

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Συνθήκες Αλυσίδων

Μελετάμε εδώ τη συνθήκη της αύξουσας αλυσίδας υποπροτύπων και τη συνθήκη της φθίνουσας αλυσίδας υποπροτύπων. Αυτές συνδέονται μεταξύ τους με την έννοια της συνθετικής σειράς (Θεώρημα 3.2.3). Το κύριο αποτέλεσμα σχετίζεται με το Κεφάλαιο 2 και περιγράφει τη δομή των απλών δακτυλίων του Artin (Θεώρημα Wedderburn-Artin). Αυτοί είναι σημαντικοί γιατί το πεπερασμένα ευθέα γινόμενά τους παρέχουν όλους τους ημιαπλούς δακτυλίου. Στο κεφάλαιο 6 θα εφαρμόσουμε πολλές φορές το θεώρημα των Wedderburn-Artin.

### 3.1. Πρότυπα της Noether και πρότυπα του Artin.

#### 3.1.1 Ορισμός

- Ένα  $R$ -πρότυπο  $M$  λέγεται **πρότυπο της Noether** (αντίστοιχα, του **Artin**) αν κάθε αύξουσα  $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$  (αντίστοιχα, φθίνουσα  $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \dots$ ) ακολουθία υποπροτύπων του  $M$  γίνεται τελικά σταθερή, δηλαδή αν  $M_n = M_{n+1} = \dots$  για κάποιο  $n$ .
- Ένας δακτύλιος καλείται **δακτύλιος της Noether** (αντίστοιχα, του **Artin**) αν ικανοποιεί την αντίστοιχη συνθήκη ως  $R$ -πρότυπο, δηλαδή αν κάθε αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα) ακολουθία ιδεωδών του  $R$  γίνεται τελικά σταθερή.

#### Παραδείγματα

- 1) Ο δακτύλιος  $\mathbb{Z}$  είναι της Noether, γιατί η μοναδική παραγοντοποίηση ενός  $a \neq 0, \pm 1$  σε γινόμενο πρώτων αριθμών σημαίνει ότι το ιδεώδες  $(a)$  περιέχεται σε πεπερασμένου πλήθους ιδεώδη. (Για μια άλλη δικαιολόγηση, δες την Πρόταση 3.1.2 (iii) παρακάτω). Με παρόμοιο τρόπο, βλέπουμε ότι κάθε περιοχή κυρίων ιδεωδών είναι δακτύλιος της Noether.
- 2) Ο  $\mathbb{Z}$  δεν είναι του Artin αφού  $(2) \supsetneq (2^2) \supsetneq (2^3) \supsetneq \dots$
- 3) Κάθε πεπερασμένος δακτύλιος είναι και της Noether και του Artin, γιατί το πλήθος των ιδεωδών είναι πεπερασμένο. Για τον ίδιο λόγο κάθε δακτύλιος διαίρεσης είναι

και της Noether και του Artin.

**4)** Ο δακτύλιος των πολυωνύμων  $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$  στις απείρου πλήθους μεταβλητές  $x_1, x_2, \dots$  δεν είναι ούτε της Noether ούτε του Artin, γιατί έχουμε τις αλυσίδες ιδεωδών  $(x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq (x_1, x_2, x_3) \subsetneq \dots$  και  $(x_1) \supsetneq (x_1^2) \supsetneq (x_1^3) \supsetneq \dots$ .

**3.1.2 Πρόταση.** Έστω  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- (i) Το  $M$  είναι της Noether.
- (ii) Κάθε μη κενό υποσύνολο προτύπων του  $M$  έχει μέγιστο στοιχείο.
- (iii) Κάθε υποπρότυπο του  $M$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

