ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Τανυστικά Γινόμενα

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε την έννοια του τανυστικού γινομένου προτύπων. Θα είμαστε συνοπτικοί καθώς αναπτύσσουμε μόνο εκείνες τις στοιχειώδεις προτάσεις που θα βρουν εφαρμογές σε παρακάτω κεφάλαια.

5.1. Ορισμοί.

Έστω R ένας δακτύλιος. Για να δηλώσουμε ότι το M είναι ένα αριστερό R-πρότυπο, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό ${}_R M$. Ανάλογα, ο συμβολισμός M_R σημαίνει ότι το M είναι δεξιό R-πρότυπο.

Έστω M_R, ${}_R N$ δύο R-πρότυπα. Μια απεικόνιση

$$f : M \times N \to G,$$

όπου G είναι αβελιανή ομάδα, λέγεται ***R*-διπροσθετική** αν

(i) $f(m+m',n) = f(m,n) + f(m',n)$

(ii) $f(m,n+n') = f(m,n) + f(m,n')$

(iii) $f(mr,n) = f(m,rn)$

για κάθε $m,m' \in M$, $n,n' \in N$ και $r \in R$.

5.1.1 Ορισμός. *Έστω R ένας δακτύλιος και M_R, ${}_R N$ δύο πρότυπα. Τανυστικό γινόμενο των M_R, ${}_R N$ είναι μια αβελιανή ομάδα G και μια R-διπροσθετική απεικόνιση $f : M \times N \to G$ που έχει την ιδιότητα: για κάθε αβελιανή ομάδα G' και κάθε R-διπροσθετική απεικόνιση $f' : M \times N \to G'$*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & G \arrow[dl, dotted, "h"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $h : G \to G'$ που καθιστά το διάγραμμα μεταθετικό (δηλαδή $hf = f'$).

***5.1.2 Πρόταση** (Μοναδικότητα). Έστω M_R, ${}_R N$ δύο R-πρότυπα. Αν $f : M \times N \to G$ και $f' : M \times N \to G'$ είναι δύο τανυστικά γινόμενα των M και N, τότε $G \cong G'$.*

Απόδειξη: Από τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & G \arrow[dl, dashed, "h"] \\ G' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & G' \arrow[dl, dashed, "h'"] \\ G & \end{tikzcd}$$

συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ομομορφισμοί h, h' με τις ιδιότητες $hf = f'$ και $h'f' = f$ αντίστοιχα. Άρα $f' = (hh')f'$. Συγκρίνοντας τώρα τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f'"'] & G' \arrow[dl, dashed, "hh'"] \\ G' & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "f'"'] & G' \arrow[dl, dashed, "1_{G'}"] \\ G' & \end{tikzcd}$$

η μοναδικότητα στον Ορισμό 5.1.1 δίνει $hh' = 1_{G'}$. Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε $h'h = 1_G$. Άρα ο h είναι ισομορφισμός.

■

***5.1.3 Πρόταση** (Ύπαρξη). Έστω M_R, ${}_R N$ δύο R-πρότυπο. Τότε υπάρχει τανυστικό γινόμενό τους.*

Απόδειξη: Έστω F το ελεύθερο $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\bigoplus_{\lambda \in M \times N} \mathbb{Z}_\lambda$, όπου για κάθε λ ισχύει $\mathbb{Z}_\lambda = \mathbb{Z}$. Έστω $\{e_\lambda\}_{\lambda \in M \times N}$ η κανονική βάση του F. Με F' συμβολίζουμε το υποπρότυπο του F που παράγεται από τα στοιχεία

$$e_{(m+m',n)} - e_{(m,n)} - e_{(m',n)}$$

$$e_{(m,n+n')} - e_{(m,n)} - e_{(m,n')}$$

$$e_{(mr,n)} - e_{(m,rn)}$$

για όλες τις επιλογές των $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ και $r \in R$.

Θέτουμε $M \underset{R}{\otimes} N = F / F'$.

Το στοιχείο $e_{(m,n)}+F'$ του F/F' συμβολίζεται με $m\otimes n$. Η απεικόνιση

$$f : M\otimes N \ni (m,n)\mapsto m\otimes n\in M\underset{R}{\otimes}N$$

είναι *R*-διπροσθετική. Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη του Ορισμού 5.1.1. Έστω $f' : M\times N\to G'$ *R*-διπροσθετική απεικόνιση. Έστω $f'' : F\to G'$ η $\mathbb{Z}$-γραμμική επέκταση της f' (δηλαδή ο ομομορφισμός $\mathbb{Z}$-προτύπων που ορίζεται από $f''(e_{(m,n)})=f'(m,n)$). Επειδή η f' είναι *R*-διπροσθετική ισχύει $f''(K)=0$. Επομένως η f'' επάγει μια απεικόνιση

$$h : F/F'\to G',$$

όπου $h(m\otimes n)=f'(m,n)$ για κάθε $m\in M$, $n\in N$. Ισχύει βέβαια $hf=f'$.

