ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: Κεντρικές Απλές Άλγεβρες

Χρησιμοποιώντας τανυστικά γινόμενα και εφαρμόζοντας το θεώρημα των Wedderburn-Artin (§ 3.3) θα αποδείξουμε δύο θεμελιώδη θεωρήματα που αφορούν κεντρικές απλές άλγεβρες

* θεώρημα Skolem-Noether

* θεώρημα του διπλού κεντροποιητή.

Αμέσως μετά θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα αυτά για να πάρουμε άλλα δύο φημισμένα θεωρήματα: την ταξινόμηση των παραγματικών αλγεβρών διαίρεσης που έχουν πεπερασμένη διάσταση (Frobenius), και το γεγονός ότι κάθε πεπερασμένος δακτύλιος διαίρεσης είναι μεταθετικός (Wedderburn).

6.1 Θεώρημα των Skolem-Noether

Έστω k ένα σώμα και A μια k-άλγεβρα. Το **κέντρο** της A είναι $C(A)=\{x\in A\,|\,ax=xa\ \forall a\in A\}$. Είναι μια μεταθετική υποάλγεβρα της A που περιέχει το k. Η άλγεβρα A λέγεται **κεντρική** αν $C(A)=k$ δηλαδή αν το κέντρο είναι το μικρότερο δυνατό. Υπενθυμίζουμε ότι μια άλγεβρα λέγεται απλή αν δεν έχει γνήσια μη τετριμμένα αμφίπλευρα ιδεώδη.

Παραδείγματα

1. Η $M_n(k)$ είναι κεντρική k-άλγεβρα αφού το κέντρο της είναι $C\left(M_n(k)\right)=\left\{aI\,\middle|\,a\in k\right\}$. Η $M_n(k)$ είναι απλή.
2. Η άλγεβρα των quaternions $\mathbb{H}$ (παράδειγμα 1.1.5) είναι κεντρική απλή $\mathbb{R}$-άλγεβρα.
3. Η $\mathbb{C}$ ως $\mathbb{R}$-άλγεβρα είναι απλή αλλά όχι κεντρική ενώ ως $\mathbb{C}$-άλγεβρα είναι απλή και κεντρική.
4. Η πολυωνυμική άλγεβρα $k[x]$ δεν είναι ούτε κεντρική ούτε απλή.

6.1.1 Θεώρημα (Skolem-Noether). *Έστω R μια κεντρική απλή k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και A, B δύο απλές υποάλγεβρες της R που περιέχουν το μοναδιαίο στοιχείο 1 του R. Έστω $f:A\to B$ ένας ομομορφισμός k-αλγεβρών τέτοιος ώστε $f(1)=1$. Τότε υπάρχει $r\in R$ με την ιδιότητα*

$$f(a) = rar^{-1} \quad \text{για κάθε } a \in A. \qquad (1)$$

6.1.2 Πόρισμα. *Κάθε αυτομορφισμός μιας κεντρικής απλής άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης είναι της μορφής (1).*

Παρατηρήσεις

Σε σχέση με το προηγούμενο πόρισμα παρατηρούμε τα εξής.

1. Η υπόθεση ότι η άλγεβρα είναι κεντρική είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα ο αυτομορφισμός $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to \bar{z}$ (συζυγής του z) της $\mathbb{R}$-άλγεβρας $\mathbb{C}$ δεν είναι της μορφής (1).

2. Το πόρισμα μας πληροφορεί ότι η ομάδα των αυτομορφισμών της k-άλγεβρας $M_n(k)$ είναι ισόμορφη με τη $GL_n(k)/N$, όπου $N = \{diag(a,...,a) \in M_n(k) | a \in k, a \neq 0\}$ (άσκηση).

Σε σχέση με τις υποθέσεις περί του μοναδιαίου στοιχείου στο Θεώρημα των Skolem-Noether¨, παρατηρούμε ότι για $R = M_2(k) \times M_3(k)$, $A = M_2(k)$, $B = M_3(k)$ η απεικόνιση $f : M_2(k) \to M_3(k)$, $X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, είναι ομομορφισμός k-αλγεβρών αλλά όχι της μορφής (1).

