Διαλεξη 9

Σχολια και Λυση Ασκησης 18

Εστω Φ (μη γραμμικο) συναρτησιακο, $\Phi : H \to \mathbb{R}$, οπου H χωρος Hilbert.

Ορισμος
Το Φ εχει παραγωγο Gâteaux $w \in H$ στο x_0 εαν

$$(1) \quad \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(x_0 + ty) - \Phi(x_0)}{t} = (w, y)_H \quad \forall y \in H,$$

$(\cdot, \cdot)_H$ το εσωτερικο γινομενο.
Γραφουμε

$$\Phi'(x_0) = w.$$

Παρατηρηση: Ευκολα προκυπτει οτι το w ειναι μοναδικο.

Προταση
Εστω $\Phi : H \to \mathbb{R}$, κυρτο συναρτησιακο, δηλ.

$$\Phi(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(y) \quad \forall \, 0 \leq \lambda \leq 1, \; x, y \in H$$

και εστω $\mathbb{K} \subset H$ κλειστο, κυρτο υποσυνολο ($\mathbb{K} \neq \emptyset$).
Εαν υπαρχει $x_0 \in \mathbb{K}$ τετοιο ωστε

$$(2) \quad \Phi(x_0) = \min_{\mathbb{K}} \Phi(x)$$

και Φ G-διαφορισιμο στο x_0, τοτε

$$(\Phi'(x_0), y - x_0)_H \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{K}$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $y \in K$, αυθαίρετο. Τότε $\forall\ 0 < \lambda \leq 1$ έχουμε $\lambda y + (1-\lambda)x_0 \in K$ και λόγω (2)

$$\Phi(\lambda y + (1-\lambda)x_0) \geq \Phi(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\Phi(x_0 + \lambda(y-x_0)) - \Phi(x_0)}{\lambda} \geq 0.$$

και κατά συνέπεια

$$(\Phi'(x_0), y-x_0)_H = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Phi(x_0+\lambda(y-x_0)) - \Phi(x_0)}{\lambda} \geq 0. \qquad \square$$

<u>Εφαρμογή στην Άσκηση 18 (ii)</u>

α) <u>Κυρτότητα του Φ</u>

Αρκεί να δείξουμε την κυρτότητα της $x \to \|x\|^2$.
Δείχνουμε ενδεικτικά ότι

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2.$$

Πράγματι: $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}(x+y, x+y) = \frac{1}{4}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)\right]$

$$\leq \frac{1}{4}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|\right] \leq \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

b) Η παράγωγος της νόρμας: $\Phi'(x_0)(y) = 2(x_0, y)$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|x_0 + ty\|^2 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (x_0+ty, x_0+ty) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big[(x_0,x_0) + (y,y) + 2t($$

$= 2(x_0, y)$,

c) Κατα συνέπεια

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \|x_0 + ty - f\|^2 = 2(x_0 - f, y),$$

και εφαρμόζοντας την πρόταση έχουμε

$$(\Phi'(x_0), y - x_0) \geq 0 \quad \forall y \in C \iff$$

$$(x_0 - f, y - x_0) \overset{(*)}{\geq} 0, \quad -''- \iff$$

$$(\Pi\rho o\beta(f) - f, y - \Pi\rho o\beta(f)) \geq 0, \quad -''-$$

Θέτουμε τώρα $y = \Pi\rho o\beta(g)$:

$$(\Pi\rho o\beta(f) - f, \Pi\rho o\beta(g) - \Pi\rho o\beta(f)) \geq 0.$$

Ομοίως

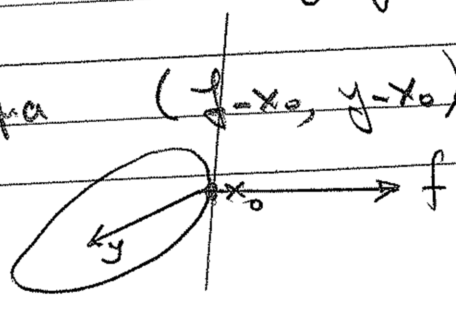
$$(\Pi\rho o\beta(g) - g, \Pi\rho o\beta(f) - \Pi\rho o\beta(g)) \geq 0.$$

Προσθέτουμε και παίρνουμε

$$\|\Pi\rho o\beta(g) - \Pi\rho o\beta(f)\|^2 \leq (g - f, \Pi\rho o\beta(g) - \Pi\rho o\beta(f))$$

$$\leq \|g - f\| \, \|\Pi\rho o\beta(g) - \Pi\rho o\beta(f)\| \quad \blacksquare$$

(*) Γεωμετρικό Νόημα $(f - x_0, y - x_0) \leq 0 \quad \forall y \in C$



αμβλεία γωνία

Ασκηση 24

Δειξτε οτι η μικροτερη δεκτη δυνατη τιμη του T ετσι ωστε

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(T) = 1, \quad \dot{x}(T) = 0,$$

κατω απο τον περιορισμο $\|u\|_{L^\infty} \leq 1$, ειναι $T = 2$.

