Συμμετρίες βαθμίδας

Κοντούδη Κωνσταντίνα

29/01/2008

Μηχανική σημειακών σωματιδίων

⇒ Ένα σύστημα σημειακών σωματιδίων μπορεί να περιγραφεί μέσω της Λαγκρανζιανής

$$L \equiv T - V$$

⇒Η L εξαρτάται από τις κανονικές μεταβλητές q_i, τις παραγώγους τους $\dot{q}_i = dq_i/dt$ και το χρόνο.

⇒ Η εξέλιξη του συστήματος δίνεται μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

⇒Γενικεύουμε για πεδία

$$q_i(t) \longrightarrow \Phi(t, x)$$

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, x)$$

⇒ Η δράση της θεωρίας θα είναι:

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L}\left(\Phi, \partial_\mu \Phi, x\right) d^4 x$$

⇒ Εφαρμόζουμε λογισμό μεταβολών στη δράση. Μεταβάλουμε τα πεδία ως:

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi(x) + \delta\Phi(x)$$

και προκύπτει η μεταβολή στη δράση:

$$\delta S = \int_\Omega \delta \mathcal{L} d^4 x$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta(\partial_\mu \Phi)$$

Λογισμός μεταβολών

$\Rightarrow$ Ισχύει

$$\delta \partial_\mu \Phi = \partial_\mu (\delta \Phi)$$

$$\delta S = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu (\delta \Phi) \right] d^4 x$$

$\Rightarrow$Κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση

$$\delta S = \int_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) \right] \delta \Phi d^4 x + \int_{\partial \Omega} \partial_\mu \Phi \delta \Phi \eta^{\mu\nu} d\sigma_\nu$$

όπου εφαρμόσαμε το θεώρημα του Gauss

$$\int_\Omega \partial_\nu \left(\partial_\mu \Phi \delta \Phi \right) \eta^{\mu\nu} d^4 x = \int_{\partial \Omega} \partial_\mu \Phi \delta \Phi \eta^{\mu\nu} d\sigma_\nu$$

Λογισμός μεταβολών-Εξίσωση κίνησης πεδίων

$\Rightarrow$ Από την απαίτηση $\delta S = 0$ έχουμε

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0$$

$\Rightarrow$ Γενίκευση στην περίπτωση που η λαγκρανζιανή εξαρτάται από πολλά πεδία

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} = 0$$

Θεώρημα Noether

⇒Μετασχηματισμός σε απειροστή μορφή

$$\Phi(x) \longrightarrow \Phi'(x) = \Phi(x) + \alpha(x)\Phi(x)$$

⇒Έχουμε συμμετρία αν αφήνει αμετάβλητες τις εξισώσεις κίνησης⇔ Η λαγκρανζιανή υπό τη δράση του μετασχηματισμού αυτού αλλάζει το πολύ κατά μία 4-απόκλιση :

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + \partial_\mu K^\mu$$

⇒Η μεταβολή στη δράση είναι:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\delta\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu(\delta\Phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Phi}\alpha\Phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Phi)}\partial_\mu(\alpha\Phi)$$

Θεώρημα Noether

⇒Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \alpha \Phi \right) = \partial_\mu K^\mu$$

⇒Άρα

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \Rightarrow \frac{dj}{dt} + \nabla \vec{j} = 0$$

όπου

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \alpha \Phi - K^\mu$$

⇒ Για κάθε συμμετρία της λαγκρανζιανής υπάρχει ένα διατηρούμενο ρεύμα j^μ.

Θεώρημα Noether

$\Rightarrow$Η ποσότητα Q διατηρείται

$$Q \equiv \int_{\substack{\text{όλος}\\ \text{ο χώρος}}} j^{o}\, d^3x$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int j^{o}\, d^3x = \int \frac{dj^{o}}{dt} d^3x = -\int \vec{\nabla}\vec{j}\, d^3x = -\int_{\text{σύνορο}} \vec{j}\, d\vec{s} = 0$$

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

⇒ Τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒Ο τανυστής $F^{\mu\nu}$ ορίζεται ως:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu}$$

όπου $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$ είναι το 4-δυναμικό και $\varphi, \vec{A}$ είναι το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό αντίστοιχα.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

⇒Λαγκρανζιανή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^{\mu} A_{\mu}$$

όπου $j^{\mu} = (\rho, \vec{j})$

⇒Θεωρούμε κάθε συνιστώσα του 4-δυναμικού ως δυναμική μεταβλητή

$$\delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \frac{\partial(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})}{\partial(\partial_{\kappa} A_{\lambda})} \delta(\partial_{\kappa} A_{\lambda})$$

$$\delta(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \delta(\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} F_{\mu\nu}) = 2\eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \delta F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}$$

$$\delta F_{\mu\nu} = \delta(\partial_{\mu} A_{\nu}) - \delta(\partial_{\nu} A_{\mu})$$

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$\delta(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = 2[F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu) - F^{\mu\nu}\delta(\partial_\nu A_\mu)] =$$
$$2[F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu) + F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu)] = 4F^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu A_\nu)$$

$$\frac{\partial(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})}{\partial(\partial_\kappa A_\lambda)} = 4F^{\kappa\lambda}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu, \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu}$$

$\Rightarrow$ Εξισώσεις κίνησης

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Leftrightarrow \nabla\vec{E} = \rho, \nabla\times\vec{B} = \vec{j} + \partial\vec{E}/\partial t$$

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

⇒Ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ικανοποιεί την σχέση:

$$\partial_\kappa F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\kappa} + \partial_\mu F_{\kappa\lambda} = 0$$

Ισοδύναμη με: $\nabla \vec{B} = 0$ και $\nabla \times \vec{E} = -\partial B / \partial t$.

