

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Ριζικό του Jacobson

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι κάθε ημιαπλός δακτύλιος είναι δακτύλιος του Artin. Επειδή υπάρχουν παραδείγματα δακτυλίων του Artin που δεν είναι ημιαπλοί, πχ $\mathbb{Z}_{m^2}$, $m > 1$, τίθεται το ερώτημα: τι εμποδίζει ένα δακτύλιο του Artin να είναι ημιαπλός. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε ότι η μελέτη του προηγούμενου ερωτήματος οδηγεί άμεσα στο ριζικό του Jacobson. Ως εφαρμογή των ιδιτήτων του ριζικού του Jacobson, αποδεικνύουμε ότι κάθε δακτύλιος του Artin είναι και της Noether.

4.1. Δακτύλιοι του Artin.

Μέχρι τώρα μελετούσαμε δακτυλίους μέσω των προτύπων τους. Τα θεωρήματα του Wedderburn (2.1.2) και Wedderburn-Artin (3.3.1) δίνουν πολλούς χαρακτηρισμούς των ημιαπλών δακτυλίων και απλών δακτυλίων του Artin αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας ιδιότητες προτύπων. Εδώ θα αλλάξουμε γραμμή και θα ασχοληθούμε με έννοιες “εσωτερικές” των ημιαπλών δακτυλίων.

4.1.1 Ορισμός. Έστω $R \neq 0$ ένας δακτύλιος. Το ιδεώδες $J(R) = \bigcap_{M \text{ απλό}} \text{Ann} M$, όπου το

M διατρέχει τα απλά R -πρότυπα, ονομάζεται **ριζικό του Jacobson** του R .

4.1.2 Παρατήρηση

1. Επειδή το R/I διατρέχει τα απλά R -πρότυπα καθώς το I διατρέχει τα μεγιστικά ιδεώδη (άσκηση 11 του Κεφ1), έχουμε $J(R) = \bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} \text{Ann}(R/I)$.
2. Επειδή κάθε $\text{Ann} M$, όπου το M είναι απλό R -πρότυπο, είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες, το $J(R)$ είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες. Επιπλέον είναι γνήσιο. Άρα αν ο R είναι απλός δακτύλιος, τότε $J(R) = 0$.

Για λόγους οικονομίας στις διατυπώσεις, από το σημείο αυτό και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, κάνουμε τη γενική παραδοχή ότι όλοι οι δακτύλιοι που εμφανίζονται

στις υποθέσεις θεωρημάτων, προτάσεων κλπ είναι *μη μηδενικοί*.

4.1.3 Πρόταση. Έχουμε $J(R) = \bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} I$ όπου το I διατρέχει τα μεγιστικά ιδεώδη του R .

Απόδειξη: Πρώτα διατυπώνουμε μια γενική παρατήρηση: Για κάθε R -πρότυπο M έχουμε $\text{Ann}M = \bigcap_{m \in M} \ker f_m$, όπου $f_m : R \rightarrow M, r \mapsto rm$.

Έστω τώρα M ένα απλό R -πρότυπο και $m_0 \in M, m_0 \neq 0$. Τότε $R/\ker f_{m_0} \simeq \text{Im } f_{m_0} = M$ και άρα το $\ker f_{m_0}$ είναι μεγιστικό ιδεώδες. Από την παρατήρηση έπεται ότι

$$J(R) = \bigcap_{M \text{ απλο}} \text{Ann}M \supseteq \bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} I.$$

Έστω I ένα μεγιστικό ιδεώδες του R . Τότε έχουμε $I = \ker f_{1+I}$, όπου $f_{1+I} : R \rightarrow R/I, r \mapsto r(1+I) = r + I$. Από την παρατήρηση έπεται ότι $\text{Ann}(R/I) \subseteq I$

και επομένως $\bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} \text{Ann}(R/I) \subseteq \bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} I$ οπότε, από την Παρατήρηση 4.1.2 1,

$$\text{έχουμε } J(R) \subseteq \bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} I.$$

■

4.1.4 Παραδείγματα

1. Από την Παρατήρηση 4.1.2 2 έπεται ότι για κάθε δακτύλιο διαίρεσης D έχουμε $J(M_n(D)) = 0$.

2. Από την Πρόταση 4.1.3 έπεται ότι $J(\mathbb{Z}) = \bigcap_{p \text{ πρώτος}} (p) = 0$ και

$$J(\mathbb{Z}_{p^2}) = ([p]), \text{ όπου } p \text{ πρώτος.}$$

Το παρακάτω θεώρημα μας πληροφορεί ότι το ιδεώδες $J(R)$ “μετράει” κατά πόσο ένας δακτύλιος του Artin απέχει από το να είναι ημιαπλός.

