

1. Έστω S περιοχή κυρίων ιδεωδών, P πρώτο ιδεώδες του S και $R = S/P$.
Εξετάστε αν ο πολυωνυμικός δακτύλιος $R[x,y]$ είναι
 - περιοχή κυρίων ιδεωδών
 - περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης
 - Ευκλείδειος περιοχή
 - δακτύλιος της Noether
 - δακτύλιος του Artin
2. Έστω το ιδεώδες $I = (4-2i)$ του $\mathbb{Z}[i]$. Βρείτε το $\sqrt{I}$ και εκφράστε το ως τομή πρώτων ιδεωδών. Είναι το I πρωταρχικό; Είναι το $\sqrt{I}$ μέγιστο;
3. α) Στο δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$ θεωρούμε το ιδεώδες $J = (y-x^2+1, y+1)$. Βρείτε ένα $f(x,y) \in I(V(J)) - J$ χρησιμοποιώντας το Nullstellensatz. Ερμηνεύσατε το παράδειγμά σας γεωμετρικά
β) Έστω I και J ιδεώδη του R . Αποδείξτε ότι $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R \Leftrightarrow I + J = R$
4. Έστω I και J ιδεώδη του R που έχουν την ιδιότητα οι R/I και R/J είναι δακτύλιοι της Noether. Δείξτε ότι το R πρότυπο $R/I \oplus R/J$ είναι της Noether. Αν επιπλέον ισχύει $I \cap J = 0$, τότε ο R είναι δακτύλιος της Noether.
5. Βρείτε και αποδείξτε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη στο ιδεώδες I του $\mathbb{Z}[i]$ ώστε τα πρώτα και μέγιστα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}[i]/I$ να ταυτίζονται..

Τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα Καλή επιτυχία!