

1. (2 μονάδες) Αποδείξτε ότι κάθε υποπρότυπο του $\mathbb{Z}$ - προτύπου $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Αληθεύει ότι τα $\mathbb{Z}$ - πρότυπα $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ είναι ισόμορφα; Αληθεύει ότι οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ είναι ισόμορφοι;
2. (1 μονάδα) Βρείτε ένα $d \in \mathbb{Z}[i]$ ώστε να ισχύει $I + J = (d)$, όπου $I = (-7-4i)$ και $J = (3-2i)$.
3. (2 μονάδες) Έστω F ένα ελεύθερο $\mathbb{Q}[x]$ -πρότυπο πεπερασμένης τάξης. Έστω M και N υποπρότυπα του F . Αφού δικαιολογήστε γιατί τα M , N είναι ελεύθερα, αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \rightarrow M \cap N \rightarrow M \times N \rightarrow M + N \rightarrow 0.$$
4. (2 μονάδες) Αποδείξτε ότι η Διοφαντική εξίσωση $x^6 + 1 = y^5$, όπου το x είναι άρτιος, έχει τη μοναδική λύση $(x, y) = (0, 1)$.
5. (3 μονάδες) Έστω $S = \mathbb{Z}[i]$ και $R = \mathbb{Z}[i]/(4-i)$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.
 - i. Ο S είναι δακτύλιος του Artin.
 - ii. Ο S είναι δακτύλιος της Noether.
 - iii. Ο R είναι δακτύλιος της Noether.
 - iv. Ο $R[x, y]$ είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών.
 - v. Ο $R[x]/I$ είναι περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης για κάθε ιδεώδες I .
 - vi. Κάθε R - πρότυπο είναι ελεύθερο.
6. (2 μονάδες) Έστω $\theta \in \mathbb{C}$ ρίζα του $x^2 - 3x + 8$. Βρείτε μια ακεραία βάση και τη διακρίνουσα του αριθμητικού σώματος $K = \mathbb{Q}(\theta)$.

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι αιτιολογημένες. Το σύνολο των μονάδων είναι 12 και η βάση 5. Στην εξέταση αυτή επιτρέπονται ανοικτά βιβλία αλλά όχι σημειώσεις.

Καλή επιτυχία