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i p_0 \cdots \hat{p}_i \, p_r .$$

$$\partial : \mathcal{P}_k \longrightarrow \mathcal{P}_{k-1}$$

$$(\mathcal{P}_{-1}(\mathbb{R}^N; G) := G, \quad \mathcal{P}_{-2}(\mathbb{R}^N, G) = 0).$$



$\sigma = p_0 p_1 p_2$ (= 2 αμπλίδα)

$\partial\sigma = (-1)^0 p_1 p_2 + (-1)^1 p_0 p_2 + (-1)^2 p_0 p_1$

$= p_1 p_2 - p_0 p_2 + p_0 p_1$ = 1 - αμπλίδα

$$\partial^2\sigma := \partial\partial\sigma = \partial(p_1 p_2) - \partial(p_0 p_2) + \partial(p_0 p_1)$$

$$= (\cancel{p_2} - \cancel{p_1}) - (\cancel{p_2} - \cancel{p_0}) + (\cancel{p_1} - \cancel{p_0}) = 0.$$

<u>Θεώρημα</u>

$$\partial^2 = 0 .$$

<u>Σημειώσεις</u>

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Whitney "Geometric Integration Theory" σελίδες 355 – 362, και 152 – 153.

§3 <u>Η Νόρμα του Whitney</u> (flat norm)

<u>Ορισμός</u> (Μάζα)

$A \in \mathcal{C}_k$, $A = \sum g_i \sigma_i$ ($\{\sigma_i\}$ μη επικαλυπτόμενα)

(19) $\mathbb{M}_k(A) = \sum |g_i| \, H^k(\sigma_i) = \inf\left\{ \sum |g_i| \, H(\sigma_i') : A = \sum g_i \sigma_i' \right.$ $\left. \{\sigma_i'\} \text{ ανεξάρτητα} \right\}$

$\mathbb{M}(\cdot) :=$ μάζα του A.

Προβλήματα με την Μάζα ως νόρμας συνδέονται με το ότι ο τελεστής ∂ δεν είναι συνεχής.

$$\mathbb{M}(R_\varepsilon) = \varepsilon, \quad \mathbb{M}(\partial R_\varepsilon) = \ell + 2\varepsilon$$

<u>Ορισμός</u> (Whitney νόρμα)

(20) $$W(A) = \inf_D \left\{ \mathbb{M}_k(A - \partial D) + \mathbb{M}_{k+1}(D) \;\middle|\; \begin{array}{l} A = k\text{-αλυσίδα στον } \mathbb{R}^N, \\ D \text{ ανοιχτή } (k+1)\text{-αλυσίδα στον } \mathbb{R}^N \end{array} \right\}.$$

Θα αποδείξουμε αργότερα ότι

(21) $$W(A) = 0 \iff A = 0$$

<u>Άσκηση 11</u>

Δείξτε ότι

(22) $$W(aA) = |a|\, W(A), \quad W(A+B) \le W(A) + W(B).$$

Παρατηρούμε διάφορεσιν των (21). Κατά συνέπεια η $W(\cdot)$ είναι νόρμα.

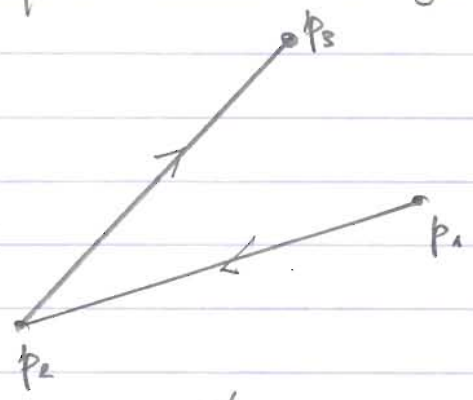
<u>Ορισμός</u>

Η διαδικασία της πυκνώσης των $\mathcal{P}_k$ μέσω της $W(\cdot)$ δίνει τον χώρο των Flat chains, F_k.

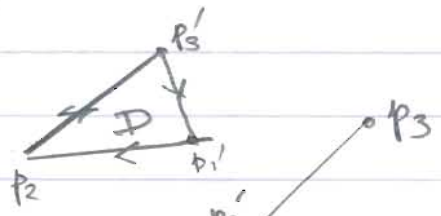
Παραδείγματα

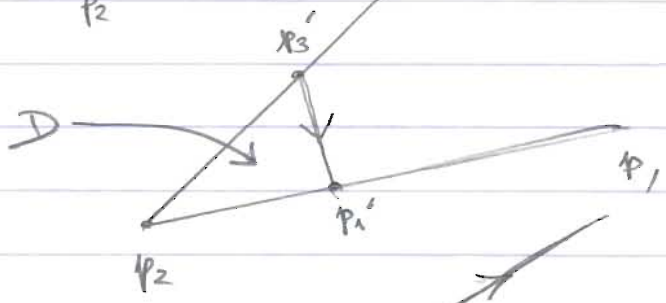
1) Θεωρείστε την 1-αλυσίδα στον $\mathbb{R}^2$, $A = p_1p_2 + p_2p_3$

$A =$

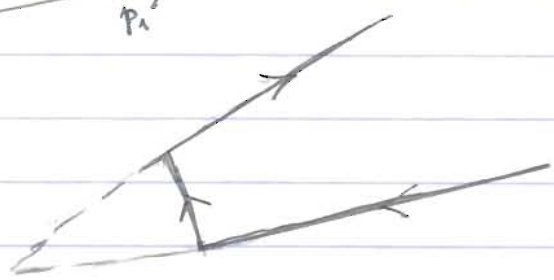


$D =$





$A - \partial D =$



$$W(A) = \underset{D}{\mathrm{Inf}} \left\{ \mathbb{M}(A - \partial D) + \mathbb{M}(D) \right\}$$

Σαφώς για D μικρό παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{M}(A - \partial D) + \mathbb{M}(D) < \mathbb{M}(A).$$

Κατά συνέπεια σε αυτήν την περίπτωση

(23) $$W(A) < \mathbb{M}(A)$$