Το ότι ο ομομορφισμός h είναι μοναδικός ως προς την ιδιότητα $hf=f'$ συνάγεται από το γεγονός ότι τα στοιχεία $f(m,n)$, όπου $m\in M,\ n\in N$, αποτελούν ένα σύστημα γεννητόρων του $\mathbb{Z}$-προτύπου F/F'.

■

Σημείωση Στα παρακάτω, όταν γράφουμε ‘το τανυστικό γινόμενο των M_R, ${}_RN$’ θα εννοούμε την αβελιανή ομάδα $M\underset{R}{\otimes}N := F/F'$, που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη απόδειξη, μαζί με την *R*-διπροσθετική απεικόνιση $f : M\times N\to M\underset{R}{\otimes}N$, που ορίζεται από $f(m,n)=m\otimes n := e_{(m,n)}+F'$. Τονίζουμε ιδιαίτερα ότι το $m\otimes n$ είναι μια πλευρική κλάση ως στοιχείο προτύπου πηλίκου.

5.1.4 Παρατήρηση.

i) Ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο, το $M\underset{R}{\otimes}N$ παράγεται από τα στοιχεία $m\otimes n$, όπου $m\in M, n\in N$. Δηλαδή κάθε στοιχείο του $M\underset{R}{\otimes}N$ είναι της μορφής $r_1(m_1\otimes n_1)+\ldots+r_k(m_k\otimes n_k)$ όπου $k\geq 1, r_i\in\mathbb{Z}, m_i\in M, n_i\in N$. Γενικά δεν αληθεύει ότι κάθε στοιχείο του $M\underset{R}{\otimes}N$ είναι της μορφής $m\otimes n$.

ii) Στο $M \underset{R}{\otimes} N$ ισχύουν οι σχέσεις[1]

$$(m+m')\otimes n = m\otimes n + m'\otimes n$$

$$m\otimes(n+n') = m\otimes n + m\otimes n'$$

$$mr\otimes n = m\otimes rn$$

για κάθε $m,n'\in M$, $n,n'\in N$ και $r\in R$. Από αυτές προκύπτουν οι σχέσεις

$$m\otimes 0_N = 0_M \otimes n = 0_{M \underset{R}{\otimes} N},$$

$$(-m)\otimes n = m\otimes(-n) = -(m\otimes n)$$

για κάθε $m\in M, n\in N$.

iii) Είναι δυνατόν να ισχύει $m\otimes n = 0$ με $m\neq 0$, $n\neq 0$, ή ακόμα να ισχύει $M \underset{R}{\otimes} N = 0$ με $M\neq 0$ και $N\neq 0$. Για παράδειγμα έστω $M=\mathbb{Z}_m$ και $N=\mathbb{Z}_n$ με μ.κ.δ $(m,n)=1$. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{Z}_m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_n = 0$. Πράγματι, υπάρχουν $x,y\in\mathbb{Z}$ με την ιδιότητα $1=mx+yn$. Έτσι για κάθε $a\in\mathbb{Z}_m$ και $b\in\mathbb{Z}_n$

$$\begin{aligned}
&a\otimes b=\\
&a1\otimes b=\\
&(amx+ayn)\otimes b=\\
&amx\otimes b+ayn\otimes b=\\
&amx\otimes b+ay\otimes nb=\\
&0\otimes b+ay\otimes 0=\\
&0.
\end{aligned}$$

5.2 Ιδιότητες

Το τανυστικό γινόμενο $M \underset{R}{\otimes} N$ (όταν ορίζεται) είναι $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Θα δούμε τώρα συνθήκες κάτω από τις οποίες καθίσταται πιο γενικό πρότυπο.

Έστω R, S δυο δακτύλιοι. Έστω M μια αβελιανή ομάδα που είναι ταυτόχρονα αριστερό S-πρότυπο και δεξιό R-πρότυπο. Το M ονομάζεται (S,R)-**διπρότυπο** αν ισχύει $(sm)r = s(mr)$ για κάθε $s\in S$, $m\in M$ και $r\in R$. Τότε θα συμβολίζουμε το M

[1] Σε πράξεις με τανυσικά γινόμενα μπορούμε να χρησιμοποιούμε τις σχέσεις αυτές 'αγνοώντας' την κατασκευή της Πρότασης 5.1.3.