Βρειτε μια βελτιστη $u(t)$, ετσι ωστε $\|u\|_{L^\infty} \leq 1$

(Υποδειξη: Οι συνθηκες $\int_0^T u(s)ds = 0$ και $\int_0^T (T-s)u(s)ds = 1$ συνεπαγονται $\int_0^T (1-s)u(s)ds = 1$. Απο εδω προκυπτει οτι $T > 1$ και

$$1 = \int_0^1 (1-s)u(s)ds + \int_1^T (1-s)u(s)ds \Bigg).$$

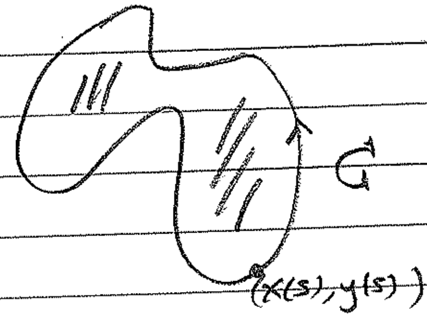
(III) Η Απόδειξη Hurwitz της Ισοπεριμετρικής Ανισότητας

Ισοπεριμετρική Ανισότητα

Έστω C απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο μήκους l, και έστω A το εμβαδόν του χωρίου που εσωκλείει. Τότε ισχύει

$$(1) \qquad l^2 - 4\pi A \geq 0$$

με την περίπτωση της ισότητας μόνον όταν η C είναι περιφέρεια κύκλου.



Απόδειξη

1. Θεωρούμε καμπύλες μήκους 2π, $s \to (x(s), y(s))$ παραμετρικοποίηση μήκους τόξου. Κατά συνέπεια $0 \leq s \leq 2\pi$. Θεωρούμε τον χώρο $L^2[-\pi,\pi]$, και συμβολίζουμε με a_n, b_n και a_n', b_n' τους συντελεστές Fourier της $x(\cdot)$ και $y(\cdot)$ αντίστοιχα. Το ορθοκανονικό σύστημα στον L^2 είναι

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2s, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2s, \dots \right\}$$

$$x(s) = \sum a_n \cos ns + b_n \sin ns, \qquad y(s) = \sum a_n' \cos ns + b_n' \sin ns$$

$$\dot{x}(s) = \sum n b_n \cos ns - n a_n \sin ns, \qquad \dot{y}(s) = \sum b_n' n \cos ns - n a_n' \sin ns$$

Η s είναι παράμετρος μήκους τόξου. Κατά συνέπεια

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

Parseval $\Longrightarrow$

$$\sum n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 a_n'^2 + n^2 b_n'^2 = \int_0^{2\pi} \left[(\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 \right] ds$$

$\therefore$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(a_n^2 + b_n^2 + a_n'^2 + b_n'^2 \right) = 2\pi \qquad (2)$$

2. Απο το Θεωρημα των Green

$$A = \int_0^{2\pi} x(s)\, \dot{y}(s)\, ds \qquad (3)$$

$$= (x, \dot{y})$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(a_n b_n' - b_n a_n' \right).$$

3. (2), (3) $\Longrightarrow$

$$2\pi - 2A = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \left(\cancel{a_n^2} + \cancel{b_n^2} + \cancel{a_n'^2} + \cancel{b_n'^2} \right) - 2n \left(a_n b_n' - b_n a_n' \right) \right]$$

(Παρατηρουμε $(n a_n)^2 + (b_n')^2 - 2n a_n b_n' = (n a_n - b_n')^2$

$(n b_n)^2 + (a_n')^2 + 2n b_n a_n' = (n b_n + a_n')^2$

$$(n a_n - b_n')^2 + (n b_n + a_n')^2 + n^2 b_n'^2 - b_n'^2 + n^2 a_n'^2 - a_n'^2 \Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(na_n - b_n')^2 + (nb_n + a_n')^2 + (n^2-1)(a_n'^2 + b_n'^2) \right] \geq 0$$

Κατα συνεπεια

$$A \leq \pi$$

4. Εξεταζουμε την περιπτωση της ισοτητος.

$$(na_n - b_n') = 0, \quad (nb_n + a_n') = 0, \quad \underset{n \geq 2}{a_n' = b_n' = 0}$$

$$\therefore \quad a_1 - b_1' = 0, \quad b_1 + a_1' = 0$$

με ολους τους υπολοιπους συντελεστες μηδεν

$\therefore$

$$x(s) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{a_1}{\sqrt{\pi}} \cos s + \frac{b_1}{\sqrt{\pi}} \sin s$$

$$y(s) = \frac{a_0'}{\sqrt{2\pi}} - \frac{b_1}{\sqrt{\pi}} \cos s + \frac{a_1}{\sqrt{\pi}} \sin s.$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(x - a_0/\sqrt{2\pi}\right)^2 + \left(y - a_0'/\sqrt{2\pi}\right)^2 = \frac{a_1^2 + b_1^2}{\pi}$$

$\square$