

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: Αναπαραστάσεις Πεπερασμένων Ομάδων I

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Wedderburn για ημιαπλούς δακτυλίους αναπτύσσουμε εδώ τις πρώτες προτάσεις από τη θεωρία των αναπαραστάσεων και χαρακτήρων πεπερασμένων ομάδων υπέρ του $\mathbb{C}$. Αυτές εφαρμόζονται στο επόμενο κεφάλαιο όπου αποδεικνύουμε ένα θεμελιώδες θεώρημα του Burnside που αφορά επιλυσιμότητα ομάδων τάξης $p^a q^b$ (p, q πρώτοι).

7.1. Αναπαραστάσεις.

Έστω G μια ομάδα και k ένα σώμα. Μια **αναπαράσταση** της G υπέρ του k είναι ένας ομομορφισμός ομάδων $\rho : G \rightarrow GL_n(k)$, για κάποιο n , όπου $GL_n(k)$ είναι η ομάδα των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το k . Το n ονομάζεται **βαθμός** της αναπαράστασης.

Αν $\rho : G \rightarrow GL_n(k)$ είναι μια αναπαράσταση της G , τότε θέτοντας $V := k^n$ και ορίζοντας $gv = \rho(g)(v)$ λαμβάνουμε ένα $k[G]$ -πρότυπο. Αντίστροφα αν V είναι ένα $k[G]$ -πρότυπο διάστασης $n < \infty$, τότε σταθεροποιώντας μια βάση του V έχουμε $Aut(V) \cong GL_n(k)$ και ορίζεται ένας ομομορφισμός ομάδων $\rho : G \rightarrow GL_n(k)$, όπου $\rho(g)$ είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $V \ni v \mapsto gv \in V$. Έτσι, στις σημειώσεις αυτές, θα χρησιμοποιούμε τους όρους αναπαράσταση της G και $k[G]$ -πρότυπο χωρίς να γίνεται ιδιαίτερη διάκριση μεταξύ της ρ και του V .

7.1.1 Παράδειγμα.

1. Για κάθε ομάδα G έχουμε την αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_1(k)$, όπου $\rho(g) = 1$ για κάθε $g \in G$. Αυτή λέγεται η **τετριμμένη αναπαράσταση** της G .
2. Για τη συμμετρική ομάδα $G = S_n$ έχουμε την αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_1(k)$, όπου $\rho(\sigma) = \text{sign}(\sigma)$ για κάθε $\sigma \in S_n$. Αυτή λέγεται η **αναπαράσταση προσήμου** της S_n .

3. Έστω G η ομάδα D_8 που δίνεται με γεννήτορες και σχέσεις από

$$D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle.$$

(Αυτή έχει τάξη 8 και είναι μία από μια οικογένεια ομάδων που ονομάζονται διεδρικές. Γεωμετρικά, η D_8 περιγράφει τις συμμετρίες ενός τετραγώνου.)

Θέτουμε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\in M_2(\mathbb{C}))$$

Ελέγχουμε ότι $A^4 = B^2 = I$, $AB = BA^{-1}$. Ορίζουμε μία αναπαράσταση G πάνω από το $\mathbb{C}$, $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$

$$\rho(a^i b^j) = A^i B^j, \quad i = 0, \dots, 3 \quad j = 0, 1.$$

Γεωμετρικά το A παριστάνει στροφή 90° γύρω από την αρχή των αξόνων και το B ανάκλαση ως προς τον άξονα των x . Έτσι η συγκεκριμένη αναπαράσταση ρ “παριστάνει” τη G ως ομάδα μετασχηματισμών του επιπέδου.

Δύο αναπαραστάσεις $\rho, \rho' : G \rightarrow GL_n(k)$ λέγεται **ισοδύναμες** αν υπάρχει $T \in GL_n(k)$ με την ιδιότητα $\rho'(g) = T^{-1} \rho(g) T$ για κάθε $g \in G$. Για παράδειγμα η αναπαράσταση $\rho : D_8 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ του προηγούμενου παραδείγματος είναι ισοδύναμη με την $\rho' : D_8 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ που ορίζεται από $\rho'(a) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ και $\rho'(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Εδώ T είναι ο πίνακας που διαγωνοποιεί τον A , δηλαδή ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του A ,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Έστω $\rho, \rho' : G \rightarrow GL_n(k)$ δύο αναπαραστάσεις της G με αντίστοιχα $k[G]$ -πρότυπα V, V' . Τότε οι ρ, ρ' είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός $k[G]$ -προτύπων $V \rightarrow V'$ (άσκηση).

Ένα $k[G]$ -πρότυπο λέγεται **ανάγωγο** αν δεν έχει μη τετριμμένα γνήσια υποπρότυπα. Μία αναπαράσταση $\rho : G \rightarrow GL_n(k)$ λέγεται **ανάγωγη** αν το αντίστοιχο $k[G]$ -πρότυπο V είναι ανάγωγο.

7.1.2 Παράδειγμα. Έστω $G = S_n$ η συμμετρική ομάδα των μεταθέσεων n στοιχείων. Έστω $V = k^n$ και μια βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ του V . Το V είναι S_n -πρότυπο με δράση $\sigma v_i = v_{\sigma(i)}$. Δεν είναι απλό όταν $n > 1$, γιατί ένα υποπρότυπό του είναι το $\langle v_1 + \dots + v_n \rangle$. Πράγματι, έχουμε $\sigma(v_1 + \dots + v_n) = v_{\sigma(1)} + \dots + v_{\sigma(n)} = v_1 + \dots + v_n$ για κάθε $\sigma \in S_n$.

Ένα $k[G]$ -πρότυπο V λέγεται **πλήρως αναλύσιμο** αν είναι ευθύ άθροισμα αναγώγων υποπροτύπων του. Το θεώρημα του Maschke (κεφάλαιο 2) μας δίνει το εξής αποτέλεσμα.

7.1.3 Πόρισμα. Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα τάξης n . Αν η χαρακτηριστική του k είναι μηδέν, ή αν η χαρακτηριστική του k είναι p με $p \nmid n$, τότε κάθε $k[G]$ -πρότυπο είναι πλήρως αναλύσιμο.

