

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: Επαγόμενοι Χαρακτήρες και το Θεώρημα του Frobenius

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε τους επαγόμενους χαρακτήρες με τη βοήθεια των οποίων αποδεικνύουμε το θεώρημα των συμπληρωμάτων του Frobenius. Οι επαγόμενοι χαρακτήρες αποτελούν ένα θεμελιώδες και βαθύ τμήμα της θεωρίας αναπαραστάσεων ομάδων. Εμείς εδώ θα περιοριστούμε στα πλέον απαραίτητα για το θεώρημα του Frobenius. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο βιβλίο του Serre, [13].

9.1. Επαγόμενοι Χαρακτήρες

Έστω G (πεπερασμένη, όπως πάντα) ομάδα και H υποομάδα της G . Για κάθε χαρακτήρα χ της H θα κατασκευάσουμε ένα χαρακτήρα της G .

Αν $\varphi : H \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση, ορίζουμε μια συνάρτηση $\dot{\varphi} : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\dot{\varphi}(g) = \begin{cases} \varphi(g), & \text{αν } g \in H \\ 0, & \text{αν } g \notin H. \end{cases}$$

Ορίζουμε την **επαγόμενη** συνάρτηση κλάσεων $\varphi^G : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\varphi}(x^{-1}gx). \quad (1)$$

Ισχύει $\varphi^G \in cf(G)$, γιατί αν $g' = y^{-1}gy$, $y \in G$, έχουμε

$$\varphi^G(g') = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \dot{\varphi}(x^{-1}y^{-1}gxy) = \frac{1}{|H|} \sum_{z \in G} \dot{\varphi}(z^{-1}gz) = \varphi^G(g).$$

Έστω $G/H = \{s_1H, \dots, s_mH\}$, οπότε λέμε ότι οι $s_1, \dots, s_m$ είναι αντιπρόσωποι των συμπλόκων της H στη G . Τότε αν $\varphi \in cf(H)$ ισχύει

$$\varphi^G(g) = \sum_{i=1}^m \dot{\varphi}(s_i^{-1}gs_i). \quad (2)$$

Πράγματι, από την ξένη ένωση $G = s_1H \cup \dots \cup s_mH$ η (1) δίνει

$$\varphi^G(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^m \sum_{h \in H} \dot{\varphi}(h^{-1}s_i^{-1}gs_ih). \quad (3)$$

Τώρα

$$\dot{\phi}(h^{-1}(s_i^{-1}gs_i)h) = \dot{\phi}(s_i^{-1}gs_i), \quad (4)$$

γιατί αν i) $s_i^{-1}gs_i \notin H$, τότε και τα δύο μέλη της (4) είναι μηδέν, ενώ αν ii) $s_i^{-1}gs_i \in H$ τότε

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(h^{-1}(s_i^{-1}gs_i)h) &= \phi(h^{-1}(s_i^{-1}gs_i)), \quad \dot{\phi}(s_i^{-1}gs_i) = \phi(s_i^{-1}gs_i) \\ \phi(h^{-1}(s_i^{-1}gs_i)h) &= \phi(s_i^{-1}gs_i), \quad \text{αφού } \phi \in cf(H), \end{aligned}$$

οπότε πάλι ισχύει η (4). Η (2) προκύπτει από τις (3) και (4).

Παρατήρηση. Έστω $\phi \in cf(H)$. i) Για $H = G$, έχουμε $\phi^G = \phi$. ii) Για τυχαία H ισχύει $\phi^G(1) = [G : H]\phi(1)$.

Με $\langle, \rangle_H, \langle, \rangle_G$ συμβολίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα στους διανυσματικούς χώρους $cf(H), cf(G)$ αντίστοιχα, που μελετήσαμε στην § 7.2. Αν $\theta \in cf(G)$, με θ_H συμβολίζουμε τον περιορισμό της συνάρτησης θ στο H . Βέβαια $\theta_H \in cf(H)$.

