

1.

- Να βρεθεί η ανάλυση του $-1+3i$ σε γινόμενο αναγώνων στοιχείων στο $\mathbb{Z}[i]$.
- Έστω $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$, όπου a^2+b^2 είναι πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}[i]/(a+bi)$ είναι πεπερασμένο σώμα.
- Έστω M ένα R -πρότυπο και $f: M \rightarrow M$ ένας ομομορφισμός τέτοιος ώστε $f^2 = -f$. Αποδείξτε ότι $M = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ (εσωτερικό ευθύ άθροισμα)

Λύση

- Επειδή $\phi(-1+3i)=10$, αναζητούμε στοιχεία $a+bi$ με $\phi(a+bi)=2,5$. Παρατηρούμε ότι $-1+3i=(1+i)(1+2i)$. Αφού $\phi(-1+i)=2, \phi(1+2i)=5$ είναι πρώτοι αριθμοί, τα στοιχεία $1+i, 1+2i$ είναι ανάγωγα.
- Από την υπόθεση, το $a+bi$ είναι ανάγωγο στοιχείο του $\mathbb{Z}[i]$. Επειδή ο $\mathbb{Z}[i]$ είναι ΠΚΙ, έπεται ότι το $\mathbb{Z}[i]/(a+bi)$ είναι σώμα. Είναι πεπερασμένο γιατί κάθε στοιχείο έχει αντιπρόσωπο $x+yi$ όπου $x^2+y^2 < a^2+b^2$ και το πλήθος των λύσεων των Διοφαντικών εξισώσεων $x^2+y^2=k$, όπου $k=0,1,\dots,a^2+b^2-1$ είναι πεπερασμένο.
- Έστω $m \in M$. Από τη σχέση $m=(m+f(m))-f(m)$ έπεται ότι $M \subseteq \ker f + \operatorname{Im} f$ και άρα $M = \ker f + \operatorname{Im} f$. Αν $x \in \ker f, x \in \operatorname{Im} f$, τότε $f(x)=0, x=f(y)$ για κάποιο $y \in M$. Άρα $0=f^2(y)=-y \Rightarrow x=0$.

2. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές.

- Έστω R μια ΠΜΠ και $a, b \in R$ δυο στοιχεία που δεν έχουν κοινό ανάγωγο διαιρέτη. Τότε υπάρχουν $r, s \in R$ τέτοια ώστε $ra+sb=1$.
- Έστω R μια ΠΚΙ και F ένα ελεύθερο R -πρότυπο πεπερασμένης τάξης. Τότε κάθε επιμορφισμός $f: F \rightarrow F$ είναι ισομορφισμός.
- Έστω R μια ΠΚΙ και F ένα ελεύθερο R -πρότυπο. Τότε κάθε μονομορφισμός $f: F \rightarrow F$ είναι ισομορφισμός.

Λύση

- Λάθος. Για παράδειγμα, έστω $R=\mathbb{Z}[x], a=x, b=2$. Αν υπήρχαν $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ με $xf(x)+2g(x)=1$, τότε θέτοντας $x=0$ έχουμε άτοπο.
- Σωστό. Από γνωστή πρόταση έχουμε, $F = \ker f \oplus N$, όπου $N \leq F, N \simeq F$. Το $\ker f$ είναι ελεύθερο, γιατί είναι υποπρότυπο ελεύθερου πεπερασμένης τάξης πάνω από ΠΚΙ. Ισχύει $rk F = rk \ker f + rk N \Rightarrow \ker f = \{0\}$.
- Λάθος. Αντιπαράδειγμα $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(a)=2a$.

3. Έστω R μια ΠΚΙ και $p, q \in R$ μη συντροφικά ανάγωγα στοιχεία. Έστω M ένα R -πρότυπο τέτοιο ώστε $\operatorname{ann} M = (pq)$. Αποδείξτε τα εξής

- $M = pM + qM$.
- $pM \cap qM = \{0\}$
- $\operatorname{ann}(pM) = (q)$.

Λύση

Βλέπε σημειώσεις. Αποτελεί ειδική περίπτωση ενός αποτελέσματος που αποδείξαμε στην τάξη (που οδηγεί στην απόδειξη του 3^{ου} Κυρίου Θεωρήματος)

4.

- Έστω p ένας πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $p^2 - 1$ κλάσεις συζυγίας της ομάδας $GL_2(\mathbb{Z}_p) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A \neq 0\}$.
- Να ταξινομηθούν ως προς ομοιότητα οι πίνακες $A \in M_5(\mathbb{C})$ με ελάχιστο πολυώνυμο το $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-3)$.
- Να βρεθεί ένα παράδειγμα ενός μη διαγωνίσιμου πίνακα $A \in M_4(\mathbb{Q})$ τέτοιου ώστε $A^4 = A$.

Λύση

a. Με χρήση της ρητής κανονικής μορφής πινάκων αποδεικνύεται ότι υπάρχουν $p^2 + p + 1$ κλάσεις ομοιότητας πινάκων στο $M_2(\mathbb{Z}_p)$ (βλέπε σημειώσεις).

Απαιτώντας το ελάχιστο πολυώνυμο να έχει μη μηδενικό σταθερό όρο βρίσκουμε $p^2 - 1$ κλάσεις ομοιότητας που είναι οι ζητούμενες κλάσεις συζυγίας.

b. Άμεση εφαρμογή κανονικής μορφής Jordan. Απάντηση: Δίνεται η κανονική μορφή Jordan και δίπλα η ακολουθία στοιχειωδών διαιρετών για κάθε ιδιοτιμή.

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}, (x-2)^2 \mid (x-2)^2, x-3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & 2 & & \\ & 1 & 2 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}, x-2 \mid x-2 \mid (x-2)^2, x-3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}, x-2 \mid (x-2)^2, x-3 \mid x-3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & & & \\ 1 & 2 & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}, (x-2)^2, x-3 \mid x-3 \mid x-3$$

c. Παρατηρώντας ότι $0 = A^4 - A = A(A-I)(A^2 + A + I)$, έχουμε το παράδειγμα (ρητή

κανονική μορφή πινάκων) $A = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & 1 & -1 & \end{pmatrix}$, που έχει ελάχιστο πολυώνυμο

$x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1)$. Αυτό έχει έναν ανάγωγο παράγοντα δευτέρου βαθμού (υπεράνω του $\mathbb{Q}$) και συνεπώς ο A δεν είναι διαγωνίσιμος (στο $M_4(\mathbb{Q})$).

5.

- a. Αποδείξτε ότι η αβελιανή ομάδα $G = \langle a, b, c \mid 2a + 2b + 4c = 4a + 10b + 12c = 0 \rangle$ δεν είναι ισόμορφη με τη $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.
- b. Να ταξινομηθούν οι αβελιανές ομάδες G τέτοιες ώστε $|G| = 72$ και $12G = \{0\}$.

Λύση

a. Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και στηλών βρίσκουμε την κανονική μορφή

$$\text{Smith} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ του πίνακα } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 10 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}. \text{ Άρα } G \simeq \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z} \oplus 0} \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}. \text{ Αυτή}$$

δεν είναι ισόμορφη με τη $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$, γιατί πχ έχουν διαφορετικό αριθμό στοιχείων τάξης 2 (φυσικά μπορεί κανείς να επικαλεστεί το 2^ο Κύριο Θεώρημα εδώ).

b. Οι ανά δύο μη ισόμορφες αβελιανές ομάδες τάξης $72 = 2^3 3^2$ είναι (3^ο Κύριο Θεώρημα)

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3,$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9, \quad \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9$$

οπότε η απάντηση είναι

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3.$$