Στα παρακάτω θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την περίπτωση $k = \mathbb{C}$, οπότε ισχύει το προηγούμενο πόρισμα. Στο κεφάλαιο 2 είδαμε ότι υπάρχει ισομορφισμός αλγεβρών $\mathbb{C}[G] \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times M_{n_s}(\mathbb{C})$. Λαμβάνοντας διαστάσεις υπεράνω του $\mathbb{C}$ έχουμε

$$n_1^2 + \dots + n_s^2 = |G|.$$

Υπενθυμίζουμε ότι το s είναι το πλήθος των ανά δυο μη ισόμορφων απλών $\mathbb{C}[G]$ -προτύπων. Στη συνέχεια θα χαρακτηρίσουμε τον αριθμό s χρησιμοποιώντας ομαδοθεωρητικές έννοιες.

Υπενθυμίζουμε ότι η κλάση συζυγίας του $g \in G$ είναι το σύνολο $\{x^{-1}gx \mid x \in G\}$ και ότι δύο κλάσεις συζυγίας είτε ταυτίζονται είτε είναι ξένες. Έστω C μία κλάση συζυγίας. Θέτουμε

$$\bar{C} = \sum_{g \in C} g \in \mathbb{C}[G].$$

Θα δείξουμε ότι κάθε $\bar{C}$ ανήκει στο κέντρο της άλγεβρας $\mathbb{C}[G]$. Έστω $C = \{x_1^{-1}gx_1, \dots, x_r^{-1}gx_r\}$ και $h \in G$. Έχουμε $\bar{C} = \sum_{i=1}^r x_i^{-1}gx_i$, οπότε

$$h^{-1}\bar{C}h = \sum_{i=1}^r h^{-1}x_i^{-1}gx_i h = \bar{C}, \quad (1)$$

γιατί καθώς το x_i διατρέχει τα στοιχεία $x_1, \dots, x_r$ το $h^{-1}x_i^{-1}gx_ih$ διατρέχει τα στοιχεία του C (αφού $h^{-1}x_i^{-1}gx_ih = h^{-1}x_jgx_jh \Leftrightarrow x_i^{-1}gx_i = x_j^{-1}gx_j \Leftrightarrow x_i = x_j$ λόγω του ορισμού των x_i στο σύνολο C). Από την (1) συνάγουμε ότι $\bar{C} \in C(\mathbb{C}[G])$.

7.1.4 Πρόταση. Έστω $C_1, \dots, C_m$ οι (ανά δύο διάφορες) συζυγείς κλάσεις της G . Τότε μία βάση του $\mathbb{C}$ -διανυσματικού χώρου $C(\mathbb{C}[G])$ είναι

$$\bar{C}_1, \dots, \bar{C}_m.$$

Απόδειξη: i) Γραμμική ανεξαρτησία: Αν $\lambda_1\bar{C}_1 + \dots + \lambda_m\bar{C}_m = 0$ με $\lambda_i \in \mathbb{C}$ παίρνουμε $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, γιατί τα $C_1, \dots, C_m$ είναι ανά δύο ξένα σύνολα.

ii) Έστω $\sum_g \lambda_g g \in C(\mathbb{C}[G])$. Τότε για $h \in G$ ισχύει $\sum_g \lambda_g h^{-1}gh = \sum_g \lambda_g g$, δηλαδή

$$\sum_{x \in G} \lambda_{h x h^{-1}} x = \sum_g \lambda_g g,$$

οπότε παίρνουμε $\lambda_{h x h^{-1}} = \lambda_x$ για κάθε $x \in G$. Με άλλα λόγια, καθώς το g διατρέχει τα στοιχεία μια κλάσης συζυγίας C_i ο συντελεστής λ_g παραμένει σταθερός $\lambda_g = \lambda_i$. Έτσι γράφουμε $\sum_g \lambda_g g = \lambda_1\bar{C}_1 + \dots + \lambda_m\bar{C}_m$.

■

7.1.5 Πρόρισμα. Το πλήθος των ανά δύο μη ισόμορφων αναγώγων $\mathbb{C}[G]$ -προτύπων είναι το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G .

Απόδειξη: Έχουμε $\mathbb{C}[G] \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \times \dots \times M_{n_s}(\mathbb{C})$ όπου s είναι το πλήθος των ανά δύο μη ισόμορφων αναγώγων $\mathbb{C}[G]$ -προτύπων. Υπολογίζοντας κέντρα σύμφωνα με την άσκηση 1.10 παίρνουμε $C(\mathbb{C}[G]) \simeq \mathbb{C}^s$. Το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση 7.1.4.

■

7.1.6 Πρόρισμα. Μια πεπερασμένη ομάδα G είναι αβελιανή αν και μόνο αν κάθε ανάγωγο $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπο έχει διάσταση ένα.

Απόδειξη: Αν G αβελιανή, τότε η G έχει $|G|$ κλάσεις συζυγίας, οπότε η σχέση

$|G| = n_1^2 + \dots + n_s^2$ δίνει $n_1 = \dots = n_s = 1$. Αντίστροφα αν $n_1 = \dots = n_s = 1$, τότε από τη σχέση $|G| = n_1^2 + \dots + n_s^2$ έπεται ότι $|G| = s$, οπότε η G έχει $|G|$ κλάσεις συζυγίας και άρα είναι αβελιανή.