9.1.1 Θεώρημα Αμοιβαιότητας του Frobenious. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έστω $\phi \in cf(H)$ και $\theta \in cf(G)$. Τότε

$$\langle \phi, \theta_H \rangle_H = \langle \phi^G, \theta \rangle_G.$$

Απόδειξη: Το αποτέλεσμα προκύπτει από έναν απλό υπολογισμό:

$$\begin{aligned} \langle \phi^G, \theta \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi^G(g) \overline{\theta(g)} \\ &= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in G} \dot{\phi}(x^{-1}gx) \overline{\theta(g)} \quad (\text{από (1)}) \\ &= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} \dot{\phi}(y) \overline{\theta(xy x^{-1})} \\ &= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \sum_{x \in G} \phi(y) \overline{\theta(y)} \quad (\text{γιατί } \theta \in cf(G)) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{y \in G} \phi(y) \overline{\theta(y)} \\ &= \langle \phi, \theta_H \rangle_H. \end{aligned}$$

◆

9.1.2 Πρόσχημα. Αν ϕ είναι χαρακτήρας της H , τότε ϕ^G είναι χαρακτήρας της G .

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $\varphi^G \in cf(G)$. Επιπλέον η προηγούμενη παρατήρηση δίνει $\varphi^G \neq 0$. Από την άσκηση 7.1 αρκεί να δείξουμε ότι $\langle \varphi^G, \chi \rangle \in \mathbf{N}$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της G . Από το θεώρημα αμοιβαιότητας του Frobenius έχουμε $\langle \varphi^G, \chi \rangle_G = \langle \varphi, \chi_H \rangle_H$, και γνωρίζουμε ότι $\langle \varphi, \chi_H \rangle_H \in \mathbf{N}$ (δες για παράδειγμα το πόρισμα 7.2.8).

■

9.1.3 Παράδειγμα και Σχόλιο. Έστω $G = D_8$, η διεδρική ομάδα του παραδείγματος

7.1.1. Έστω χ ο χαρακτήρας της αναπαράστασης ρ που κατασκευάσαμε εκεί. το χ υπολογίστηκε στην αρχή της §7.2: $\chi(1) = 2$, $\chi(a^2) = -2$, και $\chi(g) = 0 \quad \forall g \neq 1, a^2$.

Θεωρούμε τώρα τον χαρακτήρα ψ της υποομάδας $\langle a \rangle \subseteq D_8$, $\psi(1) = 1$, $\psi(a) = i$,

$\psi(a^2) = -1$, $\psi(a^3) = -i$. Ένα σύστημα των αντιπροσώπων της $\langle a \rangle$ στη D_8 είναι

$$s_1 = 1, \quad s_2 = b.$$

Με χρήση της (2) υπολογίζουμε

$$\psi^G(1) = 2, \quad \psi^G(a) = \psi(a) + \psi(bab) = \psi(a) + \psi(a^{-1}) = i + (-i) = 0$$

$$\psi^G(a^2) = \psi(a^2) + \psi(ba^2b) = \psi(a^2) + \psi(a^{-2}) = -1 + (-1) = -2.$$

Συνεχίζοντας, διαπιστώνουμε ότι $\psi^G = \chi$, δηλαδή ο χ είναι επαγόμενος χαρακτήρας.

Γνωρίζουμε ότι ο χ είναι ανάγωγος όπως είδαμε μετά το πόρισμα 7.2.6. Ο υπολογισμός του $\langle \chi, \chi \rangle_G$ μπορεί να γίνει και ως εξής: Από το θεώρημα αμοιβαιότητας του

Frobenius για $H = \langle a \rangle$ έχουμε $\langle \chi, \chi \rangle_G = \langle \psi, \chi_H \rangle_H$.

Υπολογίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \psi, \chi_H \rangle_H &= \frac{1}{4} \left(\psi(1) \overline{\chi(1)} + \psi(a) \overline{\chi(a)} + \psi(a^2) \overline{\chi(a^2)} + \psi(a^3) \overline{\chi(a^3)} \right) \\ &= \frac{1}{4} (2 + i \cdot 0 + (-1)(-2) + (-i)0) = 1. \end{aligned}$$

Άρα $\langle \chi, \chi \rangle_G = 1$, και κατά συνέπεια ο χ είναι ανάγωγος (πόρισμα 7.2.6). Παρατηρήστε ότι ο παραπάνω υπολογισμός **δεν** απαιτεί την a priori γνώση της αναπαράστασης ρ . Εδώ έγκειται η σημασία των επαγόμενων χαρακτήρων: κατασκευάζουμε χαρακτήρες της G από χαρακτήρες μικρών -για παράδειγμα κυκλικών- υποομάδων. (Αν είμαστε τυχεροί οι ανάγωγες συνιστώσες θα είναι νέοι χαρακτήρες της G). Φυσικά δεν είμαστε σίγουροι ότι λαμβάνονται έτσι όλοι οι χαρακτήρες της G (καθώς το H διατρέχει τις κυκλικές

υποομάδες της G). Δες όμως το θεώρημα του Artin στο βιβλίο του Serre, [13; §9.2 Corollary].