**Απόδειξη:** (i)  $\Rightarrow$  (ii). Έστω  $X \neq \emptyset$  ένα σύνολο υποπροτύπων του  $M$ . Έστω  $M_0 \in M$ . Αν το  $M_0$  δεν είναι μέγιστο, τότε υπάρχει  $M_1 \in X$  με  $M_0 \subsetneq M_1$ . Αν το  $M_1$  δεν είναι μέγιστο, τότε υπάρχει  $M_2 \in X$  με  $M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2$ . Συνεχίζουμε λαμβάνοντας μια αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του  $M$ . Από την υπόθεση αυτή κάπου τερματίζει,  $M_n = M_{n+1} = \dots$ . Προφανώς το  $M_n$  είναι μέγιστο στοιχείο του  $X$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Έστω  $N$  υποπρότυπο του  $M$  και  $X$  το σύνολο των πεπερασμένα παραγόμενων υποπροτύπων του  $N$ . Φυσικά  $X \neq \emptyset$ . Έστω  $N_0$  ένα μέγιστο στοιχείο του  $X$  σύμφωνα με την υπόθεση. Θα δείξουμε ότι  $N = N_0$ . Αρκεί να δείξουμε  $N \subseteq N_0$ : Έστω  $a \in N$ . Το πρότυπο  $N_0 + \langle a \rangle$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο και  $N_0 \subseteq N_0 + \langle a \rangle$ . Άρα  $N_0 + \langle a \rangle = N_0$ , απ'όπου παίρνουμε  $a \in N_0$ . Άρα  $N \subseteq N_0$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Έστω  $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$  μια αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του  $M$ . Το πρότυπο  $N = \bigcup_i M_i$  είναι πεπερασμένα παραγόμενο από την υπόθεση,  $N = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Υπάρχουν  $m_i$  με  $a_i \in M_{m_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Θέτοντας  $m = \max\{m_1, \dots, m_n\}$  έχουμε  $\bigcup_i M_i = M_m$  λόγω της αλυσίδας. Άρα  $M_m = M_{m+1} = \dots$ .

■

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

**3.1.3 Πρόταση.** Έστω  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- (i) Το  $M$  είναι του Artin.
- (ii) Κάθε μη κενό σύνολο υποπροτύπων του  $M$  έχει ελάχιστο στοιχείο.

**Απόδειξη:** Άσκηση. ■

Συνεπώς σ'ένα δακτύλιο της Noether (αντίστοιχα, του Artin) κάθε μη κενό σύνολο ιδεωδών έχει μέγιστο (αντίστοιχα, ελάχιστο) στοιχείο. Επίσης σ'ένα δακτύλιο της Noether κάθε ιδεώδες είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

**3.1.4 Πρόταση.** Έστω

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

μια ακριβής ακολουθία  $R$ -προτύπων. Τότε το  $M$  είναι πρότυπο της Noether (αντίστοιχα, του Artin) αν και μόνο αν τα  $L$  και  $N$  είναι πρότυπα της Noether (αντίστοιχα, του Artin).

**Απόδειξη:** Θα ασχοληθούμε με πρότυπα της Noether μόνο καθώς η περίπτωση των προτύπων του Artin είναι παρόμοια. Έστω ότι το  $M$  είναι της Noether. Θεωρούμε αύξουσες αλυσίδες

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \quad \text{και} \quad N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \quad (1)$$

υποπροτύπων του  $L$  και  $N$  αντίστοιχα. Παίρνουμε αντίστοιχες ακολουθίες υποπροτύπων του  $M$

$$f(L_0) \subseteq f(L_1) \subseteq \dots \quad \text{και} \quad g^{-1}(N_0) \subseteq g^{-1}(N_1) \subseteq \dots, \quad (2)$$

που τελικά είναι σταθερές λόγω της υπόθεσης στο  $M$ . Αν  $f(L_n) = f(L_{n+1}) = \dots$  παίρνουμε  $L_n = L_{n+1} = \dots$ , γιατί ο  $f$  είναι μονομορφισμός. Επίσης αφού το  $g$  είναι επιμορφισμός, έχουμε  $g^{-1}(N_m) = g^{-1}(N_{m+1}) = \dots \Rightarrow N_m = N_{m+1} = \dots$ . Αντίστροφα, έστω ότι τα  $L, N$  είναι της Noether, και έστω  $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$  αύξουσα ακολουθία υποπροτύπων του  $M$ . Απ'αυτή παίρνουμε τις ακολουθίες

$$f^{-1}(M_0) \subseteq f^{-1}(M_1) \subseteq \dots, \quad g(M_0) \subseteq g(M_1) \subseteq \dots$$