4.1.5 Θεώρημα. Ο R είναι ημιαπλός αν και μόνο αν ο R είναι δακτύλιος του Artin και $J(R) = 0$.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

4.1.6 Λήμμα. Αν R είναι δακτύλιος του Artin, τότε υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους μεγιστικά ιδεώδη $I_1, \dots, I_n$ με

$$J(R) = I_1 \cap \dots \cap I_n.$$

Απόδειξη: Το σύνολο ιδεωδών

$$\{\cap I_i / \{I_i\} \text{ πεπερασμένη οικογένεια μεγιστικών ιδεωδών}\}$$

είναι μη κενό (Πρόταση 1.4.2) οπότε έχει ελαχιστικό στοιχείο (Πρόταση 3.1.3), έστω J . Θα δείξουμε ότι $J(R) = J$. Λόγω της Πρότασης 4.1.3, αρκεί να δείξουμε ότι $J \subseteq J(R)$. Έστω I μεγιστικό ιδεώδες. Τότε $I \cap J \subseteq J$, οπότε ο ορισμός του J δίνει $I \cap J = J$. Άρα $J \subseteq I$ και συνεπώς $J \subseteq \bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} I = J(R)$. ■

4.1.7 Λήμμα Αν R_1, R_2 είναι δακτύλιοι, τότε $J(R_1 \times R_2) = J(R_1) \times J(R_2)$.

Απόδειξη: Αφού κάθε ιδεώδες του $R_1 \times R_2$ έχει τη μορφή $I_1 \times I_2$, όπου I_i είναι ιδεώδες του R_i , συμπεραίνουμε ότι κάθε μεγιστικό ιδεώδες του $R_1 \times R_2$ έχει τη μορφή $I_1 \times R_2$ ή $R_1 \times I_2$ για μεγιστικά ιδεώδη I_i του R_i . Το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση 4.1.3. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.5.

" $\Rightarrow$ " Έστω R ημιαπλός. Τότε είναι του Artin (Πόρισμα 3.1.6). Για να δείξουμε ότι $J(R) = 0$, γράφουμε $R = M_{n_1}(D_1) \times \dots \times M_{n_s}(D_s)$ σύμφωνα με το θεώρημα του Wedderburn, οπότε από το Λήμμα 4.1.7 έχουμε $J(R) = J(M_{n_1}(D_1)) \times \dots \times J(M_{n_s}(D_s))$ και το ζητούμενο έπεται από το Παράδειγμα 4.1.4 1.

" $\Leftarrow$ " Έστω ότι ο R είναι δακτύλιος του Artin με $J(R) = 0$. Θα δείξουμε ότι ο R είναι υποπρότυπο ημιαπλού προτύπου, οπότε από την Πρόταση 2.1.1 ii) θα είναι ημιαπλός δακτύλιος. Από την υπόθεση και το Λήμμα 4.1.6 παίρνουμε

$$0 = I_1 \cap \dots \cap I_n \tag{1}$$

για κάποια μεγιστικά ιδεώδη I_k . Λόγω της (1), ο ομομορφισμός R -προτύπων

$$R \rightarrow R/I_1 \times \dots \times R/I_n, \quad r \mapsto (r + I_1, \dots, r + I_n)$$

είναι μονομορφισμός. Επειδή κάθε R/I_k είναι απλό, το $R/I_1 \times \dots \times R/I_n$ είναι ημιαπλό. ■

4.1.8 Πρόρισμα. Αν ο R είναι δακτύλιος του Artin, τότε ο δακτύλιος $R/J(R)$ είναι ημιαπλός.

Απόδειξη: Ο $R/J(R)$ είναι του Artin, γιατί ο R είναι του Artin. Επιπλέον έχουμε $J(R/J(R)) = 0$. Πράγματι, τα μεγιστικά ιδεώδη του $R/J(R)$, είναι ακριβώς τα $I/J(R)$, όπου τα I είναι τα μεγιστικά ιδεώδη του R που περιέχουν το $J(R)$. Από την Πρόταση 4.1.3, κάθε μεγιστικό ιδεώδες του R περιέχει το $J(R)$. Έτσι $J(R/J(R)) = \bigcap_{I \text{ μεγιστικό}} (I/J(R)) = J(R)/J(R) = 0$. ■

4.2. Πληροφορίες για το Ριζικό του Jacobson.

Στα παρακάτω μελετάμε το ριζικό του Jacobson και δίνουμε μια σημαντική εφαρμογή του.

Ένα ιδεώδες λέγεται **μηδενοδύναμο** αν $I^n = 0$ για κάποιο n , δηλαδή αν $r_1 \dots r_n = 0$ για κάθε $r_i \in I$.

