Μη Αβελιανές Θεωρίες Βαθμίδας – Μηχανισμός Higgs – Η G.W.S θεωρία για τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις

Εργασία στα πλαίσια του μαθήματος των στοιχειωδών σωματιδίων

Επιβλέπων καθηγήτρια: Στασινάκη

Παρασκευόπουλος Σωτήρης

Μη Αβελιανή αναλλοιώτητα Βαθμίδας

Για την περιγραφή της αναλλοιώτητας σε μετασχηματισμούς βαθμίδας μελετάμε αρχικά την Lagrangian της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής:

$$L_{Q.E.D} = \overline{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m\right)\Psi - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2$$

όπου: $D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} - ieA_{\mu}(x)$

Η παραπάνω Lagrangian είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$\Psi(x) \to e^{ia(x)}\Psi(x)$$

Με το πεδίο $A_{\mu}(x)$ να μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον νόμο:

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) - \frac{1}{e}\partial_{\mu}a(x)$$

Ξεκινώντας λοιπών από το πεδίο μιγαδικό Dirac και απαιτούμε την αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας $\Psi(x) \to e^{ia(x)}\Psi(x)$ την οποία έχουμε ανάγει πλέον σε μία αρχή.

Αυτός ο μετασχηματισμός είναι ουσιαστικά μια στροφή κατά γωνία $a(x)$. Το ερώτημα που γεννάται είναι πως μπορούμε να γράψουμε μια Lagrangian που να είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Όσον αφορά όρους που δεν περιέχουν παραγώγους, κάτι τέτοιο δεν αποτελεί πρόβλημα, καθώς οι φάσεις εξουδετερώνονται. Για παράδειγμα έστω ο όρος μάζας για τα φερμιόνια:

$$m\overline{\Psi}(x)\Psi(x)$$

είναι global αναλλοίωτος και η επιπλέον απαίτηση για τοπική αναλλοιώτητα δεν μας δίνει κάποιον επιπλέον περιορισμό.

Όμως η δυσκολία προκύπτει όταν προσπαθήσουμε να γράψουμε όρους στην Lagrangian που περιέχουν παράγώγους. Πράγμα αναγκαίο για να εκφραστεί η κινητική ενέργεια των πεδίων.

Η παράγωγος του $\Psi(x)$ στη διεύθυνση του ανύσματος n^{μ} ορίζεται με την μέθοδο του ορίου ως:

$$n^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x) = \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\Psi(x+\varepsilon n) - \Psi(x)\right]$$

Όμως αυτός ο ορισμός δεν είναι βολικός για μια θεωρία αναλλοίωτης σε τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, καθώς τα παιδία που αφαιρούνται $\Psi(x+\varepsilon n)$ και $\Psi(x)$ έχουν διαφορετικό νόμο μετασχηματισμού. Με άλλα λόγια η ποσότητα $\partial_{\mu}\Psi(x)$ δεν έχει καλή γεωμετρική ερμηνεία.

Έτσι για αυτό τον σκοπό εισάγουμε έναν παράγοντα που εξουδετερώνει τις αλλαγές μετασχηματισμού φάσης που σημειώνονται, από το ένα σημείο στο επόμενο. Και ο ποιο απλός τρόπος είναι να ορίσουμε μια βαθμωτή ποσότητα $U(y,x)$ και η οποία έχει νόμο μετασχηματισμού:

$$U(y,x) \to e^{ia(x)}U(y,x)e^{ia(x)}$$

και θέτουμε: $U(y,y)=1$

με αυτόν τον τρόπο τα αντικείμενα $\Psi(x)$ και $U(y,x)\Psi(x)$ έχουν τον ίδιο νόμο μετασχηματισμού.

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια παράγωγο με καλύτερο εννοιολογικό περιεχόμενο, που ονομάζεται συναλλοίωτη παράγωγος, ως εξής:

$$n^{\mu}D_{\mu}\Psi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\Psi(x+\varepsilon n)-U(x+\varepsilon n,x)\Psi(x)\right]$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτόν τον ορισμό χρειαζόμαστε κάποια έκφραση για τον comparator $U(y,x)$ σε σημεία απειροστά κοντά. Έτσι το ανάπτυγμα γύρω από την απόσταση των σημείων θα είναι:

$$U(x+\varepsilon n,x)=1-ie\varepsilon n^{\mu}A_{\mu}(x)+O(\varepsilon^{2})$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος θα έχει τότε την μορφή:

$$D_{\mu}\Psi(x)=\partial_{\mu}\Psi(x)+ieA_{\mu}(x)\Psi(x)$$

Με βάση αυτή τη σχέση μπορούμε να βρούμε τον νόμο μετασχηματισμού για το νέο πεδίο $A_{\mu}(x)$:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu a(x)$$

Για να ελέγξουμε αυτές τις εκφράσεις μετασχηματίζουμε το $D_\mu \Psi(x)$ και βρίσκουμε:

$$D_\mu \Psi(x) \to \left[\partial_\mu + ie\left(A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu a(x)\right)\right] e^{ia(x)}\Psi(x) =$$

$$= e^{ia(x)}\left(\partial_\mu + ieA_\mu(x)\right)\Psi(x) = e^{ia(x)} D_\mu \Psi(x)$$

Έτσι η συναλλοίωτη παράγωγος $D_\mu \Psi(x)$ μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίζεται και το πεδίο $\Psi(x)$.

Περισσότερο γενικά, η ανάλυση μας δίνει έναν τρόπο να κατασκευάσουμε όλες τις δυνατές lagrangians που είναι αναλλοίωτες κάτω από αυτή τη συμμετρία.

Για να ολοκληρώσουμε την κατασκευή μιας τέτοιας lagrangian πρέπει να βρούμε έναν όρο κινητικής ενέργειας για το πεδίο $A_\mu(x)$.

Για τον λόγο αυτό αναπτύσσουμε τον comparator $U(y,x)$ ως προς ε:

$$U(x+\varepsilon n, x) = \exp\left[-ie\varepsilon n^\mu A_\mu(x + \frac{\varepsilon}{2} n) + O(\varepsilon^3)\right]$$

Κάνουμε απειροστές μεταθέσεις γύρο από ένα τετράγωνο στις διευθύνσεις $\hat{1}$ και $\hat{2}$, και βρίσκουμε την που είναι το αποτέλεσμα των μετατοπίσεων γύρω από τις γωνίες του loop:

$$U(x) \equiv U(x, x+\varepsilon\hat{2})U(x+\varepsilon\hat{2}, x+\varepsilon\hat{1}+\varepsilon\hat{2})U(x+\varepsilon\hat{1}+\varepsilon\hat{2}, x+\varepsilon\hat{1})U(x+\varepsilon\hat{1}, x)$$

Στο όριο $\varepsilon \to 0$, θα έχουμε μια τοπικά αναλλοίωτη συνάρτηση του A_μ. Έτσι αναπτύσσοντας έχουμε:

$$U(x) = \exp\left\{-i\varepsilon e\left[-A_2\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\hat{2}\right) - A_1\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\hat{1}+\frac{\varepsilon}{2}\hat{2}\right) + A_2\left(x+\varepsilon\hat{1}+\frac{\varepsilon}{2}\hat{2}\right) + A_1\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\hat{1}\right)\right] + O(\varepsilon^3)\right\}$$

Και αν αναπτύξουμε το εκθετικό σε όρους του ε, έχουμε:

$$U(x) = 1 - i\varepsilon^2 e\left[\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)\right] + O(\varepsilon^3)$$

Άρα η κατασκευή : $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ είναι τοπικά αναλλοίωτη.

Ένα σχετικό με το παραπάνω επιχείρημα για την τοπική αναλλοιώτητα του $F_{\mu\nu}$ μπορεί να βρει κανείς και μέσω της συναλλοίωτης παραγώγου. Χρησιμοποιώντας τους νόμους μετασχηματισμού του πεδίου $\Psi(x)$ και της συναλλοίωτης παραγώγου πάνω σε αυτό $D_\mu\Psi(x)$, που είναι ίδιοι, συμπεραίνουμε και ότι ο μεταθέτης των συναλλοίωτων παραγώγων έχει ίδιο νόμο μετασχηματισμού:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right]\Psi(x) \to e^{ia(x)}\left[D_\mu, D_\nu\right]\Psi(x)$$

Ο μεταθέτης δεν είναι μια απλή παράγωγος και δίνει:

$$\begin{aligned}&\left[D_\mu, D_\nu\right]\Psi = \left[\partial_\mu, \partial_\nu\right]\Psi + ie\left(\left[\partial_\mu, A_\nu\right] - \left[\partial_\nu, A_\mu\right]\right)\Psi - e^2\left[A_\mu, A_\nu\right]\Psi = \\ &= ie\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\Psi\end{aligned}$$

διότι: $\left[\partial_\mu, \partial_\nu\right] = 0$ και $\left[A_\mu, A_\nu\right] = 0$

Άρα:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = ieF_{\mu\nu}$$

και σύμφωνα με τον παραπάνω συλλογισμό ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $F_{\mu\nu}$ πρέπει να είναι αναλλοίωτος κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Έχουμε λοιπόν τώρα συλλέξει όλα τα απαραίτητα στοιχεία για να γράψουμε την αναλλοίωτη σε τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας lagrangian για το φερμιονικό πεδίο Dirac:

$$L_4 = \overline{\Psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu}\right)\Psi - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 - c\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} - m\overline{\Psi}\Psi$$

Ο τρίτος όρος παραβιάζει τις διακριτές συμμετρίες P και T, έτσι πρέπει να τον εξαιρέσουμε, αν τις δεχόμαστε αξιωματικά.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τελεστές στις 5 και 6 διαστάσεις η αναλλοίωτη Lagrangian έχει την μορφή:

$$L_6 = ic_1\overline{\Psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Psi + c_2\left(\overline{\Psi}\Psi\right)^2 + c_3\left(\overline{\Psi}\gamma^5\Psi\right)^2 + \ldots$$

Έχουμε φτάσει τώρα σε ένα αξιοσημείωτο συμπέρασμα. Ξεκινήσαμε αξιώνοντας ότι το πεδίο του ηλεκτρονίου υπακούει στην τοπική συμμετρία. Από αυτό το αξίωμα δείξαμε ότι πρέπει να υπάρχει ένα ηλεκτροδυναμική διανυσματικό δυναμικό. Προχωρώντας η αρχή συμμετρίας προϋποθέτει ότι η ποιο γενική Lagrangian στις 4 διαστάσεις είναι η γενική μορφή L_4. Αν επιμείνουμε ότι αυτή η L είναι επίσης αναλλοίωτη κάτω από χρονική αντιστροφή ή ομοτιμία, οδηγούμαστε με μοναδικό τρόπο στην Maxwell- Dirac Lagrangian, η οποία είναι η βάση της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής.

H Lagrangian Yang-Mills

Για να προχωρήσουμε τη συζήτηση, παίρνουμε τη συμμετρία να είναι η 3-διαστατη ομάδα των στροφών O(3) ή SU(2), διότι σε αυτή την περίπτωση η απαραίτη θεωρία ομάδων είναι οικεία.

Αρχίζουμε με τη διπλέτα του Dirac:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix}$$

η οποία μετασχηματίζεται σε μια άλλη, κάτω από μια αυθαίρετη τρισδιάστατη στροφή:

$$\Psi(x) \to \exp\left(ia^i \frac{\sigma^i}{2} \right) \Psi(x)$$

όπου σ^i είναι οι πίνακες του Pauli, και υπονοείται άθροιση στους δείκτες i.

Τώρα προάγουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό σε τοπική συμμετρία, επιμένοντας η L να είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Γράφουμε τον μετασχηματισμό ως:

$$\Psi(x) \to V(x)\Psi(x)$$

όπου: $V(x) = \exp\left(ia^i(x)\frac{\sigma^i}{2} \right)$

Οπότε τώρα πάμε να κατασκευάσουμε την L με τις μεθόδους του προηγούμενου παραδείγματος.