που είναι τελικά σταθερές. Άρα υπάρχει  $n$  με

$$f^{-1}(M_n) = f^{-1}(M_{n+1}) = \dots, \quad g(M_n) = g(M_{n+1}) = \dots.$$

Θα δείξουμε ότι  $M_n = M_{n+1} = \dots$ . Έστω  $x \in M_{k+1}$ , όπου  $k \geq n$ . Τότε  $g(x) \in g(M_{k+1}) = g(M_k)$ . Άρα  $g(x) = g(y)$ , για κάποιο  $y \in M_k$ . Συνεπώς  $g(x - y) = 0$  και  $x - y \in \ker g = \operatorname{Im} f$ . Άρα  $x - y \in \operatorname{Im} f \cap M_{k+1}$  και  $f^{-1}(x - y) \in f^{-1}(M_{k+1}) = f^{-1}(M_k)$ , απ'όπου παίρνουμε  $x - y \in M_k$ . Άρα  $x \in M_k$ . Αποδείξαμε

ότι  $M_{k+1} \subseteq M_k$ , και συνεπώς  $M_{k+1} = M_k$ .

■

Σύμφωνα με τη μια κατεύθυνση της προηγούμενης πρότασης, οι ιδιότητες ‘πρότυπο της Noether’ και ‘πρότυπο του Artin’ κληρονομούνται στα υποπρότυπα και στα πηλίκια.

**3.1.5 Πρόρισμα.** Έστω  $M_1, \dots, M_n$   $R$ -πρότυπα. Τότε το  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin) αν και μόνο αν κάθε  $M_i$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin).

**Απόδειξη:** Επαγωγή στο  $n$ . Για  $n=1$  το πόρισμα είναι προφανές. Έστω  $n>1$  και θεωρούμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_1 \oplus \dots \oplus M_n \xrightarrow{\pi} M_2 \oplus \dots \oplus M_n \longrightarrow 0$$

όπου  $i(a_1) = (a_1, 0, \dots, 0)$  και  $\pi(a_1, \dots, a_n) = (a_2, \dots, a_n)$ ,  $a_i \in M_i$ . Από την Πρόταση 3.1.4, το  $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin) αν και μόνο αν τα  $M_1$  και  $M_2 \oplus \dots \oplus M_n$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin). Αλλά από την επαγωγική υπόθεση, το  $M_2 \oplus \dots \oplus M_n$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin) αν και μόνο αν τα  $M_2, \dots, M_n$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin).

■

**3.1.6 Πρόρισμα.** Κάθε ημιαπλός δακτύλιος είναι και της Noether και του Artin.

**Απόδειξη:** Επειδή κάθε απλό πρότυπο είναι προφανώς και της Noether και του Artin, το ζητούμενο προκύπτει από το Πρόρισμα 3.1.5 και την Παρατήρηση 2.1.4.

■

**3.1.7 Πρόρισμα.** Έστω  $R$  ένας δακτύλιος της Noether (αντίστοιχα, του Artin). Τότε κάθε πεπερασμένα παραγόμενο  $R$ -πρότυπο είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin).

**Απόδειξη:** Έστω  $M$  ένα πεπερασμένα παραγόμενο  $R$ -πρότυπο. Τότε υπάρχει επιμορφισμός  $F \rightarrow M$ , όπου το  $F$  είναι ελεύθερο και μάλιστα της μορφής  $F \cong \bigoplus_{i=1}^n R$ ,  $n < \infty$ . (Πρόταση 1.3.1 ii) και η απόδειξή της). Από το Πρόρισμα 3.1.5 το  $F$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin) και άρα (Πρόταση 3.1.4) το  $M$  είναι της Noether (αντίστοιχα, του Artin).



**Σημείωση:** Το Πόρισμα 3.1.5 δεν ισχύει για  $n = \infty$  (γιατί;). Επίσης το Πόρισμα 3.1.7 δεν ισχύει γενικά για πρότυπα που δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενα (γιατί;).

### 3.2. Συνθετικές Σειρές.

Έχοντας εισάγει στην προηγούμενη παράγραφο τις έννοιες του προτύπου της Noether και του προτύπου του Artin, είναι εύλογο να ρωτήσουμε ποιά πρότυπα είναι και της Noether και του Artin. Το θεώρημα που θα αποδείξουμε εδώ χαρακτηρίζει τα προαναφερθέντα πρότυπα και θα εφαρμοστεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.4 του επόμενου κεφαλαίου.