με ${}_S M_R$.

5.2.1 Πρόταση. *Έστω R, S δυο δακτύλιοι. Τότε*

i) Για πρότυπα ${}_S M_R$, ${}_R N$ *το* $M \underset{R}{\otimes} N$ *είναι αριστερό* S*-πρότυπο με δράση που ορίζεται από* $s(m \otimes n) = sm \otimes n$

ii) Για πρότυπα M_R, ${}_R N_S$ *το* $M \underset{R}{\otimes} N$ *είναι δεξιό* S*-πρότυπο με δράση που ορίζεται από* $(m \otimes n)s = m \otimes ns$.

Απόδειξη: i) Για σταθερό s, η απεικόνιση

$$M \times N \ni (m,n) \mapsto sm \otimes n \in M \underset{R}{\otimes} N$$

είναι *R*-διπροσθετική. Επομένως (Ορισμός 5.1.1) επάγει έναν ομομορφισμό ομάδων

$$M \underset{R}{\otimes} N \ni m \otimes n \mapsto sm \otimes n \in M \underset{R}{\otimes} N.$$

Ορίζεται έτσι μια απεικόνιση

$$S \times M \underset{R}{\otimes} N \to M \underset{R}{\otimes} N, \ (s, m \otimes n) \mapsto sm \otimes n$$

που εύκολα ελέγχουμε ότι καθιστά την αβελιανή ομάδα $M \underset{R}{\otimes} N$ S-πρότυπο. Η απόδειξη του ii) είναι παρόμοια.

■

Σημείωση Έστω ότι ο δακτύλιος *R* είναι μεταθετικός. Τότε κάθε αριστερό πρότυπο *M* καθίσταται δεξιό πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό που ορίζεται από $m \cdot r = rm$, όπου $m \in M, r \in R$, και επομένως το M είναι ένα (*R*,*R*)- διπρότυπο. Έτσι το $M \underset{R}{\otimes} N$ ορίζεται και είναι ένα *R*-πρότυπο.

5.2.2 Πρόταση. *Για κάθε δεξιό R-πρότυπο M υπάρχει ισομορφισμός δεξιών R-προτύπων* $M \underset{R}{\otimes} R \cong M$, *και για κάθε αριστερό R-πρότυπο N υπάρχει ισομορφισμός αριστερών R-προτύπων* $R \underset{R}{\otimes} N \cong N$.

Απόδειξη: Το R είναι (R,R)-διπρότυπο και συνεπώς (Πρόταση 5.2.1) το $M \underset{R}{\otimes} R$ είναι δεξιό *R*-πρότυπο. Επειδή η απεικόνιση

$$M \times R \to M, \ (m,r) \mapsto mr$$

είναι *R*-διπροσθετική, λαμβάνουμε έναν καλά ορισμένο ομομορφισμό ομάδων

(Ορισμός 5.1.1)

$$\varphi : M \underset{R}{\otimes} R \to M, \quad m \otimes r \mapsto mr.$$

Ο φ είναι ομομορφισμός (δεξιών) R-προτύπων. Ορίζοντας τον ομομορφισμό R-προτύπων

$$\psi : M \to M \underset{R}{\otimes} R, \quad m \mapsto m \otimes 1$$

εύκολα επαληθεύουμε ότι $\varphi \circ \psi = 1_M$ και $\psi \circ \varphi = 1_{M \otimes R}$, και άρα ο φ είναι ισομορφισμός. Ο άλλος ισομορφισμός της πρότασης αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

■

Παράδειγμα Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση έχουμε $\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{Q}$.

5.2.3 Πρόταση. *i) Έστω πρότυπα M_R, N_R και ${}_R L$. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-προτύπων*

$$(M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L \cong M \underset{R}{\otimes} L \oplus N \underset{R}{\otimes} L.$$

ii) Έστω ${}_R M$, ${}_R N$ και L_R. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $\mathbb{Z}$-προτύπων

$$L \underset{R}{\otimes} (M \oplus N) \cong L \underset{R}{\otimes} M \oplus L \underset{R}{\otimes} N.$$

Απόδειξη: i) Η απεικόνιση

$$(M \oplus N) \times L \to M \underset{R}{\otimes} L \oplus N \underset{R}{\otimes} L$$

$$((m,n),l) \mapsto (m \otimes l, \ n \otimes l)$$

είναι R-διπροσθετική και άρα υπάρχει καλά ορισμένος ομομορφισμός $\mathbb{Z}$-προτύπων (Ορισμός 5.1.1)

$$f : (M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L \to M \underset{R}{\otimes} L \oplus N \underset{R}{\otimes} L$$

$$(m,n) \otimes l \mapsto (m \otimes l, \ n \otimes l).$$

Στην αντίθετη κατεύθυνση, οι R-διπροσθετικές απεικονίσεις

$$M \times L \ni (m,l) \mapsto (m,0) \otimes l \in (M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L$$

$$N \times L \ni (n,l) \mapsto (0,n) \otimes l \in (M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L$$