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1 υπεισέρχεται με ουσιαστικό τρόπο η έννοια του τανυστικού γινομένου. Υπενθυμίζουμε ότι αν A, B είναι k-άλγεβρες, ο διανυσματικός χώρος $A \underset{k}{\otimes} B$ καθίσταται k-άλγεβρα αν θέσουμε

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

6.1.3 Λήμμα. *Έστω R δακτύλιος και πρότυπα M_R και $_RF$ όπου το F είναι ελεύθερο με βάση X. Τότε κάθε $u \in M \underset{R}{\otimes} F$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως*

$$u = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes x_i ,$$

όπου $m_i \in M$ και τα $x_i \in X$ είναι ανά δύο διάφορα.

Απόδειξη: Το ότι το u έχει μία έκφραση της ζητούμενης μορφής προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι το X παράγει το F ως R-πρότυπο. Για τη μοναδικότητα, αν $x \in X$ γράφουμε $R_x = R$ και $M_x = M$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\partial : M \underset{R}{\otimes} F \to \underset{x \in X}{\oplus} M_x$$

$M \underset{R}{\otimes} F \cong M \underset{R}{\otimes} \left(\underset{x \in X}{\oplus} R_x \right) \cong \underset{x \in X}{\oplus} \left(M \underset{R}{\otimes} R_x \right) \cong \underset{x \in X}{\oplus} M_x$, όπου οι δύο τελευταίοι ισομορφισμοί είναι από την παράγραφο 5.2. Ισχύει $\partial(m \otimes y) = i_y(m)$, $m \in M$, όπου $i_y : M_y \to \underset{x \in X}{\oplus} M_x$ είναι η εμφύτευση στην y συντεταγμένη. Από τον ορισμό του ευθέως αθροίσματος κάθε στοιχείο του $\underset{x \in X}{\oplus} M_x$ γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$i_{x_1}(m_1) + \ldots + i_{x_n}(m_n) = \partial(m_1 \otimes x_1) + \ldots + \partial(m_n \otimes x_n) = \partial\left(\sum m_i \otimes x_i\right),$$

όπου τα x_i είναι ανά δύο διάφορα στοιχεία του X. Η μοναδικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι ο ∂ είναι μονομορφισμός.

■

Το παρακάτω αποτέλεσμα θα χρησιμοποιηθεί πολλές φορές.

6.1.4 Θεώρημα. *Έστω A, B απλές k-άλγεβρες. Αν η A είναι κεντρική τότε η* $A \otimes B \left(= A \underset{k}{\otimes} B \right)$ *είναι απλή k-άλγεβρα.*

Απόδειξη: Έστω $I \neq 0$ αμφίπλευρο ιδεώδες του $A \otimes B$. Θα δείξουμε ότι $I = A \otimes B$.

Ισχυρισμός 1. $\exists\, v \in I - \{0\}$ της μορφής $v = 1_A \otimes b,\ b \in B$.

Έστω προς στιγμή ότι ισχύει ο ισχυρισμός. Το BbB είναι μη μηδενικό αμφίπλευρο ιδεώδες του B. Άρα $B = BbB$. Έχουμε ισότητες συνόλων

$$1_A \otimes B = 1_A \otimes BbB = (1_A \otimes B)(1_A \otimes b)(1_A \otimes B) = (1_A \otimes B)v(1_A \otimes B),$$

και συνεπώς $1_A \otimes B \subseteq I$. Επίσης

$$A \otimes B = (A \otimes 1_B)(1_A \otimes B) \subseteq (A \otimes 1_B)I \subseteq I,$$

και συνεπώς $A \otimes B = I$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού 1. Έστω Y μια βάση του B. Έστω $u \in I$, $u \neq 0$

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i\,, \tag{1}$$

όπου $a_i \in A - \{0\},\ y_i \in Y$ και τα y_i είναι ανά δύο διάφορα.