**3.2.1 Ορισμός.** Μια συνθετική σειρά ενός  $R$ -προτύπου  $M$  είναι μια (πεπερασμένη) ακολουθία υποπροτύπων του  $M$

$$0 = M_n \subseteq \dots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

όπου κάθε πηλίκο  $M_i / M_{i+1}$  είναι απλό πρότυπο.

#### Παραδείγματα

1) Κάθε ημιαπλός δακτύλιος έχει συνθετική σειρά: αν  $R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$ , όπου κάθε  $I_i$  είναι απλό ιδεώδες (Παρατήρηση 2.1.4), τότε έχουμε τη συνθετική σειρά

$$0 \subseteq I_1 \subseteq I_1 \oplus I_2 \subseteq \dots \subseteq I_1 \oplus \dots \oplus I_n = R.$$

2) Μια συνθετική σειρά του  $\mathbb{Z}$ -προτύπου  $\mathbb{Z}_6$  είναι

$$0 \subseteq \mathbb{Z}_2 \subseteq \mathbb{Z}_6$$

και μία άλλη είναι

$$0 \subseteq \mathbb{Z}_3 \subseteq \mathbb{Z}_6.$$

Άρα οι όροι σε μια συνθετική σειρά δεν είναι μοναδικοί. Όμως το μήκος και τα διαδοχικά πηλίκια είναι. Ακριβέστερα ισχύει:

**3.2.2 Θεώρημα (Jordan Hölder).** Έστω δύο συνθετικές σειρές του  $M$

$$0 \subseteq M_m \subseteq \dots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M$$

$$0 \subseteq M'_n \subseteq \dots \subseteq M'_1 \subseteq M'_0 = M.$$

Τότε  $m = n$  και υπάρχει μετάθεση  $\pi$ , έτσι ώστε

$$M_i / M_{i+1} \cong M'_{\pi(i)} / M'_{\pi(i)+1}.$$

Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος είναι λέξη προς λέξη ίδια για τις ομάδες που περιέχεται σε κάθε εισαγωγικό βιβλίο θεωρίας ομάδων και δεν θα μας απασχολήσει εδώ. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο θεώρημα παρά μόνο σε ασκήσεις.

Ερχόμαστε τώρα να απαντήσουμε στο ερώτημα που θέσαμε πριν.

**3.2.3 Θεώρημα.** Ένα πρότυπο έχει συνθετική σειρά αν και μόνο αν είναι πρότυπο και της Noether και της Artin.

**Απόδειξη:** Θα δώσουμε μια απόδειξη ανεξάρτητη από το θεώρημα Jordan-Hölder.

" $\Rightarrow$ " Έστω ότι το  $M$  έχει συνθετική σειρά και έστω  $n$  το μήκος της. Θα εφαρμόσουμε επαγωγή στο  $n$  ξεκινώντας από την τετριμμένη περίπτωση  $n = 0$ . Έστω  $n \geq 1$  και η συνθετική σειρά

$$0 = M_n \subseteq \dots \subseteq M_1 \subseteq M_0 = M.$$

Από το 3ο θεώρημα ισομορφισμών προτύπων (Πρόταση 1.1.3. iii) διαπιστώνουμε ότι

$$0 = \frac{M_{n-1}}{M_{n-1}} \subseteq \dots \subseteq \frac{M_1}{M_{n-1}} \subseteq \frac{M_0}{M_{n-1}} = \frac{M}{M_{n-1}}$$

είναι μια συνθετική σειρά του  $M / M_{n-1}$ . Αφού το μήκος είναι  $n - 1$ , η επαγωγική υπόθεση δίνει ότι το  $M / M_{n-1}$  είναι πρότυπο και της Noether και του Artin. Το ίδιο συμβαίνει και για το  $M_{n-1}$  (γιατί είναι απλό). Από την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow M_{n-1} \longrightarrow M \longrightarrow M / M_{n-1} \longrightarrow 0$$

και την Πρόταση 3.1.4 συμπεραίνουμε ότι το  $M$  είναι και της Noether και του Artin.