Τώρα όμως ο αντίστοιχος comparator θα είναι ένας 2x2 πίνακας, και ο νόμος μετασχηματισμού του θα είναι:

$$U(y,x) \to V(y)U(y,x)V^{\dagger}(x)$$

Το ανάπτυγμα αυτού του πίνακα στους ερμητιανούς γεννήτορες της SU(2) είναι:

$$U(x+\varepsilon n, x) = 1 + ig\varepsilon n^{\mu} A^i{}_{\mu}\frac{\sigma^i}{2} + O(\varepsilon^2)$$

και η αντίστοιχη συναλλοίωτη παράγωγος μέσω του ορισμού που δώσαμε παραπάνω, είναι:

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA^i{}_{\mu}\frac{\sigma^i}{2}$$

διότι:

$$n^{\mu}D_{\mu}\Psi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\Psi(x+\varepsilon n)-U(x+\varepsilon n,x)\Psi(x)\right]=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left[\Psi(x)+\varepsilon n^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x)-\Psi(x)-ig\varepsilon n^{\mu}A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}\Psi(x)\right]=$$
$$=n^{\mu}\partial_{\mu}\Psi(x)-ign^{\mu}A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}\Psi(x)=n^{\mu}\left(\partial_{\mu}-igA^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}\right)\Psi(x)$$

Αυτή η συναλλοίωτη παράγωγος προϋποθέτει 3 διανυσματικά πεδία, ένα για κάθε γεννήτορα της ομάδας μετασχηματισμών.

Για να βρούμε τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων $A^{i}{}_{\mu}$ μελετάμε την απειροστή μορφή του μετασχηματισμού για τον comparator:

$$1+ig\varepsilon n^{\mu}A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}\to V(x+\varepsilon n)\left(1+ig\varepsilon n^{\mu}A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}\right)V^{\dagger}(x)$$

Η ανάπτυξη του $V(x+\varepsilon n)$ γίνεται ευκολότερα μέσω της ταυτότητας:

$$V(x+\varepsilon n)V^{\dagger}(x)=\left[\left(1+\varepsilon n^{\mu}\partial_{\mu}+O(\varepsilon^{2})\right)V(x)\right]V^{\dagger}(x)=$$
$$=1+\varepsilon n^{\mu}\left(\partial_{\mu}V(x)\right)V^{\dagger}(x)+O(\varepsilon^{2})=1+\varepsilon n^{\mu}V(x)\left(-\partial_{\mu}V^{\dagger}(x)\right)+O(\varepsilon^{2})$$

διότι $\left(\partial_{\mu}V(x)\right)V^{\dagger}(x)=+i\frac{\sigma^{i}}{2}\partial_{\mu}a(x)$ και $V(x)\left(\partial_{\mu}V^{\dagger}(x)\right)=-i\frac{\sigma^{i}}{2}\partial_{\mu}a(x)$

Έτσι για το πεδίο $A^{i}{}_{\mu}$ έχουμε τον νόμο μετασχήματισμού:

$$A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}\rightarrow V(x)\left(A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}+\frac{i}{g}\partial_{\mu}\right)V^{\dagger}(x)$$

Και για απειροστούς μετασχηματισμούς μπορούμε να αναπτύξουμε το εκθετικό και να κρατήσουμε όρους πρώτης τάξης, και ο μετασχηματισμός γίνεται:

$$A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}\rightarrow A^{i}{}_{\mu}\frac{\sigma^{i}}{2}+\frac{i}{g}\left(\partial_{\mu}a^{i}(x)\right)\frac{\sigma^{i}}{2}+i\left[a^{i}(x)\frac{\sigma^{i}}{2},A^{j}{}_{\mu}\frac{\sigma^{j}}{2}\right]$$

διότι:

$$A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} \to V(x)\left(A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu \right) V^\dagger(x) = V(x)\left(A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} \right) V^\dagger(x) + \frac{i}{g} V(x)\left(\partial_\mu\right) V^\dagger(x) =$$
$$= A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} + ia^i(x)\frac{\sigma^i}{2} A^j{}_\mu \frac{\sigma^j}{2} + A^j{}_\mu \frac{\sigma^j}{2}(-i)a^i(x)\frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu\left(a^i(x)\right)\frac{\sigma^i}{2} =$$
$$= A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g}\partial_\mu\left(a^i(x)\right)\frac{\sigma^i}{2} + i\left[a^i(x)\frac{\sigma^i}{2}, A^j{}_\mu \frac{\sigma^j}{2} \right]$$

Ο τελευταίος όρος είναι το καινούριο στοιχείο στον νόμο μετασχηματισμού και προκύπτει από την μη μεταθετικότητα των γεννητόρων της άλγεβρας.

Συνδυάζοντας αυτή την σχέση με τον νόμο μετασχηματισμού του φερμιονικού πεδίου:

$$\Psi(x) \to \left(1 + ia^i \frac{\sigma^i}{2}\right)\Psi(x) + \ldots$$

μπορούμε να ελέγξουμε τον απειροστό μετασχηματισμό της συναλλοίωτης παραγώγου:

$$D_\mu \Psi(x) = \left(\partial_\mu - igA^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} \right) \Psi(x) \rightarrow$$

$$\left(\partial_\mu - igA^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} - i\partial_\mu \left(a^i(x) \right) \frac{\sigma^i}{2} + g\left[a^i(x)\frac{\sigma^i}{2}, A^j{}_\mu \frac{\sigma^j}{2} \right] \right) \left(1 + ia^i \frac{\sigma^i}{2} \right) \Psi(x) =$$

$$= .... = \left(1 + ia^i \frac{\sigma^i}{2} \right) D_\mu \Psi(x)$$

Επίσης δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό σε πεπερασμένη μορφή:

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow D'_\mu \Psi'(x) = \left(\partial_\mu - igV(x) \left(A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} + \frac{i}{g} \partial_\mu \right) V^\dagger(x) \right) V(x) \Psi(x) =$$

$$= \left(\partial_\mu - igV(x) A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x) + V(x) \partial_\mu V^\dagger(x) \right) V(x) \Psi(x) =$$

$$= \left(\partial_\mu - igV(x) A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} V^\dagger(x) - V^\dagger(x) \partial_\mu V(x) \right) V(x) \Psi(x) =$$

$$= \left(\partial_\mu V(x) + V(x) \partial_\mu - igV(x) A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\mu V(x) \right) \Psi(x) =$$

$$= \left(V(x) \partial_\mu - igV(x) A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} \right) \Psi(x) = V(x) \left(\partial_\mu - igA^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} \right) \Psi(x) =$$

$$= V(x) D_\mu \Psi(x) \Rightarrow$$

$$D_\mu \Psi(x) \to V(x) D_\mu \Psi(x)$$

Με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό με τα προηγούμενα έχουμε λοιπόν για το μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] \Psi(x) \to V(x) \left[D_\mu, D_\nu\right] \Psi(x)$$

όμως έχουμε ότι ο μεταθέτης ισούται με:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = -igF^i{}_{\mu\nu} \frac{\sigma^i}{2}$$

όπου: $$F^i{}_{\mu\nu} \frac{\sigma^i}{2} = \partial_\mu A^i{}_\nu \frac{\sigma^i}{2} - \partial_\nu A^i{}_\mu \frac{\sigma^i}{2} - ig\left[A_\mu{}^i(x) \frac{\sigma^i}{2}, A^j{}_\nu \frac{\sigma^j}{2}\right]$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε την παραπάνω σχέση με τη βοήθεια της σχέσης μετάθεσης των πινάκων του Pauli:

$$\left[\frac{\sigma^i}{2},\frac{\sigma^j}{2}\right]=i\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}$$

τότε: $$F^i{}_{\mu\nu}=\partial_\mu A^i{}_\nu-\partial_\nu A^i{}_\mu+g\varepsilon^{ijk}A_\mu{}^i(x)A^k{}_\nu$$

Τελικά ο νόμος μετασχηματισμού για τον τανυστή του πεδίου είναι:

$$F^i{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}\rightarrow V(x)\left(F^i{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}\right)V^\dagger(x)$$

Και η απειροστή του μορφή είναι:

$$\begin{aligned}F^i{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}\rightarrow V(x)\left(F^i{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}\right)V^\dagger(x)&=F^i{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}+ia^i\frac{\sigma^i}{2}F^j{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^j}{2}+F^j{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^j}{2}(-i)a^i\frac{\sigma^i}{2}=\\&=F^i{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}+\left[ia^i\frac{\sigma^i}{2},F^j{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^j}{2}\right]\end{aligned}$$

αφού : $$V(x)=\left(1+ia^i\frac{\sigma^i}{2}+O(a^2)\right)$$

Ο $F^i{}_{\mu\nu}$ δεν είναι πλέον αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, ωστόσο μπορούμε να φτιάξουμε gauge αναλλοίωτους συνδυασμούς από το $F^i{}_{\mu\nu}$ για να τους χρησιμοποιήσουμε στην Lagrangian μας. Για παράδειγμα:

$$L = -\frac{1}{2} tr\left[\left(F^i{}_{\mu\nu}\frac{\sigma^i}{2}\right)^2\right] = -\frac{1}{4}\left(F^i{}_{\mu\nu}\right)^2$$

είναι ο gauge αναλλοίωτος όρος της κινητικής ενέργειας για το A_μ^i.

Έτσι καταλήξαμε να κατασκευάσουμε την Yang-Mills Lagrangian μας, η οποία προκύπτει απλά, αν πάρουμε την Lagrangian του Dirac και αντικαταστήσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο με την νέα.

$$L = \overline{\Psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu\right)\Psi - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 - m\overline{\Psi}\Psi$$

Μεταβάλλοντας την L βρίσκουμε τις κλασικές εξισώσεις κίνησης της θεωρίας βαθμίδας. Αυτές είναι η εξίσωση Dirac για το φερμιονικό πεδίο:

$$\frac{\delta L}{\delta\overline{\Psi}} = 0 \Rightarrow \left(i\gamma^\mu D_\mu - m\right)\Psi = 0$$

και η εξίσωση για το διανυσματικό πεδίο:

$$\partial^{\mu} F^{i}{}_{\mu\nu} + g\varepsilon^{ijk} A^{j\mu} F^{k}{}_{\mu\nu} = -g\overline{\Psi}\gamma^{\nu}\frac{\sigma^{i}}{2}\Psi$$

Ότι έχουμε κάνει μέχρι τώρα για την SU(2) γενικεύεται εύκολα για κάθε συνεχή ομάδα συμμετρίας. Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα πεδίο $\Psi(x)$ που είναι μια n-πλέτα, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω θα μετασχηματίζεται ως:

$$\Psi(x) \to V(x)\Psi(x)$$

Αναπτύσσουμε το $V(x)$ στους γεννήτορες της συμμετρίας t^{a} και έχουμε:

$$V(x) = 1 = ia^{a}t^{a} + O(a^{2})$$

παίρνουμε όλη την παραπάνω ανάλυση και αντικαθιστούμε $\frac{\sigma^{i}}{2} \to t^{a}$ σε κάθε βήμα.

Οι σχέσεις μετάθεσης στην standard form είναι:

$$\left[t^{a}, t^{b}\right] = if^{abc}t^{c}$$

όπου f^{abc} οι είναι οι σταθερές δομής της άλγεβρας.

Η συναλλοίωτη παράγωγος γίνεται:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA^a{}_\mu t^a$$

Οι νόμοι μετασχηματισμού σε απειροστή μορφή για το $\Psi(x)$ και τα $A^a{}_\mu$ είναι:

$$\Psi(x) \to \left(1 + i a^a t^a\right)\Psi(x)$$

$$A^a{}_\mu \to A^a{}_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu a^a + f^{abc} A^b{}_\mu a^c$$

Ο πεπερασμένος νόμος μετασχηματισμού έχει τη μορφή:

$$A^a{}_\mu t^a \to V(x)\left(A^a{}_\mu t^a + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)V^\dagger(x)$$

Ο μεταθέτης των συναλλοίωτων παραγώγων θα είναι αντίστοιχα:

$$\left[D_\mu, D_\nu\right] = -igF^a{}_{\mu\nu}t^a$$

όπου: $F^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a{}_\nu - \partial_\nu A^a{}_\mu + gf^{abc}A^b{}_\mu{}^i A^c{}_\nu$

Η αντίστοιχη κλασική εξίσωση κίνησης είναι:

$$\partial^\mu F^a{}_{\mu\nu} + gf^{abc}A^{b\mu}F^c{}_{\mu\nu} = -gJ^a{}_\nu$$

όπου: $J^a{}_\nu = \overline{\Psi}\gamma^\nu t^a \Psi$

είναι το καθολικά συμμετρικό ρεύμα για το φερμιονικό πεδίο.