Επιλέγουμε μια έκφραση (1) με n ελάχιστο (καθώς το $u \neq 0$ διατρέχει το I). Λόγω της υπόθεσης της απλότητας έχουμε

$$Aa_1A = A.$$

Άρα

$$1_A = \sum_j r_j a_1 s_j ,$$

για κάποια $r_i, s_j \in A$. Θέτουμε

$$v = \sum_j (r_j \otimes 1_B) u (s_j \otimes 1_B) \in I .$$

Εκτελώντας πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i,j} (r_j \otimes 1_B)(a_i \otimes y_i)(s_j \otimes 1_B) \\ &= \sum_{i,j} r_j a_j s_j \otimes y_i \\ &= \sum_j r_j a_1 s_j \otimes y_1 + \sum_{i \neq 1} \left(\sum_j r_j a_i s_j \right) \otimes y_i \\ &= 1_A \otimes y_1 + \sum_{i \neq 1} \left(\sum_j r_j a_i s_j \right) \otimes y_i . \qquad (2) \end{aligned}$$

Έστω $\overline{a}_i$ η ποσότητα στην τελευταία παρένθεση. Για να δείξουμε τον ισχυρισμό 1 αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{a}_i \in k$ γιατί τότε θα έχουμε από την (2)

$$\begin{aligned} v &= 1_A \otimes y_1 + \sum_{i \neq 1} \overline{a}_i \otimes y_i \\ &= 1_A \otimes y_1 + 1_A \otimes \left(\sum_{i \neq 1} \overline{a}_i y_i \right) \\ &= 1_A \otimes \left(y_1 + \sum_{i \neq 1} \overline{a}_i y_i \right), \qquad (3) \end{aligned}$$

οπότε θέτουμε $b = y_1 + \sum_{i \neq 1} \overline{a}_i y_i$.

Επειδή η A είναι κεντρική, αρκεί να δείξουμε ότι

Ισχυρισμός 2. $\overline{a}_i \in C(A)$.

Απόδειξη: Έστω $a \in A$. Θέτουμε

$$w = (a \otimes 1_B) v - v (a \otimes 1_B) \in I .$$

Αντικαθιστώντας το v από τη (2) παίρνουμε

$$w = a\otimes y_1 + \sum_{i\neq 1} a\,\overline{a}_i \otimes y_i - \left[a\otimes y_1 + \sum_{i\neq 1} \overline{a}_i a \otimes y_i \right]$$

$$= \sum_{i\neq 1} (a\,\overline{a}_i - \overline{a}_i a)\otimes y_i \ .$$

Από το ελάχιστο στον ορισμό του *v* παίρνουμε $w = 0$. Από το Λήμμα 6.1.3 έπεται ότι $a\,\overline{a}_i - \overline{a}_i a = 0$, δηλαδή $\overline{a}_i \in C(A)$.

■

Για την απόδειξη των κύριων θεωρημάτων αυτού του κεφαλαίου χρειαζόμαστε δύο επιπλέον αποτελέσματα.

6.1.5 Λήμμα. *Έστω D μια k-άλγεβρα διαίρεσης και A μια k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Τότε*

(i) η $D\otimes A$ *είναι k-άλγεβρα του Artin*

(ii) αν η D είναι κεντρική και η A είναι απλή τότε η $D\otimes A$ *είναι απλή.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με την παράγραφο 5.2, το $D\otimes A$ είναι *D*-πρότυπο γιατί έχουμε την κατάσταση ${}_D D_k$, ${}_k A$. Από το Λήμμα 6.1.3 μία βάση του $D\otimes A$ ως *D*-πρότυπο είναι το $1\otimes X$, όπου το X είναι βάση του A (ως διανυσματικός χώρος). Άρα $\dim_D D\otimes A = \dim_k A < \infty$. Κάθε ιδεώδες του $D\otimes A$ είναι *D*-πρότυπο και άρα είναι ελεύθερο με τάξη $\leq \dim_D (D\otimes A)$ (βλ παράγραφο 1.5). Άρα κάθε φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών του $D\otimes A$ είναι τελικά σταθερή.

(ii) *D* δ. διαίρεσης $\Rightarrow$ *D* απλή $\Rightarrow$ (Θεώρημα 6.1.4) $D\otimes A$ απλή.