⇒ Μετασχηματισμοί βαθμίδας ηλεκτρομαγνητισμού

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$$

⇒ Για τον μετασχηματισμένο τανυστή έχουμε:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \chi) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \chi) = F^{\mu\nu}$$

Κβαντική ηλεκτροδυναμική

⇒Εξίσωση Dirac:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0$$

όπου ψ είναι ένας σπίνορας.

⇒Οι γ^{μ} είναι 4x4 πίνακες που ικανοποιούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης:

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}$$

⇒Λαγκρανζιανή πυκνότητα από την οποία προκύπτει η εξίσωση Dirac:

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi$$

όπου $\overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}\gamma^{o}$.

Κβαντική ηλεκτροδυναμική

⇒Θεωροούμε τα πεδία ψ και $\overline{\psi}$ ως ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\psi})} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overline{\psi}} = i\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\psi$$

⇒Εξισώσεις κίνησης:

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\psi = 0$$

⇒Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης ως προς το πεδίο ψ προκύπτει η συζυγής εξίσωση Dirac.

Κβαντική ηλεκτροδυναμική

⇒Ηλεκτρόνιο που αλληλεπιδρά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m)\,\psi = 0$$

⇒Αντίστοιχη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_I = i\overline{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi$$

⇒Η Λαγκρανζιανή ελεύθερου σωματιδίου του πεδίου Dirac είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς της μορφής:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha}\psi$$
$$\overline{\psi} \to \overline{\psi}' = e^{-i\alpha}\overline{\psi}$$

⇒ Σε απειροστή μορφή

$$\psi \to \psi' = (1 + i\alpha)\psi$$
$$\overline{\psi} \to \overline{\psi}' = (1 - i\alpha)\overline{\psi}$$

⇒Διατηρούμενο ρεύμα σύμφωνα με το θεώρημα της Noether:

$$j^{\mu} = e\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\psi)} i\psi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\overline{\psi})} i\overline{\psi}\right) = -e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$$

Κβαντική ηλεκτροδυναμική - Συμμετρία βαθμίδας

⇒ Τοπικοί μετασχηματισμοί φάσης

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha(x)}\psi$$
$$\overline{\psi} \to \overline{\psi}' = e^{-i\alpha(x)}\overline{\psi}$$

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi$$

⇒ Ο πρώτος όρος μετασχηματίζεται ως:

$$\partial_\mu\psi' \to e^{i\alpha}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha}\partial_\mu\alpha\psi$$

⇒ Ορίζουμε μια καινούρια συναλλοίωτη παράγωγο:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu$$

Κβαντική ηλεκτροδυναμική - Συμμετρία βαθμίδας

⇒Θα πρέπει η συναλλοίωτη παράγωγος να μετασχηματίζεται ως:

$$D_\mu\psi \to D'_\mu\psi' = e^{i\alpha}D_\mu\psi$$

$$e^{i\alpha}\partial_\mu\psi + ie^{i\alpha}\partial_\mu\alpha\psi - iee^{i\alpha}A'_\mu\psi = e^{i\alpha}(\partial_\mu\psi - ieA_\mu\psi) \Rightarrow$$

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha$$

⇒ Το διανυσματικό πεδίο που εισαγάγαμε ονομάζεται *πεδίο βαθμίδας* μετασχηματίζεται όπως το 4-δυναμικό κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας στη ηλεκρομαγνητική θεωρία.

⇒ Εισάγουμε στην ελέυθερη Λαγκρανζιανή την συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + e\overline{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + e\overline{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi$$

⇒Ο δεύτερος όρος μπορεί να γραφτεί στη μορφή $-j^{\mu}A_{\mu}$ όπου $j^{\mu} = -e\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ είναι το ρεύμα για το ελέυθερο σωματίδιο.

⇒Τελική Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + e\overline{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

⇒Το πεδίο βαθμίδας δεν έχει μάζα. Ο όρος μάζας $\frac{1}{2}mA_{\mu}A^{\mu}$ δεν είναι αναλλοίωτος σε μετασχηματσιμούς βαθμίδας.
⇒*Η απαίτηση για αναλλοιώτητα της Λαγρανζιανής σε τοπικούς μετασχηματισμούς φάσης μας οδήγησε από την ελέυθερη θεωρία στην κβαντική ηλεκτροδυναμική.*