Το gauge αναλλοίωτο Wilson loop

Στα προηγούμενα κάναμε χρήση του comparator ο οποίος μετατρέπει τον νόμο μετασχηματισμού βαθμίδας του φερμιονίου από το σημείο χ στο σημείο y. Όμως η μελέτη έγινε για την περίπτωση που τα χ και y απέχουν απειροστά. Την περίπτωση που απέχουν αρκετά την μελετούμε εδώ.

Κατασκευάζουμε το $U_P\left(z, y\right)$ όπου τώρα τα z, y δεν απέχουν απειροστά, αλλά πεπερασμένα, ακολουθώντας μία διαδρομή P . Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι το $U_P\left(z, y\right)$ δίνεται από την έκφραση:

$$U_P\left(z, y\right) = \exp\left[-ie\int_P dx^{\mu} A_{\mu}(x)\right]$$

Το αντικείμενο αυτό ονομάζεται γραμμή Wilson.

Μια ιδιότητα της γραμμής Wilson είναι ότι εξαρτάται από την διαδρομή P. Αν το P είναι μια κλειστή διαδρομή, που γυρνάει στο y, τότε έχουμε το Wilson loop:

$$U_P\left(y, y\right) = \exp\left[-ie\oint_P dx^{\mu} A_{\mu}(x)\right]$$

Αν θέσουμε S την παράμετρο της διαδρομής P, ορίσουμε το path ordering $P\left\{\ \right\}$ έτσι ώστε στο ανάπτυγμα του εκθετικού οι μεγαλύτερες τιμές του S να μένουν στα αριστερά. Μπορούμε να γράψουμε την γραμμή Wilson ως:

$$U_P\left(z,y\right)=P\left\{\exp\left[ig\int_0^1 ds\frac{dx^\mu}{ds}A_\mu(x(s))t^a\right]\right\}$$

Η παραπάνω έκφραση είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d}{ds}U_P\left(x(s),y\right)=\left(ig\frac{dx^\mu}{ds}A_\mu(x(s))t^a\right)U_P\left(x(s),y\right)$$

και αυτή η διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί:

$$\frac{dx^\mu}{ds}D_\mu U_P\left(x,y\right)=0$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε την εξάρτηση των συναρτήσεων βαθμίδας από τα πεδία βαθμίδας. Δηλαδή ότι:

$$U_P\left(z,y,A^\nu\right)=V(z)U_P\left(z,y,A^\nu\right)V^\dagger(y)$$

Στην απειροστή εκδοχή δείξαμε ότι:

$$D_\mu\left(A^V\right)V(x)=V(x)D_\mu\left(A\right)$$

Για να επιχειρηματολογήσουμε για την απαίτηση μας, η παραπάνω ποσότητα να είναι εκ κατασκευής τοπικά αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας, χρησιμοποιούμε το θεώρημα Stokes για να ξαναγράψουμε το Wilson loop σαν:

$$U_P\left(y,y\right)=\exp\left[-i\frac{e}{2}\int_\Sigma d\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]$$

Όπου βλέπουμε έναν γενικό τρόπο για να φτιάχνουμε gauge αναλλοίωτα από το $F_{\mu\nu}$.

Και το Wilson loop και η Wilson line, μπορούν να γενικευθούν στην μη αβελιανή περίπτωση, αποκτώντας επιπρόσθετες ιδιότητες εξαιτίας της μη μεταθετικότητας των γεννητόρων.

Ας υπολογίσουμε αρχικά την Wilson line. Η Wilson line σχετίζετε με μια κλειστή διαδρομή, που επιστέφοντας στο y μετασχηματίζει μόνο την παράμετρο βαθμίδας στο y, παρά ταύτα δεν είναι ένα αναλλοίωτο βαθμίδας:

$$U_P\left(y,y\right)\to V(y)U_P\left(y,y\right)V^\dagger(y)$$

Αναπτύσσοντας σε δεύτερη τάξη μπορούμε να βρούμε:

$$U_P\left(x,x\right)=1+ig\varepsilon^2 F_{12}{}^{a}(x)t^a+O(\varepsilon^3)$$

Για να μετατρέψουμε την Wilson line πάνω σε μια κλειστή διαδρομή, σε πραγματικό αναλλοίωτο βαθμίδας, παίρνουμε το ίχνος για το οποίο ισχύει:

$$trU_P\left(x,x\right)\to trU_P\left(x,x\right)$$

Έτσι για την μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας ορίζουμε το Wilson loop να είναι το ίχνος της Wilson line γύρω από μια κλειστή διαδρομή.

Ας υπολογίσουμε αναλυτικότερα το $trU_P\left(x,x\right)$ για την περίπτωση της SU(2) ομάδας βαθμίδας.

Αναπτύσσοντας τον comparator έχουμε:

$$U(\varepsilon)=\exp\left[i\left(\varepsilon\beta^i+\varepsilon^2\gamma^i+\ldots\right)\frac{\sigma^i}{2}\right]=$$
$$=1+i\left(\varepsilon\beta^i+\varepsilon^2\gamma^i+\ldots\right)\frac{\sigma^i}{2}-\frac{1}{2}\left(\varepsilon\beta^i\varepsilon\beta^j+\ldots\right)\frac{\sigma^i}{2}\frac{\sigma^j}{2}+\ldots$$

Και οι πίνακες του Pauli, επειδή είναι αιχνοι ικανοποιούν την σχέση:

$$tr\left[\sigma^i,\sigma^j\right]=2\delta^{ij}$$

Άρα έχουμε:

$$trU(\varepsilon) = 2 - \frac{1}{4} g^2 \varepsilon^4 \left(\beta^i\right)^2 + O(\varepsilon^5)$$

Εφαρμόζοντας αυτή την σχέση για το $trU_P\left(x,x\right)$ έχουμε:

$$trU_P\left(x,x\right) = 2 - \frac{1}{4} g^2 \varepsilon^4 \left(F_{12}{}^i\right)^2 + O(\varepsilon^5)$$

Έτσι η αναλλοιώτητα βαθμίδας του $\left(F_{\mu\nu}{}^i\right)^2$ μπορεί να παραχθεί από ένα γεωμετρικό επιχείρημα, όπως και στην αβελιανή περίπτωση. Όπως θα δειχθεί και από τα επόμενα το ίδιο επιχείρημα ισχύει για κάθε ομάδα βαθμίδας.

Βασικά στοιχεία επάνω στις Άλγεβρες Lie.

Σε αυτό το κομμάτι μελετάμε τα βασικά στοιχεία των συνεχών ομάδων, για να μπορούμε τα χρησιμοποιήσουμε αποδοτικότερα στις θεωρίες βαθμίδας.

Το απειροστό στοιχείο της ομάδας g μπορεί να γραφεί:

$$g(a) = 1 + i a^a T^a + O(a^2)$$

Οι T^a είναι ερμητιανοί τελεστές και ονομάζονται γεννήτορες της ομάδας συμμετρίας.

Οι μεταθετικές σχέσεις των γεννητόρων μπορούν να γραφούν:

$$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c$$

Οι αριθμοί f^{abc} ονομάζονται σταθερές δομής της ομάδας.

Ο διανυσματικός χώρος που προκύπτει, ονομάζεται άλγεβρα Lie.

Οι παραπάνω σχέσεις μετάθεσης και η ταυτότητα:

$$\left[T^a,\left[T^b,T^c\right]\right]+\left[T^b,\left[T^c,T^a\right]\right]+\left[T^c,\left[T^a,T^b\right]\right]=0$$

οδηγούν τις σταθερές δομής να υπακούουν στη σχέση:

$$f^{adl}f^{bcd}+f^{bdl}f^{cad}+f^{cdl}f^{abd}=0$$

που ονομάζεται ταυτότητα Jacobi.

Ταξινόμηση στις άλγεβρες Lie.

Για την εφαρμογή στις θεωρίες βαθμίδας, η τοπική συμμετρία είναι κανονικά ένας μοναδιακός μετασχηματισμός ενός συνόλου πεδίων. Έτσι πρώτιστα ενδιαφερόμαστε για τις άλγεβρες Lie που έχουν πεπερασμένης διάστασης ερμητιανές αναπαραστάσεις οδηγώντας σε πεπερασμένης διάστασης μοναδιακές αναπαραστάσεις για την αντίστοιχη ομάδα Lie. Υποθέτουμε επίσης ότι ο αριθμός των γεννητόρων είναι πεπερασμένος . Τέτοιες άλγεβρες Lie ονομάζονται συμπαγείς (compact), εξαιτίας αυτών των συνθηκών υποδηλώνεται ότι η ομάδα Lie είναι πεπερασμένης διάστασης συμπαγής πολλαπλότητα (Manifold).

1. ***<u>Μοναδιακοί μετασχηματισμοί N-διάστατων ανυσμάτων.</u>***

Έστω ξ και η μιγαδικά N-ανύσματα. Ένας γενικός μετασχηματισμός θα έχει τότε τη μορφή:

$$n_a \to U_{ab} n_b \qquad\qquad \xi_a \to U_{ab} \xi_b$$

Λέμε ότι αυτός ο μετασχηματισμός είναι μοναδιακός (unitary) αν διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο $n_a^* \xi_a$. Ο απλός μετασχηματισμός φάσης:

$$\xi_a \to e^{ia} \xi_a$$

Από μια U(1) υποομάδα που μετατίθεται με όλους τους άλλους μετασχηματισμούς, διαγράφουμε αυτή την υποομάδα για να γράψουμε μια απλή ομάδα Lie, την επονομαζόμενη SU(N) που αποτελείται από όλους τους NxN μοναδιαίους μετασχηματισμούς που ικανοποιούν την συνθήκη:

$$\det(U) = 1$$

Οι γεννήτορες της SU(N) αναπαρίστανται από NxN ερμητιανούς πίνακες t^a , μαζί με τη συνθήκη ότι είναι ορθογώνιοι στον γεννήτορα του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$tr\left[t^a\right] = 0$$

Υπάρχουν $N^2 - 1$ ανεξάρτητοι γεννήτορες που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες

2. ***Ορθογώνιοι μετασχηματισμοί Ν διάστατων ανυσμάτων.***

Αυτή είναι η υποομάδα των NxN μοναδιαίων μετασχηματισμών που διατηρούν το συμμετρικό εσωτερικό γινόμενο:

$$n_a E_{ab} \xi_b \quad \text{με} \quad E_{ab} = \delta_{ab}$$

Αυτό είναι το συνηθισμένο διανυσματικό γινόμενο, και για αυτό η ομάδα αυτή είναι η ομάδα των στροφών στις N-διαστάσεις, SU(N). (Προσθέτοντας και την ανάκλαση έχουμε την ομάδα O(N).) Υπάρχει μια ανεξάρτητη στροφή που σχετίζεται με το κάθε επίπεδο στις N-διαστάσεις, έτσι η SU(N) έχει $N(N-1)/2$ γεννήτορες.

3. ***<u>Συμπλεκτικοί μετασχηματισμοί N-διαστατων ανυσμάτων.</u>***

Αυτή είναι η υποομάδα των NxN μοναδιαίων μετασχηματισμών, για N αρτιο, που διατηρούν το αντισυμμετρικό εσωτερικό γινόμενο:

$$n_a E_{ab} \xi_b \qquad \text{με} \qquad E_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Όπου τα στοιχεία του πίνακα είναι N/2 x N/2 blocs. Αυτή η ομάδα ονομάζεται $S_p(N)$ και έχει $N(N+1)/2$ γεννήτωρες.

Πέρα από αυτές τις 3 οικογένειες, υπάρχουν ακόμη 5 άλγεβρες Lie, που ορίστηκαν στο σύστημα Cartan σαν G_2, F_4, E_6, E_7, E_8. Από αυτές, οι E_6 και E_8 βρίσκουν εφαρμογή σαν ομάδες τοπικής συμμετρίας σε ενδιαφέροντα ενοποιημένα πρότυπα των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων. Τέλος πάντων, δεν θα μελετήσουμε αυτές τις ειδικές ομάδες περισσότερο σε αυτή την εργασία. Στην πραγματικότητα, τα περισσότερα παραδείγματα εμπλέκουν μόνο SU(N) ομάδες.