■

7.1.7 Παράδειγμα. (Οι ανάγωγες αναπαραστάσεις αβελιανών ομάδων). Έστω G (πεπερασμένη, όπως πάντα) αβελιανή ομάδα τάξης n . Από το θεώρημα ταξινόμησης των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων (που συνήθως αναπτύσσεται σε προπτυχιακά μαθήματα Άλγεβρας) γνωρίζουμε ότι η G είναι ισόμορφη με ευθύ γινόμενο κυκλικών ομάδων,

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_r},$$

όπου n_i είναι θετικοί ακέραιοι. Μια παρουσίαση της G με γεννήτορες και σχέσεις είναι:

$$G = \langle g_1, \dots, g_r : g_1^{n_1} = \dots = g_r^{n_r} = 1, g_i g_j = g_j g_i \rangle.$$

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ με $\lambda_i^{n_i} = 1$. Ορίζουμε την αναπαράσταση $\rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} : G \rightarrow \mathbb{C}^*$

$$\rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(g_1^{i_1} \dots g_r^{i_r}) = \lambda_1^{i_1} \dots \lambda_r^{i_r}.$$

Το σύνολο $\{\rho_{\lambda_1, \dots, \lambda_r} \mid \lambda_i^{n_i} = 1, i = 1, \dots, r\}$ έχει ακριβώς $n_1 \dots n_r = n$ στοιχεία και αποτελεί το σύνολο των αναγώγων αναπαραστάσεων της G υπέρ του $\mathbb{C}$.

7.2. Χαρακτήρες.

Έστω $\rho : G \rightarrow GL_n(k)$ αναπαράσταση της G . Ο **χαρακτήρας** του ρ είναι η απεικόνιση $\chi_\rho : G \rightarrow k$, $\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g))$ για κάθε $g \in G$, όπου $\text{Tr}(A)$ συμβολίζει το ίχνος $\sum_i a_{ii}$ του πίνακα $A = (a_{ij})$. Ο χαρακτήρας ενός $k[G]$ -προτύπου είναι ο χαρακτήρας της αντίστοιχης αναπαράστασης.

Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το αυτό ίχνος παρατηρούμε ότι ισοδύναμες αναπαραστάσεις έχουν τον αυτό χαρακτήρα. Επιπλέον η τιμή $\chi_\rho(g)$ εξαρτάται μόνο από τη κλάση συζυγίας του g .

Για παράδειγμα ο χαρακτήρας χ της αναπαράστασης $\rho : D_8 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ του Παραδείγματος 7.1.3 είναι

$$\begin{array}{cccccccccc} g & 1 & a & a^2 & a^3 & b & ab & a^2b & a^3b \\ \chi(g) & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι αν χ είναι ο χαρακτήρας μιας αναπαράστασης ρ υπέρ του $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$, τότε:

- i) Ο βαθμός της ρ είναι η τιμή $\chi(1)$.
- ii) Αν m είναι η τάξη του στοιχείου $g \in G$, τότε το $\chi(g)$ είναι άθροισμα m -στών ριζών της μονάδας. Πράγματι, αφού $g^m = 1$ ισχύει $\rho(g)^m = I$ οπότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\rho(g)$ είναι m -στές ρίζες της μονάδας. Το ίχνος του $\rho(g)$ είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του.
- iii) Ισχύει $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ (ο συζυγής του $\chi(g)$), γιατί αν $\chi(g) = \omega_1 + \dots + \omega_n$ με $\omega_i^m = 1$, τότε $\chi(g^{-1}) = \omega_1^{-1} + \dots + \omega_n^{-1}$ και $\omega_i^{-1} = \overline{\omega_i}$ για κάθε i .
- iv) $\chi(g) \in \mathbb{R}$ αν g και g^{-1} είναι συζυγή. Πράγματι, αν g και g^{-1} είναι συζυγή τότε $\chi(g) = \chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

Έστω $\rho: G \rightarrow GL_m(\mathbb{C})$, $\rho': G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ δύο αναπαραστάσεις της G βαθμού m και n αντίστοιχα. Το **ευθύ άθροισμα** των ρ και ρ' είναι η αναπαράσταση $\rho \oplus \rho': G \rightarrow GL_{m+n}()$ βαθμού $m+n$ που ορίζεται από

$$(\rho \oplus \rho')(g) = \begin{pmatrix} \rho(g) & 0 \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix}.$$

(Συνεπώς αν V, V' είναι τα αντίστοιχα $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπα των ρ, ρ' τότε το αντίστοιχο $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπο του $\rho \oplus \rho'$ είναι το $V \oplus V'$). Θεωρώντας ίχνη παίρνουμε $\chi_{\rho \oplus \rho'} = \chi_\rho + \chi_{\rho'}$ (συνήθης πρόσθεση συναρτήσεων $G \rightarrow \mathbb{C}$).

Έστω $\chi, \psi: G \rightarrow \mathbb{C}$ συναρτήσεις (όχι αναγκαστικά χαρακτήρες). Ορίζουμε το **εσωτερικό γινόμενο** των χ και ψ

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

Παρατηρούμε ότι

- i) $\langle \psi, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle}$
- ii) $\langle, \rangle$ είναι γραμμική στην πρώτη μεταβλητή, και

$$\text{iii)} \langle \chi, \chi \rangle > 0 \text{ αν } \chi \neq 0.$$

Επίσης $\langle \chi, \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle \chi, \psi_1 \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle \chi, \psi_2 \rangle$ για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, και κάθε συναρτήσεις $\chi, \psi_1, \psi_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Για χαρακτήρες μπορούμε να πούμε κάτι ισχυρότερο:

7.2.1 Πρόταση. Έστω χ και ψ χαρακτήρες της G και $g_1, \dots, g_s$ ανιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G . Με $C(g_i)$ συμβολίζουμε την κεντροποιούσα ομάδα του g_i , $C(g_i) = \{x \in G \mid xg_i = g_ix\}$. Τότε

$$(i) \quad \langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} \in \mathbb{R}, \text{ και}$$

$$(ii) \quad \langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^s \frac{\chi(g_i) \overline{\psi(g_i)}}{|C(g_i)|}.$$

Απόδειξη: i) Έχουμε

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g^{-1} \in G} \chi(g^{-1}) \psi(g) = \langle \psi, \chi \rangle.$$

Αφού $\langle \chi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \chi \rangle}$, παίρνουμε $\langle \chi, \psi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle}$ και άρα $\langle \chi, \psi \rangle \in \mathbb{R}$ (θα δούμε παρακάτω ότι ισχύει $\langle \chi, \psi \rangle \in \mathbb{N}$).

ii) Έστω C_i η κλάση συζυγίας του g_i . Επειδή $\chi(g) = \chi(g_i)$ και $\psi(g) = \psi(g_i)$ για κάθε $g \in C_i$ έχουμε