6.1.6 Λήμμα. *Έστω A απλή k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Αν M και N είναι A-πρότυπα με* $\dim_k M = \dim_k N$ *, τότε* $M \cong N$ *ως A-πρότυπα.*

Απόδειξη: Η *A* είναι του Artin, αφού $\dim_k A < \infty$. Είναι και απλή. Από το θεώρημα Wedderburn-Artin (κεφάλαιο 3), το *A* έχει μοναδικό απλό πρότυπο (με προσέγγιση ισομορφισμού εννοείται), έστω *L*. Έχουμε τότε

$$M \cong L^m \quad \text{και} \quad N \cong L^n ,$$

(που είναι ισομορφισμοί *A*-προτύπων). Από τη σχέση $\dim_k M = \dim_k N$ παίρνουμε $m = n$ (αφού $\dim_k L < \infty$, γιατί το L είναι πηλίκο του *A*). Άρα $M \cong N$ ως *A*-πρότυπα.

■

Απόδειξη του θεωρήματος Skolem-Noether.

Ο R είναι απλός δακτύλιος του Artin. Από το θεώρημα Wedderburn-Artin, έχουμε

$$R = End_D(V),$$

όπου V είναι ένα D-πρότυπο και το D είναι δακτύλιος διαίρεσης. Παρατηρούμε ότι το D είναι κεντρική k-άλγεβρα. Πράγματι, έχουμε $R = End_D(V) \cong M_n(D^{op})$, όπου $n = \dim_D V$. Άρα για τα κέντρα έχουμε

$$C(R) \cong C(M_n(D^{op})) = \{diag(a,...,a) \mid a \in C(D^{op})\} \cong C(D).$$

Όμως $C(R) = k$ και συνεπώς $C(D) \cong k$.

Θεωρούμε τώρα την k-άλγεβρα $D \otimes A$. Επειδή οι D και A είναι απλές και η D είναι κεντρική, η $D \otimes A$ είναι απλή σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.4. Συνεπώς κάθε δύο $D \otimes A$-πρότυπα με ίσες πεπερασμένες διαστάσεις ως k-διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφα (Λήμμα 6.1.6). Καθιστούμε το V ένα $D \otimes A$-πρότυπο κατά δύο διαφορετικούς τρόπους:

(*) $(d \otimes a)v = da(v)$

(**) $(d \otimes a) \cdot v = d[(f(a))(v)]$.

Παρατηρούμε ότι $\dim_k (D \otimes A) < \infty$ γιατί αφενός $\dim_k A < 0$ (αφού $A \subseteq R$ και $\dim_k R < \infty$) και αφετέρου $\dim_k D < \infty$ (αφού από $R \cong M_n(D^{op})$ έπεται ότι $\dim_k D \leq \dim_k R < \infty$).

Άρα υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων $V \xrightarrow{r} V$ έτσι ώστε για κάθε $d \in D$, $a \in A$ και $v \in V$,

$$r(d \otimes a)v = (d \otimes a) \cdot r(v). \qquad (3)$$

Θέτοντας $a = 1$ έχουμε

$$r((d \otimes 1)v) = (d \otimes 1) \cdot r(v) \Rightarrow \text{ (από (*) και (**))}$$

$$r(dv) = d[f(1)(r(v))] \qquad \Rightarrow \text{ (υπόθεση στο } f\text{)}$$

$$r(dv) = dr(v),$$

που ισχύει για κάθε $v \in V$. Άρα $r \in End_D V = R$. Επαληθεύουμε τώρα ότι $rar^{-1} = f(a)$ για κάθε $a \in A$: Ισχύει

$$(ra)(v) = r(a(v)) \overset{(*)}{=} r((1_D \otimes a)v) \overset{(3)}{=} (1_D \otimes a)\cdot r(v) \overset{(**)}{=} f(a)r(v),$$

για κάθε $v \in V$ και άρα $ra = f(a)r$.

6.2. Θεώρημα Διπλού Κεντροποιητή

Έστω R μια k-άλγεβρα και $S \subseteq R$ ένα υποσύνολο του R. Ο κεντροποιητής του S στο R είναι η υποάλγεβρα

$$C_R(S) = C(S) := \{r \in R \mid rs = sr \quad \text{για κάθε} \quad s \in S\}.$$

Ισχύει $S \subseteq C(C(S))$. Το επόμενο θεώρημα περιγράφει μια κατάσταση όπου ισχύει ισότητα.

6.2.1 Θεώρημα *(Διπλού κεντροποιητή).* *Έστω R κεντρική απλή k-άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και S απλή υποάλγεβρα. Τότε*

i) *$C(S)$ είναι απλή k-άλγεβρα*

ii) $\dim_k R = \dim_k S \dim_k C(S)$

iii) $C(C(S)) = S$.