" $\Leftarrow$ " Έστω ότι το  $M$  είναι και της Noether και του Artin. Έστω ότι δεν είναι απλό. Κατασκευάζουμε μια συνθετική σειρά κατά τον ακόλουθο προφανή τρόπο: Έστω  $M_1$  μέγιστο γνήσιο υποπρότυπο του  $M$  (υπάρχει τέτοιο λόγω της Πρότασης 3.1.2) οπότε το πηλίκο  $M / M_1$  είναι απλό. Αν το  $M_1$  δεν είναι απλό, έστω  $M_2$  ένα μέγιστο γνήσιο υποπρότυπο του  $M_1$  (υπάρχει, γιατί το  $M_1$  ως υποπρότυπο προτύπου της Noether είναι της Noether-Πρόταση 3.1.4) οπότε το πηλίκο  $M_1 / M_2$  είναι απλό. Συνεχίζουμε

$$\dots \subsetneq M_2 \subsetneq M_1 \subsetneq M_0 = M.$$

Η διαδικασία τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων γιατί το  $M$  είναι

πρότυπο του Artin.

■

### 3.3. Απλοί δακτύλιοι του Artin.

Υπενθυμίζουμε ότι ο δακτύλιος  $M_n(D)$ , όπου  $D$  δακτύλιος διαίρεσης είναι απλός (Λήμμα 2.3.1) και δακτύλιος του Artin (Πόρισμα 3.1.6). Ποιοί είναι οι απλοί δακτύλιοι του Artin; Το Θεώρημα των Wedderburn-Artin λέει ότι πέρα από τους  $M_n(D)$  δεν υπάρχουν άλλοι. Στο θεώρημα αυτό θα δώσουμε διάφορους χαρακτηρισμούς των απλών δακτυλίων του Artin και για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε τον εξής ορισμό.

Υπενθυμίζουμε ότι αν  $M$  είναι ένα  $R$ -πρότυπο, ο μηδενιστής του  $M$  είναι  $\text{Ann}M = \{r \in R \mid rm = 0, \forall m \in M\}$ . Το  $\text{Ann}M$  είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες του  $M$ . Ένα  $R$ -πρότυπο λέγεται **πιστό** αν  $\text{Ann}M = 0$ . Για παράδειγμα, κάθε μη μηδενικό πρότυπο πάνω από δακτύλιο διαίρεσης είναι πιστό. Πιο γενικά, κάθε μη μηδενικό πρότυπο  $M$  πάνω από απλό δακτύλιο  $R$  είναι πιστό, αφού το  $\text{Ann}M$  είναι μη μηδενικό αμφίπλευρο ιδεώδες του  $R$  και άρα τετριμμένο. Για  $m > 1$ , το  $\mathbb{Z}_m$  δεν είναι πιστό  $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

**3.3.1 Θεώρημα (Wedderburn-Artin).** Για ένα δακτύλιο  $R$  τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- 1)  $R$  είναι απλός δακτύλιος του Artin
- 2)  $R$  έχει απλό πιστό πρότυπο και είναι δακτύλιος του Artin.
- 3)  $R \cong M^n$ , για κάποιο απλό πρότυπο  $M$
- 4)  $R$  είναι ημιαπλός και όλα τα απλά πρότυπα είναι ισόμορφα
- 5)  $R \cong M_n(D)$ , όπου  $D$  είναι δακτύλιος διαίρεσης

**Απόδειξη:** 1)  $\Rightarrow$  2). Παρατηρούμε ότι αν  $M \neq 0$  είναι ένα  $R$ -πρότυπο, τότε  $\text{Ann}M = 0$ , γιατί το  $\text{Ann}M$  είναι ένα μη μηδενικό αμφίπλευρο ιδεώδες του απλού δακτυλίου  $R$ . Έστω τώρα  $M \neq 0$  ένα υποπρότυπο του  $R$ . Αν το  $M$  είναι απλό, δεν

υπάρχει τίποτα να αποδείξουμε. Αν όχι, τότε υπάρχει  $M_1 \subsetneq M$ , με  $M_1$  απλό. Αν το  $M_1$  είναι απλό δεν υπάρχει κάτι να αποδείξουμε. Αν όχι, συνεχίζουμε. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνουμε μια φθίνουσα ακολουθία ιδεωδών  $M \supsetneq M_1 \supsetneq \dots$ . Από την υπόθεση του Artin, η ακολουθία αυτή είναι της μορφής

$$M \supsetneq M_1 \supsetneq \dots \supsetneq M_n \supsetneq 0$$

Το  $M_n$  απλό.