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)} = \sum_{i=1}^s \frac{|C_i|}{|G|} \chi(g_i) \overline{\psi(g_i)}.$$

Θυμόμαστε από τις ομάδες (π.χ. δράσεις ομάδων) ότι $|C_i| = [G : C(G_i)]$ (ο πληθάνριθμος μιας τροχιάς είναι ο δείκτης της αντίστοιχης σταθεροποιούσας ομάδας).

$$\text{Έτσι } \frac{|C_i|}{|G|} = \frac{1}{|C(G_i)|}.$$

■

Μια συνάρτηση $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται **συνάρτηση κλάσεων** αν για κάθε $g \in G$ ισχύει $\psi(h^{-1}gh) = \psi(g)$ για κάθε $h \in G$, δηλαδή αν η ψ είναι σταθερή σε κάθε κλάση συζυγίας. Κάθε χαρακτήρας είναι συνάρτηση κλάσεων. Το $\mathbb{C}$ -διανυσματικό

χώρο των συναρτήσεων κλάσεων συμβολίζουμε με $cf(G)$. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια το σημαντικό αποτέλεσμα ότι οι χαρακτήρες των αναγώνων αναπαραστάσεων της G αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $cf(G)$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $<, >$.

Αν $\psi : G \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση, θα συμβολίζουμε πάλι με $\psi : \mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$ τη γραμμική επέκταση της $G \rightarrow \mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$.

Έστω $V_1, \dots, V_s$ τα ανά δύο μη ισόμορφα απλά $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπα και $\chi_1, \dots, \chi_s$ οι χαρακτήρες τους αντίστοιχα. Οι χ_i ονομάζονται **ανάγωγοι** χαρακτήρες της G . Από την άσκηση 2.9 υπάρχουν κεντρικά αυτοδύναμα στοιχεία $e_1, \dots, e_s \in \mathbb{C}[G]$ με την ιδιότητα $1 = e_1 + \dots + e_s$ και $e_i e_j = 0$ για $i \neq j$. Επιπλέον $e_i r_i = r_i$ για κάθε $r_i \in R_i$ και $e_i R_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ και $e_i e_j = 0$ για κάθε $i \neq j$, όπου R_i είναι οι απλές συνιστώσες του $\mathbb{C}[G]$, $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \dots \times R_s$. Συνεπώς ισχύει και $e_i v_i = v_i$ για κάθε $v_i \in V_i$ και $e_i V_j = 0$ για κάθε $i \neq j$.

7.2.2 Λήμμα. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε

$$\chi_i(e_j) = \begin{cases} \dim V_i & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}.$$

Απόδειξη: Για $i \neq j$ έχουμε $e_j V_i = 0$ και άρα το ίχνος της δράσης του e_j στο V_i είναι μηδέν, δηλαδή $\chi_i(e_j) = 0$. Γράφοντας τώρα $1 = e_1 + \dots + e_s$ παίρνουμε $\chi_i(1) = \chi_i(e_1) + \dots + \chi_i(e_s) \Rightarrow \dim V_i = \chi_i(e_i)$. ■

7.2.3 Λήμμα. Έστω χ_{reg} ο χαρακτήρας του $\mathbb{C}[G]$ -προτύπου $\mathbb{C}[G]$ (με δράση αριστερό πολλαπλασιασμό). Διατηρώντας τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε:

$$i) \quad \chi_{reg}(1) = |G| \text{ και } \chi_{reg}(g) = 0 \text{ για κάθε } g \in G, g \neq 1.$$

$$ii) \quad \chi_{reg} = \chi_1(1)\chi_1 + \dots + \chi_s(1)\chi_s.$$

Απόδειξη: i) $\chi_{reg}(1) = \dim \mathbb{C}[G] = |G|$. Έστω $g \in G, g \neq 1$. Θεωρούμε τη βάση $G = \{g_1 = g, g_2, \dots, g_n\}$ του $\mathbb{C}[G]$. Ο αντίστοιχος πίνακας της δράσης του g έχει μη μηδενικό στοιχείο πάνω στη διαγώνιο αν και μόνο αν $gg_i = g_i$, δηλαδή αν $g = 1$.

ii) Το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από τον ισομορφισμό $\mathbb{C}[G] \cong V_1^{n_1} \oplus \dots \oplus V_s^{n_s}$ (βλ. κεφάλαιο 2) και το γεγονός ότι $n_i = \dim V_i = \chi_i(1)$.

■

7.2.4 Πρόταση. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς ισχύει

$$e_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(1) \chi_i(g^{-1}) g.$$

Απόδειξη: Έστω $e_i = \sum_{g \in G} \lambda_g g$, $\lambda_g \in \mathbb{C}$. Θεωρώντας τον χαρακτήρα χ_{reg} της g υπολογίζουμε σύμφωνα με το Λήμμα 7.2.3 i). Έστω $h \in G$.

$$\chi_{reg}(h^{-1}e_i) = \sum_{g \in G} \lambda_g \chi_{reg}(h^{-1}g) = \lambda_h |G|.$$

Από το Λήμμα 7.2.3 ii) έχουμε

$$\chi_{reg}(h^{-1}e_i) = \sum_{j=1}^s \chi_i(1) x_j(h^{-1}e_i).$$

Επειδή $e_i R_j = 0$ για $i \neq j$, έχουμε $\chi_j(h^{-1}e_i) = 0$ για $i \neq j$. Για $i = j$ έχουμε $e_i v_i = v_i \quad \forall v_i \in R_i$ και άρα $x_i(h^{-1}e_i) = \chi_i(h^{-1})$. Τελικά αντικαθιστώντας έχουμε

$$\lambda_h = \frac{1}{|G|} \sum_{j=1}^s \chi_j(1) \chi_j(h^{-1}e_i) = \frac{1}{|G|} \chi_i(1) \chi_i(h^{-1}),$$

απ'όπου προκύπτει το ζητούμενο.