δίνουν καλά ορισμένους ομομορφισμούς $\mathbb{Z}$-προτύπων

$$g_M : M \otimes L \to (M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L$$

$$g_N : N \otimes L \to (M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L .$$

Ορίζουμε τον ομομορφισμό $\mathbb{Z}$-προτύπων

$$g : M \underset{R}{\otimes} L \oplus N \underset{R}{\otimes} L \to (M \oplus N) \underset{R}{\otimes} L$$

$$(m \otimes l, n \otimes l') \mapsto g_M(m \otimes l) + g_N(n \otimes l')$$

και ελέγχουμε ότι οι fg και gf είναι οι αντίστοιχες ταυτοτικές συναρτήσεις.

ii) Παρόμοια.

■

Ως άσκηση στους συμβολισμούς (!) αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει την ιδιότητα $\left(\bigoplus_i M_i\right) \underset{R}{\otimes} L \cong \bigoplus_i \left(M_i \underset{R}{\otimes} L\right)$. Όμως προσοχή: δεν ισχύει γενικά $\left(\prod_i M_i\right) \underset{R}{\otimes} L \cong \prod_i \left(M_i \underset{R}{\otimes} L\right)$. Δες την άσκηση 1.

5.2.4 Πόρισμα. *Έστω k σώμα και πεπερασμένης διάστασης k-διανυσματικοί χώροι V και W με αντίστοιχες βάσεις $\{v_1,\dots,v_m\}$ και $\{w_1,\dots,w_n\}$. Τότε μία βάση του k-διανυσματικού χώρου $V \underset{k}{\otimes} W$ είναι το $\{v_1 \otimes w_1,\dots,v_m \otimes w_n\}$.*

Απόδειξη: Επειδή τα στοιχεία $v_i \otimes w_j$ παράγουν το $V \underset{k}{\otimes} W$, αρκεί να δείξουμε ότι $\dim_k(V \underset{k}{\otimes} W) = mn$. Αν γράψουμε $V \cong k^m$, τότε υπάρχουν ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων

$$\begin{aligned} &V \otimes W \cong k^m \underset{k}{\otimes} W \cong \\ &\left(k \underset{k}{\otimes} W\right) \oplus \left(k \underset{k}{\otimes} W\right) \oplus \dots \oplus \left(k \underset{k}{\otimes} W\right) \cong \\ &W \oplus W \oplus \dots \oplus W \end{aligned}$$

λόγω των Προτάσεων 5.2.3 και 5.2.2. Άρα $\dim_k\left(V \underset{k}{\otimes} W\right) = m \dim_k W$.

■

Σημείωση Χρειάζεται προσοχή στο δακτύλιο R του τανυστικού γινομένου '$\underset{R}{\otimes}$'. Για παράδειγμα, ενώ $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{C}\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\mathbb{C}\right)=2$, έχουμε $\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{C}\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}\right)=4$.

5.2.5 Παραδείγματα

1. Έστω G μια πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα. Τότε η G είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν $G\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}=0$.

   Πράγματι, αν η G είναι πεπερασμένη τάξης n, τότε για κάθε $g\in G,\ a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0$ έχουμε

   $$g\otimes\frac{a}{b}=g\otimes\frac{na}{nb}=ng\otimes\frac{a}{nb}=0_G\otimes\frac{a}{nb}=0$$

   και άρα $G\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}=0$.

   Αντίστροφα, έστω ότι $G\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}=0$. Επειδή η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα, έχουμε

   $$G\simeq H\oplus\mathbb{Z}^m,$$

   όπου H πεπερασμένη υποομάδα της G και $m\geq 0$ (όπως προκύπτει από το θεώρημα ταξινόμησης των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων). Τώρα από την Πρόταση 5.2.3 έχουμε

   $$G\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\simeq\left(H\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\right)\oplus\left(\mathbb{Z}^m\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\right)$$

   και με τη βοήθεια της Πρότασης 5.2.2 έχουμε

   $$0=\mathbb{Z}^m\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\simeq\left(\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\right)\oplus\ldots\oplus\left(\mathbb{Z}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\right)\simeq\mathbb{Q}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Q}.$$

   Άρα $m=0$. Τότε $G=H$ που είναι πεπερασμένη.

2. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος και I, J ιδεώδη του R. Τότε υπάρχει ισομορφισμός R-προτύπων $\left(R/I\right)\underset{R}{\otimes}\left(R/J\right)\cong R/\left(I+J\right)$.

   Πράγματι, η απεικόνιση

   $$f:\left(R/I\right)\times\left(R/J\right)\to R/\left(I+J\right),\ \left(r+I,r'+J\right)\mapsto rr'+I+J,$$

είναι διπροσθετική και άρα υπάρχει καλά ορισμένος ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\Phi : (R/I)\underset{R}{\otimes}(R/J) \to R/(I+J),\ (r+I)\otimes(r'+J) \mapsto rr'+I+J.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι ο Φ είναι ομομορφισμός *R*-προτύπων.

Στην αντίθετη κατεύθυνση, παρατηρούμε ότι ο ομομορφιαμός *R*-προτύπων

$$g : R \to (R/I)\underset{R}{\otimes}(R/J),\ r \mapsto (r+I)\otimes(1+J),$$

έχει την ιδιότητα $I+J \subseteq kefg$. Συνεπώς επάγεται ένας ομομορφισμός *R*-προτύπων

$$\Psi : R/(I+J) \to (R/I)\underset{R}{\otimes}(R/J),\ r+I+J \mapsto (r+I)\otimes(1+J).$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι οι συνθέσεις $\Phi\Psi, \Psi\Phi$ είναι οι αντίστοιχες ταυτοτικές συναρτήσεις και άρα ο Φ είναι ισομορφισμός.

3. Έχουμε $\mathbb{Z}_m \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$, όπου $d = \text{μκδ}(m,n)$.

   Αυτό προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο παράδειγμα για $R=\mathbb{Z}, I=(m), J=(n)$.

Αν *A* και *B* είναι δύο *k*-άλγεβρες, τότε το τανυστικό γινόμενο $A\underset{k}{\otimes}B$ καθίσταται *k*-άλγεβρα με πολλαπλασιασμό που ορίζεται από $(a\otimes b)(a'\otimes b') = aa'\otimes bb'$, όπου $a,a'\in A$ και $b,b'\in B$ (γιατί είναι καλά ορισμένος;)

Ασκήσεις

1. Έστω p πρώτος αριθμός. Τότε $\left(\prod_i \mathbb{Z}_{p^i}\right)\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q} \ncong \prod_i \left(\mathbb{Z}_{p^i}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\right)$.

2. i) Ποιο είναι το $\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}$;

ii) Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος, I ένα ιδεώδες του R και M ένα R-πρότυπο. Τότε υπάρχει ισομορφισμός R-προτύπων $\frac{R}{I}\otimes_R M \cong \frac{M}{IM}$.

Με βάση αυτό δώστε μια νέα απόδειξη του Παραδείγμ. 5.2.5 3.

5. Έστω R ένας δακτύλιος.

i) Το τανυστικό γινόμενο δυο ελεύθερων R-προτύπων είναι ελεύθερο.

ii) Αν ο R είναι μεταθετικός, τότε το τανυστικό γινόμενο δυο προβολικών R-προτύπων είναι προβολικό.

6. Αληθεύει ότι το τανυστικό γινόμενο δύο k-αλγεβρών διαίρεσης είναι πάντοτε k-άλγεβρα διαίρεσης;

7. Έστω A, B δυο k-άλγεβρες.

i) Αν I και J είναι αμφίπλευρα ιδεώδη των A, B αντίστοιχα, τότε το $I\otimes_k J$ είναι αμφίπλευρο ιδεώδες της άλγεβρας $A\otimes_k B$.

ii) Έστω ότι $\dim_k A, \dim_k B < \infty$. Αν η A δεν είναι ημιαπλή, τότε η $A\otimes_k B$ δεν είναι απλή. (Υπόδειξη: Θεώρημα 4.1.5)

8. Έστω k ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Τότε το τανυστικό γινόμενο δύο απλών k-αλγεβρών του Artin είναι απλή k-άλγεβρα του Artin.

9. i) Έστω G, H δυο πεπερασμένες ομάδες. Τότε υπάρχει ισομορφισμός αλγεβρών $k[G\times H] \simeq k[G]\otimes_k k[H]$.

ii) Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξης m. Ποιο είναι το πλήθος των ανά δύο μη ισόμορφων απλών $\mathbb{C}[G\times S_3]$ -προτύπων, όπου S_3 είναι η ομάδα μεταθέσεων 3 συμβόλων;. Πόσα από αυτά έχουν διάσταση 1;