Αναπαραστάσεις

Καθώς έχουμε καθορίσει την ομάδα τοπικής συμμετρίας, τα πεδία που εμφανίζονται στην Lagrangian μετασχηματίζονται περισσότερο φυσικά σύμφωνα με μια πεπερασμένης διάστασης μοναδιαία αναπαράσταση αυτής της ομάδας. Έτσι στα επόμενα αναζητούμε συστηματικά όλες αυτές τις αναπαραστάσεις των αλγεβρών Lie. Ενθυμούμενοι ότι για την SU(2) ομάδα, οι αναπαραστάσεις μπορούν να κατασκευαστούν απευθείας από τις σχέσεις μετάθεσης, χρησιμοποιώντας τελεστές ανάβασης και κατάβασης J_+ και J_- αντίστοιχα. Αυτή η κατασκευή μπορεί να γενικευθεί για την εύρεση πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεων κάθε συμπαγούς άλγεβρας Lie. Σε αυτή την εργασία τέλος πάντων, θα ασχοληθούμε με σχετικά απλές αναπαραστάσεις των οποίων την δομή μπορούμε να εξάγουμε με λιγότερο φορμαλιστικές μεθόδους.

Πριν συζητήσουμε για τις αναπαραστάσεις των αλγεβρών Lie, θα πρέπει να κάνουμε μια ανασκόπηση μερικών γενικών όψεων των αναπαραστάσεων ομάδας. Για δοσμένη ομάδα συμμετρίας G, μια πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση των ομάδων με άλγεβρα Lie είναι ένα σύνολο από d x d ερμητιανούς πίνακες t^a που ικανοποιούν τις αντίστοιχες σχέσεις μετάθεσης. Το μέγεθος d είναι η διάσταση της αναπαράστασης. Μια αυθαίρετη αναπαράσταση μπορεί γενικά να αναλυθεί, βρίσκοντας μια βάση στην οποία όλες οι αναπαραστάσεις είναι ταυτόχρονα block-diagonal. Μέσω αυτής της αλλαγής βάσης, μπορούμε να γράψουμε την αναπαράσταση σαν το ευθύ άθροισμα από μη-αναγώγιμες (irreducible) αναπαραστάσεις. Ορίζουμε τους πίνακες αναπαράστασης στην μη-αναγώγιμη αναπαράσταση r με $t^a{}_r$.

Είναι καθιερωμένη πρακτική να προσαρμόζουμε μια συνθήκη κανονικοποίησης για τους πίνακες $t^a{}_r$, η οποία να βασίζεται στα ίχνη των γινομένων τους. Αν η άλγεβρα Lie είναι ημι-απλή, οι πίνακες $t^a{}_r$ είναι traceless. Σκεφτόμενοι τέλος πάντων, το ίχνος του γινομένου δύο πινάκων γράφουμε:

$$tr\left[t^{a}{}_{r},t^{b}{}_{r}\right]\equiv D^{ab}$$

Καθώς οι πίνακες των γεννητόρων είναι ερμητιανοί, ο πίνακας D^{ab} είναι σίγουρα θετικός. Ας διαλέξουμε μια βάση για τους γεννήτορες έτσι ώστε αυτός ο πίνακας να είναι ανάλογος της μονάδας. Μπορεί να δειχθεί ότι, αν αυτό ισχύει για μια μη αναγώγιμη αναπαράσταση, τότε είναι αλήθεια για όλες τις μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις. Έτσι σε αυτή τη βάση:

$$tr\left[t^{a}{}_{r},t^{b}{}_{r}\right]=C(r)\delta^{ab}$$

όπου $C(r)$ είναι μια σταθερά για κάθε αναπαράσταση r. Η παραπάνω εξίσωση μαζί με τις σχέσεις μετάθεσης οδηγούν στια ακόλουθες αναπαραστάσεις με σταθερές δομής:

$$f^{abc}=-\frac{i}{C(r)}tr\left\{\left[t^{a}{}_{r},t^{b}{}_{r}\right]t^{c}{}_{r}\right\}$$

Αυτή η εξίσωση υποδηλώνει ότι το είναι τελείως αντισυμμετρικό.

Για κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση r της G, υπάρχει μια αντίστοιχη συζυγής αναπαράσταση $\bar{r}$. Η αναπαράσταση r οδηγεί σε απειροστό μετασχηματισμό:

$$\Phi\rightarrow\left(1+ia^{a}t^{a}{}_{r}\right)\Phi$$

Το μιγαδικό συζυγές αυτού του μετασχηματισμού είναι:

$$\Phi^{*} \to \left(1 - i a^{a} (t^{a}{}_{r})^{*}\right) \Phi^{*}$$

πρέπει επίσης να είναι το απειροστό στοιχείο μιας αναπαράστασης της G. Έστι η συζυγής αναπαράσταση της r έχει πίνακες αναπαράστασης:

$$t^{a}{}_{\bar{r}} = -\left(t^{a}{}_{r}\right)^{*} = -\left(t^{a}{}_{r}\right)^{T}$$

Επειδή $\Phi\Phi^{*}$ είναι αναλλοίωτο σε μοναδιακούς μετασχηματισμούς, είναι πιθανό ο συνδυασμός πεδίων μετασχηματιζομένων στις αναπαραστάσεις r και $\bar{r}$ να αποτελεί μια αναλλοίωτη ομάδα.

Είναι πιθανό η αναπαράσταση $\bar{r}$ να μπορεί να είναι ισοδύναμη με την r , αν υπάρχει ένας μοναδιακός μετασχηματισμός U, τέτοιος ώστε:

$$t^{a}{}_{\bar{r}} = U t^{a}{}_{r} U^{\dagger}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι η αναπαράσταση r είναι πραγματική. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένας πίνακας τέτοιος ώστε, αν η και ξ ανήκουν στην αναπαράσταση r, ο συνδυασμός:

$$G_{ab} n_{a} \xi_{b}$$

να είναι ένα αναλλοίωτο. Είναι χρήσιμο μερικές φορές να ξεχωρίσουμε την περίπτωση στην οποία G_{ab} είναι συμμετρικός από αυτή στην οποία G_{ab} είναι αντισυμμετρικός . Στην πρώτη περίπτωση η αναπαράσταση είναι αυστηρά πραγματική, στην τελευταία είναι ψευτοπραγματική (pseudoreal). Και οι δύο περιπτώσεις συναντώνται ήδη στην SU(2). Ο αναλλοίωτος συνδυασμός δύο ανυσμάτων είναι $u_a w_a$, έτσι το άνυσμα είαν πραγματική αναπαράσταση. Ο αναλλοίωτος συνδυασμός δύο spinors είναι $\varepsilon^{ab} n_a \xi_b$, έτσι ο spinor είναι μια pseudoeal αναπαράσταση.

Με αυτή την γλώσσα μπορούμε να συζητήσουμε τις απλούστερες αναπαραστάσεις των κλασικών ομάδων. Στην SU(N), η βασική μη αναγώγιμη αναπαράσταση (που συχνά ονομάζεται θεμελιώδης αναπαράσταση) είναι το N-διαστατο μιγαδικό άνυσμα. Για N>2 αυτή η αναπαράσταση είναι μιγαδική, έτσι ώστε υπάρχει μια δεύτερη ισοδύναμη, αναπαράσταση $\overline{N}$. (Στην SU(2) αυτή η αναπαράσταση είναι η pseudoreal spinor αναπαράσταση.) Στην SO(N) , το βασικό N-διάστατο άνυσμα είναι μια αυστηρά πραγματική αναπαράσταση. Στην $S_p(N)$, το βασικό N-διάστατο άνυσμα είναι μια pseudoreal αναπαράσταση.

Μια άλλη μη αναγώγιμη αναπαράσταση, που εμφανίζεται για κάθε απλή άλγεβρα Lie, είναι αυτή στην οποία ανήκουν οι γεννήτορες της άλγεβρας. Αυτή η αναπαράσταση ονομάζεται Adjoint representation και υποδηλώνεται από το r =G . Οι πίνακες της αναπαράστασης δίνονται από τις σταθερές δομής:

$$\left(t^b{}_G\right)_{ac} = if^{abc}$$

Με αυτό τον ορισμό, η δήλωση ότι ικανοποιεί την άλγεβρα Lie

$$\left(\left[t^b{}_G, t^c{}_G\right]\right)_{al} = if^{bcd}\left(t^d{}_G\right)_{al}$$

είναι απλά μια άλλη μορφή της ταυτότητας Jacobi.
Επειδή οι σταθερές δομής είναι πραγματικές και αντισυμμετρικές, $t^a{}_G = -\left(t^a{}_G\right)^*$
έτσι η adjoint αναπαράσταση είναι πάντα μια πραγματική αναπαράσταση. Από τις περιγραφές των ομάδων Lie που δόθηκαν παραπάνω, η διάσταση της adjoint αναπαράστασης $d\left(G\right)$ δίνεται, για τις κλασικές ομάδες, από:

$$d\left(G\right) = \begin{cases} N^2 - 1 & for \quad SU(N) \\ N(N-1)/2 & for \quad SO(N) \\ N(N+1)/2 & for \quad S_p(N) \end{cases}$$

Η ταυτοποίηση των f^{abc} σαν πίνακες αναπαράστασης μας δίνει την δυνατότητα να δούμε διορατικότερα κάποιες από τις ποσότητες που εισήχθησαν στα προηγούμενα. Η συναλλοίωτη παράγωγος που δρα σε πεδίο, στην adjoint αναπαράσταση είναι:

$$D_\mu \Phi_a = \partial_\mu \Phi_a - igA^b{}_\mu \left(t^b{}_G\right)_{ac} \Phi_c = \partial_\mu \Phi_a + gf^{abc} A^b{}_\mu \Phi_c$$

Έτσι μπορούμε να αναγνωρίσουμε την απειροστή μορφή του μετασχηματισμού βαθμίδας ενός ανυσματικού πεδίου ως:

$$A^a{}_\mu \rightarrow A^a{}_\mu + \frac{1}{g}\left(D_\mu a\right)^a$$

Η εξίσωση κίνησης του πεδίου βαθμίδας μπορεί να ξαναγραφεί σαν:

$$\left(D_\mu F_{\mu\nu}\right)^a = -gJ_\nu{}^a$$

Και στις δύο αυτές εκφράσεις, οι όροι που φαίνονται αυθαίρετοι και περιλαμβάνουν τις f^{abc} προκύπτουν φυσικά σαν κομμάτι της συναλλοίωτης παραγώγου. Μια επιπρόσθετη ταυτότητα που εξάγεται από την αντισυμμετρικότητα του διπλού μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων είναι:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\left[D_\nu, \left[D_\lambda, D_\sigma\right]\right]$$

Αυτή η ποσότητα μηδενίζεται από την ολική της αντισυμμετρία, όμοια με τα προηγούμενα. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να συμπτυχθεί στην ταυτότητα:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\left(D_\nu F_{\lambda\sigma}\right)^a = 0$$

Αυτή η εξίσωση, που ονομάζεται ταυτότητα Bianchi μιας Αβελιανής θεωρίας βαθμίδας, είναι ένα ανάλογο των ομογενών εξισώσεων Maxwell της ηλεκτροδυναμικής.