2)  $\Rightarrow$  3) Έστω  $M$  πιστό και απλό. Θα δείξουμε ότι ο  $R$  είναι ισόμορφο με υποπρότυπο του  $M^k$  για κάποιο  $k$  και άρα είναι ισόμορφο με  $M^n$  για κάποιο  $n \leq k$ . Θεωρούμε όλους του  $R$ -ομομορφισμούς  $R \rightarrow M^k$ , όπου  $k \in \mathbb{N}$ , και επιλέγουμε έναν με ελάχιστο πυρήνα, έστω  $f: R \rightarrow M^k$ . (Η υπόθεση της συνθήκης του Artin το επιτρέπει, Πρόταση 3.1.3). Ισχυριζόμαστε ότι ο  $f$  είναι μονομορφισμός. Πράγματι αν  $f(r) = 0$  με  $r \neq 0$ , τότε υπάρχει  $m \in M$  με  $rm \neq 0$ , γιατί το  $M$  είναι πιστό. Ορίζουμε έναν ομομορφισμό

$$g: R \rightarrow M^k \oplus M, \quad x \mapsto (f(x), xm).$$

Ισχύει  $\ker g \subsetneq \ker f$ , γιατί  $r \notin \ker g$ . Αυτό είναι άτοπο. Έτσι ο  $f$  είναι μονομορφισμός.

3)  $\Rightarrow$  4) Ο  $R$  είναι ημιαπλός από την Πρόταση 2.1.1. Ότι όλα τα απλά πρότυπά του είναι ισόμορφα έπεται για παράδειγμα, από την παρατήρηση ότι κάθε απλό πρότυπο είναι της μορφής  $R/I$  ( $I$  μέγιστο ιδεώδες του  $R$ , άσκηση 1.10) και συνεπώς είναι πηλίκο του  $M^n$ , και άρα είναι ισόμορφο με το  $M$ .

4)  $\Rightarrow$  5) Πρόταση 2.3.4.

5)  $\Rightarrow$  1) Λήμμα 2.3.1 και Πόρισμα 3.1.6.

■

Είδαμε ότι κάθε απλός δακτύλιος του Artin είναι ημιαπλός. Στο επόμενο παράδειγμα έχουμε έναν απλό δακτύλιο που δεν είναι ημιαπλός.

**3.3.2 Παράδειγμα** Θεωρούμε την άλγεβρα  $\mathbb{C}\{x, y\}$  των πολυωνύμων στις μη

μεταθετικές μεταβλητές<sup>1</sup>  $x, y$ . Έστω  $I$  το αμφίπλευρο ιδεώδες του  $\mathbb{C}\{x, y\}$  που παράγεται από το  $yx - xy - 1$  και  $R = \mathbb{C}\{x, y\} / I$ . Τότε ο  $R$  είναι απλός αλλά όχι ημιαπλός.

Περιγράφουμε παρακάτω τα κύρια βήματα της απόδειξης και αφήνουμε τις λεπτομέρειες για άσκηση. Με  $X, Y$  συμβολίζουμε τις εικόνες  $x + I, y + I$  των  $x, y$  αντίστοιχα στο  $R$ . Τότε έχουμε τη σχέση  $YX - XY = 1$ .

0. Ως διανυσματικός χώρος ο  $R$  παράγεται από τα ‘μονώνυμα’  $X^m Y^n$ ,  $m, n \geq 0$ .
1.  $YX^m Y^n = X^m Y^{n+1} + mX^{m-1} Y^n$  για κάθε  $m, n \geq 0$ .
2.  $Y^n X = XY^n + nY^{n-1}$  για κάθε  $n \geq 0$ .
3. Έστω  $I$  ένα αμφίπλευρο ιδεώδες του  $R$  και  $f \in I$ ,  $f \neq 0$ . Έστω  $Z = X^m Y^n$  το ‘μονώνυμο’ μεγίστου βαθμού που εμφανίζεται στο  $f$  (σε μια ανάλυση του  $f$  που προβλέπεται από το 0.) ως προς τη διάταξη

$$X^a Y^b \leq X^c Y^d \Leftrightarrow 1) a < c \text{ ή } 2) a = c \text{ και } b \leq d.$$

Ορίζουμε τα εξής στοιχεία του  $I$ .

$$X_1 = YZ - ZY$$

$$X_2 = YX_1 - X_1 Y$$

...

$$X_m = YX_{m-1} - X_{m-1} Y$$

Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση 1. προκύπτει ότι το  $X_m$  είναι ‘πολυνόμιο’ του  $Y$  ‘βαθμού’  $n$  (δεν εμφανίζεται  $X$ ).

4. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς ορίζουμε τα εξής στοιχεία του  $I$ .

$$Y_1 = X_m X - X X_m$$

$$Y_2 = Y_1 X - X Y_1$$

...

$$Y_n = Y_{n-1} X - X Y_{n-1}.$$

Τότε χρησιμοποιώντας το 2. και 3. προκύπτει ότι το  $Y_n$  είναι μια μη μηδενική σταθερά και άρα  $I = R$ . Συνεπώς ο  $R$  είναι απλός δακτύλιος.

5. Ο  $R$  δεν είναι ημιαπλός. Πράγματι, από το Πόρισμα 3.1.6 αρκεί να δείξουμε

---

<sup>1</sup> Μια βάση διανυσματικού χώρου  $\mathbb{C}\{x, y\}$  αποτελεί το σύνολο των λέξεων  $x^{a_1} y^{b_1} \dots x^{a_i} y^{b_i}$ , όπου  $a_i, b_i \geq 0$ . Ο πολλαπλασιασμός της άλγεβρας  $\mathbb{C}\{x, y\}$  δίνεται από την παράθεση λέξεων.

ότι ο  $R$  δεν είναι δακτύλιος του Artin. Έχουμε την αλυσίδα ιδεωδών

$$(Y) \supsetneq (Y^2) \supsetneq (Y^3) \supsetneq \dots$$

*Σημείωση:* Θεωρούμε την άλγεβρα  $\mathbb{C}[x]$  των πολωνύμων μιας μεταβλητής.

Αποδεικνύεται ότι η άλγεβρα  $R$  του παραδείγματος είναι ισόμορφη με την υποάλγεβρα  $B$  της  $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x])$  που παράγεται από τις γραμμικές

απεικονίσεις 1)  $h = \text{'πολλαπλασιασμός με το } x\text{'}$  και 2)  $\frac{d}{dx} = \text{παραγώγιση ως προς } x$ .

Ο δε ισομορφισμός  $R \simeq B$  επάγεται από την αντιστοιχία

$X \mapsto h, Y \mapsto \frac{d}{dx}$ . Από τον κανόνα του γινομένου της παραγώγου έχουμε

$$\frac{d}{dx} \circ h - h \circ \frac{d}{dx} = 1_{\mathbb{C}[x]}, \text{ πράγμα που 'εξηγεί' τη σχέση } YX - XY = 1 \text{ στο } R.$$

Η άλγεβρα  $B$  είναι ένα παράδειγμα των 'αλγεβρών Weyl' (βλ. J.A.Beachy, *Introductory lectures on Rings and Modules*, Cambridge Univ. Press, 1999).

Αυτές έχουν σημαντικές εφαρμογές στην Άλγεβρα, Ανάλυση και Κβαντική Φυσική.

### Ασκήσεις

1. Θεωρώντας αύξουσες αλυσίδες δεξιών ιδεωδών ορίζεται η έννοια του δακτυλίου που είναι δεξιά της Noether. Αποδείξτε ότι ο δακτύλιος

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$$

είναι δεξιά της Noether αλλά όχι αριστερά της Noether.

2. Αν ο  $R$  είναι δακτύλιος της Noether (αντίστοιχα, Artin) τότε  $M_n(R)$  είναι της Noether (αντίστοιχα Artin).

3. i) Έστω  $f : M \rightarrow M$  μονομορφισμός όπου  $M$  είναι πρότυπο του Artin. Τότε ο  $f$  είναι ισομορφισμός.  
ii) Έστω  $f : M \rightarrow M$  επιμορφισμός όπου  $M$  είναι πρότυπο της Noether. Τότε ο  $f$  είναι ισομορφισμός.

Υπόδειξη:  $\text{Im } f \supseteq \text{Im } f^2 \supseteq \dots$  και  $\ker f \subseteq \ker f^2 \subseteq \dots$

4. Αν το  $M$  έχει συνθετική σειρά, ονομάζουμε το μήκος του  $M$  (συμβολικά  $\ell(M)$ ) το μήκος της. Είναι καλά ορισμένο από το θεώρημα Jordan-Hölder. Αν η ακολουθία  $R$ -προτύπων

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow \dots \rightarrow M_1 \rightarrow 0$$

είναι ακριβής και κάθε  $M_i$  έχει συνθετική σειρά, τότε  $\sum_{i=1}^n (-1)^i \ell(M_i) = 0$ .