9.2. Θεώρημα Συμπληρωμάτων του Frobenius.

Χρειαζόμαστε έναν τρόπο εντοπισμού κανονικών υποομάδων χρησιμοποιώντας χαρακτήρες (δες την άσκηση 7.7).

9.2.1 Λήμμα. Έστω χ χαρακτήρες της G και $K = \{g \in G, \chi(g) = \chi(1)\}$. Τότε το K είναι κανονική υποομάδα της G .

Απόδειξη: Έστω $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ αναπαράσταση της G με χαρακτήρα χ . Θα δείξουμε ότι $\text{Ker} \rho = K$.

Η σχέση $\text{Ker} \rho \subseteq K$ είναι προφανής. Έστω $\chi(g) = \chi(1)$. Τότε $\rho(g)$ είναι διαγώνιος πίνακας της μορφής ωI (απόδειξη του πορίσματος 8.25). Επειδή $\chi(g) = \chi(1)$ παίρνουμε $\omega = 1$. Άρα $g \in \text{Ker} \rho$ και συνεπώς $K = \text{Ker} \rho$. ■

Το $K = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\} = \text{Ker} \rho$ συμβολίζεται με $\text{Ker} \chi$.

9.2.2 Πόρισμα. Ισχύει

$$\bigcap_{\chi \in \text{Irr}(G)} \text{Ker} \chi = 1.$$

Απόδειξη: Έστω g στοιχείο του αριστερού σκέλους, οπότε $\chi(g) = \chi(1)$ για κάθε $\chi \in \text{Irr}(G)$. Για τον χαρακτήρα χ_{reg} της κανονικής αναπαράστασης έχουμε $\chi_{\text{reg}} = \sum_x \chi(1)\chi$ (λήμμα 7.2.3 ii)), οπότε $\chi_{\text{reg}}(g) = \sum_x \chi(1)^2 \neq 0$. Άρα $g = 1$ από το λήμμα 7.2.3 i). ■

Διατυπώνουμε τώρα το θεώρημα συμπληρωμάτων του Frobenius. Μια υποομάδα H της G ονομάζεται **συμπλήρωμα** του Frobenius αν $H \cap g^{-1}Hg = 1$ για κάθε $g \in G - H$. Για παράδειγμα η $\langle (12) \rangle \subseteq S_3$ είναι συμπλήρωμα του Frobenius.

9.2.3 Θεώρημα Συμπληρωμάτων του Frobenius. Έστω $H \subseteq G$ συμπλήρωμα του Frobenius. Τότε το υποσύνολο

$$N = \left(G - \bigcup_{g \in G} g^{-1}Hg \right) \cup \{1\}$$

είναι κανονική υποομάδα της G . Επιπλέον ισχύει $G = NH$ και $N \cap H = 1$.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε δύο λήμματα που αφορούν συμπληρώματα του Frobenius. Ακολουθούμε τον Isaacs [8, σελ. 227-229].

9.2.4 Λήμμα. Έστω $H \subseteq G$ συμπλήρωμα του Frobenius. Έστω $\varphi, \theta \in cf(H)$ με $\varphi(1) = 0$.

Τότε

$$i) \quad (\varphi^G)_H = \varphi$$

$$ii) \quad \langle \theta, \varphi \rangle_H = \langle \theta^G, \varphi^G \rangle_G.$$

Απόδειξη: i) Έστω $h \in H$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\varphi^G(h) = \varphi(h)$. Για $h = 1$ ισχύει $\varphi^G(1) = [G : H]\varphi(1) = 0 = \varphi(1)$. Έστω $h \neq 1$. Γνωρίζουμε ότι

$$\varphi^G(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in G} \varphi(x^{-1}hx).$$