Ο Τελεστής Casimir

Στην SU(2) χαρακτηρίσαμε τις αναπαραστάσεις από την ιδιοτιμή του συνολικού του συνολικού spin J^2 . Στην πραγματικότητα, για κάθε απλή άλγεβρα Lie, ο τελεστής $T^2 = T^a T^a$ μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας:

$$\left[T^b, T^a T^a\right] = \left(if^{bac}T^c\right)T^a + T^a\left(if^{bac}T^c\right) = f^{bac}\left\{T^c, T^a\right\}$$

η οποία μηδενίζεται από την αντισυμμετρία των f^{abc}.
Με άλλα λόγια, το T^2 είναι ένα αναλλοίωτο της άλγεβρας. Αυτό υποδηλώνει ότι το T^2 παίρνει μια σταθερή τιμή σε κάθε μη αναγώγιμη αναπαράσταση. Έτσι ο πίνακας αναπαράστασης του T^2 είναι ανάλογος του μοναδιαίου πίνακα:

$$t^a{}_r t^a{}_r = C_2(r) I$$

όπου I είναι ο $d(r)\times d(r)$ μοναδιαίος πίνακας, και $C_2(r)$ μια σταθερά που ονομάζεται δευτεροβάθμιος τελεστής Casimir, για κάθε αναπαράσταση. Για την adjoint αναπαράσταση, η παραπάνω σχέση είναι βολικό να γραφεί σαν:

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}$$

Τελεστές Casimir εμφανίζονται πολύ συχνά στους υπολογισμούς επάνω στις μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας. Επιπροσθέτως, το αντίστοιχο αναλλοίωτο $C(r)$ σχετίζεται απλά με τον τελεστή Casimir. Κατά αντιπαραβολή των παραπάνω σχέσεων βρίσκουμε:

$$d(r)C_2(r) = d(G)C(r)$$

Έτσι θα ήταν χρήσιμο να υπολογίσουμε το $C_2(r)$ για τις απλούστερες SU(N) αναπαραστάσεις.

Για την SU(2), η θεμελιώδης 2-διαστατη αναπαράσταση είναι η spinor αναπαράσταση η οποία δίνετε σε όρους πινάκων του Pauli από τις:

$$t_2{}^a = \frac{\sigma^a}{2}$$

Αυτές ικανοποιούν την σχέση:

$$tr\left[t_2{}^a, t_2{}^b\right] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

Θα διαλέξουμε τους γεννήτορες της SU(N) έτσι ώστε 3 από αυτούς να είναι οι αντίστοιχοι του Pauli, δηλαδή αυτοί που θα δρουν στις δυο πρώτες συνιστώσες του N ανύσματος ξ. Μετά για κάθε πίνακα της θεμελιώδους αναπαράστασης έχουμε:

$$tr\left[t_N{}^a, t_N{}^b\right] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$$

Αυτή η σύμβαση καθορίζει τις τιμές των $C(r)$ και $C_2(r)$ για όλες τις μη αγώγιμες αναπαραστάσεις της SU(N). Για τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις N και $\overline{N}$, η $C(N)$ και η $C_2(N)$ είναι:

$$C(N) = \frac{1}{2} \quad , \quad C_2(N) = \frac{N^2-1}{2N}$$

Για να υπολογίσουμε τον τελεστή Casimir για την adjoint αναπαράσταση, κτίζουμε αυτή την αναπαράσταση από το γινόμενο των N και $\overline{N}$. Ας συζητήσουμε πρώτα το γινόμενο από μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις περισσότερο γενικά. Το ευθύ γινόμενο δύο αναπαραστάσεων r_1 και r_2 είναι μια αναπαράσταση διάστασης $d(r_1)d(r_2)$. Ένα αντικείμενο που μετατίθεται σύμφωνα με αυτή την αναπαράσταση μπορεί να γραφεί σαν ένας τανυστής Ξ_{pq}, στο οποίο ο πρώτος δείκτης μετατίθεται σύμφωνα με την r_1 και ο δεύτερος σύμφωνα με την r_2 . Γενικά τέτοια γινόμενα μπορούν να αναλυθούν σε ένα ευθύ άθροισμα από μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις. Συμβολικά, γράφουμε:

$$r_1 \times r_2 = \sum_i r_i$$

Οι πίνακες αναπαράστασης στην αναπαράσταση $r_1 \times r_2$ είναι:

$$t^a{}_{r_1\times r_2} = t^a{}_{r_1} \otimes 1 + 1 \otimes t^a{}_{r_2}$$

όπου ο πρώτος πίνακα του κάθε γινομένου δρα στον πρώτο δείκτη του Ξ_{pq} και ο δεύτερος πίνακας δρα πάνω στον δεύτερο δείκτη.
Ο τελεστής Casimir στην αναπαράσταση του γινομένου είναι:

$$\left(t^a{}_{r_1\times r_2}\right)^2 = \left(t^a{}_{r_1}\right)^2 \otimes 1 + 2t^a{}_{r_1} \otimes t^a{}_{r_2} + 1 \otimes \left(t^a{}_{r_2}\right)^2$$

Παίρνουμε το ίχνος, μιας και οι $t^a{}_{r_1}$ είναι traceless, το ίχνος του δεύτερου όρου είναι μηδέν. Τότε:

$$tr\left(t^a{}_{r_1\times r_2}\right)^2 = \left(C_2(r_1) + C_2(r_2)\right) d(r_1) d(r_2)$$

από την άλλη μεριά έχουμε ότι:

$$tr\left(t^a{}_{r_1\times r_2}\right)^2 = \sum_i C_2(r_i) d(r_i)$$

Από τις δύο τελευταίες βρίσκουμε μια χρήσιμη ταυτότητα για το $C_2(r)$.

Τώρα εφαρμόζουμε αυτή την ταυτότητα για το γινόμενο των αναπαραστάσεων N και $\overline{N}$ της SU(N). Σε αυτή την περίπτωση, ο τανυστής Ξ_{pq} μπορεί να περιέχει έναν όρο αντίστοιχο του αναλλοίωτου δ^{pq}. Οι εναπομένουσες $\left(N^2 - 1\right)$ ανεξάρτητες συνιστώσες Ξ_{pq}

μετασχηματίζονται σαν γενικοί traceless NxN τανυστές. Οι πίνακες που έχουν αυτούς τους μετασχηματισμούς συγκροτούν την adjoint αναπαράσταση της SU(N) . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$N \times \overline{N} = 1 + \left(N^2 - 1\right)$$

Για αυτή την ‘αποσύνθεση’ με βάση τις παραπάνω σχέσεις οδηγούμαστε στην ταυτότητα:

$$\left(2\frac{N^2-1}{2N}\right)N^2 = 0 + C_2(G)\left(N^2-1\right)$$

Έτσι για την SU(N):

$$C_2(G) = C(G) = N$$

Τα παραδείγματα που συζητήσαμε σε αυτή την παράγραφο, συνδυαζόμενα με βασικές ομαδοθεωρητικές έννοιες που περιγράψαμε, εμπεριέχουν ήδη αρκετή πληροφορία έτσι ώστε να ανταπεξέλθουμε στους σημαντικούς υπολογισμούς φυσικού ενδιαφέροντος στις μη Αβελιανές θεωρίες βαθμίδας.

Θεωρίες Βαθμίδας με Αυθόρμητη Ρήξη Συμμετρίας (S.S.B)

Σε αυτή την εργασία έχουμε συζητήσει τρία διαφορετικά είδη στα οποία οι συμμετρίες μπορούν να πραγματωθούν σε μια κβαντική θεωρία πεδίου. Η απλούστερη περίπτωση είναι η καθολική συμμετρία η οποία είναι προφανής, οδηγώντας σε πολλαπλέτες σωματιδίων με καθορισμένες αλληλεπιδράσεις. Μια δεύτερη πιθανότητα είναι μια καθολική συμμετρία που σπάει αυθόρμητα. Μετά τα ρεύματα συμμετρίας δεν σέβονται τη συμμετρία και τα σωματίδια δεν συνθέτουν προφανείς συμμετρικές πολλαπλέτες. Αντ' αυτού, μια τέτοια θεωρία περιέχει άμαζα σωματίδια, τα μποζόνια Goldstone, ένα για κάθε γεννήτορα της αυθόρμητα σπασμένης συμμετρίας. Η Τρίτη περίπτωση είναι αυτής της τοπικής συμμετρίας ή συμμετρίας βαθμίδας. Όπως είδαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, μια τέτοια συμμετρία απαιτεί την ύπαρξη ενός άμαζου διανυσματικού πεδίου για κάθε γεννήτορα της συμμετρίας, και οι αλληλεπιδράσεις ανάμεσα σε αυτά τα πεδία είναι ισχυρά καθορισμένες.

Έχει γίνει τώρα φυσικό να αναρωτηθούμε για ένα τέταρτο ενδεχόμενο: Τι συμβαίνει, αν εισάγουμε και την τοπική αναλλοιώτητα βαθμίδας και την αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας στην ίδια θεωρία? Σε αυτό το κεφάλαιο, θα βρούμε ότι αυτός ο συνδυασμός από συστατικά οδηγεί σε νέες δυνατότητες στην κατασκευή προτύπων κβαντικών θεωριών πεδίου. Θα δούμε ότι το φαινόμενο του αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας προϋποθέτει διανυσματικά μποζόνια βαθμίδας που αποκτούν μάζα. Τέλος πάντων, οι αλληλεπιδράσεις αυτών των μποζονίων με μάζα είναι ακόμη δεσμευμένες από την παραπάνω συμμετρία βαθμίδας, και αυτές οι συσχετίσεις μπορούν να έχουν παρατηρήσιμες συνέπειες.

Στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων, η εφαρμογή της αρχής της αυθόρμητης ρήξης τοπικής συμμετρίας είναι το τρέχον αποδεκτό πρότυπο των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Αυτό το πρότυπο που οφείλεται στους Glashow, Weinberg, και Salam εισάγεται στα επόμενα . Εκεί θα δούμε ότι το πρότυπο αυτό δίνει ένα σύνολο από ακριβείς και επιτυχείς προβλέψεις για τα φαινόμενα που απαντώνται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Είναι αξιοσημείωτο, ότι το πρότυπο αυτό επίσης ενοποιεί τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις με τον ηλεκτρομαγνητισμό σε μια απλή μεγαλύτερη θεωρία βαθμίδας.

Ο Μηχανισμός Higgs.

Σε αυτό το σημείο αναλύουμε μερικά απλά παραδείγματα θεωριών βαθμίδας με αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας. Αρχίζουμε με μια Αβελιανή θεωρία βαθμίδας και μετά μελετώνται διάφορα παραδείγματα από μη Αβελιανά πρότυπα.

Ένα Αβελιανό παράδειγμα

Σαν πρώτο παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο που συζευγνύται και με τον εαυτό του και με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Για ένα τέτοιο πεδίο έχουμε την Lagragian:

$$L = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + \left(D_\mu \Phi\right)^2 - V\left(\Phi\right)$$

με

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

Αυτή η Lagrangian είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς U(1) μετασχηματισμούς:

$$\Phi(x) \to e^{ia(x)}\Phi(x)$$

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu a(x)$$

Αν διαλέξουμε το δυναμικό στη L να έχει την μορφή:

$$V\left(\Phi\right) = -\mu^2 \Phi\Phi^* + \frac{\lambda}{2}\left(\Phi\Phi^*\right)^2$$

με $\mu^2 > 0$, το πεδίο Φ θα αποκτήσει αναμενόμενη τιμή στο κενό και η U(1) καθολική συμμετρία θα σπάσει αυθόρμητα. Το ελάχιστο αυτού του δυναμικού συντελείται στο:

$$\left\langle \Phi \right\rangle = \Phi_0 = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}$$

η σε κάθε άλλη τιμή που σχετίζεται με την U(1) συμμετρία.

Ας αναπτύξουμε την Lagrangian γύρω από την κατάσταση του κενού.

Αναλύουμε το μιγαδικό πεδίο ως:

$$\Phi(x) = \Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)\right)$$

Το δυναμικό ξαναγράφεται :

$$V\left(\Phi\right) = -\frac{1}{2\lambda}\mu^4 + \frac{1}{2}2\mu^2\Phi_1{}^2 + O(\Phi_i{}^3)$$

έτσι ώστε το πεδίο $\Phi_1(x)$ να αποκτά μάζα: $m = \sqrt{2}\mu$ και το πεδίο $\Phi_2(x)$ να είναι το μποζόνιο Goldstone.