■

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το πρώτο κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

7.2.5 Θεώρημα. Οι ανάγωγοι χαρακτήρες της G πάνω από το $\mathbb{C}$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}$ -διανυσματικού χώρου $cf(G)$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle, \rangle$.

Απόδειξη: Έστω $\chi_1, \dots, \chi_s$ οι ανάγωγοι χαρακτήρες. Θα δείξουμε πρώτα ότι οι $\chi_1, \dots, \chi_r$ αποτελούν βάση του $cf(G)$. Γνωρίζουμε ότι s είναι το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της G (Πόρισμα 7.1.5). Επειδή η διάσταση του $cf(G)$ είναι s (μια βάση του $cf(G)$ είναι οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις $f_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζονται από $f_i(C_j) = 0$ για $i \neq j$ και $f_i(g) = 1$ για κάθε $g \in C_i$) αρκεί να δείξουμε ότι οι

$\chi_1, \dots, \chi_s$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Έστω $\sum_{i=1}^s \lambda_i \chi_i = 0$. Από το Λήμμα 7.2.2 παίρνουμε τότε $\lambda_i \chi_i(e_i) = 0$, δηλαδή $\lambda_i \dim V_i = 0$, οπότε $\lambda_i = 0$. (Η γραμμική ανεξαρτησία των χ_i έπεται και από το γεγονός $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$ που θα δείξουμε αμέσως παρακάτω). Θα δείξουμε τώρα ότι $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$. Από τον τύπο της Πρότασης 7.2.4 συμπεραίνουμε ότι ο συντελεστής του $1 \in G$ στο e_i^2 είναι

$$\frac{1}{|G|^2} \chi_i(1)^2 \sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_i(g^{-1})$$

που είναι (λόγω της Πρότασης 7.2.1 i)) ίσος με

$$\frac{1}{|G|} \chi_i(1)^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle.$$

Όμως $e_i^2 = e_i$ οπότε ο συντελεστής του 1 στο e_i^2 είναι ίσος με (Πρόταση 7.2.4)

$$\frac{1}{|G|} \chi_i(1)^2.$$

Συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες εκφράσεις παίρνουμε $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$ για $i \neq j$. Από τη σχέση $e_i e_j = 0$ παίρνουμε λόγω της Πρότασης 7.2.4 ότι

$$\sum_{g, h \in G} \chi_i(g^{-1}) \chi_j(h^{-1}) gh = 0.$$

Ο συντελεστής του $1 \in G$ στην προηγούμενη ισότητα δίνει

$$\sum_{g \in G} \chi_i(g) \chi_j(g^{-1}) = 0$$

οπότε $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$ από την πρόταση 7.2.1 i).

■

7.2.6 Πρόρισμα. Έστω V ένα $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπο με χαρακτήρα χ . Τότε το V είναι ανάγωγο αν και μόνο αν $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Απόδειξη: Αν V είναι ανάγωγο τότε $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ από το προηγούμενο θεώρημα. Αντίστροφα, έστω $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. Γράφοντας το V ως ευθύ άθροισμα αναγώγων προτύπων $V \cong V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_r^{m_r}$ λαμβάνουμε $\chi = m_1 \chi_1 + \dots + m_r \chi_r$ οπότε η σχέση $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ δίνει

$$\sum_{i,j} m_i m_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle = 1.$$

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$ και $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = 0$ για $i \neq j$, οπότε

$$m_1^2 + \dots + m_r^2 = 1.$$

Συνεπώς $m_j = 1$ για κάποιο j και $m_i = 0$ για $i \neq j$. Άρα $V = V_j$.

■

Το προηγούμενο πόρισμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε υπολογισμούς. Για παράδειγμα, ο χαρακτήρας χ της αναπαράστασης $\rho: D_8 \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ του Παραδείγματος 7.1.2 υπολογίστηκε στην αρχή της παρούσας παραγράφου

$$\begin{array}{cccccccccc} g & 1 & a & a^2 & a^3 & b & ab & a^2b & a^3b \\ \chi(g) & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ και άρα η ρ είναι ανάγωγη.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι οι χαρακτήρες αναπαραστάσεων επί του $\mathbb{C}$ ‘χαρακτηρίζουν’ τις αναπαραστάσεις.

7.2.7 Πόρισμα. Δύο αναπαραστάσεις της G επί του $\mathbb{C}$ είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν οι χαρακτήρες τους ταυτίζονται.

Απόδειξη: Έστω ρ και ρ' αναπαραστάσεις με αντίστοιχους χαρακτήρες χ και χ' . Αν ρ και ρ' είναι ισοδύναμες τότε $\chi = \chi'$ όπως είπαμε στην αρχή της παραγράφου. Αντίστροφα, έστω $\chi = \chi'$. Για τα αντίστοιχα $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπα γράφουμε $V \cong V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_r^{m_r}$, $V' \cong V_1^{m'_1} \oplus \dots \oplus V_r^{m'_r}$ όπου $V_1, \dots, V_r$ είναι ανά δύο μη ισόμορφα ανάγωγα $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπα. Από $\langle \chi, \chi_i \rangle = \langle \chi', \chi_i \rangle$ παίρνουμε $m_1 \langle \chi_1, \chi_i \rangle + \dots + m_r \langle \chi_r, \chi_i \rangle = m'_1 \langle \chi_1, \chi_i \rangle + \dots + m'_r \langle \chi_r, \chi_i \rangle$, οπότε το Θεώρημα 7.2.5 δίνει $m_i = m'_i$ για κάθε i . Άρα $V \cong V'$.

■

7.2.8 Πόρισμα. Έστω $V, V' \in \mathbb{C}[G]$ -πρότυπα με χαρακτήρες χ, χ' αντίστοιχα. Τότε $\langle \chi, \chi' \rangle = \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, V')$.

Απόδειξη: Γράφοντας $V \cong V_1^{m_1} \oplus \dots \oplus V_s^{m_s}$ και $V' \cong V_1^{m'_1} \oplus \dots \oplus V_s^{m'_s}$, το θεώρημα δίνει $\langle \chi, \chi' \rangle = m_1 m'_1 + \dots + m_s m'_s$. Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V_i, V_j) \cong \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases} \quad (\text{γιατί}).$$

Από την Πρόταση 1.2.2 παίρνουμε $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V, V') = m_1 m'_1 + \dots + m_s m'_s$.