Αν $x \notin H$, τότε $H \cap xHx^{-1} = 1$ από την υπόθεση. Άρα $h \notin xHx^{-1}$ και συνεπώς $x^{-1}hx \notin H$, οπότε $\varphi(x^{-1}hx) = 0$. Έτσι

$$\varphi^G(h) = \frac{1}{|H|} \sum_{x \in H} \varphi(x^{-1}hx).$$

Επειδή $\varphi \in cf(H)$, η τελευταία ισότητα δίνει $\varphi^G(h) = \varphi(h)$.

ii) Έχουμε

$$\langle \theta, \varphi \rangle_H = \langle \theta, (\varphi^G)_H \rangle_H$$

από το i). Το θεώρημα αμοιβαιότητας του Frobenius δίνει

$$\langle \theta, (\varphi^G)_H \rangle_H = \langle \theta^G, \varphi^G \rangle_G$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο. ■

9.2.5 Λήμμα. Έστω $H \subseteq G$ συμπλήρωμα του Frobenius και $\chi \in Irr(H)$. Τότε υπάρχει

$\chi^* \in Irr(G)$ με τις ιδιότητες

$$i) \quad \chi_H^* = \chi$$

$$ii) \quad Ker\chi^* \supseteq G - \bigcup_{g \in G} g^{-1}Hg.$$

Απόδειξη: Το λήμμα ισχύει βέβαια αν $\chi = 1_H$ (ο τετριμμένος χαρακτήρας της H). Έστω $\chi \neq 1_H$. Θέτουμε $\varphi = \chi - \chi(1)1_H \in cf(H)$. Από το θεώρημα αμοιβαιότητας του Frobenius έχουμε

$$\langle \varphi^G, 1_G \rangle_G = \langle \varphi, 1_H \rangle_H = \langle \chi, 1_H \rangle_H - \chi(1) \langle 1_H, 1_H \rangle_H = -\chi(1).$$

Ορίζουμε $\chi^* \in cf(G)$

$$\chi^* = \varphi^G + \chi(1)1_G$$

και παρατηρούμε ότι

$$\langle \chi^*, 1_G \rangle_G = 0. \quad (5)$$

Επιπλέον το χ^* είναι $\mathbf{Z}$ -γραμμικός συνδυασμός του $Irr(G)$ γιατί το ίδιο συμβαίνει για το φ^G (πράγμα που προκύπτει από $\varphi = \chi - \chi(1)1_H$ και το πόρισμα 9.1.2).

Επειδή $\varphi(1) = 0$ το λήμμα 9.2.4 ii) δίνει

$$\langle \varphi^G, \varphi^G \rangle_G = \langle \varphi, \varphi \rangle_H = \langle \chi, \chi \rangle_H + \chi(1)^2 = 1 + \chi(1)^2.$$

Επίσης έχουμε λόγω της (5)

$$\langle \varphi^G, \varphi^G \rangle_G = \langle \chi^*, \chi^* \rangle_G + \chi(1)^2.$$

Συνεπώς $\langle \chi^*, \chi^* \rangle_G = 1$. Επειδή το χ^* είναι $\mathbf{Z}$ -γραμμικός συνδυασμός του $Irr(G)$

συμπεραίνουμε από το θεώρημα 7.2.5 ότι $\chi^* = \pm\psi$, όπου $\psi \in Irr(G)$.

Από το λήμμα 9.2.4 i) έχουμε $(\varphi^G)_H = \varphi$, οπότε

$$(\chi^* - \chi(1)1_G)_H = \chi - \chi(1)1_H$$

πράγμα που δίνει $(\chi^*)_H = \chi$. Συνεπώς $\chi^* = \psi \in Irr(G)$.

ii) Έστω $x \in G - \bigcup_{g \in G} g^{-1}Hg$. Τότε $\varphi^G(x) = 0$, δηλαδή $\chi^*(g) - \chi(1) = 0$. Έτσι

$$\chi^*(g) = \chi(1) = \chi^*(1) \text{ από το i). Άρα } g \in Ker\chi^*.$$

■

Απόδειξη του θεωρήματος 9.2.3.