Αλλά τώρα ας αναρωτηθούμε πως ο όρος της κινητικής ενέργειας του Φ μετασχηματίζεται. Μπορούμε να γράψουμε τον όρο της κινητικής ενέργειας του Φ ως:

$$\left(D_\mu\Phi\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Phi_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\Phi_2\right)^2 + \sqrt{2}e\Phi_0 A_\mu\partial^\mu\Phi_2 + e^2\Phi_0{}^2 A_\mu A^\mu + \ldots$$

όπου έχουμε παραλείψει όρους κυβικούς και τέταρτης τάξης των πεδίων A^μ και Φ_i. Ο τελευταίος όρος που εμφανίζεται στην L είναι ο όρος μάζας για το φωτόνιο:

$$\Delta L = \frac{1}{2}m_A{}^2 A_\mu A^\mu$$

όπου η μάζα: $m_A{}^2 = 2e^2\Phi_0{}^2$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το πρόσημο αυτού του όρου είναι το σωστό, οι φυσικές χωρικές συντεταγμένες του A^{μ} εμφανίζονται ως:

$$\Delta L = -\frac{1}{2} m_A \left(A^i\right)^2$$

με το σωστό τρόπο για έναν όρο δυναμικές ενέργειας.

Όπως έχουμε δει για την μη Αβελιανή περίπτωση, χρησιμοποιούμε το επιχείρημα ότι ένα μποζόνιο βαθμίδας δεν μπορεί να αποκτήσει μάζα, εκτός αν αυτός ο όρος σχετίζεται με κάποιον πόλο στο πλάτος σκέδασης του κενού.

Ένα πρότυπο με μια συνεχή συμμετρία που σπάει αυθόρμητα πρέπει να έχει άμαζα Goldstone μποζόνια. Αυτά τα βαθμωτά σωματίδια έχουν τους κβαντικούς αριθμούς των ρευμάτων της συμμετρίας και για αυτό έχουν ακριβώς τους σωστούς κβαντικούς αριθμούς για να εμφανίζονται σαν ενδιάμεσες καταστάσεις στην πόλωση του κενού. Στο πρότυπο που τώρα συζητούμε, μπορούμε να δούμε τους πόλους που προκύπτουν με σαφήνεια με τον παρακάτω τρόπο: ο όρος κορυφής που συζευγνει το μποζόνιο βαθμίδας με το μποζόνιο Goldstone είναι:

$$i\sqrt{2}e\Phi_0\left(-ik^{\mu}\right) = m_A k^{\mu}$$

Αν αντιμετωπίσουμε τον όρο μάζας σαν μια κορυφή στη θεωρία διαταραχών, τότε ο κυρίαρχος όρος που συνεισφέρει στο πλάτος πόλωσης του κενού δίνει την έκφραση:

$$i{m_A}^2 g^{\mu\nu} + \left(m_A k^{\mu}\right)\frac{i}{k^2}\left(-m_A k^{\nu}\right) = i{m_A}^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^2}\right)$$

Παρόλο το γεγονός ότι το Goldstone παίζει σημαντικό ρόλο στην θεωρία, δεν εκφράζει κάποιο φυσικό σωματίδιο και μπορούμε να το απομακρύνουμε με κατάλληλη επιλογή της βαθμίδας, δηλαδή να διαλέξουμε το $a(x)$ με τέτοιο τρόπο ώστε το Φ να παίρνει πραγματικές τιμές. Με αυτή την επιλογή η Lagrangian γίνεται:

$$L = -\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 - \left(\partial_\mu \Phi\right)^2 + e^2\Phi^2 A_\mu A^\mu - V\left(\Phi\right)$$

Αλγόριθμος του Μηχανισμού Higgs.

Ο μηχανισμός Higgs επεκτείνεται αυτόματα και σε συστήματα με μη Αβελιανές συμμετρίες βαθμίδας. Δεν είναι δύσκολο να παράγουμε την γενική σχέση από την οποία ένα σύνολο από αναμενόμενες τιμές στο κενό βαθμωτών πεδίων, οδηγεί στην εμφάνιση μάζας για τα μποζόνια βαθμίδας. Ας εξάγουμε αυτή τη σχέση και μετά ας την εφαρμόσουμε σε μερικά παραδείγματα.

Έστω λοιπόν ότι έχουμε ένα σύνολο από βαθμωτά πεδία Φ_i, και μια L αναλλοίωτη σε μια συνεχή ομάδα συμμετρίας G, η οποία αναπαρίσταται από τον μετασχηματισμό:

$$\Phi_i \to \left(1 + i a^a t^a\right)_{ij} \Phi_j$$

Για τους γεννήτορες της ομάδας γράφουμε:

$$t^a{}_{ij} = iT^a{}_{ij}$$

Αν προάγουμε την ομάδα συμμετρίας σε μια τοπική συμμετρία βαθμίδας, τότε η συναλλοίωτη παράγωγος των Φ_i θα είναι:

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu{}^a t^a\right)\Phi = \left(\partial_\mu + gA_\mu{}^a T^a\right)\Phi$$

Άρα ο όρος κινητικής ενέργειας θα είναι:

$$\left(D_\mu \Phi_i\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Phi_i\right)^2 + gA_\mu{}^a\left(\partial_\mu \Phi_i T^a{}_{ij}\Phi_j\right) + \frac{1}{2}g^2 A_\mu{}^a A^{b\mu}\left(T^a\Phi\right)_i\left(T^b\Phi\right)_i$$

Ας αφήσουμε τώρα τα Φ_i να αποκτήσουν αναμενόμενες τιμές στο κενό, τότε ο τελευταίο όρος έχει δομή όρου μάζας και μας δίνει:

$$\Delta L = \frac{1}{2} m_{ab}{}^2 A_\mu{}^a A^{b\mu}$$

με τον πίνακα μάζας να είναι:

$$m_{ab}{}^2 = g^2 \left(T^a \Phi_0\right)_i \left(T^b \Phi_0\right)_i$$

κάθε διαγώνιο στοιχείο του πίνακα έχει τη μορφή:

$$m_{aa}{}^2 = g^2 \left(T^a \Phi_0\right)^2 \geq 0$$

Έτσι, γενικεύοντας, όλα τα μποζόνια βαθμίδας θα αποκτήσουν θετικές μάζες. Όμως μπορεί μερικοί συγκεκριμένοι γεννήτορες T^a της G να αφήνουν αναλλοίωτο το κενό:

$$T^a \Phi_0 = 0$$

Σε αυτή την περίπτωση, οι γεννήτορες T^a δεν συνεισφέρουν στην προηγούμενη εξίσωση και το αντίστοιχο με αυτούς μποζόνιο βαθμίδας παραμένει άμαζο.

Εισάγουμε λοιπόν την αναμενόμενη τιμή στο κενό στον δεύτερο όρο της L και έχουμε για τον όρο αλληλεπίδρασης:

$$\Delta L = g^2 A_\mu{}^a \partial_\mu \Phi_i \left(T^a \Phi_0\right)_i$$

Μη Αβελιανά Παραδείγματα.

Ας εφαρμόσουμε τώρα τον γενικό φορμαλισμό σε συγκεκριμένα παραδείγματα. Έστω ότι έχουμε σαν ομάδα συμμετρίας την SU(2). Η συναλλοίωτη παράγωγος που δρα στο Φ είναι:

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu{}^a \tau^a\right)\Phi$$

όπου: $\tau^a = \dfrac{\sigma^a}{2}$

Το τετράγωνο αυτής της έκφρασης δίνει τον όρο της κινητικής ενέργειας για το πεδίο Φ.
Αν το Φ αποκτά μια αναμενόμενη τιμή στο κενό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ελευθερία της SU(2) στις στροφές για να γράψουμε αυτή την αναμενόμενη τιμή ως:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix}$$

Μετά το μποζόνιο βαθμίδας παίρνει μάζα από τον όρο:

$$\left|D_\mu \Phi\right|^2 = \frac{1}{2} g^2 \begin{pmatrix} 0 & \upsilon \end{pmatrix} \tau^a \tau^b \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix} A_\mu{}^a A^{b\mu} + \ldots$$

με τη βοήθεια των σχέσεων: $\left\{\tau^a, \tau^b\right\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}$

ο όρος μάζας γίνεται:

$$\Delta L = \frac{g^2 \upsilon^2}{8} A_\mu{}^a A^{b\mu}$$

άρα όλα τα μποζόνια βαθμίδας παίρνουν μάζα:

$$m_A = \frac{g\upsilon}{2}$$

Δηλαδή και οι τρεις γεννήτορες της SU(2) σπάνε με τον ίδιο τρόπο.

Τι συμβαίνει όμως αν πάρουμε το Φ να μετασχηματίζεται σύμφωνα με την διανυσματική αναπαράσταση της SU(2). Τότε πρέπει να εισάγουμε την συναλλοίωτη παράγωγο:

$$D_\mu \Phi_a = \partial_\mu \Phi_a + g\varepsilon_{abc} A_\mu{}^b \tau^a \Phi_c$$

Παίρνοντας το τετράγωνο αυτού του όροι έχουμε τον όρο της κινητικές ενέργειας και από εκεί έχουμε για τον όρο μάζας:

$$\Delta L = \frac{1}{2}\left|D_\mu \Phi\right|^2 = \frac{g^2}{2}\left(\varepsilon_{abc} A_\mu{}^b \left(\Phi_0\right)_c\right)^2 + \ldots$$

Αν ένα διάνυσμα της SU(2) αποκτά μια αναμενόμενη τιμή στο κενό Φ_0, και διαλέξουμε τις συντεταγμένες μας έτσι ώστε στην διεύθυνση 3 να παραμένει αναλλοίωτο, έχουμε:

$$\left\langle \Phi_c \right\rangle = \left(\Phi_0\right)_c = V\delta_{c3}$$

και από εδώ βρίσκουμε για τον όρο μάζας:

$$\Delta L = \frac{g^2}{2} V^2 \left(\varepsilon_{ab3} A_\mu{}^b\right)^2 = \frac{g^2}{2} V^2 \left(\left(A_\mu{}^1\right)^2 + \left(A_\mu{}^1\right)^2\right)$$

Έτσι τα μποζόνια που σχετίζονται με τους γεννήτορες 1 και 2 αποκτούν μάζες:

$$m_1 = m_2 = gV$$

ενώ το μποζόνιο που αντιστοιχεί στον γεννήτορα 3 παραμένει άμαζο. Και είναι δελεαστικό να ερμηνεύσουμε αυτό το πρότυπο σαν ένα πρότυπο που περιγράφει το φωτόνιο, όμως η φύση έχει διαλέξει έναν διαφορετικό από αυτόν τρόπο.

Προχωράμε σε ένα ποιο πολύπλοκο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε μια SU(3) θεωρία βαθμίδας με ένα βαθμωτό πεδίο στην adjoint αναπαράσταση. Η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου Φ παίρνει την μορφή:

$$D_\mu \Phi_a = \partial_\mu \Phi_a + g f^{abc} A_\mu{}^b \Phi_c$$

και έτσι η μάζα του πεδίου βαθμίδας προκύπτει από τον όρο:

$$\Delta L = \frac{g^2}{2}\left(f^{abc} A_\mu{}^b \Phi_c \right)^2$$

μπορούμε να γράψουμε το παραπάνω περισσότερο καθαρά, ορίζοντας την ποσότητα:

$$\Phi = \Phi_c t^c$$

όπου t^c είναι οι 3x3 traceless ερμητιανοί πίνακες που αναπαριστούν τους γεννήτορες της SU(3).

Μπορούμε να γράψουμε λοιπόν για τον όρο μάζας:

$$\Delta L = -gtr\left[\left[t^a,\Phi\right]\left[t^b,\Phi\right]\right]A_\mu{}^a A^{b\mu}$$

διότι:

$$\left[t^a,\Phi\right] = \Phi_c\left[t^a,t^c\right] = i\Phi_c f^{acb}t^b$$
$$\left[t^b,\Phi\right] = i\Phi_c f^{bca}t^a$$
$$\left[t^a,\Phi\right]\left[t^b,\Phi\right] = -f^{acb}f^{bca}t^a t^b\Phi_c{}^2$$

$$tr\left[\left[t^a,\Phi\right]\left[t^b,\Phi\right]\right] = -\Phi_c{}^2 f^{acb}f^{bca}\frac{1}{2}\delta^{ab}$$

Άρα:

$$\Delta L = -\frac{1}{2} g^2 \Phi_c{}^2 f^{acb} f^{bca} A_\mu{}^a A^{b\mu} \delta^{ab} = \frac{g^2}{2} \left(f_{abc} A_\mu{}^b \Phi_c \right)^2$$

Ας βάλουμε τώρα το Φ να αποκτά μια αναμενόμενη τιμή στο κενό :

$$\langle \Phi \rangle = \Phi_0$$

Ξέρουμε ότι το Φ_0 είναι traceless και διαλέγουμε τον προσανατολισμό:

$$\Phi_0 = |\Phi| \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

Αυτός ο πίνακας μετατίθεται με τους 4 γεννήτορες της SU(3):

$$t^a = \begin{pmatrix} \tau^a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t^8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -2 \end{pmatrix}$$

Έτσι η αναμενόμενη τιμή στο κενό, σπάει την SU(3) σε SU(2)xU(1) και αφήνει τα μποζόνια που αντιστοιχούν σε αυτούς τους 4 γεννήτορες άμαζα.

