

1.
  - a. Να βρεθεί η ανάλυση του  $-1+3i$  σε γινόμενο αναγώγων στοιχείων στο  $\mathbb{Z}[i]$ .
  - b. Έστω  $a+bi \in \mathbb{Z}[i]$ , όπου  $a^2+b^2$  είναι πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι ο δακτύλιος  $\mathbb{Z}[i]/(a+bi)$  είναι πεπερασμένο σώμα.
  - c. Έστω  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο και  $f : M \rightarrow M$  ένας ομομορφισμός τέτοιος ώστε  $f^2 = -f$ . Αποδείξτε ότι  $M = \ker f \oplus \text{Im } f$  (εσωτερικό ευθύ άθροισμα)
  
2. Εξετάστε ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι σωστές.
  - a. Έστω  $R$  μια ΠΜΠ και  $a, b \in R$  δυο στοιχεία που δεν έχουν κοινό ανάγωγο διαιρέτη. Τότε υπάρχουν  $r, s \in R$  τέτοια ώστε  $ra + sb = 1$ .
  - b. Έστω  $R$  μια ΠΚΙ και  $F$  ένα ελεύθερο  $R$ -πρότυπο πεπερασμένης τάξης. Τότε κάθε επιμορφισμός  $f : F \rightarrow F$  είναι ισομορφισμός.
  - c. Έστω  $R$  μια ΠΚΙ και  $F$  ένα ελεύθερο  $R$ -πρότυπο. Τότε κάθε μονομορφισμός  $f : F \rightarrow F$  είναι ισομορφισμός.
  
3. Έστω  $R$  μια ΠΚΙ και  $p, q \in R$  μη συντροφικά ανάγωγα στοιχεία. Έστω  $M$  ένα  $R$ -πρότυπο τέτοιο ώστε  $\text{ann}M = (pq)$ . Αποδείξτε τα εξής
  - a.  $M = pM + qM$ .
  - b.  $pM \cap qM = \{0\}$
  - c.  $\text{ann}(pM) = (q)$ .
  
4.
  - a. Έστω  $p$  ένας πρώτος αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχουν  $p^2 - 1$  κλάσεις συζυγίας της ομάδας  $GL_2(\mathbb{Z}_p) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A \neq 0\}$ .
  - b. Να ταξινομηθούν ως προς ομοιότητα οι πίνακες  $A \in M_5(\mathbb{C})$  με ελάχιστο πολυώνυμο το  $m_A(x) = (x-2)^2(x-3)$ .
  - c. Να βρεθεί ένα παράδειγμα ενός μη διαγωνίσιμου πίνακα  $A \in M_4(\mathbb{Q})$  τέτοιου ώστε  $A^4 = A$ .
  
5.
  - a. Αποδείξτε ότι η αβελιανή ομάδα  $G = \langle a, b, c \mid 2a + 2b + 4c = 4a + 10b + 12c = 0 \rangle$  δεν είναι ισόμορφη με τη  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ .
  - b. Να ταξινομηθούν οι αβελιανές ομάδες  $G$  τέτοιες ώστε  $|G| = 72$  και  $12G = \{0\}$ .

Σημείωση: ΠΚΙ = περιοχή κυρίων ιδεωδών, ΠΜΠ = περιοχή μοναδικής παραγοντοποίησης

Απαντήστε σε 4 από τα 5 θέματα. Καθένα από τα 5 θέματα είναι αξίζει 2.5 μονάδες.  
Καλή επιτυχία