7.3 Σχέσεις Ορθογωνιότητας και Πίνακες Χαρακτήρων.

Έστω $\text{Irr}G = \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$ το σύνολο των αναγώγων χαρακτήρων της G , $g_1, \dots, g_s$ αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G και $C(g_i) = \{x \in G \mid xg_i = g_i x\}$ η κεντροποιούσα ομάδα του g_i . Με $\delta_{\alpha\beta}$ συμβολίζουμε το δέλτα του Kronecker, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ εκτός αν $\alpha = \beta$ οπότε $\delta_{\alpha\alpha} = 1$.

7.3.1 Θεώρημα. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς έχουμε:

i) (ορθογώνιες σχέσεις γραμμών)

$$\sum_{i=1}^s \frac{\chi_{\alpha}(g_i) \overline{\chi_{\beta}(g_i)}}{|C(g_i)|} = \delta_{\alpha\beta}$$

ii) (ορθογώνιες σχέσεις στηλών)

$$\sum_{i=1}^s \chi_i(g_{\alpha}) \overline{\chi_i(g_{\beta})} = \delta_{\alpha\beta} |C(g_{\alpha})|.$$

Απόδειξη: i) Από το Θεώρημα 7.2.5 έχουμε $\langle \chi_{\alpha}, \chi_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ οπότε το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση 7.2.1 ii).

ii) Έστω $\psi \in cf(G)$ που ορίζεται από $\psi_{\beta}(g_{\alpha}) = \delta_{\alpha\beta}$. Λόγω του Θεωρήματος 7.2.5 γράφουμε $\psi_{\beta} = \lambda_1 \chi_1 + \dots + \lambda_s \chi_s$ οπότε παίρνουμε

$$\lambda_i = \langle \psi_{\beta}, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{\beta}(g) \overline{\chi_i(g)}.$$

Ισχύει $\psi_{\beta}(g) = 1$ αν το g είναι συζυγές του g_{β} και $\psi_{\beta}(g) = 0$ διαφορετικά. Επειδή επιπλέον ο πληθάνριθμος της κλάσης συζυγίας του g_{β} είναι $|G| / |C(g_{\beta})|$ παίρνουμε

$$\lambda_i = \frac{1}{|C(g_{\beta})|} \overline{\chi_i(g_{\beta})}.$$

Συνεπώς

$$\delta_{\alpha\beta} = \psi_{\beta}(g_{\alpha}) = \lambda_1 \chi_1(g_{\alpha}) + \dots + \lambda_s \chi_s(g_{\alpha}) = \sum_{i=1}^s \frac{\chi_i(g_{\alpha}) \overline{\chi_i(g_{\beta})}}{|C(g_{\beta})|}.$$

■

Έστω $\text{Irr}G = \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$ και $g_1, \dots, g_s$ αντίστοιχα αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G . Ο **πίνακας χαρακτήρων** της G είναι ένας $s \times s$ πίνακας που στη θέση (i, j) υπάρχει η τιμή $\chi_i(g_j)$.

Για παράδειγμα ο πίνακας χαρακτήρων της $\mathbb{Z}_3 = \{1, a, a^2\}$ είναι (παράδειγμα 7.1.9),

g	1	a	a^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

όπου $\omega^3 = 1$ με $\omega \neq 1$, δηλαδή $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Οι ορθογώνιες σχέσεις γραμμών για τις πρώτες δύο γραμμές δίνουν $\frac{1}{3} + \frac{\overline{\omega}}{3} + \frac{\overline{\omega}^2}{3} = 0$, και για τη δεύτερη γραμμή με τον εαυτό της δίνουν $\frac{1}{3} + \frac{\omega\overline{\omega}}{3} + \frac{\omega^2\overline{\omega}^2}{3} = 1$. Οι ορθογώνιες σχέσεις στηλών για τις δύο τελευταίες στήλες δίνουν $1 + \omega\overline{\omega}^2 + \omega^2\overline{\omega} = 0$. (Φυσικά οι προηγούμενες σχέσεις ισχύουν αφού $\overline{\omega} = \omega^{-1}$).

Οι ορθογώνιες σχέσεις επιτρέπουν συχνά τον προσδιορισμό ολόκληρου του πίνακα χαρακτήρων αν γνωρίζουμε μόνο κάποιο τμήμα του. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι για μια ομάδα G τάξης 12 που έχει 4 συζυγείς κλάσεις γνωρίζουμε το ακόλουθο τμήμα του πίνακα χαρακτήρων

g_i	g_1	g_2	g_3	g_4
$ C(g_i) $	12	4	3	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4				

όπου $g_1, \dots, g_4$ είναι αντιπρόσωποι των συζυγών κλάσεων και $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Από τη σχέση $\chi_1(1)^2 + \dots + \chi_4(1)^2 = 12$ (θεώρημα 7.2.5 ή Θεώρημα 7.3.1 i) για $\alpha = \beta = 1$) παίρνουμε $\chi_4(1) = 3$. Οι ορθογώνιες σχέσεις στηλών για τις στήλες 1 και

2 δίνουν

$$\sum_{i=1}^4 \chi_i(g_1) \overline{\chi_i(g_2)} = 0 \Rightarrow 1+1+1+3\overline{\chi_4(g_2)} = 0 \Rightarrow \chi_4(g_2) = -1.$$

Οι ορθογώνιες σχέσεις στηλών για τις στήλες 1 και 3 δίνουν

$$\sum_{i=1}^4 \chi_i(g_1) \overline{\chi_i(g_3)} = 0 \Rightarrow 1+\omega+\omega^2+3\overline{\chi_4(g_3)} = 0 \Rightarrow \chi_4(g_3) = 0$$

και για τις στήλες 1 και 4 δίνουν

$$\sum_{i=1}^4 \chi_i(g_1) \overline{\chi_i(g_4)} = 0 \Rightarrow 1+\omega+\omega^2+3\overline{\chi_4(g_4)} = 0 \Rightarrow \chi_4(g_4) = 0.$$

Προσδιορίζεται κατά αυτόν τον τρόπο όλος ο πίνακας χαρακτήρων της G .