Οι εναπομείναντες γεννήτορες της SU(3) :

$$t^4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad t^5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t^6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad t^7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

αποκτούν μάζα $\quad m^2 = \left(3g\left|\Phi\right|\right)^2$

Ας ελέγξουμε το παραπάνω για έναν από αυτούς, έχουμε:

$$\left[t^4,\Phi_0\right]=\frac{\left|\Phi\right|}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&&0\\&1&\\0&&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\left[t^4,\Phi_0\right]=\frac{\left|\Phi\right|}{2}\left\{\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\right\}=\frac{\left|\Phi\right|}{2}\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&0&0\\3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left[t^4,\Phi_0\right]\left[t^4,\Phi_0\right]=\frac{|\Phi|^2}{4}\begin{pmatrix}-9&0&0\\0&0&0\\0&0&-9\end{pmatrix}$$

$$-g^2 tr\left[\left[t^4,\Phi_0\right]\left[t^4,\Phi_0\right]\right]=-g^2\frac{|\Phi|^2}{4}(-18)=\frac{1}{2}g^2 9|\Phi|^2$$

Άρα: $m^2=\left(3g|\Phi|\right)^2$

Μια άλλη πιθανή έκφραση για το Φ_0 είναι:

$$\Phi_0=|\Phi|\begin{pmatrix}1&&0\\&-1&\\0&&0\end{pmatrix}$$

Σε αυτή την περίπτωση μόνο οι t^3 και t^8 μετατίθενται με το Φ_0, έτσι η αρχική SU(3) σπάει σε U(1)xU(1) . Με αντικατάσταση, μπορούμε να προσδιορίσουμε ότι τα μποζόνια βαθμίδας που αντιστοιχούν στους εναπομείναντες γεννήτορες της SU(3) αποκτούν μάζες:

$$t^1, t^2: \quad m^2 = \left(2g\left|\Phi\right|\right)^2$$
$$t^4, t^5, t^6, t^7: \quad m^2 = \left(g\left|\Phi\right|\right)^2$$

Ακόμη μεγαλύτερες ομάδες συμμετρίας προσφέρουν μια ευρύτερη ποικιλία από πρότυπα σπασίματος συμμετρίας, και ποιο πολύπλοκους πίνακες μάζας.

Τυπική Περιγραφή του Μηχανισμού Higgs

Από το σημείο αυτό, η μελέτη μας για τον Μηχανισμό Higgs έχει βασιστεί στην ανάλυση της Lagrangian βαθμωτού πεδίου που συζεύγνυται με τα πεδία βαθμίδας. Θεωρίες βαθμωτών πεδίων παρέχουν τα απλούστερα παραδείγματα συστημάτων με αυθόρμητη ρήξη συμμετρίας, και οι ακριβείς υπολογισμοί που αφήνουν είναι χρήσιμοι για νοητικές συλλήψεις.

Για να αντεπεξέλθουμε σε αυτή την ανάλυση, θα χρειαστεί να εισάγουμε διάφορες ιδέες από την παραπάνω συζήτηση. Αρχικά θα συζητήσουμε σε γενικούς όρους τις σχέσεις ανάμεσα στα μποζόνια βαθμίδας και τα Goldstone bosons, και τα καθολικά ρεύματα. Μετά θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία για να κατασκευάσουμε τον πίνακα μάζας για τα gauge bosons χωρίς να κάνουμε απευθείας χρήση της Lagrangian.

Έστω ότι αρχικά έχουμε μια τυχαία θεωρία πεδίου L_0 με μια καθολική συμμετρία G. Μπορούμε να παράγουμε το ρεύμα Noether που σχετίζεται με την συμμετρία G μεταβάλλοντας την Lagrangian μέσω ενός τοπικού μετασχηματισμού βαθμίδας με απειροστή παράμετρο $a(x)$. Η ποιο γενική μεταβολή της L_0 πρέπει να παίρνει τη μορφή:

$$\delta L_0 = -\left(\partial_\mu a\right) J^{\mu a}$$

για κάποια σύνολα ανυσματικών τελεστών $J^{\mu a}$ που κτίζονται από τα πεδία της L_0.

Η αρχή των μεταβολών μας λέει:

$$\partial_\mu J^{\mu a} = 0$$

μπορούμε να ορίσουμε τα $J^{\mu a}$ σαν τα ρεύματα Noether της καθολικής συμμετρίας βαθμίδας.

Προάγουμε τώρα τη θεωρία μας από global σε local. Η Lagrangian σε όρους τάξης g παίρνει την μορφή:

$$L = L_0 + gA_\mu{}^a J^{\mu a} + O(A^2)$$

προσθέσαμε αυτόν τον όρο για να αντισταθμίζεται η μεταβολή εξαιτίας του μετασχηματισμού του $A_\mu{}^a$.

Αν η global συμμετρία για την L_0 είναι spontaneously broken τότε αυτή η θεωρία περιέχει Goldstone bosons. Και εδώ ο $J^{\mu a}$ είναι τελεστής δημιουργίας η καταστροφής Goldstone bosons από το κενό $\left|0\right\rangle$

Έστω η κατάσταση του Goldstone boson να είναι η $|\pi_k\rangle$ το $J^{\mu a}$ όπως είπαμε μπορεί να δημιουργεί ή να καταστρέφει Goldstone bosons, και το αντίστοιχο στοιχείο πίνακα είναι:

$$\langle 0|J^{\mu a}(x)|\pi_k(p)\rangle = -ip^{\mu}F^{a}{}_{k}e^{-ipx}$$

όπου $F^{a}{}_{k}$ είναι ένας πίνακας από σταθερές.

Τα στοιχεία του $F^{a}{}_{k}$ μηδενίζονται όταν τα α υποδηλώνουν έναν γεννήτορα που αντιστοιχεί σε μη σπασμένη συμμετρία.

Τα στοιχεία του $F^{a}{}_{k}$ που δεν μηδενίζονται συνδέουν τα ρεύματα της συμμετρίας που σπάει αυθόρμητα με τα αντίστοιχα Goldstone bosons. Επειδή τα ρεύματα διατηρούνται έχουμε:

$$0 = \partial_{\mu}\langle 0|J^{\mu a}(x)|\pi_k(p)\rangle = -p^2F^{a}{}_{k}e^{-ipx}$$

δηλαδή τα στοιχεία του πίνακα που δεν μηδενίζονται ικανοποιούν τη σχέση $p^2 = 0$, κάτι που συνεπάγεται ότι είναι massless, και αυτή είναι άλλη μια απόδειξη του θεωρήματος Goldstone.

Για τη βαθμωτή θεωρία:

$$J^{\mu a} = \partial_{\mu}\Phi_i T^{a}{}_{ij}\Phi_j$$

εισάγοντας την αναμενόμενη τιμή στο κενό έχουμε:

$$J^{\mu a} = \partial_\mu \Phi_i \left(T^a \Phi_0\right)_i$$

και οδηγούμαστε στα στοιχεία πίνακα:

$$\left\langle 0 \middle| J^{\mu a}(x) \middle| \Phi_i(p) \right\rangle = -ip^\mu \left(T^a \Phi_0\right)_i e^{-ipx}$$

και από αυτή τη σχέση μπορούμε να ορίσουμε:

$$F^a{}_i = \Phi_{0j}$$

για τον μηχανισμό Higgs στην ασθενή σύζευξη βαθμωτού πεδίου. O δείκτης i τρέχει τις συνιστώσες του πεδίου.

Αν πάρουμε ξανά την περίπτωση της SU(2) και διαλέξουμε την κατεύθυνση 3, έτσι ώστε να αφήνει το κενό αναλλοίωτο, τότε οι γεννήτορες T^1 και T^2 είναι spontaneously broken και οι συνιστώσες του πεδίου Φ^1 και Φ^2 σχετίζονται με τα Goldstone bosons, και χρησιμοποιώντας ότι:

$$\left(T^a\right)_{bc} = \varepsilon^{abc}$$

βρίσκουμε ότι: $\left(T^a \Phi_0\right)_b = \varepsilon_{abc} \left\langle \Phi^0 \right\rangle = V \varepsilon^{ba3}$

και το αντίστοιχο πλάτος πόλωσης του κενού θα είναι:

$$i\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^{2}}\right)\left(m_{ab}{}^{2}+O(k^{2})\right)$$

Το πλάτος μετατροπής ενός μποζονίου βαθμίδας σε Goldstone boson είναι:

$$-gk^{\mu}F^{a}{}_{j}$$

Η συνεισφορά του πόλου κ = 0 στην πόλωση του κενού είναι:

$$\left(gk^{\mu}F^{a}{}_{j}\right)\frac{i}{k^{2}}\left(-gk^{\nu}F^{b}{}_{j}\right)$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω με το αντίστοιχο αποτέλεσμα που είχαμε βρει

$$im_{ab}{}^{2}\left(g^{\mu\nu}-\frac{k^{\mu}k^{\nu}}{k^{2}}\right)$$

βρίσκουμε :

$$m_{ab}{}^{2}=g^{2}F^{a}{}_{j}F^{b}{}_{j}$$

Έτσι στην περίπτωση που η συμμετρία σπάει από το βαθμωτό πεδίο, αυτό το αποτέλεσμα γίνεται:

$$m_{ab}{}^{2}=g^{2}\left(T^{a}\Phi_{0}\right)_{i}\left(T^{b}\Phi_{0}\right)_{i}$$

Η θεωρία των Glashow – Weinberg – Salam για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις

Τώρα πλέον, μετά την απαραίτητη εισαγωγή στις έννοιες των τοπικών συμμετριών, και της αυθόρμητης ρήξης αυτών, είμαστε έτοιμοι να γράψουμε την spontaneously broken θεωρία βαθμίδας που δίνει τη σωστή πειραματική περιγραφή των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Ένα πρότυπο το οποίο εισήχθη από τους Glashow, Weinberg και Salam. Όπως το προηγούμενο πρότυπο της SU(2) που είδαμε, αυτό το πρότυπο μας δίνει μια ενοποιημένη περιγραφή των ασθενών με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις, στις οποίες το άμαζο φωτόνιο αντιστοιχεί σε έναν συνδυασμό των γεννητόρων της συμμετρίας που δεν έχουν σπάσει.

Ξεκινάμε ξανά με μια SU(2) θεωρία βαθμίδας. Για να σπάσει αυτή η συμμετρία αυθόρμητα εισάγουμε ένα βαθμωτό πεδίο στην spinor αναπαράσταση της SU(2). Όμως ξέρουμε ότι η θεωρία αυτή οδηγεί σε άμαζα μποζόνια. Για το λόγω αυτό εισάγουμε και μια U(1) συμμετρία βαθμίδας. Και κάτω από αυτή τη συμμετρία προσθέτουμε στο βαθμωτό πεδίο φορτίο +1/2. Έτσι ο συνολικός μετασχηματισμός βαθμίδας είναι:

$$\Phi \to e^{i a^a \tau^a} e^{i\beta/2} \Phi$$

Αν το βαθμωτό πεδίο αποκτά μια αναμενόμενη τιμή στο κενό της μορφής:

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix}$$

τότε ο μετασχηματισμός βαθμίδας με $a^1 = a^2 = 0$ και $a^3 = \beta$ αφήνει το $\langle \Phi \rangle$ αναλλοίωτο. Η θεωρία θα περιέχει ένα άμαζο μποζόνιο βαθμίδας, που αντιστοιχεί σε αυτό το συνδιασμό γεννητόρων. Τα εναπομείναντα μποζόνια βαθμίδας θα αποκτήσουν μάζες μέσω του μηχανισμού Higgs.