4.2.1 Παραδείγματα

1. Έστω S ένας δακτύλιος, $R = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in M_n(S) \right\}$ ο δακτύλιος των άνω

τριγωνικών πινάκων και $I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(S) \right\}$ το ιδεώδες του R των

άνω τριγωνικών πινάκων με 0 στην κύρια διαγώνιο. Τότε το I είναι μηδενοδύναμο αφού $A_1 A_2 \dots A_n = 0$ για κάθε $A_i \in I$, όπως προκύπτει από τον

πολλαπλασιασμό πινάκων.

2. Το ιδεώδες $I = ([m])$ του $\mathbb{Z}_{m^2}$ είναι μηδενοδύναμο αφού $I^2 = 0$.

4.2.2 Λήμμα. Για κάθε $r \in J(R)$, το $1-r$ έχει αριστερό αντίστροφο.

Απόδειξη: Αν το $1-r$ δεν έχει αριστερό αντίστροφο, τότε το κύριο ιδεώδες $(1-r)$ περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες I του R , $(1-r) \subseteq I$. Όμως $r \in J(R) \subseteq I$ και άρα $1 = (1-r) + r \in I$, άτοπο.

■

4.2.3 Θεώρημα. Έστω R ένας δακτύλιος. Τότε

- 1) Το $J(R)$ περιέχει κάθε μηδενοδύναμο ιδεώδες του R .
- 2) Αν ο R είναι δακτύλιος του Artin, τότε το $J(R)$ είναι μηδενοδύναμο ιδεώδες.

Απόδειξη: 1) Έστω μηδενοδύναμο ιδεώδες I που δεν περιέχεται σε κάποιο μεγιστικό ιδεώδες M . Τότε $I + M = R$, και άρα υπάρχει $x \in M$, έτσι ώστε $1-x \in I$. Επομένως για κάποιο n ισχύει $(1-x)^n = 0$ δηλαδή

$$1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^i = 0,$$

οπότε $1 \in M$, άτοπο

- 2) Για την ακολουθία ιδεωδών του R

$$J(R) \supseteq J(R)^2 \supseteq J(R)^3 \supseteq \dots$$

υπάρχει n τέτοιο ώστε $J(R)^n = J(R)^{n+1} = \dots$. Θα δείξουμε ότι $J(R)^n = 0$. Έστω $J(R)^n \neq 0$. Από την υπόθεση του Artin, το σύνολο των ιδεωδών I που έχουν τις ιδιότητες

$$I \subseteq J(R)^n \text{ και } J(R)^n I \neq 0$$

(που είναι μη κενό γιατί περιέχει το $J(R)^n$) έχει ελάχιστο στοιχείο που το συμβολίζουμε πάλι με I . Τότε υπάρχει $x \in I$ με $J(R)^n x \neq 0$. Το ιδεώδες $J(R)^n x$ ικανοποιεί τις προηγούμενες ιδιότητες οπότε, λόγω του ελαχίστου έχουμε

$$J(R)^n x = I.$$

Συνεπώς υπάρχει $y \in J(R)^n$ με $yx = x$. Έτσι $(1-y)x = 0$. Αλλά το $1-y$ έχει

αριστερό αντίστροφο αφού $y \in J(R)^n \subseteq J(R)$ (Λήμμα 4.2.2). Τότε η σχέση $(1-y)x = 0$ δίνει $x = 0$, άτοπο. ■

Ως άμεσο πόρισμα λαμβάνουμε ένα ακόμα χαρακτηρισμό ημιαπλών δακτυλίων.

4.2.4 Πόρισμα. Ένας δακτύλιος είναι ημιαπλός αν και μόνο αν είναι δακτύλιος του Artin και δεν έχει μη τετριμμένα μηδενοδύναμα ιδεώδη.

4.2.5 Παράδειγμα.

Θεωρούμε το δακτύλιο $R = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \in M_n(k) \right\}$ και το ιδεώδες

$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(k) \right\}$ όπως στο Παράδειγμα 4.2.1 1 αλλά με την επιπλέον

υπόθεση ότι $S = k$ σώμα. Ισχυριζόμαστε ότι $J(R) = I$.

Πράγματι, είδαμε ότι το I είναι μηδενοδύναμο οπότε $I \subseteq J(R)$ σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.2 1). Έστω $A = (a_{ij}) \in J(R)$. Ο R είναι δακτύλιος του Artin γιατί είναι πεπερασμένης διάστασης k -διανυσματικός χώρος. Άρα από το Θεώρημα 4.2.2 2), έχουμε $A^m = 0$ για κάποιο $m \geq 1$ και επειδή ο A είναι άνω τριγωνικός παίρνουμε $a_{ii}^m = 0$ για κάθε i , δηλαδή $a_{ii} = 0$ για κάθε i . Συνεπώς $J(R) \subseteq I$.