Απόδειξη: Δίνουμε πρώτα ένα χαρακτηρισμό του $C(S)$. Η R είναι απλή k-άλγεβρα του Artin. Συνεπώς (θεώρημα Wedderburn-Artin) $R = End_D V$, όπου το V είναι πεπερασμένης διάστασης D-πρότυπο, D k-άλγεβρα διαίρεσης. Το V γίνεται $D \otimes S -$πρότυπο με δράση

$$(d \otimes s)v := d(s(v)) = s(dv).$$

Ισχυριζόμαστε ότι $End_{D\otimes S} V = C(S)$. Πράγματι, έχουμε

$$End_{D\otimes S}(v) = \{ f \in End_D V \mid f((d \otimes s)v) = (d \otimes s) f(v),\ \forall v \in V,\ d \in D,\ s \in S\}.$$

Αλλά

$$f((d \otimes s)v) = (d \otimes s) f(v) \Leftrightarrow f(d(s(v)) = d(s(f(v))) \Leftrightarrow$$

$$df(s(v)) = d(s(f(v)) \Leftrightarrow f(s(v)) = sf(v) \Leftrightarrow fs = sf \Leftrightarrow f \in C(S).$$

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη των i)-iii).

i) Η S είναι απλή και η D είναι απλή και κεντρική (όπως ακριβώς στην απόδειξη του θεωρήματος Skolen-Noether). Από το θεώρημα 6.1.4, η $D \otimes S$ είναι απλή. Είναι και του Artin (λήμμα 6.1.5 (i)). Από το θεώρημα Wedderburn-Artin παίρνουμε $D \otimes S =$ $End_{D'}(V')$, όπου V' είναι ένα D'-πρότυπο, D' k-άλγεβρα διαίρεσης. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι το V' είναι το μοναδικό απλό $D \otimes S$ -πρότυπο. Έτσι $V = (V')^m$ για κάποιο *m*.

Έχουμε

$$C(S) = End_{D\otimes S}(V) = End_{D\otimes S}((V')^m)$$

$$\cong M_m(End_{D\otimes S}(V')) \cong M_m(D'), \qquad (4)$$

όπου ο τελευταίος ισομορφισμός της (4) προέρχεται από την άσκηση 3.10.

ii) Από την (4) έχουμε

$$\dim_k C(S) = m^2 \dim_k D' \qquad (5)$$

και από $V = (V')^m$

$$m = \dim_k V / \dim_k V'. \qquad (6)$$

Επειδή το V' είναι ελεύθερο D'-πρότυπο και το D' είναι ελεύθερο *k*-πρότυπο έχουμε

$$\dim_k V' = \dim_{D'} V' \dim_k D'. \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας τις (7) και (6) στην (5) παίρνουμε

$$\dim_k C(S) = (\dim_k V)^2 / (\dim_{D'} V)^2 \dim_k D'.$$

Ο παρονομαστής είναι $\dim_k End_{D'}(V') = \dim_k D \otimes S = \dim_k D \dim_k S$ και ο αριθμητής είναι $(\dim_k V \dim_k D)^2$. Άρα

$$\dim_k C(S) = (\dim_D V)^2 \dim_k D / \dim_k S$$

$$= \dim_k End_D(V) / \dim_k S$$

$$= \dim_k R / \dim_k S.$$

iii) Έχουμε $\dim_k R = \dim_k S \dim_k C(S)$ από το ii). Γράφοντας την ίδια εξίσωση για $C(S)$ στη θέση του S (η $C(S)$ είναι βέβαια απλή από το i) παίρνουμε $\dim_k R = \dim_k C(S) \dim_k C(C(S))$. Από τις δύο εξισώσεις προκύπτει $\dim_k S = \dim_k C(C(S))$. Εφόσον ισχύει $S \subseteq C(C(S))$ προκύπτει το ζητούμενο.

■

6.3. Εφαρμογές

Θα αποδείξουμε εδώ δύο σημαντικά αποτελέσματα.

