

Δακτύλιοι και Πρότυπα
Ασκήσεις 5

Οι επόμενες ασκήσεις αναφέρονται στην τελευταία ενότητα του μαθήματος, δηλαδή στην κανονική μορφή Jordan και στη ρητή κανονική μορφή πινάκων.

1. Εξετάστε αν οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι

υπεράνω του $\mathbb{C}$.

2. Έστω p πρώτος αριθμός. Στο μάθημα υπολογίσαμε το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της ομάδας $GL_2(\mathbb{Z}_p) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A \neq 0\}$ με τη βοήθεια της ρητής κανονικής μορφής πινάκων.

- a. Βρείτε το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της ομάδας

$$SL_2(\mathbb{Z}_p) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_p) \mid \det A = 1\}.$$

- b. Δείξτε ότι αν $A_1, \dots, A_5 \in M_2(\mathbb{Z}_3)$ και $\det A_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, 5$, τότε τουλάχιστον δυο από τους A_i είναι όμοιοι.

3. α) Έστω $A, B \in M_2(k)$. Εξετάστε αν αληθεύει η πρόταση: A, B είναι όμοιοι αν και μόνο αν $m_A(x) = m_B(x)$.

β) Βρείτε δυο $A, B \in M_4(\mathbb{C})$ που δεν είναι όμοιοι αλλά $m_A(x) = m_B(x)$ και $\chi_A(x) = \chi_B(x)$.

4. Έστω $A \in M_4(\mathbb{C})$ με $m_A = x(x-1)$. Βρείτε τις δυνατές κανονικές μορφές Jordan του A και για κάθε περίπτωση δώστε την αντίστοιχη ρητή κανονική μορφή.

5. α) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $A \in M_3(\mathbb{Q})$ τέτοιος ώστε $A^8 = I$ και $A^4 \neq I$.

β) Να ταξινομηθούν ως προς ομοιότητα όλοι οι $A \in M_5(\mathbb{Q})$ τέτοιοι ώστε $A^8 = I$ και $A^4 \neq I$.

Προθεσμία: 25/1

Σημείωση: Η συνεργασία φοιτητών στην επίλυση των ασκήσεων επιτρέπεται. Σε περίπτωση που έχετε λάβει βοήθεια, αυτό θα πρέπει να αναγράφεται στην αρχή του γραπτού σας με μια δήλωση όπως 'στην άσκηση τάδε είχα βοήθεια από τον δέινα'.