

1. Εξετάστε αν
 1. Κάθε ιδεώδες του $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.
 2. Τα \mathbb{Z} - πρότυπα $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ είναι ισόμορφα.
 3. Οι δακτύλιοι $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ είναι ισόμορφοι;
2. Αποδείξτε ότι σε κάθε δακτύλιο του Artin τα πρώτα και μέγιστα ιδεώδη ταυτίζονται.
3. Έστω το ιδεώδες $I = (4-2i)$ του $\mathbb{Z}[i]$. Βρείτε το \sqrt{I} και εκφράστε το ως τομή πρώτων ιδεωδών. Είναι το I πρωταρχικό; Είναι το \sqrt{I} μέγιστο;
4. Έστω F ένα ελεύθερο $\mathbb{Z}[i]$ -πρότυπο πεπερασμένης τάξης. Έστω M και N υποπρότυπα του F . Αφού δικαιολογήστε γιατί τα M , N είναι ελεύθερα, αποδείξτε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \rightarrow M \cap N \rightarrow M \times N \rightarrow M + N \rightarrow 0.$$
 Στη συνέχεια αποδείξτε ότι

$$rk(M + N) = rkM + rkN - rk(M \cap N).$$
5. Θεωρούμε το δακτύλιο $S = R[x]$, όπου $R = \mathbb{Z}[i]/(1+3i)$. Εξετάστε αν ο S είναι
 1. δακτύλιος της Noether
 2. περιοχή κυρίων ιδεωδών
 3. δακτύλιος του Artin.
6. Έστω $\theta \in \mathbb{C}$ ρίζα του $x^2 - 2x + 6$. Βρείτε μια ακεραία βάση και τη διακρίνουσα του αριθμητικού σώματος $K = \mathbb{Q}(\theta)$.

Καθένα από τα 6 θέματα αξίζει 2 μονάδες. Δοκιμάστε όσα θέματα επιθυμείτε. Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι αιτιολογημένες. Η βάση είναι το 5. Διάρκεια εξέτασης 2,5 ώρες.

Καλή επιτυχία