***6.3.1 Θεώρημα** (Frobenius)**.** Κάθε πραγματική άλγεβρα διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης είναι ισόμορφη με μία από τις*

$$\mathbf{R},\ \mathbf{C},\ \mathbf{H}.$$

***6.3.2 Θεώρημα** (Wedderburn)**.** Κάθε πεπερασμένος δακτύλιος διαίρεσης είναι μεταθετικός (δηλαδή σώμα).*

Ξεκινάμε με προκαταρκτικά που αφορούν δακτύλιους διαίρεσης.

***6.3.3 Λήμμα.** Έστω D δακτύλιος διαίρεσης. Τότε*

i) Υπάρχει μέγιστο υπόσωμα του D.

ii) Κάθε μέγιστο υπόσωμα K περιέχει το κέντρο $C(D)$.

iii) Για κάθε μέγιστο υπόσωμα K ισχύει $C(K)=K$, όπου $C(K)$ είναι ο κεντροποιητής

του K στο D.

Απόδειξη: i) Τυπική εφαρμογή του λήμματος του Zorn.

ii) Αν υπάρχει $d\in C(D),\ d\notin K$, τότε το σύνολο

$$K(d):=\left\{\frac{d(f)}{g(d)}\,\middle|\, f(x),g(x)\in K[x], g(d)\neq 0\right\}$$

είναι σώμα που περιέχει γνήσια το *K*, άτοπο.

iii) Αφού το *K* είναι μεταθετικό σύνολο, ισχύει $K\subseteq C(K)$. Αν υπάρχει $d\in C(K)$, $d\notin K$, τότε το σύνολο $K(d)$ είναι σώμα που περιέχει γνήσια το *K*, άτοπο.

■

Το προηγούμενο λήμμα μαζί με το θεώρημα του διπλού κεντροποιητή δίνει αμέσως την πρόταση

***6.3.4 Πρόταση.** Έστω D κεντρική k-άλγεβρα διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης και K μέγιστο υπόσωμα του D. Τότε*

$$\dim_k D=(\dim_k K)^2.$$

Απόδειξη του θεωρήματος 6.3.1.

Έστω *K* μέγιστο υπόσωμα του *D*. Επειδή $\dim_{\mathbf{R}} K\le \dim_{\mathbf{R}} D<\infty$, η επέκταση σωμάτων $K/\mathbf{R}$ είναι αλγεβρική. Άρα

$$\dim_{\mathbf{R}} K=1 \text{ ή } 2.$$

1η περίπτωση. $\dim_{\mathbf{R}} K = 1$.

Έχουμε

$$K = \mathbf{R} \quad \text{και} \quad K \supseteq C(D) \supseteq \mathbf{R}$$

οπότε $\mathbf{R} = C(D) = K$. Η πρόταση 6.3.4 δίνει $\dim_{\mathbf{R}} D = (\dim_{\mathbf{R}} K)^2 = 1$, και άρα $D = \mathbf{R}$.

2η περίπτωση. $\dim_{\mathbf{R}} K = 2$.

$$\begin{array}{c} D \\ | \\ K \\ \left.\begin{array}{c} | \\ C(D) \\ | \end{array}\right) 2 \\ \mathbf{R} \end{array}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

(α) $C(D) = \mathbf{C}$

(β) $C(D) = \mathbf{R}$

(α) $C(D) = \mathbf{C}$

Ισχύει $K = \mathbf{C} = C(D)$ και άρα (πρόταση 6.3.4) $\dim_{C(D)} D = (\dim_{C(D)} K)^2 = 1$ $\Rightarrow D = C(D) = \mathbf{C}$.

(β) $C(D) = \mathbf{R}$

Ισχύει $K = \mathbf{C}$. Θεωρούμε του $\mathbf{R}$-ισομορφισμό

$$f : K \ni a + bi \mapsto a - bi \in K.$$

Από το θεώρημα Skolen-Noether, υπάρχει $x \in D$ με την ιδιότητα

$$x(a+bi)x^{-1} = a - bi \quad \text{για κάθε} \quad a, b \in \mathbf{R}. \tag{9}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $x^2 \in \mathbf{R}$. Πράγματι, έχουμε

$$x^2(a+bi)x^{-2} = x(a-bi)x^{-1} = a + bi$$

που σημαίνει ότι $x^2 \in C(K)$. Έτσι $x^2 \in K$ (λήμμα 6.3.3).