5. Έστω  $N_1, N_2$  υποπρότυπα του  $N$  που έχει συνθετική σειρά τότε,
- $\ell(N_1 + N_2) = \ell(N_1) + \ell(N_2) - \ell(N_1 \cap N_2)$
  - $\ell(N / N_1 \cap N_2) = \ell(N / N_1) + \ell(N / N_2) - \ell(N / N_1 + N_2)$ .
6. Ποιό είναι το μήκος του  $M_2(\mathbb{H})$  ως  $M_2(\mathbb{H})$ -πρότυπο; Ως  $\mathbb{H}$ -πρότυπο; Ως  $\mathbb{C}$ -πρότυπο;
7. Έστω  $R$  μία  $\mathbb{C}$ -άλγεβρα και  $M$  ένα απλό  $R$ -πρότυπο με  $\dim_{\mathbb{C}} M < \infty$ . Αποδείξτε ότι:
- $\text{End}_R(M) = \mathbb{C}$
  - Η απεικόνιση  $R \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$ ,  $r \mapsto$  “πολλαπλασιασμός” με το  $r$ , είναι επί.
- Υπόδειξη: για το ii) εφαρμόστε το θεώρημα Wedderburn-Artin θεωρώντας το  $M$  ως πιστό  $R / \text{Ann} M$ -πρότυπο.
8. Αληθεύει ότι κάθε απλός δακτύλιος του Artin έχει πεπερασμένο πλήθος ιδεωδών;  
Υπόδειξη:  $R = M_2(\mathbb{R})$ .
9. Έστω  $R$  ένας δακτύλιος της Noether και  $a, b \in R$  τέτοια ώστε  $ab = 1$ . Αποδείξτε ότι  $ba = 1$ .
- Υπόδειξη: 1<sup>ος</sup> τρόπος:  $\text{Ann}(b) \subseteq \text{Ann}(b^2) \subseteq \dots$  όπου  $\text{Ann}(b) = \{r \in R \mid rb = 0\}$ .
- 2<sup>ος</sup> τρόπος: άσκηση 3 ii).

**10.** (Λήμμα του Fitting) Έστω  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο μήκους  $n$  (βλ. άσκηση 4). Αποδείξτε ότι για κάθε  $f \in \text{End}_R M$ , έχουμε  $M \simeq \text{Im}(f^n) \oplus \ker(f^n)$ .

**11.** Ένα πρότυπο λέγεται **μη αναλύσιμο** αν κάθε μη μηδενικό γνήσιο υποπρότυπό του δεν είναι ευθύς προσθετός του. Για παράδειγμα, το  $\mathbb{Z}$  είναι μη αναλύσιμο  $\mathbb{Z}$ -πρότυπο ενώ το  $\mathbb{Z}_6$  δεν είναι μη αναλύσιμο  $\mathbb{Z}$ -πρότυπο αφού  $\mathbb{Z}_6 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ .

Έστω  $M$  ένα μη αναλύσιμο  $R$ -πρότυπο με μήκος  $n$  (βλ. άσκηση 4) και  $f \in \text{End}_R M$ . Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

1. η  $f$  είναι 1-1
2. η  $f$  είναι επί
3. η  $f$  δεν είναι μηδενοδύναμη.

Υπόδειξη: άσκηση 11.

**12. i)** Αληθεύει ότι κάθε μη μηδενικό  $R$ -πρότυπο περιέχει γνήσιο μεγιστικό υποπρότυπο;

**ii)** Αληθεύει ότι κάθε μη μηδενικό  $R$ -πρότυπο περιέχει ελάχιστο μη μηδενικό μεγιστικό υποπρότυπο;

**13.** Δώστε ένα παράδειγμα δακτυλίου του Artin που δεν έχει απλό πιστό πρότυπο.

Υπόδειξη: Βλ Θεώρημα 3.1.3 και θεωρήστε το δακτύλιο  $\mathbb{Z}_m$  για κατάλληλο  $m$ .