Παρατηρήσεις i) Ο προηγούμενος πίνακας χαρακτήρων είναι αυτός της A_4 .

ii) Ήδη επισημάνσαμε ότι το Θεώρημα 7.2.5 προκύπτει από το θεώρημα Θ.3.1 ii) για $\alpha = \beta = 1$. Παρόμοια, το Λήμμα 7.2.3 προκύπτει από το Θεώρημα 7.3.1 ii) για $\alpha = 1$.

Ως άλλο παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη $G = S_3$ που έχει τρεις κλάσεις συζυγίας $\{1\}$, $\{(12), (23), (13)\}$, $\{(123), (132)\}$. Το Πόρισμα 7.1.5 δίνει $s = 3$ οπότε $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$. Μια ανάγωγη αναπαράσταση της S_3 είναι η $\rho : S_3 \rightarrow \sigma \mapsto \text{sign}(\sigma) \in \mathbb{C}^*$ που έχει χαρακτήρα $\chi_2 = \chi_\rho$, που δίνεται από $\chi_2(1) = 1$, $\chi_2(12) = -1$, $\chi_2(123) = 1$. Συνεπώς ο πίνακας χαρακτήρων της S_3 έχει τη μορφή

g_i	1	(12)	(123)
$ C(g_i) $	6	2	3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	a	b

Οι ορθογώνιες σχέσεις στηλών για τις στήλες 1 και 2 δίνουν $1+(-1)+2a=0$ οπότε $a=0$. Για τις στήλες 1 και 3 δίνουν $1+1+2b=0 \Rightarrow b=-1$.

Ασκήσεις

Στις παρακάτω ασκήσεις με G συμβολίζουμε μια πεπερασμένη ομάδα.

1. Το μη μηδενικό $\chi \in cf(G)$ είναι χαρακτήρας αν και μόνο αν $\langle \chi, \chi_i \rangle \in \mathbb{N}$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ_i .
2. Αν για τον χαρακτήρα χ ισχύει $\chi(g) = 0 \quad \forall g \in G, g \neq 1$, τότε ο χ είναι της μορφής $m\chi_{reg}$, $m \in \mathbb{N}$. (Υπόδειξη: υπολογίστε το $\langle \chi, \psi \rangle$ όπου ψ ανάγωγος χαρακτήρας και χρησιμοποιείτε το Λήμμα 7.2.3).
3. Συμπληρώσετε τον πίνακα χαρακτήρων της D_8 .

g_i	1	a	a^2	b	ab
$ C(g_i) $	8	4			
χ_1	1	1		1	1
χ_2	1	1		-1	-1
χ_3	1	-1	1		
χ_4	1	-1	1	-1	
χ_5					

4.

i) Οι ορθογώνιες σχέσεις γραμμών είναι ισοδύναμες με τις ορθογώνιες σχέσεις στηλών.

ii) Έστω M ο πίνακας χαρακτήρων της G . Δείξτε ότι $\det M^2 = \prod_{i=1}^s |C(g_i)|$,

όπου $g_1, \dots, g_s$ είναι αντιπρόσωποι των κλάσεων συζυγίας της G .

Υπόδειξη: από τις σχέσεις ορθογωνιότητας προκύπτει ότι ο πίνακας $\overline{M}^t M$ είναι διαγώνιος.

iii) Έστω $Irr(G) = \{\chi_1, \dots, \chi_s\}$. Τότε $C(G) = \left\{ g \in G \mid \sum_{i=1}^s \chi_i(g) \overline{\chi_i(g)} = |G| \right\}$.

7. Έστω χ χαρακτήρας της G . Θέτουμε $\ker \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$. Τότε $\ker \chi$ είναι κανονική υποομάδα της G . Αντίστροφα κάθε κανονική υποομάδα της G είναι της μορφής $\ker \chi$ για κάποιο χαρακτήρα χ . Επιπλέον αν $\chi_1, \dots, \chi_j$ είναι οι ανάγωγοι χαρακτήρες τότε $\ker \chi = \bigcap_j \ker \chi_j$ όπου το χ_j διατρέχει τους ανάγωγους χαρακτήρες που έχουν την ιδιότητα $\langle \chi, \chi_j \rangle > 0$. Συμπέρασμα: από

τον πίνακα χαρακτήρων της G μπορούμε να βρούμε **όλες** τις κανονικές υποομάδες της G . Βρείτε τώρα όλες τις κανονικές υποομάδες της D_8 απο την άσκηση 3.

8. Η G δεν είναι απλή αν και μόνο αν $\chi(g) = \chi(1)$ για κάποιον μη τετριμμένο ανάγωγο χαρακτήρα χ και κάποιο $g \in G$, $g \neq 1$. (βλ. προηγούμενη άσκηση)
9. Για κάθε χαρακτήρα χ αβελιανής ομάδας ισχύει $\langle \chi, \chi \rangle \geq \chi(1)$. Αληθεύει το συμπέρασμα για μη αβελιανές ομάδες;
10. Έστω χ ανάγωγος χαρακτήρας της G βαθμού n .
 - i) Για κάθε $g \in C(G)$ ισχύει $|\chi(g)| = n$.
 - ii) Ισχύει $n^2 \leq [G : C(G)]$.
11. Έστω H αβελιανή υποομάδα της G . Τότε κάθε ανάγωγος χαρακτήρας της G έχει βαθμό $\leq [G : H]$. Κατά συνέπεια κάθε ανάγωγος χαρακτήρας της διεδρικής ομάδας $D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, ab = ba^{-1} \rangle$ έχει βαθμό 1 ή 2.
12. Έστω $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπα V, W με αντίστοιχους χαρακτήρες χ, ψ . Τότε ο χαρακτήρας του $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ είναι το γινόμενο $\chi\psi$. (Η δράση είναι $g(v \otimes w) = g(v) \otimes g(w)$).
Υπόδειξη: υπολογίσετε το ίχνος της δράσης του g παίρνοντας βάσεις των V, W που αποτελούνται απο ιδιοδιανύσματα.
13. Αν $\chi, \psi \in Irr(G)$ και $\deg \chi = 1$, τότε $\chi\psi \in Irr(G)$. (Βλ. προηγούμενη άσκηση και Πόρισμα 7.2.6).
14. Έστω χ ο μοναδικός ανάγωγος χαρακτήρας της S_3 βαθμού 2. Βρείτε την ανάλυση του $\chi^2 = \chi\chi$ σε άθροισμα αναγώγων χαρακτήρων.
15. Έστω $\rho : G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ αναπαράσταση.