Τέλος η σχέση $f(x^2) = x^2$ δίνει $x^2 \in \mathbf{R}$.

Αν $x^2 > 0$, τότε $x^2 = r^2$, $r \in \mathbf{R} \Rightarrow x = \pm r \in \mathbf{R}$, άτοπο λόγω της (9). Άρα $x^2 < 0$. Γράφουμε $x^2 = -y^2$, $y \in \mathbf{R}$. Θέτουμε $j := x / y$ και $k := ij$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \;\; jk = -kj = i, \;\; ki = -ik = j.$$

Ακόμα, η πρόταση 6.3.4 δίνει $\dim_{\mathbf{R}} D = (\dim_{\mathbf{R}} K)^2 = 4$. Εύκολα ελέγχουμε ότι τα στοιχεία $1, i, j, k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το **R** και άρα αποτελούν βάση του D ως **R**-διανυσματικός χώρος. Άρα $D \cong \mathbf{H}$.

■

6.3.5 Λήμμα. *Έστω G πεπερασμένη ομάδα και H γνήσια υποομάδα της G. Τότε*

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

Απόδειξη: Έστω X το σύνολο των υποομάδων της G. Θεωρούμε τη δράση της G το X που δίνεται από τη σχέση

$$G \times X \ni (g, H) \mapsto gHg^{-1} \in X .$$

Από γνωστό θεώρημα για δράσεις, ο πληθάριθμος της τροχιάς του $H \in X$ είναι ο δείκτης $[G : G_H]$, όπου G_H είναι ο σταθεροποιητής $G_H = \{g \in G \mid g \cdot H = H\}$. Ο ορισμός της δράσης δίνει

$$G_H = N(H)$$

όπου $N(H)$ είναι ο κανονικοποιητής της H στη G, $N(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$. Συμπέρασμα: για σταθερό H, το πλήθος των διακεκριμένων υποομάδων της G της μορφής gHg^{-1}, $g \in G$, είναι $[G : N(H)]$. Μετράμε τώρα τα στοιχεία του συνόλου $\bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$ που είναι διάφορα από το μοναδιαίο στοιχείο. Το πλήθος τους είναι

$$
\begin{aligned}
&\le [G : N(H)](|H| - 1) && \\
&\le [G : H](|H| - 1) && (\text{γιατί } H \subseteq N(H)) \\
&= |G| - [G : H] && (\text{θεώρημα Lagrange}) \\
&< |G| - 1. && (\text{γιατί } H \neq G)
\end{aligned}
$$

Άρα $G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}$.

■

Παρατήρηση: Κάθε $d \in D$, όπου D είναι δακτύλιος διαίρεσης περιέχεται σε κάποιο μέγιστο υπόσωμα του D. Πράγματι το d περιέχεται στο σώμα $k(d) = \left\{ \frac{f(d)}{g(d)} \,\middle|\, f(x), g(x) \in k[x], g(d) \neq 0 \right\}$, όπου $k = C(D)$. Τώρα το ζητούμενο προκύπτει από μια τυπική εφαρμογή του λήμματος του Zorn.

Απόδειξη του θεωρήματος 6.3.2.

Έστω *K* μέγιστο υπόσωμα του *D*. Θα δείξουμε ότι $K = D$. Έστω $d \in D$. Από την προηγούμενη παρατήρηση το d περιέχεται σε κάποιο σώμα. Άρα ισχύει

$$D = \bigcup_K K\ , \quad K \text{ μέγιστο υπόσωμα.}$$

Ισχυρισμός: Κάθε δύο μέγιστα υποσώματα του *D* έχουν τον ίδιο πληθάριθμο. Πράγματι, έστω *k* το κέντρο του *D* οπότε το *k* είναι σώμα που περιέχεται στο *K* (λήμμα 6.3.3). Ως *k*-άλγεβρα η *D* έχει προφανώς πεπερασμένη τάξη. Η πρόταση 6.3.4 δίνει

$$\dim_k D = n^2,$$

όπου $n = \dim_k K$. Άρα $|K| = q^n$, όπου $q = |k|$ και $n^2 = \dim_k D$ δεν εξαρτώνται από το *K*.