Μάζες των μποζονίων Βαθμίδας.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η συναλλοίωτη παράγωγος για την $SU(2)\times U(1)$ είναι:

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - igA_\mu{}^a \tau^a - i\frac{1}{2} g^{'} B_\mu \right) \Phi$$

διότι οι παράγοντες των ομάδων βαθμίδας $SU(2)$ και $U(1)$ μετατίθενται μεταξύ τους, και έχουν διαφορετικές σταθερές σύζευξης.

Οπότε για τους όρους μάζας έχουμε:

$$\Delta L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \upsilon \end{pmatrix} \left(gA_\mu{}^a \tau^a + \frac{1}{2} g^{'} B_\mu \right) \left(gA^{\mu b} \tau^b + \frac{1}{2} g^{'} B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix}$$

και βάζοντας $\tau^a = \dfrac{\sigma^a}{2}$ βρίσκουμε:

$$\Delta L = \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{4}\left[g^2 \left(A_\mu^{\ 1} \right)^2 + g^2 \left(A_\mu^{\ 2} \right)^2 + \left(-g A_\mu^{\ 3} + g^{'} B^\mu \right)^2 \right]$$

και ορίζοντας συνδυασμούς πεδίων, αντιστοιχούμε τους συντελεστές που προκύπτουν στις μάζες:

$$W_\mu^{\ \pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(A_\mu^{\ 1} \mp i A_\mu^{\ 2} \right) \quad \text{με μάζα} \quad m_W = g\frac{\upsilon}{2}$$

$$Z_\mu^{\ 0} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g^{'2}}}\left(g A_\mu^{\ 3} - g^{'} B^\mu \right) \quad \text{με μάζα} \quad m_Z = \sqrt{g^2 + g^{'2}}\,\frac{\upsilon}{2}$$

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g^{'2}}}\left(g A_\mu^{\ 3} + g^{'} B^\mu \right) \quad \text{με μάζα} \quad m_A = 0$$

Αν θέλουμε να αντιστοιχίσουμε το A_μ με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο θα πρέπει να το αντιστοιχίσουμε με το αντίστοιχο φορτίο της U(1) το Y.

Και η συναλλοίωτη παράγωγος θα γίνει:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu{}^a \tau^a - ig^{'} YB_\mu$$

με τα $W_\mu{}^{\pm}$ και Z_μ, A_μ και τους αντίστοιχους γεννήτορες έχουμε:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}\left(W_\mu{}^{+}T^{+} + W_\mu{}^{-}T^{-}\right) - i\frac{1}{\sqrt{g^2 + g^{'2}}} Z_\mu\left(g^2 T^3 - g^{'2} Y\right) - i\frac{gg^{'}}{\sqrt{g^2 + g^{'2}}} A_\mu\left(T^3 + Y\right)$$

όπου $\quad T^{\pm} = \left(T^1 \pm T^2\right)$

Από την παραπάνω συναλλοίωτη παράγωγο φαίνεται ότι το A_μ συζεύγνυται με το $\left(T^3 + Y\right)$ που μας δίνει το φορτίο.

Για να ταυτίσουμε τα παραπάνω με τον ηλεκτρομαγνητισμό θέτουμε το φορτίο του ηλεκτρονίου ως:

$$e = \frac{gg^{'}}{\sqrt{g^2 + g^{'2}}}$$

το οποίο έχει πλέον κβαντικό αριθμό : $\quad Q = T^3 + Y$

και αν ορίσουμε μια γωνία μίξης θ_W θα έχουμε:

$$\begin{pmatrix} Z^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^3 \\ B \end{pmatrix}$$

όπου $\cos\theta_W = \dfrac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$ και $\sin\theta_W = \dfrac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}$

και ο όρος σύζευξης για το Z^0 γίνεται:

$$g^2 T^3 - g'^2 Y = \left(g^2 + g'^2\right) T^3 - g'^2 Q$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ξαναγράψουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^{\;+} T^+ + W_\mu^{\;-} T^-\right) - i\frac{g}{\cos\theta_W} Z_\mu \left(T^3 - \sin^2\theta_W Q\right) - ieA_\mu\left(T^3 + Y\right)$$

όπου $g = \dfrac{e}{\sin\theta_W}$

και οι μάζες των W, Z συνδέονται ως εξής:

$$m_W = \cos\theta_W m_Z$$

Σύζευξη με τα φερμιόνια.

Η τελευταία συναλλοίωτη παράγωγος καθορίζει την ζεύξη των W, Z με τα φερμιόνια. Τα W μποζόνια κάνουν ζεύξη μόνο με αριστερόστροφης ελικότητας quarks και leptons.

Γράφουμε για την κινητική ενέργεια των φερμιονίων:

$$\overline{\Psi} i \not{\partial} \Psi = \overline{\Psi}_L i \not{\partial} \Psi_L + \overline{\Psi}_R i \not{\partial} \Psi_R$$

Έχουμε διαφορετικό υπερφορτίο για τις αριστερόστροφες και δεξιόστροφες συνιστώσες των quarks και leptons. Για τα δεξιόστροφα $T^3 = 0$ άρα $Q = Y$. Έτσι για το u_R έχουμε $Y = +2/3$ και για το e_R $Y = -1$.
Για τα αριστερόστροφα πεδία έχουμε:

$$E_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \qquad Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

με $Y=-1/2$ και $Y=+1/6$ αντίστοιχα, και $T^3=\pm\frac{1}{2}$ ανάλογα με την θέση τους.

Για τις μάζες των φερμιονίων δεν μπορούμε να γράψουμε όρους της μορφής:

$$\Delta L=-m_e\left(\overline{e_L}e_L+\overline{e_R}e_R\right)$$

γιατί δεν είναι gauge αναλλοίωτος, και αυτό συμβαίνει επειδή τα αριστερόστροφα και δεξιόστροφα (π.χ. ηλεκτρόνια) ανήκουν σε διαφορετικές αναπαραστάσεις της SU(2) και έχουν διαφορετικά U(1) φορτία.

Αν αγνοήσουμε τις μάζες των φερμιονίων, η Lagrangian για τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις θα έχει για τους όρους κινητικής ενέργειας τη μορφή:

$$L=\overline{E_L}\left(i\not{D}\right)E_L+\overline{e_R}\left(i\not{D}\right)e_R+\overline{Q_L}\left(i\not{D}\right)Q_L+\overline{u_R}\left(i\not{D}\right)u_R+\overline{d_R}\left(i\not{D}\right)d_R$$

όπου για παράδειγμα:

$$\overline{Q_L}\left(i\not{D}\right)Q_L=\overline{Q_L}i\gamma^\mu\left(\partial_\mu-igA_\mu{}^a\tau^a-i\frac{1}{6}g^{'}B_\mu\right)Q_L$$

Αν αντικαταστήσουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους έχουμε:

$$\begin{aligned}L=&\overline{E_L}\left(i\not{\partial}\right)E_L+\overline{e_R}\left(i\not{\partial}\right)e_R+\overline{Q_L}\left(i\not{\partial}\right)Q_L+\overline{u_R}\left(i\not{\partial}\right)u_R+\overline{d_R}\left(i\not{\partial}\right)d_R+\\&+g\left(W_\mu{}^+J^{\mu+}+W_\mu{}^-J^{\mu-}+Z_\mu{}^0J_Z{}^\mu\right)+eA_\mu J^\mu{}_{E.M}\end{aligned}$$

όπου:

$$J^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{v_L}\gamma^{\mu}e_L + \overline{u_L}\gamma^{\mu}d_L\right)$$

$$J^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overline{e_L}\gamma^{\mu}v_L + \overline{d_L}\gamma^{\mu}u_L\right)$$

$$J_Z{}^{\mu} = \frac{1}{\cos\theta_W}[\overline{v_L}\gamma^{\mu}\left(\frac{1}{2}\right)v_L + \overline{e_L}\gamma^{\mu}\left(-\frac{1}{2}+\sin^2\theta_W\right)e_L + \overline{e_R}\gamma^{\mu}\left(\sin^2\theta_W\right)e_R$$
$$+\overline{u_L}\gamma^{\mu}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)u_L + \overline{u_R}\gamma^{\mu}\left(-\frac{2}{3}\sin^2\theta_W\right)u_R$$
$$+\overline{d_L}\gamma^{\mu}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)d_L + \overline{d_R}\gamma^{\mu}\left(\frac{1}{3}\sin^2\theta_W\right)d_R]$$

$$J^{\mu}{}_{E.M} = \bar{e}\gamma^{\mu}(-1)e + \bar{u}\gamma^{\mu}\left(\frac{2}{3}\right)u + \bar{d}\gamma^{\mu}\left(-\frac{1}{3}\right)d$$

Όροι μάζας των Φερμιονίων.

Γυρίζουμε τώρα στο πρόβλημα ανεύρεσης όρων μάζας για τα φερμιόνια.

Με τους γνωστούς κβαντικούς αριθμούς, ο αναλλοίωτος βαθμωτός όρος που μπορούμε να γράψουμε είναι:

$$\Delta L_e = -\lambda_e \overline{E_L} \Phi u_R + h.c$$

Αντικαθιστούμε το Φ με την αναμενόμενη τιμή του στο κενό :

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon \end{pmatrix}$$

και έχουμε:

$$\Delta L_e = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e \upsilon \overline{e_L} e_R + h.c$$

από όπου βλέπουμε ότι: $m_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_e \upsilon$

Για τα quarks έχουμε:

$$\Delta L_q = -\lambda_d \overline{Q_L} \Phi d_R - \lambda_u \varepsilon^{ab} \overline{Q_L}_a \Phi_b u_R + h.c$$

αντικαθιστώντας την αναμενόμενη τιμή στο κενό οδηγούμαστε στο:

$$\Delta L_q = -\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d \upsilon \overline{d_L} d_R - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u \upsilon \overline{u_L} u_R + h.c$$

Άρα οι μάζες θα είναι: $m_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d \upsilon$ και $m_u = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u \upsilon$

Το Μποζόνιο Higgs.

Όπως είδαμε σε όλα τα προηγούμενα το βαθμωτό πεδίο ήταν αυτό που προκαλούσε την αυθόρμητη ρήξη της συμμετρίας βαθμίδας και αποτελεί συμαντικό συστατικό στην δομή της G.W.S θεωρίας.

Ας παραμετροποιήσουμε το βαθμωτό πεδίο γράφοντας :

$$\Phi(x) = U(x)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon + h(x) \end{pmatrix}$$

που είναι γραμμένο γύρο από το κενό σαν μία διαταραχή, και $U(x)$ είναι ο μετασχηματισμός βαθμίδας.

Μπορούμε να κάνουμε έναν μετασχηματισμό βαθμίδα για να διώξουμε το $U(x)$ από την Lagrangian. Αυτό θα μειώσει τους φυσικούς βαθμούς ελευθερίας του Φ σε έναν.

Γράφουμε λοιπόν την lagrangian:

$$L = \left|D_\mu \Phi\right|^2 + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2$$

με το ελάχιστο στο $\upsilon = \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}$

Στην μοναδιαία βαθμίδα ο όρος δυναμικής ενέργειας παίρνει την μορφή:

$$L_V = -\mu^2 h^2 - \lambda \upsilon h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 = -\frac{1}{2} m_h{}^2 h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} m_h h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4$$

Το $h(x)$ είναι ένα βαθμωτό σωμάτιο με μάζα : $m_h = \sqrt{2}\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\upsilon$

Αυτό το σωματίδιο είναι γνωστό ως μποζόνιο ***Higgs***.

Ο όρος κινητικής ενέργειας είναι:

$$L_k = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu h\right)^2 + \left[m_W{}^2 W_\mu{}^+ W_\mu{}^- + \frac{1}{2} m_Z{}^2 Z_\mu Z^\mu\right]\left(1 + \frac{h}{\upsilon}\right)$$

Τέλος οι όροι ζεύξης των φερμιονίων με το Higgs, που προκύπτουν από τους αντίστοιχους όρους μάζας των φερμιονίων, είναι:

$$L_k = -m_f \overline{f} f \left(1 + \frac{h}{\upsilon}\right)$$

όπου f οποιοδήποτε φερμιόνιο.