Για $\chi \in Irr(H)$, έστω $\chi^* \in Irr(G)$ που δίνεται από το λήμμα 9.2.5. Γνωρίζουμε ότι

$$N \subseteq Ker\chi^*.$$

Θέτουμε

$$M = \bigcap_{\chi \in Irr(H)} Ker \chi^*.$$

Τότε $M \triangleleft G$ (λήμμα 9.2.1), $N \subseteq M$. Επειδή $\chi_H^* = \chi$ (λήμμα 9.2.5) ισχύει

$$M \cap H = \bigcap_{\chi \in Irr(H)} Ker \chi = 1 \text{ από το πόρισμα 9.2.2. Επειδή } M \cap H = 1 \text{ και } M \triangleleft G \text{ ισχύει}$$

$M \cap g^{-1}Hg = 1$ για κάθε $g \in G$. Άρα $M \subseteq N$. Συνεπώς $M = N$ και το N είναι κανονική υποομάδα της G .

Μένει ναδειχτεί ότι $G = NH$. Ο πληθάριθμος του συνόλου $\{g^{-1}Hg \mid g \in G\}$ είναι ο δείκτης $[G : N_G(H)]$, όπου $N_G(H)$ είναι η κανονικοποιούσα ομάδα της H στη G . (Αυτό προκύπτει, για παράδειγμα, από δράσεις). Αλλά $N_G(H) = H$ λόγω της υπόθεσης στο H . Έχουμε

$$|N| = |G| - \left| \bigcup_{g \in G} (g^{-1}Hg - \{1\}) \right| = |G| - [G : H](|H| - 1) = [G : H].$$

Επειδή $N \cap H = 1$ παίρνουμε

$$|NH| = |N| |H|$$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις δίνουν

$$|NH| = [G : H] |H| = |G|,$$

και επομένως $NH = G$.

■

Μέχρι και σήμερα δεν υπάρχει απόδειξη του θεωρήματος των συμπληρωμάτων του Frobenius που να αποφεύγει χαρακτήρες και αναπαραστάσεις.

Ασκήσεις

1. Κάθε ανάγωγος χαρακτήρας της G περιέχεται ως συνιστώσα σε κάποιον επαγόμενο χαρακτήρα της $H \subseteq G$, $H \neq G$.
2. Στην απόδειξη του θεωρήματος 9.2.3 ποια σχέση συνδέει τους χαρακτήρες χ^* και χ^G .

3. Έστω ψ ανάγωγος χαρακτήρας της H . Τότε

$$\langle \psi^G, \psi^G \rangle \leq [G : H].$$

4. Έστω $[G : H] = 2$. Τότε για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της H ισχύει χ^G είναι

ανάγωγος ή το άθροισμα δύο ανάγωγων του αυτού βαθμού.

5. Έστω $H \subseteq G$, χ χαρακτήρας της H και ψ χαρακτήρας της G . Αποδείξτε ότι

$$(\chi^G)\psi = (\chi\psi_H)^G.$$

6. Έστω η ομάδα $G = \langle a, b \mid a^7 = b^3 = 1, ab = ba^2 \rangle$ τάξης 21. Οι κλάσεις συζυγίας είναι $1, \{a, a^2, a^4\}, \{a^3, a^5, a^6\}, \{a^i b \mid i = 0, \dots, 6\}, \{a^i b^2 \mid i = 0, \dots, 6\}$.

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα χαρακτήρων, όπου $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

g	1	a	a^3	b	b^2
$ C(g) $	21	7	7	3	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	1	ω^2	ω
χ_4					
χ_5					

Υπόδειξη: Έστω $H = \langle a \rangle$ και ε πρωταρχική 7-ρίζα της μονάδας. Έστω

$\psi \in \text{Irr}(H)$, $\psi(a) = \varepsilon$. Υπολογίστε τον χαρακτήρα ψ^G χρησιμοποιώντας την (2) από

την §9.1. Υπολογίστε το $\langle \psi^G, \psi^G \rangle$ και συμπεράνετε ότι ο ψ είναι ανάγωγος.

Θέτοντας $\chi_4 = \psi^G$, βρείτε τώρα τον χ_5 από τις σχέσεις ορθογωνιότητας. Για

επαλήθευση, οι τελευταίες δύο γραμμές του πίνακα χαρακτήρων της G είναι

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 & \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 & 0 & 0 \\ 3 & \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 & \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 & 0 & 0. \end{array}$$

7. Αφού αποδείξετε ότι ο μοναδικός ανάγωγος χαρακτήρας χ της S_3 βαθμού 2 (§7.3) είναι επαγόμενος χαρακτήρας από την A_3 , βρείτε την ανάγωγη ανάλυση του $\chi^n = \chi \dots \chi$.