- i) Αν υπάρχει $g \in G$ με $\det(\rho(g)) = -1$, δείξτε ότι η G δεν είναι απλή.
- ii) Αν το $g \in G$ έχει τάξη 2, τότε ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής συμπεράσματα: a) $\chi(g) \equiv \chi(1) \pmod{4}$ b) η G κανονική υποομάδα τάξης 2.
- Υπόδειξη: Αν V είναι το αντίστοιχο πρότυπο της ρ , μπορούμε να επιλέξουμε βάση του V τέτοια ώστε ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $V \rightarrow V, v \mapsto gv$, είναι διαγώνιος με ± 1 στη διαγώνιο.

16. Έστω V, W δυο ανάγωγα $\mathbb{C}[G]$ -πρότυπα. Δείξτε ότι το $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ (άσκηση 12)

εμφυτεύεται στην κανονική αναπαράσταση της G .

Υπόδειξη: αρκεί να δειχτεί ότι αν $\chi, \psi, \zeta \in \text{Irr}(G)$, τότε $\langle \chi\psi, \zeta \rangle \leq \zeta(1)$.

17. Με το συμβολισμό του Παραδείγματος 7.1.2 έστω $k = \mathbb{C}$.

- i) Δείξτε ότι το $\mathbb{C}[S_n]$ -πρότυπο $V / \langle v_1 + \dots + v_n \rangle$ είναι ανάγωγο.
- ii) Δείξτε ότι $\langle \chi_v, \chi_1 \rangle = 1$ όπου χ_1 είναι ο τετριμμένος χαρακτήρας της S_n .

18. Να βρεθούν όλες οι ομάδες με ακριβώς 1, 2 ή 3 ανάγωγους χαρακτήρες.

19. Έστω G πεπερασμένη υποομάδα της $GL_n(\mathbb{C})$. Αποδείξτε ότι αν $\sum_{g \in G} \text{Tr}(g) = 0$,

τότε $\sum_{g \in G} g = 0$.

20. Έστω $\rho: G \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ μια αναπαράσταση τέτοια ώστε το 1 είναι ιδιοτιμή του $\rho(g)$ για κάθε $g \in G$. Δείξτε ότι η ρ δεν είναι ανάγωγη.

Υπόδειξη: Υπολογίστε το $\langle \chi, \chi_1 \rangle$, όπου χ είναι ο χαρακτήρας της ρ και χ_1 ο τετριμμένος χαρακτήρας της G , συναρτήσει των ιδιοτιμών των $\rho(g)$.

21. Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένη απλή ομάδα με τάξη όχι δύναμη πρώτου δεν έχει ανάγωγη αναπαράσταση βαθμού 2.

22. Οι αναπαραστάσεις της δικυκλικής ομάδας.

- a. Έστω $\rho: G \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ μια αναπαράσταση τέτοια ώστε για κάποια $g, h \in G$ έχουμε $\rho(g)\rho(h) \neq \rho(h)\rho(g)$. Αποδείξτε ότι η ρ δεν είναι ανάγωγη.
- b. Θεωρούμε την ομάδα (‘δικυκλική’) $T_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ που έχει τάξη $4n$. Έστω r ένας ακέραιος και $\varepsilon_r = e^{\frac{2\pi ir}{2n}} \in \mathbb{C}$.
- Δείξτε ότι η αντιστοιχία $a \mapsto \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & \varepsilon_r^{-1} \end{pmatrix}$, $b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon_r^n & 0 \end{pmatrix}$ ορίζει μια αναπαράσταση ρ_r της T_{4n} .
 - Δείξτε ότι η ρ_r είναι ανάγωγη αν $\varepsilon_r \neq \pm 1$. (Υπόδειξη: ένας τρόπος είναι με το a.).
 - Δείξτε ότι οι $\rho_1, \dots, \rho_{n-1}$ είναι ανά δυο μη ισοδύναμες.
 - Δείξτε ότι οι υπόλοιπες ανάγωγες ανά δυο μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις της T_{4n} είναι βαθμού 1.

23. Υπολογίστε τον πίνακα χαρακτήρων της S_4 ως εξής.

- Υπολογίστε τον αριθμό των κλάσεων συζυγίας χρησιμοποιώντας την ανάλυση μεταθέσεων σε γινόμενο ξένων κύκλων. Υπολογίστε τον πληθάνημο κάθε κλάσης συζυγίας C_{g_i} και το $|C(g_i)| = \frac{|G|}{|C_{g_i}|}$.
- Έστω χ_1, χ_2 ο τετριμμένος χαρακτήρας και ο χαρακτήρας προσήμου αντίστοιχα. Έστω χ_3 ο χαρακτήρας $\chi_V - \chi_1$ όπου χ_V ο χαρακτήρας του προτύπου στο παράδειγμα 7.1.2 για $n = 4$. Υπολογίστε τον χ_3 και δείξτε ότι είναι ανάγωγος.
- Στη συνέχεια θέστε $\chi_4 = \chi_2\chi_3$ (που είναι ανάγωγος από την άσκηση 13) και υπολογίστε τον. Βρείτε τον τελευταίο χαρακτήρα χ_5 από τις ορθογώνιες σχέσεις.

Δίνεται ο πίνακας χαρακτήρων της S_4 για επαλήθευση.

g_i	1	(12)	(123)	(12)(32)	(1234)
$ C(g_i) $	24	4	3	8	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1