Από το 1^ο Θεώρημα ισομορφισμών δακτυλίων παίρνουμε $R/J(R) \simeq k \times \dots \times k$ (n φορές) που είναι ημιαπλός δακτύλιος, όπως προβλέπει άλλωστε το Πόρισμα 4.1.8.

Δίνουμε τώρα την εφαρμογή που μνημονεύσαμε στην αρχή του κεφαλαίου.

4.2.6 Θεώρημα. Κάθε δακτύλιος του Artin είναι και της Noether.

Απόδειξη: Έστω R ένας δακτύλιος του Artin. Θα δείξουμε ότι ο R έχει συνθετική σειρά, οπότε θα είναι της Noether σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.3.

Γνωρίζουμε ότι i) το ιδεώδες $J(R)$ είναι μηδενοδύναμο (Θεώρημα 4.2.3) και ii) ο δακτύλιος $R/J(R)$ είναι ημιαπλός (Πόρισμα 4.1.8). Από το i) υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με

$$0 = J(R)^n \subseteq \dots \subseteq J(R)^2 \subseteq J(R) \subseteq R. \quad (2)$$

Το R -πρότυπο $J(R)^i / J(R)^{i+1}$ γίνεται $R/J(R)$ -πρότυπο με εξωτερικό πολλαπλασιασμό $r(x + J(R)^{i+1}) = rx + J(R)^{i+1}$ (γιατί;). Επειδή ο δακτύλιος $R/J(R)$ είναι ημιαπλός, το $J(R)^i / J(R)^{i+1}$ είναι ευθύ άθροισμα απλών $R/J(R)$ -προτύπων. Ισχυριζόμαστε ότι αυτό το ευθύ άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος αθροιστέων. Προς τούτο αρκεί να δειχτεί ότι κάθε $J(R)^i / J(R)^{i+1}$ είναι $R/J(R)$ -πρότυπο του Artin, ή ισοδύναμα ότι είναι R -πρότυπο του Artin (γιατί τα R -υποπρότυπα του $J(R)^i / J(R)^{i+1}$ ταυτίζονται με τα $R/J(R)$ -υποπρότυπα του $J(R)^i / J(R)^{i+1}$). Αλλά R δακτύλιος του Artin $\Rightarrow J(R)^i$ είναι R -πρότυπο του Artin για κάθε i και κατά συνέπεια το πηλίκιο $J(R)^i / J(R)^{i+1}$ είναι R -πρότυπο του Artin (Πρόταση 3.1.4).

Από τον ισχυρισμό έπεται ότι κάθε $J(R)^i / J(R)^{i+1}$ έχει συνθετική σειρά ως R -πρότυπο. Παρεμβάλλοντας τότε όρους στην (2), εύκολα βλέπουμε ότι το R έχει συνθετική σειρά και συνεπώς (Θεώρημα 3.2.3) το R είναι R -πρότυπο της Noether. ■

Ασκήσεις

1. Κάθε δακτύλιος του Artin που δεν έχει μη μηδενικά μηδενοδύναμα στοιχεία είναι ισόμορφος με ευθύ γινόμενο δακτυλίων διαίρεσης.
2. Ένας δακτύλιος είναι δακτύλιος διαίρεσης αν και μόνο αν είναι του Artin και $xy \neq 0$ για κάθε $x, y \neq 0$.

4. Ποιο είναι το $J(R)$ αν

$$\text{i) } R = \mathbb{Z}_{20}, \quad \text{ii) } R = \mathbb{Z}_{21}, \quad \text{iii) } R = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 5x), \quad \text{iv) } R = \mathbb{Q}[x]/(x^n),$$

$$\text{v) } R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, d \in S \right\}, \text{ όπου } S \text{ είναι δακτύλιος.}$$

5. Έστω R_n ο δακτύλιος των άνω τριγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από ένα δακτύλιο διαίρεσης D . Πόσα ανά δύο μη ισόμορφα απλά R_n -πρότυπα υπάρχουν;
6. Έστω G μια πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξης n και k ένα σώμα. Ποιο είναι το $J(k[G])$;
7. Για κάθε δακτύλιο R έχουμε $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$. Συνεπώς $J(M_n(\mathbb{Z})) = 0$.
8. Αποδείξτε ότι $r \in J(R)$ αν και μόνο αν $1 - xr$ έχει αριστερό αντίστροφο για κάθε $x \in R$.
9. Έστω k ένα σώμα. Τότε κάθε απλή k -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης είναι ημιαπλή. (Σύγκρινε με το Παράδειγμα 3.3.2).
10. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος. Τότε $J(R) = \{r \in R \mid r^n = 0, n \geq 1\}$.
11. Δώστε ένα παράδειγμα που δείχνει ότι η υπόθεση στο Πόρισμα 4.1.8 είναι απαραίτητη. Όμοια για το Λήμμα 4.1.6.