Τώρα από τη θεωρία Galois, υπενθυμίζουμε ότι κάθε δύο πεπερασμένα σώματα της ίδιας τάξης είναι ισόμορφα και επιπλέον αν είναι επεκτάσεις του *k* υπάρχει ισομορφισμός που είναι ταυτοτικός στο *k*. Από το θεώρημα Skolem-Noether συμπεραίνουμε ότι κάθε δύο μέγιστα υποσώματα του *D* συνδέονται με μια σχέση της μορφής $K'' = xK'x^{-1},\ x \in D$.

Συμπέρασμα:

$$D = \bigcup_{x \in D^*} xKx^{-1}.$$

Λαμβάνοντας τις πολλαπλασιαστικές ομάδες έχουμε

$$D^* = \bigcup_{x \in D^*} xK^*x^{-1}.$$

Από το λήμμα 6.3.5 αυτό είναι άτοπο εκτός αν $K^* = D^*$. Αλλά τότε $K = D$.

■

Ασκήσεις

1. Υπάρχει πεπερασμένη ομάδα G ώστε η άλγεβρα $k[G]$ να είναι κεντρική;

2. Υπάρχει ισομορφισμός *k*-αλγεβρών

$$M_m(k) \otimes M_n(k) \cong M_{mn}(k).$$

Υπόδειξη: Οι άλγεβρες $M_m(k)\otimes M_n(k), M_{mn}(k)$ είναι απλές.

3. Έστω *A* κεντρική απλή *k*-άλγεβρα και *B* *k*-άλγεβρα. Τότε

i) Κάθε αμφίπλευρο ιδεώδες του $A\otimes B$ έχει τη μορφή $A\otimes I$, όπου το *I* είναι αμφίπλευρο ιδεώδες του *B*.

ii) $C(A\otimes B)=1_A\otimes C(B)$

4. Έστω *D* κεντρική *k*-άλγεβρα διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης. Αν $a,b\in D$ έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο πάνω από το *k*, τότε $a=xbx^{-1}$ για κάποιο $x\in D$.

5. Έστω *R* δακτύλιος. Μια προσθετική απεικόνιση $d:R\to R$ λέγεται **παραγώγιση** αν $d(ab)=ad(b)+d(a)b$ για κάθε $a,b\in D$. Μια παραγώγιση λέγεται **εσωτερική** αν είναι της μορφής $d(x)=xc-cx$ για κάποιο $c\in R$.

Αποδείξετε ότι κάθε *k*-γραμμική παραγώγιση μιας πεπερασμένης διάστασης κεντρικής απλής *k*-άλγεβρας *R* είναι εσωτερική.

Υπόδειξη: Skolem-Noether στις υποάλγεβρες

$$A=\left\{\begin{pmatrix} r & 0\\ 0 & r\end{pmatrix}\middle| r\in R\right\},\quad B=\left\{\begin{pmatrix} r & d(r)\\ 0 & r\end{pmatrix}\middle| r\in R\right\}$$

της $M_2(R)$.

6. i) Το τανυστικό γινόμενο δύο *k*-αλγεβρών διαίρεσης είναι πάντοτε *k*-άλγεβρα διαίρεσης για κάθε *k*;

ii) Έστω D, D' δύο *k*-άλγεβρες διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης. Αν η *D* είναι κεντρική και επιπλέον $\text{μ.κ.δ.}(\dim_k D, \dim_k D')=1$, τότε η $D\otimes D'$ είναι *k*-άλγεβρα διαίρεσης.

7. Ταξινομήσετε τους ημιαπλούς δακτυλίους που έχουν 1999 στοιχεία. Το ίδιο για 2000 στοιχεία.

8. Έστω *R* απλή *k*-άλγεβρα. Δώστε στο *R* τη δομή $R\otimes R^{op}-$προτύπου έτσι ώστε

$$C(R) \cong End_{R \otimes R^{op}}(R).$$

9. Έστω $n \geq 2$. Είναι δυνατόν η $\mathbb{R}$-άλγεβρα $M_n(\mathbb{H})$ να περιέχει υπόσωμα K με $\mathbb{R} \subseteq K$ και $C(K) = K$;

10. Έστω A, B $n \times n$ μιγδικοί πίνακες. Αν ο A αντιμετατίθεται με κάθε πίνακα με τον οποίο ο B αντιμετατίθεται, τότε ο A είναι πολυώνυμο του B.