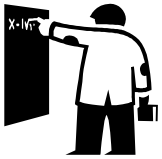
ΜΗ ΜΕΤΑΘΕΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ



ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΑΛΙΑΚΑΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
1999

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μια εισαγωγή στη 'Μη Μεταθετική Άλγεβρα' και απευθύνονται στους πρωτοετείς μεταπτυχιακούς φοιτητές.

Πρόκειται για πιστή μεταφορά της ύλης που έχω διδάξει τα τελευταία χρόνια στα πανεπιστήμια των Αθηνών και του Arkansas. Ο τρόπος ανάπτυξης της ύλης είχε γνώμονα την ταχεία λήψη συγκεκριμένων σημαντικών θεωρημάτων, πράγμα που αρμόζει κατά τη γνώμη μας στη διδασκαλία μέσα στην αίθουσα.

Από το πρώτο κιόλας κεφάλαιο δίνουμε έμφαση στο ρόλο που παίζουν τα πρότυπα στη μελέτη δακτυλίων. Αυτή η γραμμή ακολουθείται ευλαβικά μέχρι τέλος με την εξαίρεση του κεφαλαίου 4 όπου αναπτύσσεται η κλασσική προσέγγιση με τη χρήση ιδεωδών.

Στο κεφάλαιο 1 παρέχονται όλα τα προκαταρκτικά που αφορούν πρότυπα. Στο κεφάλαιο 2 αποδεικνύουμε το θεώρημα του Wedderburn που χαρακτηρίζει κατά πολλούς τρόπους τους ημιαπλούς δακτύλιους. Στο επόμενο κεφάλαιο μελετάμε πρότυπα του Artin και της Noether (και συνθετικές σειρές) και αποδεικνύουμε το θεώρημα των Wedderburn-Artin που χαρακτηρίζει τις απλές συνιστώσες ημιαπλών δακτυλίων. Η σχέση ημιαπλών δακτυλίων με το ριζικό του Jacobson εξετάζεται στο κεφάλαιο 4. Δείχνουμε επίσης οτι κάθε δακτύλιος του Artin είναι της Noether.

Το κεφάλαιο 5 ασχολείται με τανυστικά γινόμενα προκειμένου να χρησιμοποιηθούν αμέσως μετά. Το επόμενο κεφάλαιο ασχολείται με κεντρικές απλές άλγεβρες όπου αποδεικνύουμε -με τη βοήθεια του κεφαλαίου 3-δύο θεμελιώδη θεωρήματα, των Skolem-Noether και του Διπλού Κεντροποιητή. Στη συνέχεια αυτά εφαρμόζονται για να πάρουμε δύο άλλα σημαντικά αποτελέσματα, την ταξινόμηση των πραγματικών αλγεβρών διαίρεσης πεπερασμένης διάστασης (Frobenius) και το γεγονός ότι κάθε πεπερασμένος δακτύλιος διαίρεσης είναι μεταθετικός (Wedderburn).

Στο κεφάλαιο 7 χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2 για να αναπτύξουμε τα πλέον απαραίτητα που αφορούν αναπαραστάσεις και χαρακτήρες (πάνω από το **C**) πεπερασμένων ομάδων, ώστε στο επόμενο κεφάλαιο να αποδείξουμε το φημισμένο θεώρημα του Burnside για την επιλυσιμότητα ομάδων τάξης $p^a q^b$,όπου p,q είναι πρώτοι. Στο κεφάλαιο 9 εισαγάγουμε τους επαγόμενους χαρακτήρες που χρησιμοποιούνται για να αποδείξουμε το θεώρημα των συμπληρωμάτων του Frobenius. Τέλος στο κεφάλαιο 10 προσδιορίζουμε τους ανάγωγους χαρακτήρες των συμμετρικών ομάδων εφαρμόζοντας προηγούμενα αποτελέσματα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΠΡΟΤΥΠΑ
1.1 Βασικές Έννοιες
1.2 Άθροισμα και Γινόμενο Προτύπων, Ακριβείς Ακολουθίες
1.3 Ελεύθερα και Προβολικά Πρότυπα
1.4 Λήμμα του Zorn
1.5 Δακτύλιοι Διαίρεσης και Πρότυπα
Ασκήσεις

2. ΗΜΙΑΠΛΟΙ ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ
2.1 Θεώρημα του Wedderburn
2.2 Εφαρμογή: Θεώρημα του Maschke
2.3 Παρατηρήσεις στο Θεώρημα του Wedderburn
Ασκήσεις

3. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΛΥΣΙΔΩΝ
3.1 Πρότυπα της Noether και πρότυπα του Artin
3.2 Συνθετικές Σειρές
3.3 Απλοί Δακτύλιοι του Artin
Ασκήσεις

4. ΡΙΖΙΚΟ ΤΟΥ JACOBSON
4.1 Δακτύλιοι του Artin
4.2 Ριζικό του Jacobson
Ασκήσεις

5. ΤΑΝΥΣΤΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ
5.1 Ορισμοί
5.2 Ιδιότητες
Ασκήσεις

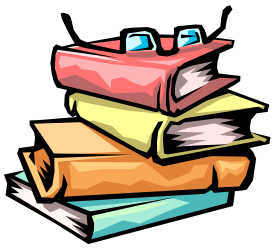
6. ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΑΠΛΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ
6.1 Θεώρημα Skolem-Noether
6.2 Θεώρημα Διπλού Κεντροποιητή
6.3 Εφαρμογές
Ασκήσεις

7. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΜΑΔΩΝ Ι
7.1 Αναπαραστάσεις
7.2 Χαρακτήρες
7.3 Σχέσεις Ορθογωνιότητας
Ασκήσεις

8. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BURNSIDE
8.1 Αλγεβρικοί Ακέραιοι
8.2 Θεώρημα του Burnside
Ασκήσεις

9. ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΙΙ
9.1 Επαγόμενοι Χαρακτήρες
9.2 Θεώρημα του Frobenius
Ασκήσεις

10. ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΜΑΔΩΝ
10.1 Συμμετρικές Συναρτήσεις
10.2 Συαρτήσεις του Schur
10.3 Ανάγωγοι Χαρακτήρες της S_n



ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Curtis,C. and Reiner, I., *Methods of Representation Theory*, Vol. I, Wiley,1981. (Ολοκληρωμένο σύγγραμα, κλασσικό).
2. Farb,B. and Dennis R.K., *Noncommutative Algebra*, Springer,1993. (Ενδιαφέρουσα επιλογή ύλης, που έχει επηρεάσει τις παρούσες σημειώσεις. Προσέξτε όμως τα λάθη, που δεν περιορίζονται σε τυπογραφικά, όπως για παράδειγμα στις σελίδες 171,γραμμή 9, και 178, γραμμή 4).
3. Fulton,W. and Harris,J., *Representation Theory: a first course*, Springer,1991.(Περιεκτικό με πολλά ουσιαστικά παραδείγματα. Δείνει έμφαση στις ειδικές περιπτώσεις παρά στη γενική θεωρία).
4. Herstein,I.N., *Noncommutative Rings*,Carus Math Monographs,1968. (Κλασσικό).
5. Hungerford, Th., *Algebra*, Springer,1989
6. Jacobson,N., *Basic Algebra*,Vol.I&II, Freeman and Co, 1980,1985.
7. James,G. and Liebeck, M., *Representations and Characters of Groups*, Cambridge Univ Press, 1995. (Στοιχειώδες αλλά ειδιαίτερα καλογραμμένο βιβλίο που περιέχει πληθώρα παραδειγμάτων).
8. Isaacs,I.M., *Algebra, A Graduate Course*, Brooks&Cole,1994.
9. Isaacs,I.M., *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press,1976.(Καλογραμμένο και περιεκτικό).
10. Macdonald,I.G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second Edition, Claredon Press,1995.(Κασσικό σύγγραμμα. Από εδώ έχουμε δανιστεί την κατασκευή των αναγώγων χαρακτήρων των συμμετρικών ομάδων που δίνουμε στο κεφάλαιο 10).
11. Pierce,R.S., *Associative Algebras*, Springer, 1982. (Μία από τις καθιερωμένες πηγές του κλάδου).
12. Rowen,L., *Ring Theory*.Vol I&II, Academic Press,1988. (Περιέχει πολλές πληροφορίες).
13. Serre,J.P., *Linear Representations of Finite Groups*, Springer,1977. (Κλασσικό).

Στα Ελληνικά υπάρχουν:

1. Αντωνιάδης,Ι.Α., *Θεωρία Παραστάσεων Πεπερασμένων Ομάδων*, Ευρωπαϊκό Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Erasmus, 1998
2. Δεριζιώτης,Δ,. *Αναπαραστάσεις και Χαρακτήρες Πεπερασμένων Ομάδων* Ευρωπαϊκό Διαπανεπιστημιακό Πρόγραμμα Erasmus, 1996.